ФМИ УКА 2019 - Избрани теореми

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

27 май 2019

6. Ньотерови и артинови пръстени (от [2])

Теорема 7. *Нека A е комутативен пръстен с единица. Един A-модул M притежава композиционен ред тогава и само тогава, когато M е едновременно ньотеров и артинов A-модул.*

Доказателство. ($\Longrightarrow$) Ако M притежава композиционен ред, то всяка строго монотонна редица от подмодули има дължина, ненадминаваща $l(M)$. Следователно произволна монотонна редица от подмодули на M има само краен брой различни елементи и се стабилизира след краен брой стъпки. Така M е и ньотеров, и артинов модул.

($\Longleftarrow$) Нека M е едновременно ньотеров и артинов. Полагаме $M_0 \coloneqq M$. Построяваме строго намаляваща редица от подмодули като на всяка стъпка или $M_i = \langle 0 \rangle$, или M_i има собствени подмодули, и понеже M_i е ньотеров, можем да изберем максимален по включване собствен подмодул M_{i+1}. Тази редица е строго намаляваща и тъй като модулът M е и артинов, редицата има крайна дължина n.

За всяко $i = 1, \ldots, n$ Фактор-модулите M_{i-1}/M_i са прости, тъй като M_i е максимален по включване в M_{i-1}. Тогава

$$\langle 0 \rangle = \subsetneq M_n \subsetneq \ldots \subsetneq M_0 \subsetneq M$$

е композиционен ред за M. $\square$

Теорема 8. *За линейно пространство V над поле k следните условия са еквивалентни:*

1. *V е крайномерно линейно пространство над k*
2. *V има композиционен ред*
3. *V е ньотеров k-модул*
4. *V е артинов k-модул*

Доказателство. Импликациите $2 \implies 3$ и $2 \implies 4$ следват директно от теорема 7.

$1 \implies 2$ Нека V е крайномерно линейно пространство и нека $x_1, \ldots, x_n$ е базис на V. Тогава

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \operatorname{span}\{x_1\} \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = V,$$

е композиционен ред на V, тъй като фактор-модулите $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} / \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cong \operatorname{span} x_n \cong k$ са прости, понеже k е поле. $3 \implies 1$ Нека V е ньотеров k-модул. Допускаме, че V е безкрайномерно линейно пространство и нека $x_1, x_2, \ldots$ е безкрайна редица от линейно независими елементи. Тогава редицата от подпространства

$$\operatorname{span}\{x_1\} \subsetneq \operatorname{span}\{x_1, x_2\} \subsetneq \operatorname{span}\{x_1, x_2, x_3\} \subsetneq \ldots$$

е строго растяща и не се стабилизира. Следователно V не е ньотеров k-модул. Полученото противоречие доказва импликацията.

$4 \implies 1$ Нека V е артинов k-модул. Допускаме, че V е безкрайномерно линейно пространство и нека $x_1, x_2, \ldots$ е безкрайна редица от линейно независими елементи. Тогава редицата от подпространства

$$\operatorname{span}\{x_i \mid i > 0\} \supsetneq \operatorname{span}\{x_i \mid i > 1\} \supsetneq \operatorname{span}\{x_i \mid i > 2\} \supsetneq \ldots$$

е строго намаляваща и не се стабилизира. Следователно V не е артинов k-модул. Полученото противоречие доказва импликацията. $\square$

Теорема 9. *Нека A е комутативен пръстен с единица, а $M_1, \ldots, M_k$ са максимални идеали в A, които не са непременно различни. Нека произведението им $M_1 \ldots M_k = \langle 0 \rangle$. Тогава A е ньотеров пръстен точно когато A е артинов пръстен.*

Доказателство. Полагаме $M_0 \coloneqq A =: N_0$, $N_i \coloneqq M_1 \ldots M_i$ за $i = 1, \ldots, k$ и разглеждаме редицата

$$N_k \subseteq N_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq N_0$$

от идеали на A.

