01.03.2018 Стохастични числени методи и симулации (лекции)

$$I = \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx$$

$x \in \mathcal{U}[0,1]$

$f(x)$ - сл. вел.

$f(x_1), \ldots, f(x_n)$ - генерирани стойности

$$\mathbb{E}(f) = I \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$\int_G \underbrace{\left[S_G f(x) \right]}_{f_1(x)} \frac{1}{S_G}\,dx$$

$p(x) = \frac{1}{S_G}$ - ф.в. на x

$$\int_G \underbrace{\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]}_{f_1(x)} g(x)\,dx$$

$g(x)$ - плътност на x

Сходимост - $\delta N^{-\frac{1}{2}}$

Ускоряване на сходимостта:

* Намаляване на дисперсията
* Смяна на сл. редица

Генератори:

* QRBG - физически устройства - не са ефикасни
* Псевдослучайни генератори
  * Фон Нойман - първи генератор

* Конгруентни генератори - използва се модулна аритм.
  * линейни - $x_{i+1} = (a x_i + c) \bmod m$

* генератори с изместени регистри: $x_i = x_{i-r_1} + \dots + x_{i-r_m} \pmod m$

* генератори на Фибоначи
  * мултипликативни $x_i = x_{i-1} x_{i-s} \pmod m$

* комбинирани генератори
* инверсни генератори

Паралелно пресмятане:

* $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l}\}$

* $\{x_i, x_{i+l}, \dots, x_{i+kl}\}$ - жабешки скок

15.03.2018 Симулация на дискретна сл. вел.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{X_j}(\{x_i\}) \to p_i$$

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{F})$ с вероятности

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$p_i = P\{\xi = x_i\} = ?$

$0 \;\Delta_1 \dots \Delta_i \dots \Delta_n \; 1 \qquad |\Delta_i| = p_i$

<u>Т-ма 1</u> Сл. вел. ξ, определена от

$\underbrace{\xi = x_i \text{ за } \gamma \in \Delta_i}$, има разпр. ~~вероятностите~~ (1) (2)

Нека γ е реализация на $U(0,1)$

$\xi = x_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{i-1} p_j < \gamma < \sum_{j=1}^{i} p_j$

$\gamma < p_1 \Rightarrow \xi = x_1$

$\gamma \geq p_1;\ \gamma < p_1 + p_2 \Rightarrow \xi = x_2$

Обобщаване за сл. вел. с изброимо много стойности:

$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots \\ p_1, p_2, \dots \end{pmatrix}$ е разпр. на ξ

Симулация на сл. събития:

A - събитие с $P(A)=p$

Разгл. I_A: $P(I_A=1) = 1 - P(I_A=0) = p$

$A_1, \dots, A_n$ с вероятности $p_1, \dots, p_n$

Разгл. сл. вел. с разпр.

$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

$X \in Ge_1(p)$

$P(X=i) = p(1-p)^{i-1}, \; i=1, \dots, n, \dots$

$U \in U(0,1)$

Полагаме $X=j$, ако

$$\sum_{i=1}^{j-1} P(X=i) \le U < \sum_{i=1}^{j} P(X=i)$$

Метод на селекцията (acceptance-rejection)

Дадени са

$P(X=i)=p_i$ и $P(Y=i)=q_i$

и $\exists c: \frac{p_i}{q_i} \le c$

Ако $U \in U(0,1)$ и $U < p_Y / c q_i \Rightarrow X=Y$

Симулация на непрекъснати сл. вел.

ξ - сл. вел, $a < x < b$, $p(x)$ - плътност и $F(x)$ - ФР

<u>Т-ма 2</u> Сл. вел. ξ, удовлетворяваща

$$F(\xi) = \gamma, \tag{3}$$

където $\gamma \in U(0,1)$, има плътност $p(x)$

<u>Пр. 1</u>

$\xi \in Exp(a)$, $x_0 < x, \infty$

$p(x) = a e^{-a(x - x_0)}$

<u>Реш.</u> $F(x) = \int_{x_0}^{x} a e^{-a(u - x_0)} du = 1 - e^{-a(x - x_0)}$

$$-a(x - x_0) = \ln(F(x) - 1)$$

$$x = -\frac{1}{a} \ln(F(x) - 1) + x_0$$

Многомерни сл. вел: прилагаме т-ма 1 или т-ма 2 за всяка координата

Пр. 2 $Q = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ е равномерна в n-мерен паралелепипед $\Pi = \{a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$

