ИВАН ПРОДАНОВ

УВОД ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНИЯ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

ПОСТРОЕНИЕ НА НЯКОИ КЛАСИЧЕСКИ ФУНКЦИОНАЛНИ ПРОСТРАНСТВА

НАУКА И ИЗКУСТВО
СОФИЯ, 1982

Тази книга е предназначена за първо запознаване с идеите и методите на функционалния анализ — дисциплина със сериозни приложения в математиката, физиката и другите науки. Първата част, която е предложена на вниманието ви, съдържа сведения за теорията на множествата, стилтесовия интеграл, нормираните пространства, банаховите пространства, теорията на интеграла, теорията на мярката, функционалните пространства и хилбертовите пространства. Във втората част ще бъдат приведени техни приложения.

Изложението е достъпно. Предполагат се само навици за самостоятелна работа по математика. Може да се ползува от всички, които са изучавали математика няколко семестъра във висше учебно заведение и се интересуват от съвременния математически анализ и приложенията му.

Индекс 51

ПРЕДГОВОР

Банална истина е, че запознаването със сериозен предмет не става на един дъх: започва се с кръг въпроси, които са свързани с познати неща, но в тях участвуват и характерни за предмета нови идеи, за предпочитане в най-простата им форма, а след усвояването им те се превръщат в ядро, около което с една или друга интензивност се натрупват следващите сведения.

За функционалния анализ такъв кръг могат да съставят въпросите за пълнотата. Читателят знае колко важна е тя при числовата права. Достатъчността на условието на Коши за сходимост на числова редица се използува там на всяка крачка. Математиците направиха откритие, когато постепенно осъзнаха, че същият метод е приложим и в много други случаи — по същество това бе създаването на функционалния анализ.

Но пълните пространства не се срещат наготово (даже построяването на реалните числа е едно сериозно целенасочено усилие). Преди да се достигне до голяма част от тези пространства, исторически бе нужно да се прозрат несъвършенствата на класическото интегриране, да се създаде лебеговият интеграл, впоследствие да се разбере, че той води до пълни пространства от функции, които от своя страна имат интересни приложения. За да получат тези и други функционални пространства онази широка употреба, на която се радват днес, бяха нужни усилията на много учени. Ще споменем само Арцела, Банах, Бер, Борел, Даниел, Йънг, Каратеодори, Колмогоров, Лебег, Лузин, Ф. Рис, фон Нойман, Хилберт.

Предлаганата книга има за цел да даде първоначална (но не и повърхностна) представа за предмета, като проследи до определена степен концепцията за пълнотата и някои от приложенията ѝ. В първата част са построени функционалните пространства, които зависят от интегрирането, а втората, чието издаване е предстоящо, ще бъде посветена на техни приложения.

Исторически до лебеговото интегриране се стигна не само независимо от функционалния анализ, но то, както вече отбелязахме, бе един от стимулите за създаването на последния. Тук то е построено със средствата на самия функционален анализ, като в основата е поставена именно идеята за пълнотата. Този естествен метод не е нов: авторът се е учил на него още през 1956 г. от Я. Тагамлицки.

Ясно е, че в книги като тази стремежът към максимална общност е нежелателен. Онова, което е нужно за предполагаемия читател, е една разумна общност, при която новите за него методи (и общността влиза тук) се проявяват достатъчно ясно, но същевременно работят по най-простия начин, за да може той да наблюдава действието им, така да се каже, в чист вид. Ето защо редица иначе важни понятия като топологично пространство, линейно топологично пространство, пространство на Фреше и т. н. не се обсъждат в тази книга, тъй като на това ниво е трудно да бъдат мотивирани. Читателят ще се убеди в необходимостта им най-естествено едва след като си изясни, че рамките на банаховите и хилбертовите пространства, към които се придържаме тук, не са достатъчни за редица задачи, за решаването на които се налага само да се разшири сферата на приложимост на все същите методи чрез по-нататъшното им обобщаване. За да се свикне с общи постановки обаче е нужно време, а докато то тече, не е зле да се убедим, че и в тези относително тесни рамки може да се направи немалко.

Общността обаче не бива да се ограничава изкуствено, когато не създава психологически бариери. Така е при интегрирането, което тук се прави в произволни множества. По този начин не само става ясно каква е същността му, но се наблюдават и другите предимства на общността: като успяваме да обхванем в една обща схема много случаи, изведнъж свършваме доста работа.

Това налага обаче усилия от друг вид. Общите схеми изискват конкретни реализации, които не само им придават смисъл, но и влияят съществено върху самото им развитие, а също и върху усвояването, определяйки насоките им. С оглед на всичко това в изложението са дадени немалко конкретни и общи примери. Макар и да не са логическа част от съответната обща схема, читателят не бива да ги пренебрегва: по значение те не отстъпват на останалия текст.

Ето накратко съдържанието на първата част. В първата глава са разгледани елементи на теорията на множествата. По-точно това са релациите за еквивалентност, аксиомата за избора и свързаните с нея лема на Цорн и теорема на Цермело. Без този минимум съдържателно разглеждане на абстрактни въпроси е немислимо.

Втората глава допълва познанията на читателя върху класическото риманово интегриране, като разглежда интеграла на Стилтес. Той е нужен не само, да кажем, с оглед целите на теорията на вероятностите, но и защото дава конкретни примери, изпълващи със съдържание общата теория на интеграла.

В първо приближение може да се каже, че функционалният анализ е пренасяне на крайномерни геометрични разглеждания в безкрайномерни пространства. По такъв начин геометричната интуиция става негова характерна черта: читателят може и трябва да онагледява всичко с рисунки. Но за да се овладее това, е нужно да покажем по какъв начин самите геометрични понятия се пренасят в безкрайномерния случай и на тази тема е посветена третата глава. Там се обсъждат понятия като хиперравнина, норма, отворено кълбо, затворено кълбо, линеен функционал както в реални, така и в комплексни безкрайномерни пространства, или с две думи — нормираните пространства.