Имаме

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}(N_{i-1}/N_i) = \operatorname{Ann}(N_{i-1}/(N_{i-1}M_i)) = \operatorname{Ann}(\{x + N_{i-1}M_i \mid x \in N_{i-1}\}) = \\ = \{a \in A \mid a(N_{i-1}M_i + N_{i-1}) \subseteq N_{i-1}M_i\} = \{a \in A \mid aN_{i-1} \subseteq N_{i-1}M_i\} \subseteq M_i,\end{aligned}$$

откъдето следва, че за $i > 0$ идеалът N_{i-1}/N_i, разгледан като A-модул, е и линейно пространство над полето A/M_i. От теорема 8 следва, че N_{i-1}/N_i е ньотеров A/M_i-модул $\iff$ N_{i-1}/N_i е артинов A/M_i-модул.

Понеже подмодулите на N_{i-1}/N_i като A/M_i-модул и като A-модул съвпадат, то получаваме, че N_{i-1}/N_i е ньотеров A-модул $\iff$ N_{i-1}/N_i е артинов A-модул.

Допускаме, че A е ньотеров пръстен, тоест ньотеров модул над себе си. Тогава подмодулите $M_0, \ldots, M_k, N_0, \ldots, N_k$, а оттам и фактор-модулите N_{i-1}/N_i също са ньотерови. Но N_{k-1}/N_k и $N_k = \langle 0 \rangle$ са артинови, следователно N_{k-1} също е артинов. По индукция получаваме, че $N_0 = A$ също е артинов.

Обратната посока на теоремата се доказва аналогично. $\square$

7. Ньотерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса (от [2])

Теорема 10 (Хилберт, за базиса)**.** *Ако A е ньотеров пръстен, то полиномиалният пръстен $A[x]$ също е ньотеров.*

Доказателство. Нека $I \lhd A[x]$ е произволен идеал в $A[x]$. Ще докажем, че I е крайнопороден.

Разглеждаме множеството $\operatorname{lc}(I) \subseteq A$ от старшите коефициенти на полиномите в I. Тъй като I е идеал в $A[x]$, то

- Ако $\operatorname{lc}(f), \operatorname{lc}(g) \in \operatorname{lc}(I)$ и $d = \max\{\deg f, \deg g\}$, то $\operatorname{lc}(f(x)x^{d-\deg f} + g(x)x^{d-\deg g}) = \operatorname{lc}(f) + \operatorname{lc}(g)$.
- Ако $\operatorname{lc}(f), \operatorname{lc}(g) \in \operatorname{lc}(I)$, то $\operatorname{lc}(fg) = \operatorname{lc}(f)\operatorname{lc}(g)$,
- Ако $\operatorname{lc}(f) \in \operatorname{lc}(I)$ и $a \in A$, то $\operatorname{lc}(af) = a\operatorname{lc}(f)$,

следователно $\mathrm{lc}(I)$ е идеал в A.

Понеже A е ньотеров, $\mathrm{lc}(I)$ е крайнопороден. Нека елементите $a_1, \dots, a_n \in A$ пораждат $\mathrm{lc}(I)$, т.е. $\mathrm{lc}(I) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, и нека полиномите $t_1, \dots, t_n \in I$ имат за старши коефициенти съответно $a_1, \dots, a_n$. Полагаме $d \coloneqq \max\{\deg t_1, \dots, \deg t_n\}$ и дефинираме крайнопородените A-модули

- $X = A + Ax + Ax^2 + \dots + Ax^{d-1}$
- Идеалът $T \lhd A[x]$, породен от $t_1, \dots, t_n$

Дефинираме оператора $\Gamma : A[x] \mapsto T$,

$$\Gamma(f) \coloneqq \begin{cases} 0, & \deg f < d \\ \sum_{k=1}^{n} u_k t_k x^{\deg f - \deg t_k}, & \deg f \geq d, \end{cases}$$

където $u_1, \dots, u_n$ са коефициенти от разлагането на старшия коефициент на f, т.е. $\mathrm{lc}(f) = \sum_{k=1}^{n} u_k a_k$.

Индуктивно дефинираме и спомагателните оператори $\Gamma^k : A[x] \mapsto T$,

$$\Gamma^k(f) \coloneqq \begin{cases} G(f) & k = 1, \\ \Gamma^{k-1}(f - G(f)) & k > 1. \end{cases}$$

Нека $f \in I$. Дефинираме $g \coloneqq \Gamma^{\deg f - d + 1}(f) \in T$. Тогава $\deg f - g < d$, следователно $f - g \in X$. Така представихме произволен полином $f \in I$ като сума на $g \in T$ и $f - g \in X$, т.е. $I = T + X \cap I$.