Реш.

$$p_Q(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c, & \text{ако } (x_1, \dots, x_n) \in \Pi \\ 0, & \text{ако } (x_1, \dots, x_n) \notin \Pi \end{cases}$$

$$\frac{1}{c} = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \text{ - обем на } \Pi$$

$$p_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{b_i - a_i}, & \text{ако } x_i \in (a_i, b_i) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(\xi_i) = \frac{\xi_i - a_i}{b_i - a_i} = \gamma_i$$

$$\boxed{\xi_i = a_i + \gamma_i (b_i - a_i), \; i = 1, \dots, n}$$

Пр. 3 $\xi_1, \dots, \xi_n$ не са независими. Тогава

$$p_Q(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) p_2(x_2 | x_1) \dots p_n(x_n | x_{n-1} \dots x_1)$$

$$p_1(x_1) = \underbrace{\int\int\int}_{n-1} p_Q \, dx_2 \dots dx_n$$

$$p_2(x_2 | x_1) = \underbrace{\int \dots \int}_{n-2} p_Q \, dx_3 \dots dx_n \cdot \frac{1}{p_1(x_1)}$$

⋮

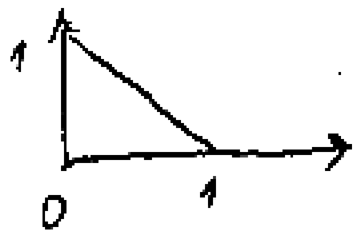
$$F_i(x_i|x_1,\dots,x_{i-1})=\int_{-\infty}^{x_i} p_i(x|x_1,\dots,x_{i-1})dx$$

<u>Т-ма 3</u> Нека $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ са независими сл. вел. Съвкупността от сл. вел. $\xi_1,\dots,\xi_n$, получена от уравненията

$$\left.\begin{aligned} &F_1(\xi_1)=\gamma_1\\ &\quad\vdots\\ &F_n(\xi_n|\xi_1\dots\xi_{n-1})=\gamma_n\end{aligned}\right\}$$ имат съвм. плътност $p_Q(x_1,\dots,x_n)$

<u>Пр. 4</u>

(ξ,η) в Δ-к $\begin{cases}x+y<1\\ x>0,\ y>0\end{cases}$



$p(x,y)=6x$

(а) избираме ξ за първа координата

$$p_\xi(x)=\int_0^{1-x} p(x,y)dy=6x(1-x),\ 0<x<1$$

$$p_\eta(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\frac{1}{1-x},\ 0<y<1-x$$

$$F_\xi(x)=\int_0^x p_\xi(u)du=3x^2-2x^3,\ 0<x<1$$

$$F_\eta(y|x)=\int_0^y p_\eta(v|x)dv=\frac{y}{1-x},\ 0<y<1-x$$

$$\begin{cases} 3\xi^2 - 2\xi^3 = \gamma_1 \\ \eta = \gamma_2(1-\xi) \end{cases}$$

Ако изберем η за първа величина

$$p_\eta(y) = \int_0^{1-y} p(x,y)\,dx = 3(1-y)^2, \quad 0<y<1$$

$$p_\xi(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_\eta(y)} = 2x(1-y)^{-2}, \quad 0<x<1-y$$

$$F_\eta(y) = (1-y)^3$$

$$F_\xi(x) = x^2(1-y)^{-2}$$

$$\begin{cases} (1-\eta)^3 = \gamma_1 \\ \xi^2 = \gamma_2(1-\eta)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \eta = 1 - \sqrt[3]{\gamma_1} \\ \xi = \sqrt{\gamma_2}\sqrt[3]{\gamma_1} \end{matrix}$$

22.03.2018 симулиране на непр. сл. вел. (продължение)

(B) Използване на смяна на променливите

Правило за преобразуване на Нютон:

Нека $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ е взаимно еднозначно диференцируемо изображение на обл. B от $\{x_1, \dots, x_n\}$ върху B' в простр. $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Ако плътността на сл. точка $Q = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B$ е равна на $p_Q(x_1, \dots, x_n)$, то плътността на сл. т. $Q' = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ е B', където $\eta_i = g_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$, е равна на

$$p_{Q'}(y_1, \dots, y_n) = p_Q(x_1, \dots, x_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|$$