Така в четвърта глава можем да се съсредоточим върху интересните за приложенията банахови пространства, които са пълните нормирани пространства. На това място примери са само пространствата от непрекъснати функции с равномерна норма (сходимост), но се появява и общата схема за попълване на нормираните пространства до банахови, която постепенно води в шеста и девета глава до много други примери. Като мотиви за въвеждането на банаховите пространства са посочени добре известните следствия от теоремата на Бер — теоремата за отворените изображения, за затворената графика, за фиксиране на особеностите, а също и сведения за компактните множества.

Пета глава е посветена на абстрактното интегриране. За целта е използувана схемата на Даниел, като кулминация е една аксиоматика за абстрактното лебегово интегриране, която, грубо казано, се получава, като към аксиомите на Даниел се прибави и изискването за пълнота. От него се извличат и основните теореми от теорията на интеграла: на Бепо Леви, Лебег и Фату, като първата и третата са поотделно еквивалентни с това изискване. Както винаги в такива случаи, аксиоматизирането позволява абстрактното лебегово интегриране да се изучава независимо от конкретните конструкции, което дава повече свобода.

Така е направено и навсякъде по-нататък в книгата, като се изключи шеста глава, в която е установено, че всяка схема на Даниел води до абстрактно лебегово интегриране. За целта е използуван методът на Тагамлицки, подложен на незначителни усъвършенствувания. Той има определени предимства пред другите методи, понеже сочи ясно целта — построяване на някакво пълно пространство — и води *директно* именно до онова, което ни интересува — сумируемите функции и интегралите им.

В седма глава се разглеждат измеримите функции и множества, като в специалния случай на $\mathbf{R}^n$ е отделено внимание и на бореловите функции и множества. Мирогледното им значение е така голямо, че те напразно биват често пренебрегвани в учебната литература. Но по-тънките въпроси от теорията на функциите, като например класификацията на Бер, не се разглеждат тук. В тази глава се казват и няколко нужни думи за комплексното интегриране, което не е по-малко важно от интегрирането на реални функции.

Осма глава е посветена на теорията на мярката. Мерките вече губят значението си при построяването на лебеговото интегриране, понеже достигането до тях, като се тръгне от онези достъпни образувания, с които разполагаме, едва ли е по-просто от пряката конструкция на самия интеграл, а мярката се построява чрез интеграла непосредствено. Но те продължават да имат важно значение при изучаването на свойствата на сумируемите функции поради добрите свойства на стъпаловидните функции. Правото им на самостоятелно съществуване се осмисля също и от теорията на вероятностите, която не е нищо друго освен един обширен клон на теорията на мярката. Тъй като, от една страна, разполагаме с отдавна познатата аксиоматика на теорията на мярката, а, от друга — с аксиоматиката на абстрактното лебегово интегриране, появява се възможност да установим, че тези две неща са равностойни, т. е. че теориите на интеграла и мярката са еквивалентни.

В девета глава са разгледани пространствата L^p. В реалния случай те имат едно важно свойство, което напомня и принципа за непрекъснатост от реалните числа, и теоремата на Бепо Леви. То бе поставено в основата на изучаването на непрекъснатите линейни функционали в тези пространства.

Десета глава е посветена на хилбертовите пространства, които по същество са пространствата L^2. Те пренасят в безкрайномерния случай значително повече позната геометрия от банаховите и имат още по-интересни приложения в математиката и физиката. Главното, което тук е представено, са теоремата за проекциите, линейните функционали, общата теорема на Питагор, учението за базите, а така също и класическата база на $L^2([-\pi, \pi])$.

Съдържанието на всяка глава е обсъдено по-подробно в началото на самата глава. Там се дават и съвети за четенето. Книгата е построена така, че при първо четене може да се пропусне определена част без накърняване на логическата страна. Подборът на този минимум е бил предмет на особени грижи: целта пък е при първо четене да се получи онази обща подготовка, която е нужна за цялостното овладяване на нещата при второ четене. Това по никакъв начин не означава, че материалът, оставен за второ четене, е маловажен. Напротив, там често се съдържат именно онези по-специални въпроси, които изискват по-сериозни усилия.

В края на всяка глава са приведени задачи. Част от тях имат характер на технически упражнения, а останалите представляват допълнение към основния текст, което читателят трябва да разработи сам. Той не бива да се обезкуражава, ако не е в състояние да реши всички такива задачи, защото някои от тях са трудни.

В текста е използувана трицифрена номерация на теореми, предложения и примери. Например «теорема 5.2.7» означава теорема 7 от § 2 на пета глава. Ако тази теорема се цитира в § 2 на пета глава, тя се означава като «теорема 7»; ако сме в друг параграф, но все още в пета глава, препращаме към «теорема 2.7»; накрая, ако се намираме в друга глава, пишем целия номер «теорема 5.2.7». Ако по време на четенето читателят почувствува нужда да освежи паметта си за смисъла на някой термин или означение, може да използува указателите на термините и означенията в края на книгата.

Ползувам се от случая да благодаря на рецензентите чл.-кор. проф. Я. Тагамлицки и ст. н. с. д-р П. Русев за градивната критика, допринесла немалко за подобряване на изложението.

Първа глава
ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА

Теорията на множествата предоставя на математиците един удобен език и няколко общи теореми с широка приложимост. Както и другите математически дисциплини, тя може да се построи аксиоматично. На практика обаче (освен в случаите, когато се отнася до основите на математиката) се използува наивната теория на множествата, в която се формулира само една аксиома — за избора. Ето защо тук няма да се занимаваме с аксиоматичното построяване на тази теория, което отнема много място, а ще насочим вниманието си към такива нейни части, които са важни при изучаването на функционалния анализ.