A-модулът X е крайнопороден, следователно той е ньотеров, а оттам подмодулът му $X \cap I$ също е крайнопороден. Нека елементите $\xi_1, \dots, \xi_m$ пораждат $X \cap I$.

Тогава I, разгледан като идеал на $A[x]$, е крайнопороден, тъй като

$$I = T + X \cap I = \langle t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_m \rangle.$$

Понеже за произволен идеал $I \lhd A[x]$ доказахме, че е крайнопороден, то заключаваме, че $A[x]$ е ньотеров пръстен. $\square$

Ньотерови факторизационни области (от [1])

Твърдение 3.

1. *Ако A е ньотерова област, то всеки елемент $a \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$ се разлага в произведение на краен брой неразложими елементи $p_i \in A$, т.е. $a = p_1 \dots p_n$.*
2. *Ньотерова област A е област с еднозначно разлагане (ОЕР) точно когато за всеки неразложим $p \in A$ идеалът $pA \lhd A$ е прост.*

Доказателство.

1. Допускаме противното. Нека $a \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$ и за всяко представяне $a = p_1 a_1$, където $p_1, a_1 \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$, поне един от елементите p_1 или a_1 не е неразложим. Нека за определеност a_1 не е неразложим. Тогава аналогично a_1 се представя като произведение $a_1 = p_2 a_2$, където $p_2, a_2 \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$ и a_2 не е неразложим.

   Така образуваме безкрайна строго растяща редица от идеали

   $$aA \subsetneq a_1 A \subsetneq a_2 A \subsetneq \dots$$

   Но това противоречи с условието, че A е ньотеров. Това доказва първата част на твърдението.

2. ($\Longrightarrow$) Нека A е област с еднозначно разлагане, нека $p \in A$ е неразложим. Ако $ab \in pA$, съществува $r \in A$ с $ab = rp$. Нека са дадени разлаганията

$$a = p_1 \dots p_k$$
$$b = p_{k+1} \dots p_n$$
$$r = q_1 \dots q_m,$$

където $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$ са неразложими.

Тъй като A е ОЕР, то имаме равенството

$$ab = p_1 \dots p_n = pq_1 \dots q_m = pr,$$

откъдето следва, че $m < n$ и $p = up_i$ за някои $i \in 1, \dots, n$ и $u \in A^*$. Ако $i \leq k$, то $a \in p_k A = pA$, иначе $b \in p_k A = pA$. Следователно идеалът pA е прост.

($\Longleftarrow$) Нека всеки неразложим елемент $p \in A$ поражда прост идеал $pA \lhd A$. Нека $a \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$ има две разлагания

$$p_1 \dots p_n = a = q_1 \dots q_m,$$

където $n \leq m$. Тъй като идеалът $p_1 A$ е прост, то от $q_1 \dots q_m \in p_1 A$ следва, че поне едно от $q_1, \dots, q_m$ принадлежи на $p_1 A$. Нека за определеност това е q_1. Тогава $\exists r_1 \in A : p_1 = r_1 q_1$. Тъй като p_1 и q_1 са неразложими, то $r_1 \in A^*$ и

$$p_1(p_2 \dots p_n - r_1 q_2 \dots q_m) = 0$$

и тъй като A е област, имаме $p_2 \dots p_n = r_1 q_2 \dots q_m$. По индукция получаваме равенството $p_n = r_1 \dots r_n q_n \dots q_m$. Но тъй като p_n е неразложим, то $n = m$ и

$$\forall k \in 1, \dots, n : p_k = q_k (r_1 \dots r_k) \text{ за някои } r_k \in A^*.$$

Така показахме, че A е ОЕР.

□

Твърдение 11. *Всяка област на главни идеали (ОГИ) е област с еднозначно разлагане (ОЕР).*

Доказателство. ($\Longrightarrow$) Нека A е ОГИ и нека $p \in A$ е неразложим. За да докажем, че A е ОЕР, ще докажем, че pA е прост идеал и ще приложим твърдение 3.

Допускаме противното. Нека $ab \in pA$, но $a \notin pA$. Нека s е пораждащ на идеала $aA + pA$. Тогава $pA \subsetneq sA = aA + pA$ и значи съществува $r \in A$, такъв че $p = sr$. Но тъй като p е неразложим, трябва $s \in A^*$ или $r \in A^*$.