Пр. 1 Сл. т. Q е равномерно разпр. в кълбото $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

Озн. чрез ξ, η, ζ дек. координати на т. Q. Совм. плътност в кълбото е

$$p_Q(x, y, z) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Преобразуване в сфер. координати

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le r < R \\ 0 \le \theta < \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\rho_Q(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^2 \sin\theta = \left(3r^2 R^{-3}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

Сф. коорд. r_Q, θ_Q, φ_Q са независими

$$\left|\begin{aligned} &\int_0^{r_Q} \frac{3r^2 dr}{R^3} = \gamma_1 \\ &\int_0^{\theta_Q} \frac{\sin\theta\, d\theta}{2} = 1-\gamma_2 \\ &\int_0^{\varphi_Q} \frac{d\varphi}{2\pi} = \gamma_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left| \begin{aligned} &r_Q = R\sqrt[3]{\gamma_1} \\ &\cos\theta_Q = 2\gamma_2 - 1 \\ &\varphi_Q = 2\pi\gamma_3 \end{aligned}\right.$$

Декартови координати:

$$\left|\begin{aligned} &\xi = r_Q \sin\theta_Q \cos\varphi_Q \\ &\eta = r_Q \sin\theta_Q \sin\varphi_Q \\ &\zeta = r_Q \cos\theta_Q \end{aligned}\right.$$

Преобразования от вида $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$ (полярни коорд.)
В този случай вместо да се симулира едномерна сл. вел. ξ, симулираме двумерна сл. вел. Q, по стойностите на която определяме ξ.

Използване на полярни координати:
Да допуснем, че за ξ сме избрали сл. вел. η такава, че плътността на т. $Q = (\xi, \eta)$ с декартови координати ξ и η

зависи само от разстоянието до началото на коорд. система $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\rho_Q(x,y)=c(r) \text{ при } R_1\leq r\leq R_2 \text{ (тук } 0\leq R_1<R_2\leq\infty).$$

Тогава е удобно да моделираме полярните координати на т. Q, след което да пресметнем ξ.

Ако $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$,

то якобианът на преобразуването

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r$$

и плътност на т. Q в полярни координати е

$$\rho_Q(r,\varphi)=r\,c(r)$$

Областта на изменение на полярните координати на т. Q - да ги означим с ρ и θ - е правоъгълник $R_1\leq r\leq R_2$, $0\leq\varphi<2\pi$. Лесно се доказва, че те са независими и

$$\rho_\rho(r)=2\pi r\,c(r)$$
$$\rho_\theta(\varphi)=(2\pi)^{-1}$$

По формулата за моделиране на сл. вел. с независими координати $(F_i(\xi_i)=\gamma_i, i=1,2)$ получаваме следните уравнения

$$\left.\begin{cases} 2\pi\int\limits_{R_1}^{\rho} r\,c(r)\,dr=\gamma_1 \\ \theta(2\pi)^{-1}=\gamma_2 \end{cases}\right\} \quad (1)$$

След изчисляване на ρ и θ, лесно се определят декартовите координати на т. Q:

$$\begin{cases} \xi = \rho\cos\theta \\ \eta = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Пр. 1 Сл. вел. ξ е дефинирана в $-R < x < R$ с ~~[illegible]~~ плътност $p(x) = 2(\pi R^2)^{-1}\sqrt{R^2 - x^2}$.

Лесно е да се забележи, че ξ е абсцисата на сл. точка Q, равномерно разпределена в кръга $x^2 + y^2 < R^2$. Наистина, ако $p_Q(x,y) = (\pi R^2)^{-1}$ в този кръг, то

$$p_\xi(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} p(x,y)\,dy = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{за } |x| < R$$

От формулите (1) при $c(r) = (\pi R^2)^{-1}$, $R_1 = 0$, $R_2 = R$ получаваме явните формули

$$\rho = R\sqrt{\gamma_1}$$

$$\theta = 2\pi\gamma_2$$

По този начин

$$\xi = R\sqrt{\gamma_1}\cos(2\pi\gamma_2)$$

Заб. Ако в този пример използваме метода на обр. функция, то уравнението $F(\xi) = \gamma$ е твърде сложно:

$$F(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\xi}{R} + \frac{\xi}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - \xi^2} = \gamma$$

__Пр. 2__ Сл. вел. ξ е нормална с параметри $(0,1)$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 0 < x < \infty .$$

Избираме независима от ξ сл. вел. η със същото разпределение и разглеждаме сл. точка Q в равнината $\{x, y\}$ с декартови координати $Q = (\xi, \eta)$. Очевидно

$$p_Q(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \quad , 0 < r < \infty$$

По ф-лите (4), като използваме $1 - \gamma_1$ вместо γ_1, получаваме уравненията

$$\begin{cases} \int_0^\rho r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 1 - \gamma_1 \\ \theta = 2\pi \gamma_2 , \end{cases}$$

така че $\rho = \sqrt{-2 \ln \gamma_1}$.