Ще предполагаме, че читателят владее основните операции над множества: обединение, сечение, разлика, произведение, а също така понятията изображение, образ и прообраз на множество чрез изображение и връзките им с операциите над множествата.

Тук представяме само онзи минимум от теорията на множествата, който е необходим за онова, което следва. В § 1 се разглеждат релациите за наредба. Терминологията, въведена в него, играе съществена роля по-нататък. В § 2 са разгледани специални наредби — релациите за еквивалентност, които често поемат ролята на равенството, а също и операцията факторизиране. В § 3 се обсъжда аксиомата за избора. § 4 съдържа формулировката и доказателството на лемата на Цорн. Последната е еквивалентна с аксиомата за избора, представлява силен инструмент за доказване на нетривиални общи резултати и ще бъде използувана многократно в следващите глави. Въпреки това при първо четене доказателството ѝ може да се изостави, а твърдението да се приеме за аксиома. В последния § 5 лемата на Цорн се прилага, за да се докаже класическата теорема на Цермело за добрата наредба, а също и принципът за трансфинитната индукция. Този параграф също може да се изостави при първо четене, тъй като приложенията му обикновено се покриват и от лемата на Цорн.

§ 1.1. НАРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА

Нека X е произволно множество. Една двучленна релация $\leq$ в X се нарича *преднаредба* в X, когато притежава следните две свойства (наречени а к с и о м и з а п р е д н а р е д б а):

а) всяко $a \in X$ е в сила $a \leq a$;

б) за произволни елементи a, b, c на X, за които $a \leqq b$ и $b \leqq c$, е изпълнено $a \leqq c$.

Така например, ако за всеки два елемента a, b на X положим $a \leqq a$, получаваме преднаредба. Ако пък се условим да пишем $a \leqq b$ точно когато $a = b$, получаваме друга преднаредба. Освен тези тривиални примери съществуват и много други.

Казва се, че едно множество X е *преднаредено*, когато в него е зададена някаква преднаредба.

Една преднаредба $\leqq$ в X се нарича *наредба*, когато удовлетворява следното условие:

в) за произволни елементи a, b на X, за които $a \leqq b$ и $b \leqq a$, е в сила $a = b$.

Така например, ако A е произволно множество и X е множество от функции $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$, където $\mathbf{R}$ е съвкупността на реалните числа, и за произволни функции $f, g \in X$ положим $f \leqq g$, когато е изпълнено неравенството $f(a) \leqq g(a)$ за всяко $a \in A$, очевидно получаваме наредба в X.

Казва се, че множеството X е *наредено*, когато в X е зададена наредба. Ако X е наредено множество, за $a, b \in X$ се пише $a < b$, когато $a \leqq b$ и $a \neq b$. Понякога релацията $<$ се нарича *строго неравенство*.

Една наредба в X се нарича *пълна*, когато притежава следното свойство:

г) за всеки два елемента a и b на X е в сила поне едната от релациите $a \leqq b$ или $b \leqq a$.

Разбира се, г) изразява, че от трите възможности $a < b$, $a = b$ и $b < a$ е налице едната и само едната. Пример за пълна наредба е обичайната наредба $\leqq$ в съвкупността на реалните числа. Едно множество се нарича *напълно наредено* или *верига*, когато в него е зададена пълна наредба. По този начин всеки два елемента на една верига са *сравними* помежду си.

Нека X е преднаредено множество, $M \subset X$ и $a \in X$. Ще казваме, че a е *мажоранта* на M, когато за всяко $x \in M$ е изпълнено неравенството $x \leqq a$. Разбира се, ако a е мажоранта на M, всяко $b \in X$ с $a \leqq b$ също е мажоранта на M. Една мажоранта a на M се нарича *точна*, когато за всяка мажоранта b на M е в сила $a \leqq b$. Очевидно, ако X е наредено, точната мажоранта е единствена. Точни мажоранти не винаги съществуват. Ако X е наредено и точната мажоранта на някакво множество $M \subset X$ съществува, тя се означава със $\sup M$ и се нарича *супремум* на M.

Аналогично със смяна на посоката на наредбата се дефинират и понятията *миноранта, точна миноранта,* означението $\inf M$ и терминът *инфимум*.

Едно преднаредено множество Γ се нарича *насочено надясно*, когато всяко крайно подмножество на Γ притежава мажоранта. Това означава, че $\Gamma \neq \varnothing$ и че всяко двуелементно подмножество на Γ притежава мажоранта.

Всяка непразна верига очевидно е насочено надясно множество.

За да посочим и друг пример, нека Γ е съвкупността на всички функции $f:[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, които са непрекъснати в ограничения и затворен интервал $[a, b]$. Очевидно Γ е насочено надясно. Нещо повече, всеки два елемента f, g на Γ притежават даже точна мажоранта. Това е функцията $\sup(f, g)$, дефинирана с равенството

$$(\sup(f, g))(x) = \max(f(x), g(x))$$

за всяко $x \in [a, b]$. Тя не е задължена да съвпада с никоя от функциите f или g.

Аналогично със смяна на посоката на наредбата се въвежда и понятието *насочено наляво множество*. Множеството Γ от предишния абзац е насочено наляво. Инфимумът се определя с равенството

$$(\inf(f, g))(x) = \min(f(x), g(x))$$

за всяко $x \in [a, b]$.

§ 1.2. РЕЛАЦИИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНОСТ

Нека X е произволно множество. Една преднаредба R в X се нарича *релация за еквивалентност* в X, когато притежава следното свойство:

а) за всеки два елемента a, b на X, за които $a\,R\,b$, е в сила $b\,R\,a$.