Ако $r \in A^*$, то $s = pr^{-1}$, откъдето следва $s \in pA$ и $pA = sA = aA + pA$, което противоречи на допускането, че $a \notin pA$.

Ако $s \in A^*$, то $sA = A$ и по тъждеството на Безу съществуват $u, v \in A : au + pv = 1$. Но тогава

$$bau + bpv = b,$$

където $bau \in pA$ и $bpv \in pA$, следователно $b \in pA$ и pA е прост. □

Теорема 13. *Ако A е ньотерова област с еднозначно разлагане, то $A[x]$ е ньотерова област с еднозначно разлагане.*

Доказателство. Нека A е ньотерова ОЕР и нека $p \in A[x]$ е неразложим. От теоремата на Хилберт за базиса следва, че $A[x]$ е ньотерова област. Ще покажем идеалът $pA[x]$ е прост и ще приложим твърдение 3.

Нека Q е полето от частни на A. Ще използваме наготово следните резултати:

(а) За поле Q полиномиалният пръстен $Q[x]$ е област на главни идеали

(б) Всеки полином $p \in Q[x]$ има представяне $p(x) = \frac{a}{b}q(x)$, където $a, b \in A$, $b \neq 0$ и полиномът $q \in A[x]$ е примитивен

(в) Ако за примитивен полином $q \in A[x]$ и за някои взаимно прости $a, b \in A$, $b \neq 0$ имаме $\frac{a}{b}q(x) \in A[x]$, то $b \in A^*$

(г) Всеки неразложим полином над област с еднозначно разлагане е примитивен

Първо ще докажем, че полиномът p е неразложим над $Q[x]$. Наистина, нека $p = fg$, където $f, g \in Q[x]$. Тогава според (б) съществуват $a, b, c, d \in A$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ и примитивно полиноми $f, g \in A[x]$, така че $f = \frac{a}{b}\hat{f}$ и $g = \frac{c}{d}\hat{g}$. По лемата на Гаус $fg \in A[x]$ също е примитивен полином.

Нека $s, t \in A$ са взаимно прости и $\frac{s}{t} = \frac{ac}{bd}$. Тъй като $p \in A[x]$ и $fg \in A[x]$, то според (в) от $p(x) = \frac{s}{t}[\hat{f}(x)\hat{g}(x)]$ следва $t \in A^*$ и $p(x)$ се разлага в произведение $p(x) = [st^{-1}\hat{f}(x)]\hat{g}(x)$ над $A[x]$. При това $\deg f = \deg \hat{f}$ и $\deg g = \deg \hat{g}$. Но $p(x)$ е неразложим над $A[x]$, следователно той е неразложим и над $Q[x]$.

Тъй като по (б) $Q[x]$ е ньотерова ОГИ, по твърдение 11 тя е и ОЕР. От твърдение 3 следва, че идеалът $pQ[x] \lhd Q[x]$ е прост. Ще докажем, че $pA[x]$ е прост и ще приложим отново твърдение 3.

Нека $fg \in pA[x]$. Тъй като $fg \in pQ[x]$ и $pQ[x]$ е прост, получаваме, че $f \in pQ[x]$ или $g \in pQ[x]$. Нека за определеност $f \in pQ[x]$. Тогава съществува полином $h \in Q[x]$, за който $f = ph$.

От (б) получаваме $h(x) = \frac{a}{b}\hat{h}(x)$, където $a, b \in A$, $b \neq 0$ са взаимно прости и полиномът $\hat{h} \in A[x]$ е примитивен. Тъй като $p(x)$ е неразложим, по (г) той е и примитивен и по лемата на Гаус произведението $p(x)\hat{h}(x) \in A[x]$ също е примитивен полином. Тъй като $f(x) \in A[x]$ и $p(x)\hat{h}(x) \in A[x]$, то по (в) имаме $b \in A^*$. Следователно $h(x) = ab^{-1}\hat{h}(x) \in A[x]$, $f(x) = p(x)h(x) \in pA[x]$ и идеалът $pA[x]$ е прост.

Така установихме, че $A[x]$ е ньотерова област с еднозначно разлагане. □

Литература

[1] Азнив Каспарян. *Ньотерови факторизационни области.* 2019.

[2] Борис Коцев и Пламен Сидеров. *Комутативна алгебра.* Веди, 2016. ISBN: 9789548857383.