Следователно

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \cdot \cos(2\pi \gamma_2) \\ \eta &= \sqrt{-2 \ln \gamma_2} \cdot \sin(2\pi \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (1^a)$$

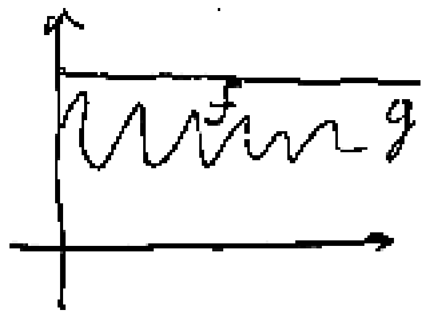
Формулите (1^a) позволяват по две сл. числа γ_1 и γ_2 да се пресметнат едновременно две независими стойности на сл. вел. ξ.

__Заб.__ Ако сл. вел. ξ е нормална с параметри $(0, 1)$, то сл. вел. $\zeta = \sigma \xi + a$ е нормална с параметри (a, σ)

acceptance - rejection:

Не знаем как да симулираме сл. вел. с плътност $f(x)$, но знаем как да сим. сл. вел. с плътност $g(x)$

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le c \quad \forall y$$



1) Симулираме Y с пл. g и генерираме сл. вел. γ

2) Ако $\gamma \le \frac{f(Y)}{g(Y)c}$, то $X = Y$

$$P\left(\gamma \le \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = k = \frac{1}{c}$$

29.03.2018 Монте Карло методи за пресмятане на интеграли

1) Сходимост

Разгл. сл. вел. ξ, за която $\exists$ очакване $\mathbb{E}\xi = a$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$

$$\overline{\xi}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i \xrightarrow[N\to\infty]{P} a \qquad (1)$$

2) Грешка $\left(\mathbb{D}\xi := \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - (2)\right)$

$\mathbb{D}\xi$ също съществува $\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} P\left\{x_1 < \frac{1}{\sqrt{N\mathbb{D}\xi}}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i - a) < x_2\right\} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2}\,dt$$

$x_2 = -x_1 = x$

$$\lim\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i - a)\right| < x\sqrt{\frac{\mathbb{D}\xi}{N}}\right\} = \phi(x)$$

$$\boxed{\phi(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\cancel{t}^2}\,dt}$$

$$P\left\{\left|\overline{\xi}_N - a\right| < x\sqrt{\frac{\mathbb{D}\xi}{N}}\right\} \approx \phi(x) \qquad (3)$$

$$\left|\overline{\xi}_N - a\right| < x_\beta\sqrt{\frac{\mathbb{D}\xi}{N}}, \text{ където } \phi(x_\beta) = \beta \text{ и } x = x_\beta$$

Емпирична оценка на $\mathbb{D}\xi$

$\sum \xi_i,\ \sum(\xi_i)^2$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i)^2 \approx \mathbb{E}(\xi^2)$$

$$D\xi \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i)^2 - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right]^2$$

$$D\xi \approx \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i)^2 - \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$ – за малки N

Обикновен МКМ (crude)

$$I = \int_G f(P)\,p(P)\,dP \qquad (4)$$

$p(P)$ – плътност $\qquad \int_G p(P)\,dP = 1$

$$\int_G f(P)\,dP = \int_G \underbrace{f_1(P)}_{S_G f(P)} \cdot \underbrace{p_1(P)}_{\frac{1}{S_G}}\,dP$$

Въвеждаме сл. вел. $z = f(Q)$ и Q с плътност $p(P)$ в G.

$$\mathbb{E}z = \int_G f(P)\,p(P)\,dP = I$$

Нека $Q_1, \dots, Q_N$ са независими реализации на сл. точка Q.