Ако елиминираме термина преднаредба от тази дефиниция (като го заместим с определението му), виждаме, че една двучленна релация R в множество X е релация за еквивалентност точно когато притежава свойствата:

1) за всяко $a \in X$ е в сила $a\,R\,a$ (рефлексивност);

2) за всеки два елемента a, b на X, за които $a\,R\,b$, е в сила $b\,R\,a$ (симетричност);

3) за всеки три елемента a, b, c на X, за които $a\,R\,b$ и $b\,R\,c$, е в сила $a\,R\,c$ (транзитивност).

Релацията равенство в произволно множество X е пример за релация за еквивалентност.

Нека X е множество. Една съвкупност $\mathbf{M}$ от непразни подмножества на X се нарича *разлагане* на X, когато X съвпада с обединението на елементите на $\mathbf{M}$ и различните елементи на $\mathbf{M}$ нямат общи точки.

Нека X е множество и $\mathbf{M}$ е разлагане на X. За произволни a, b от X ще пишем $a\,R\,b$, когато съществува $M \in \mathbf{M}$ с $a \in M$ и $b \in M$. Непосредствено се съобразява, че така получената двучленна релация R е релация за еквивалентност в X. Ще казваме, че тя е *индуцирана* от разлагането $\mathbf{M}$. Разбира се, различни разлагания индуцират различни релации за еквивалентност в X. Така добиваме възможност да построяваме различни примери за релации за еквивалентност. Оказва се, че по този начин се получават всички релации за еквивалентност в X.

1.2.1 Предложение. *Нека X е множество и R е релация за* *еквивалентност в X. Тогава съвкупността* M *на всички подмножества на X от вида*

(1) $$M_a=\{x\in X: x\ R\ a\},$$

където a пробягва X, е разлагане на X. Разлагането M *индуцира зададената релация за еквивалентност R в X.*

Доказателство. Тъй като за всяко $a\in X$ имаме $a\ R\ a$, то $a\in M_a$. Ето защо X съвпада с обединението на елементите на M.

Нека $a, b\in X$ и $M_a\neq M_b$. Трябва да докажем, че $M_a\cap M_b=\emptyset$. Да допуснем противното и нека $c\in M_a\cap M_b$. Тогава $c\ R\ a$, $c\ R\ b$ и от свойства 2), 3) следва $a\ R\ b$. Нека $x\in M_a$, т. е. $x\ R\ a$. Тогава от $a\ R\ b$ и от 3) следва $x\ R\ b$, т. е. $x\in M_b$. Следователно $M_a\subset M_b$. Аналогично $M_b\subset M_a$. Ето защо $M_a=M_b$ в противоречие с $M_a\neq M_b$. С това е показано, че $M_a\cap M_b=\emptyset$ винаги когато $M_a\neq M_b$. Следователно M е разлагане на X.

Да отбележим, че релациите $a\in M_c$ и $b\in M_c$ са едновременно изпълнени точно когато $a\ R\ c$ и $b\ R\ c$. Но тогава е в сила и $a\ R\ b$. Обратно, при $a\ R\ b$ имаме $a\in M_b$ и $b\in M_b$. Така се убедихме, че индуцираната от M релация за еквивалентност в X съвпада с R. С това предложението е доказано.

Така виждаме, че понятията релация за еквивалентност в X и разлагане на X не са съществено различни. Разлагането (1) се означава още и с X/R, а елементите му се наричат *класове на еквивалентност* спрямо R. Да въведем още и *каноничното изображение*

(2) $$\varphi: X\longrightarrow X/R.$$

То се получава, като на всяко $a\in X$ се съпостави елементът (1) на X/R, т. е. класът на еквивалентност, на който a принадлежи. Очевидно φ е сюрекция и $\varphi(a)=\varphi(b)$ точно когато $a\ R\ b$.

Поради свойствата 1), 2) и 3) релациите за еквивалентност съставлят естествено обобщение на равенството. Ето защо в много случаи е целесъобразно при дадена релация за еквивалентност R в X да считаме, че два елемента на X са несъществено различни, когато са в релацията R. Тогава вместо с равенството си служим през цялото време с една по-сложна релация R. При желание бихме могли вместо R да използуваме обичайното равенство (съвпадане, идентичност, тъждественост), но тогава вместо X трябва да разглеждаме множеството X/R. Последното се нарича *фактормножество* на X спрямо R, а разглеждането на X/R — *факторизиране*. Сега вместо с елементи на X през цялото време работим с елементи на X/R. Опростяванията, свързани с равенството, водят до усложняване на обектите, с които работим. На практика от двата възможни подхода се избира онзи, който създава по-малко психологически неудобства.

§ 1.3. АКСИОМА ЗА ИЗБОРА

При изучаване на нетривиалните въпроси на теорията на множествата и приложенията ѝ наред с другите аксиоми се налага да се използува и следното твърдение, наречено *аксиома за избора*:

Нека A и X са множества, $\mathfrak{X}$ е съвкупността на всички непразни подмножества на X и $F : A \longrightarrow \mathfrak{X}$ е произволно изображение. Тогава съществува изображение $f : A \longrightarrow X$, за което е изпълнено условието

$$f(a) \in F(a) \tag{1}$$

за всяко $a \in A$.

Все едно, ако е зададена фамилия от непразни подмножества на X, от всеки елемент на тази фамилия можем да изберем по една точка. В същност „можем да изберем" е неточно, понеже този израз предполага конструктивна (в някакъв смисъл) процедура, с чиято помощ да се установи съществуването на f. В действителност аксиомата за избора гарантира съществуването на f с (1), но не посочва средства за конструирането му. Тази неефективност на избора породи значителни спорове относно правомерността на формулираната аксиома, свързани със смисъла на термина съществуване. Повече или по-малко те вече принадлежат на историята.

Аксиомата за избора очевидно е еквивалентна с твърдението: *Произведението на всяка фамилия от непразни множества не е празно.*

Вече е ясно, че без аксиомата за избора теорията на множествата би била твърде бедна на резултати. Тя или еквивалентните ѝ твърдения се намесват в доказателствата на много нетривиални общи теореми.

§ 1.4. ЛЕМА НА ЦОРН

Аксиомата за избора най-често се използува чрез едно свое следствие, което е еквивалентно с нея и често тривиализира приложенията ѝ.

Нека X е наредено множество. Един елемент ξ на X се нарича *максимален* (в смисъл на Цорн), когато от $x \in X$ и $\xi \leqq x$ следва $\xi = x$. Това означава, че в X не съществуват елементи, които да са строго по-големи от ξ. Разбира се, ако ξ е най-голям елемент на X, т. е. изпълнено е неравенството $x \leqq \xi$ за всяко $x \in X$, то ξ е и максимален елемент на X. Обратното не винаги е вярно. То е налице обаче при напълно наредено X. В този случай X може да притежава най-много един максимален елемент ξ и когато ξ съществува, ξ е най-големият елемент на X. В общия случай максималните елементи могат да са много. Следващата теорема посочва удобно достатъчно условие за съществуване на максимални елементи. Тя е известна в литературата под названието лема на Цорн.

1.4.1. Теорема. *Нека X е такова непразно наредено множество, че всяка непразна верига в X да притежава мажоранта. Тогава X притежава максимални елементи.*

Доказателство. Да допуснем, че X няма максимални елементи, и да разгледаме произволна верига S в X. Съгласно условието на теоремата S притежава мажоранта y. По допускане y не е максимален елемент на X. Но тогава съществуват елементи z на X, за които $y \leqq z$ и $y \neq z$. Всяко такова z е мажоранта на S, която не принадлежи на S. Така добиваме възможност с помощта на аксиомата за избора на всяка верига S в X да съпоставим по една нейна мажоранта $f(S)$, за която $f(S) \overline{\in} S$. Така осъщественият избор ще остане фиксиран до края на доказателството.

Следват три определения, които ще бъдат използувани само в настоящото доказателство. Нека S е произволна верига в X. Едно множество $B \subset S$ ще наричаме *начало* на S, когато от $s < b$, $s \in S$ и $b \in B$ следва $s \in B$. Едно начало B на S ще наричаме *същинско*, когато $B \neq S$. За веригата S ще казваме, че е *добра*, когато за всяко същинско начало B на S множеството $S \setminus B$ има най-малък елемент и той съвпада с $f(B)$. Последното означава, че $f(B) \in S$ и $b < f(B) \leqq s$ за произволни $b \in B$ и $s \in S \setminus B$.

Разбира се, $\emptyset$ е начало на всяка верига S и при $S \neq \emptyset$ то е същинско начало на S. Също S винаги е несъщинско начало на S. Ето защо празната верига няма същински начала и следователно е добра.

За да посочим и други примери на добри вериги, ще се убедим, че ако S е добра верига, то $S' = S \cup \{f(S)\}$ също е добра верига. Преди всичко $f(S)$ е мажоранта на S и тъй като S е верига, S' също е верига. Нека B е някакво същинско начало на S'. Да допуснем, че $f(S) \in B$. Тъй като за всяко $s \in S$ имаме $s < f(S)$, от определението за начало ще следва $s \in B$, поради което $S \subset B$ и $B = S \cup \{f(S)\} = S'$ в противоречие с определението на същинско начало. Ето защо $f(S) \overline{\in} B$ и следователно $B \subset S$. Ако $B = S$, то $S' \setminus B = \{f(S)\}$ и най-малкият елемент на $S' \setminus B$ е $f(S) = f(B)$, с което случаят $B = S$ е разгледан. Нека сега $B \neq S$. Но тогава B е същинско начало в S и тъй като S е добра верига, $f(B)$ е най-малкият елемент на $S \setminus B$. От друга страна, $f(S)$ е мажоранта на S и следователно $f(B) \leqq f(S)$. Същевременно

$$S' \setminus B = (S \setminus B) \cup \{f(S)\}.$$

Ето защо $f(B)$ е най-малкият елемент и на $S' \setminus B$. С това е показано, че S' е добра верига.

Ще се убедим още, че ако B е същинско начало на една добра верига S, то $B' = B \cup \{f(B)\}$ е начало на S. Тъй като веригата S е добра, то $f(B) \in S$ и следователно $B' \subset S$. Нека сега $s < b$, $s \in S$ и $b \in B'$. Ако $b \in B$, то $s \in B \subset B'$, тъй като B е начало на S. Ако пък $b = f(B)$, то b е най-малкият елемент на $S \setminus B$. Ето защо от $s < b$ и $s \in S$ следва $s \in B \subset B'$. С това е показано, че B' е начало на S.

Сега пък ще покажем, че ако S е добра верига и $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е произволна фамилия от начала на S, то обединението

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \qquad (1)$$

също е начало на S. Нека за целта за $s \in S$ и $b \in B$ е в сила $s < b$. Съгласно (1) съществува $\gamma \in \Gamma$ с $b \in B_\gamma$ и тъй като B_γ е начало на S, то $s \in B_\gamma \subset B$. Ето защо B е начало на S.