$z_1 = f(Q_1), \dots, z_N = f(Q_N)$

$\theta_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$ (Очевидно $\mathbb{E}\theta_N = I$; ако $\exists\ \mathbb{E}|z|$, то $\theta_N \xrightarrow{P} I$)

$\theta_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(Q_i) \approx \sqrt{\frac{\mathbb{D}z}{N}}$

<u>Пр. 1</u> $I = \int_0^{\infty} f(x) e^{-kx} dx, \ k>0$

Избираме $p(x) = k e^{-kx}$ и $f_1 = \frac{1}{k} f(x)$

Ако ξ_i са независими реализации на сл. вел. ξ с плътност $p(x) \Rightarrow$

$$\theta_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_1(\xi_i) = \frac{1}{kN}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

$I \approx \frac{1}{kN}\sum_{i=1}^{N} f(-\frac{1}{k}\ln\gamma_i)$, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ - генерирани $U(0,1)$

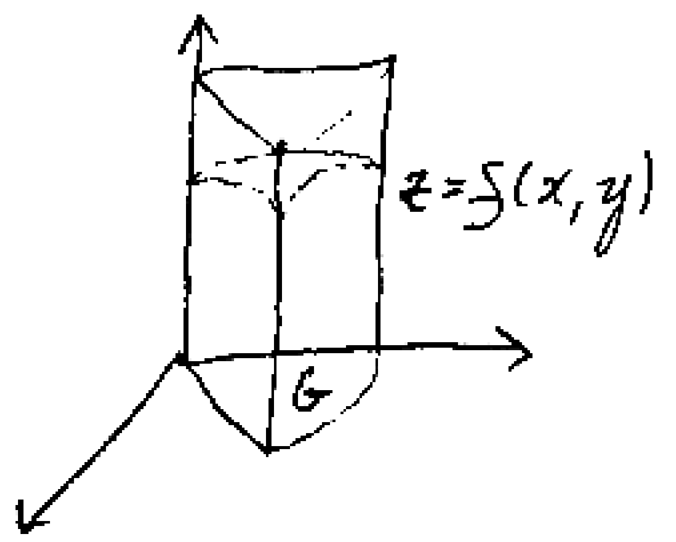
<u>Зад.</u>

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} k e^{-k(x-x_0)} dx = 1 - e^{-k(x-x_0)} = \gamma \Rightarrow \xi = F^{-1}(\gamma)$$

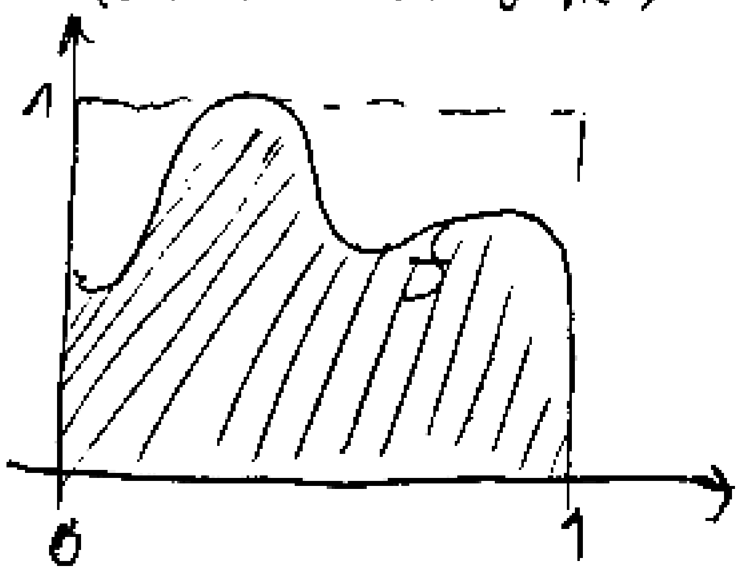
$$1 - e^{-k(\xi - x_0)} = \gamma$$

$$\xi = x_0 - \frac{1}{k}\ln(1-\gamma) = x_0 - \frac{1}{k}\ln(\gamma)$$

Геом МКМ



(Геом. МКМ в $\mathbb{R}^2$)



Ако N_1 от N „хвърляния" на точки в $[0,1]^2$ попадат под Γ_f, то

$\frac{N_1}{N}$ е оценка за $\iint_{[0,1]^2} f\,dx$.

$0 \le f(\bar{P} = P = (x,y)) \le C$

$\tilde{G} = G \times (0, C)$

$\tilde{p}(x,y,z) = \frac{1}{C}\,p(x,y)$

ζ в $0 < z < C$

$p_\zeta(z) = \frac{1}{c}$

N независими реализации $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N$

ν - брой точки под повърхността $z = f(P)$

$$\tilde{\Theta} = \frac{c\nu}{N} \qquad (5)$$

- разп. на Бернули

$$P(\nu = m) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}$$

p е вероятността т. $\bar{Q}$ под повърхността $z = f(P)$

$p = P(\zeta < f(\xi,\eta)) = \int_{G_1} dx\,dy \int_0^{f(x,y)} \tilde{p}(x,y,z)\,dz$; $\mathbb{E}\nu = Np = \frac{1}{c} N I \Rightarrow \tilde{\Theta}_N \xrightarrow{P} I$

Втора интерпретация:

$$\bar{z} = \begin{cases} c, \text{ако } \zeta \le f(\xi,\eta) \\ 0, \text{ако } \zeta \ge f(\xi,\eta) \end{cases}$$

$$\bar{\theta}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{z}_i$$

<u>Пр. 1</u> $I = \int_0^1 \sqrt[5]{x}\,dx \; \left(= \frac{5}{6}\right)$

$p(x) = 1$

Оценка, получена по обикновен МКМ:

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sqrt[5]{\gamma_i}$$

$$\mathbb{D} z = \int_0^1 x^{\frac{2}{5}}\,dx - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{252}, \text{ където } z = \gamma^{\frac{1}{5}}$$

Оценка, получена по геом. МКМ

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{z}_i, \text{ където } \bar{z}_i = \begin{cases} 1, \text{ако } \gamma_i < \gamma_i^{\frac{1}{5}} \\ 0, \text{ако } \gamma_i \ge \gamma_i^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

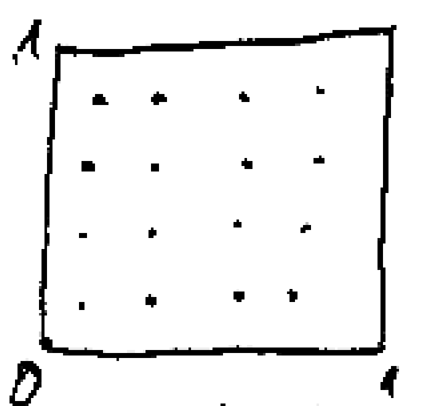
$$\mathbb{D}\bar{z} = \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

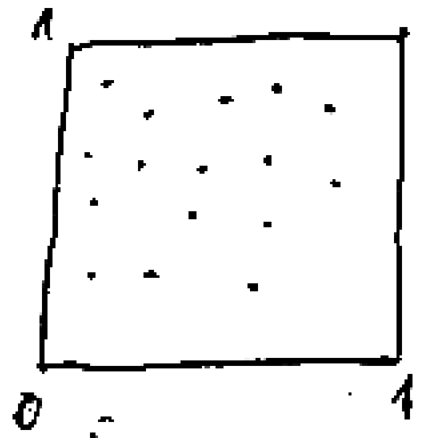
26.04.2018

Квазислучайни редици

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$I_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)$$





Ако f зависи слабо от x, то имаме общо четири стойности на f, повторени по 4 пъти

Дискрепанс

$B \subseteq [0,1]^s$ и $P = \{x_n, n=1,\dots,N\} \subseteq [0,1]^s$

$$A(B,P) = \sum_{n=1}^{N} c_B(x_n)$$

$x_n \in B,\ 1 \le n \le N$

$$D_N(B,P) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \left| \frac{A(B,P)}{N} - Vol(B) \right|$$

<u>Опр.</u> <u>Звезда дискрепанс</u> наричаме $D_N^* = D(x_1,\dots,x_n)$ на P:

$D^*(J^*, P)$, където J^* е фамилия от $\prod_{i=1}^{s}[0, u_i)$

$$D_N^* \geq c\,\frac{(\log N)^{\frac{s-1}{2}}}{N}$$

<u>Т-ма 1</u> За едномерно $P=\{x_1, \ldots, x_N\}$
$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ е изпълнено

$$D_N^* = \frac{1}{2N} + \max_{1\leq i\leq N}\left|x_i - \frac{2i-1}{2N}\right|$$