Нека сега S и T са произволни добри вериги. Ще покажем, че тогава S е начало на T или T е начало на S. Да означим с $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ фамилията на всички общи начала на S и T. Тогава обединението (1) също е общо начало на S и T. Очевидно B е най-голямото общо начало на S и T в смисъл, че за всяко общо начало B_γ на S и T имаме $B_\gamma \subset B$. Тъй като $B \subset S$ и $B \subset T$, при $B=S$ веригата S би била начало на T. Аналогично при $B=T$ веригата T би била начало на S. Ето защо твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че условията

(2) $$B \neq S, \ B \neq T$$

не могат да са изпълнени едновременно. Да допуснем противното. Тогава B би било същинско общо начало на S и на T. Но тогава множеството $B' = B \cup \{f(B)\}$ би било общо начало на S и на T. Поради максималността на B оттук следва $f(B) \in B$, което противоречи на избора на $f(B)$. Следователно условията (2) не могат да са изпълнени едновременно. С това е показано, че поне едната от двете вериги S или T е начало на другата.

Да означим със Σ обединението на всички добри вериги. Ще покажем най-напред, че Σ е верига. Нека $s, t \in \Sigma$. Тогава съществуват добри вериги S и T с $s \in S$ и $t \in T$. Вече видяхме, че от всеки две добри вериги S и T едната е начало на другата. Ако например $S \subset T$, то $s, t \in T$, и тъй като T е верига, s и t са сравними помежду си. Следователно и Σ е верига.

Ще покажем, че веригата Σ е добра. Нека за тази цел B е същинско начало на Σ. Тъй като Σ е обединението на всички добри вериги в X, съществува добра верига S, за която $B \cap S \neq S$. Ще покажем, че за всяко такова S е в сила $B \subset S$. В противен случай би съществувал елемент $b \in B \setminus S$. Тъй като $B \subset \Sigma$, тогава би съществувала и добра верига T с $b \in T$. Тъй като b не се съдържа в S, ясно е, че S е същинско начало на T. Но тогава за всяко $s \in S$ бихме имали $s < f(S) \leqq b$, тъй като $b \in T \setminus S$. От друга страна, B е начало на Σ и следователно $S \subset B$ в противоречие с $B \cap S \neq S$. Ето защо $B \subset S$. Следователно

$$B = B \cap S \neq S$$

и B се оказва същинско начало на S. Тогава $f(B) \in S \subset \Sigma$. Нека накрая $\sigma \in \Sigma \setminus B$. Тогава съществува добра верига S със $\sigma \in S$. Тъй като $\sigma \notin B$, то $B \cap S \neq S$. Следователно B е същинско начало на S. Ето защо $f(B) \leqq \sigma$. С това е показано, че $f(B)$ е най-малкият елемент на $\Sigma \setminus B$ и следователно Σ е добра верига.

Както вече видяхме, оттук следва, че множеството $\Sigma' = \Sigma \cup \{f(\Sigma)\}$ също е добра верига. Тъй като по определение Σ е обединението на всички добри вериги, би трябвало да имаме $f(\Sigma) \in \Sigma$ в противоречие с избора на $f(\Sigma)$. Полученото противоречие показва, че X има максимални елементи. С това теоремата е доказана.

§ 1.5. ДОБРЕ НАРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА

Едно напълно наредено множество X се нарича *добре наредено*, когато всяко непразно подмножество на X има най-малък елемент.

Пример за добре наредено множество е съвкупността $\mathbf{N}$ на естествените числа, снабдена с обичайната наредба. Оказва се, че добре наредените множества са често явление.

1.5.1. Теорема (Цермело). *Всяко непразно множество X може да се нареди добре.*

Доказателство. Да означим с Ξ съвкупността на всички двойки $(Y, \leqq)$, където Y е подмножество на X и $\leqq$ е добра наредба в Y. За два елемента $(Y, \leqq)$ и $(Z, \leqq)$ на Ξ ще пишем

$$(Y, \leqq) \prec (Z, \leqq),$$

когато са изпълнени следните условия:

а) $Y \subset Z$;

б) за всеки два елемента y_1 и y_2 на Y неравенството $y_1 \leqq y_2$ е изпълнено спрямо наредбата на Y точно когато е в сила $y_1 \leqq y_2$ спрямо наредбата на Z;

в) за всяко $z \in Z$ и за всяко $y \in Y$ от $z \leqq y$ следва $z \in Y$.

Непосредствено се съобразява, че така определената релация $\prec$ в Ξ е наредба в Ξ.

Нека M е непразна верига в X. Ще покажем, че M притежава мажоранта в Ξ. За целта да положим

$$Z = \bigcup_{(Y, \leqq) \in M} Y$$

и да разгледаме произволни елементи z_1 и z_2 на Z. Тогава съществуват $(Y_1, \leqq) \in M$ и $(Y_2, \leqq) \in M$ със $z_1 \in Y_1$ и $z_2 \in Y_2$. Тъй като M е верига, изпълнено е поне едно от неравенствата $(Y_1, \leqq) \prec (Y_2, \leqq)$ или $(Y_2, \leqq) \prec (Y_1, \leqq)$. Ако например е налице първото от тях, съгласно а) ще имаме $Y_1 \subset Y_2$, поради което $y_1, y_2 \in Y_2$. Ето защо съществува $(Y, \leqq) \in \Xi$ с $y_1, y_2 \in Y$. Сега полагаме $y_1 \leqq y_2$ в Z, когато е изпълнено неравенството $y_1 \leqq y_2$ в Y. Тъй като M е верига, от б) следва, че тази дефиниция не зависи от случайностите при избора на $(Y, \leqq) \in \Xi$ с $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$.

Предоставяме на читателя да провери, че $(Z, \leqq) \in \Xi$, т. е. че $\leqq$ е добра наредба в Z. Той също така ще се убеди сам, че $(Z, \leqq)$ е мажоранта на M.

По този начин Ξ удовлетворява условията на лемата на Цорн. От друга страна, Ξ не е празно, понеже съдържа например едноелементните подмножества на X. Тогава от лемата на Цорн следва, че Ξ притежава максимален елемент $(Y, \leqq)$.

Ще се убедим, че $Y = X$, и с това теоремата очевидно ще бъде доказана. Да допуснем противното. Тогава ще съществува $x \in X \setminus Y$. Да положим $Z = Y \cup \{x\}$. В Z ще положим $z_1 \leqq z_2$, когато е изпълнено някое от следните две условия:

г) $z_1 \in Y$, $z_2 \in Y$ и $z_1 \leqq z_2$ в Y;

д) $z_1 \in Z$ и $z_2 = x$.

Все едно, за да дефинираме $\leqq$ в Z, запазихме наредбата на Y и обявихме x за най-голям елемент на Z. Тъй като Y е добре наредено, така дефинираната релация $\leqq$ очевидно е една добра наредба в Z. Следователно $(Z, \leqq) \in \Xi$.

От друга страна, директно се установява, че $(Y, \leqq) \dashv (Z, \leqq)$. Тъй като $(Y, \leqq)$ е максимален елемент на Ξ, то $(Y, \leqq) = (Z, \leqq)$. Ето защо $Z = Y$ в противоречие с дефиницията на x и Z. Полученото противоречие се дължи на допускането $Y \neq X$ и теоремата е доказана.

Следващото предложение е обобщение на принципа за математическата индукция.

1.5.2. Предложение. *Нека X е непразно добре наредено множество и Y е подмножество на X със следните две свойства:*

а) *най-малкият елемент на X принадлежи на Y;*

б) *за всяко $x \in X$, за което от $y \leqq x$ и $y \neq x$ винаги следва $y \in Y$, е в сила $x \in Y$.*

Тогава $Y = X$.

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава множеството $X \setminus Y$ няма да е празно и тъй като X е добре наредено, $X \setminus Y$ ще притежава най-малък елемент x_0. Очевидно x_0 не е най-малкият елемент на X поради свойството а) на Y. Нека сега

$$y \in X, \ y \leqq x_0 \text{ и } y \neq x_0.$$

Тогава y е по-малко от най-малкия елемент x_0 на $X \setminus Y$ и поради това не принадлежи на $X \setminus Y$, т. е. $y \in Y$. Така виждаме, че за x_0 е налице условието на б). Ето защо от б) следва $x_0 \in Y$ в противоречие с $x_0 \in X \setminus Y$. С това предложението е доказано.

Горното предложение се нарича принцип за трансфинитната индукция. Заедно с теоремата на Цермело той позволява обичайната индукция да се пренесе от множеството на естествените числа в произволно множество. На практика обаче този метод се използува рядко, понеже резултатите му обикновено могат да се получават и с директно използуване на лемата на Цорн. В същност и последната трябва да се схваща като далечно обобщение на обичайните индуктивни разсъждения.

Задачи към първа глава

Ултрафилтри

Нека X е непразно множество. Една съвкупност Δ от подмножества на X се нарича *филтър* в X, когато притежава следните четири свойства:

а) $\Delta \neq \varnothing$;

б) $\varnothing \notin \Delta$;

в) ако $A \subset B \subset X$ и $A \in \Delta$, то $B \in \Delta$;

г) ако $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$, то $A \cap B \in \Delta$.

Максималните в смисъл на Цорн филтри в X се наричат *ултрафилтри* в X.

Задача 1. Да се докаже, че всеки филтър в X може да се разшири до ултрафилтър в X.

Задача 2. Да се докаже, че във всяко безкрайно множество съществуват ултрафилтри, всички елементи на които са безкрайни.

Задача 3. Да се докаже, че всеки филтър в X съвпада със сечението на всички ултрафилтри в X, които го съдържат.

Задача 4. Да се докаже, че един филтър Δ в X е ултрафилтър точно когато от $A \cup B \in \Delta$ следва $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$. Да се обобщи твърдението за краен брой събираеми.

Задача 5 (М. Стоун). Нека N е изображение, което на всеки ултрафилтър Δ в X съпоставя елемент N_Δ на Δ. Да се докаже, че съществуват краен брой ултрафилтри $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ в X, за които

$$N_{\Delta_1} \cup N_{\Delta_2} \cup \ldots \cup N_{\Delta_n} = X.$$

Задача 6 (Рамзей). Нека $\mathbf{N}^2$ е съвкупността на всички точки в равнината които имат цели положителни координати. Да се докаже, че ако $A_1, A_2, \ldots, A_k$ са краен брой множества с $\mathbf{N}^2 = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, то съществуват безкрайно множество R от цели положителни числа и индекс $i=1, 2, \ldots, k$, за които $(x, y) \in A_i$ винаги когато $x \in R$, $y \in R$ и $x < y$.

Упътване. За $x \in \mathbf{N}$ и $i = 1, 2, \ldots, k$ положете $A_i(x) = \{y \in \mathbf{N} : y > x, (x, y) \in A_i\}$ и с Δ означете произволен ултрафилтър в $\mathbf{N}$ с безкрайни елементи. Докажете, че съществува такова $i=1, 2, \ldots, k$, че за всяко $N \in \Delta$ съществува $x \in N$ с $A_i(x) \in \Delta$.

Втора глава

ИНТЕГРАЛ НА СТИЛТЕС

Тук ще разширим понятието риманов интеграл, като вместо интеграли от вида $\int_a^b f(x)dx$ *ще разглеждаме по-общи интеграли* $\int_a^b f(x)dg(x)$, *където* g *е произволна функция. Последните се наричат стилтесови интеграли.*

Те са интересни, когато g *е функция с ограничена вариация, т. е. когато (грубо казано)* g *не променя много пъти посоката си на изменение или пък, ако това се случва, измененията са малки. Тези функции са въведени в § 1, а главното им свойство — да се представят като разлики на монотонни функции — е доказано в § 2. В § 3 е показано как това понятие се пренася в* $\mathbf{R}^n$.