<u>Сл. 1</u>

$$x_i = \frac{2i-1}{2N}, \quad i=1,\ldots,N$$

<u>Опр.</u> $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq [0,1]^s$ се нарича ~~...~~ равномерно разпределена, ако

$$\lim_{N\to\infty} D_N^* = 0$$

<u>Т-в.</u> (Wayl 1916)

Редицата е равномерно разпределена $\Leftrightarrow$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum f(x_i) = \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx$$

$$D_N^* \leq c\,\frac{\log N^s}{N}$$

$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots$ - p-ично представяне на n

radical inverse

$$\phi_p(n) = \frac{b_0}{p} + \frac{b_1}{p^2} + \dots$$ - (1937)

$$x_n = \{\phi_{p_1}(n), \phi_{p_2}(n), \dots, \phi_{p_s}(n)\}$$ - Холтън

$$I[f] = \int_{[0,1]^s} f(x)dx \quad (1)$$

$$I_N[f] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \quad (2)$$

$$\varepsilon = I[f] - I_N[f]$$

Вариация:

$$V[f] = \int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right| dt$$ (едномерен случай)

$$V[f] = \int_{[0,1]^s} \left|\frac{\partial^s f}{\partial t_1 \dots \partial t_s}\right| dt_1 \dots dt_s + \sum_{i=1}^{s} V[f_i]$$

Коксма - Хлавка

За всяка редица $\{x_n\}$ и $\forall f$ с ограничена вариация грешката при интегриране е

$$\varepsilon[f] \leq V[f] . D_N^*$$

$$\varepsilon[f] < \int_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

МК	КМК
$\frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{N}}$	$\frac{V[f] \log N^s}{N}$

02.04.2018

Ред на фон Нойман

$u = Ku + f$ - задача в операторен вид

например $u(x) = \int_{G_1}\int_{G_2} K(x,y)u(y)\,dx\,dy$ - интегрално уравнение

или $Ax = b$ - система линейни уравнения

$Ax + x - x = b$

$x = x - Ax + b = \underbrace{(I - A)}_{K}x + b$

$u_k = Ku_{k-1} + f = f + Kf + K^2 f + \dots + K^k u_0$ - ред на фон Нойман

$J(u) = (h, u) = \int_G u(x)h(x)dx$ - пресмятаме помощна ф-ция

Дефинираме сл. вел. θ; $\mathbb{E}\theta = J(u)$

$$\theta[h] = \frac{h(\xi_0)}{\pi(\xi_0)} \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f(\xi_j)$$

Тук $\xi_0, \xi_1, \dots$ е ~~вер~~ верига на Марков с $\xi_0 = \theta$

$\varepsilon = \frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{N}}$ - грешка при МКМ

$\delta(\xi) = \lim_{N\to\infty} (\xi(\omega_i) - \int_\Omega \xi(\omega)d\mu(\omega)$

$\xi(\omega_i)$ - аналог на ω_i

Равномерно разпределените случайни точки имат $*$-дискрепанс $D_N^* = O(N^{-\frac{1}{2}}(\ln\ln N)^{-\frac{1}{2}})$

$x_n(j) = b_1 v_1^{(j)} \otimes b_2 v_2^{(j)} \otimes \dots$ – редица на Собол

$x_n = (\Phi_b(P^0 n), \Phi_b(P^1 n) \dots)$ – редица на Фор

$\downarrow$ на Паскал матрица

$$X = \frac{\pi_p(b_0)}{p} + \dots$$

$$\pi_p(b_j) = (a b_j + g) \bmod p$$

} Оптимални редици на Халтън с линейно разбъркване

<u>Пример 1</u> $x = Ax + f$

$$x^{(k)} = f + Af + A^2 f + \dots + A^k x(0),\ k > 0$$ – ред на Нойман

Да се оцени (h,x) при дадено h

$$\boxed{(h,x) \approx h^T f + h^T A f + \dots + h^T A^k x(0)}$$

<u>Пример 2</u> (Резолвентен метод)

$Au = \lambda u,\ A \in R^{n\times n},\ u \in R^n$

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$; при $q > 0$, $\mu_{max} = \lambda_{max}$

$$[I - qA]^{-m} = \sum_{i=1}^{\infty} q^i C^{i}_{m+i-1} A^i,\ |q\lambda| < 1$$ при $q < 0$ $\mu_{max} = \lambda_{min}$

$$\mu = \frac{1}{1-q\lambda}$$