Както иримановият интеграл, стилтесовият интеграл се въвежда като граница на крайни суми, но индексното множество в тези случаи не е съвкупността на целите положителни числа, а е една по-сложна насочена надясно съвкупност. С оглед да се опрости по-нататъшното изложение, в § 4 се изучават граници на редици с такива по-сложни индексни множества.

Самият стилтесов интеграл е въведен в § 5. Адитивността му е установена в § 6. За разлика от римановите интеграли при стилтесовите винаги може да се интегрира по части и това техническо твърдение е доказано в § 7. Особено важно е, че непрекъснатите функции са интегрируеми спрямо функциите с ограничена вариация. Тази теорема е доказана в § 8. В § 9 са посочени случаи, при които стилтесовият интеграл може да се сведе към риманов. Параграф 10 съдържа оценка отгоре за модула на един стилтесов интеграл, аналогична на познатата оценка за римановия. В § 11 е представена класическа теорема за граничен преход, а в § 12 е показано по какъв начин стилтесовият интеграл може да се пренесе в $\mathbf{R}^n$.

Параграфите 3, 7, 10, 11 и 12 могат да се пропуснат при първо четене.

§ 2.1. ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕНА ВАРИАЦИЯ

Нека функцията $\varphi:[a, b]\to\mathbf{R}$ е дефинирана в ограничения и затворен интервал $[a, b]$. За всяко подразделяне

(1) $$\gamma:\quad a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_m=b$$

на интервала $[a, b]$ може да се образува числото

$$V_\gamma=\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})|. \tag{2}$$

Когато γ пробягва съвкупността Γ на всички подразделяния (1) на интервала $[a, b]$, (2) пробягва някаква (зависеща от функцията φ) съвкупност $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от неотрицателни реални числа. Казва се, че функцията φ е *с ограничена вариация,* когато съвкупността $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е ограничена отгоре. Когато това е така, числото

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\varphi=\sup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$$

се нарича *вариация* на функцията φ в интервала $[a, b]$.

Очевидно е, че *ако функцията φ е монотонна, тя е с ограничена вариация в $[a, b]$ и*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\varphi=|\varphi(b)-\varphi(a)|.$$

Също така, *ако функцията φ е диференцируема в $[a, b]$ и производната ѝ е ограничена в този интервал, то φ е с ограничена вариация.* Наистина нека $|\varphi'(x)|\leqq M$ за всяко $x\in[a, b]$. Тогава за всяко подразделяне (1) на $[a, b]$ ще имаме

$$V_\gamma=\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{m} |\varphi'(\xi_i)|(x_i-x_{i-1})$$

$$\leqq M\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})=M(b-a)$$

поради теоремата за крайните нараствания. Получената верига от равенства и неравенства показва, че φ наистина е с ограничена вариация.

От дадените определения следва, че ако функцията φ е с ограничена вариация в $[a, b]$, то за всяко $x\in[a, b]$ е в сила

$$|\varphi(x)-\varphi(a)|\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\varphi.$$

Ето защо в този случай φ е ограничена. Следователно неограничените функции са примери за функции, които не са с ограничена вариация. Не е трудно да се посочи и пример за ограничена функция, която няма ограничена вариация: непосредствено се съобразява, че такава е функцията на Дирихле

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ рационално,} \\ 1 & \text{при } x \text{ ирационално,}\end{cases}$$

разгледана например в интервала $[a, b]$. Тази функция е прекъсната навсякъде. Съществуват даже диференцируеми функции без ограничена вариация (вж. зад. 7)

2.1.1. Предложение. *Ако функцията* $\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *е с ограничена вариация в интервала* $[a, b]$, *то* φ *е с ограничена вариация във всеки подинтервал на* $[a, b]$ *и за всяко* $c \in [a, b]$ *е изпълнено равенството*

$$\bigvee_a^b \varphi = \bigvee_a^c \varphi + \bigvee_c^b \varphi. \tag{3}$$

Доказателство. Съществуването на вариациите в дясната страна на (3) е очевидно. Ето защо само ще докажем равенството (3).

Нека (1) е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$. Нека например $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Да разгледаме съответните подразделяния

$$\gamma'\colon \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} \leqq c,$$

$$\gamma''\colon \quad c \leqq x_k < x_{k+1} < \ldots < x_m = b$$

и да положим

$$V_{\gamma'} = \sum_{i=1}^{k-1} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\varphi(c) - \varphi(x_{k-1})|,$$

$$V_{\gamma''} = |\varphi(x_k) - \varphi(c)| + \sum_{i=k+1}^{m} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|.$$

Тъй като за числото V_γ, определено с (2), имаме очевидно

$$V_\gamma = \sum_{i=1}^{k-1} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| + \sum_{i=k+1}^{m} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|,$$

то $V_\gamma \leqq V_{\gamma'} + V_{\gamma''}$. Ето защо от дефиницията на вариацията следва

$$V_\gamma \leqq \bigvee_a^c \varphi + \bigvee_c^b \varphi. \tag{4}$$

Така се убедихме, че за всяко подразделяне (1) на $[a, b]$ е изпълнено (4). Това неравенство показва, че числото $\bigvee\limits_a^c \varphi + \bigvee\limits_c^b \varphi$ е една горна граница на множеството $\{V_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Тъй като вариацията на φ в $[a, b]$ е най-малката горна граница на това множество, от (4) следва

$$\bigvee_a^b \varphi \leqq \bigvee_a^c \varphi + \bigvee_c^b \varphi. \tag{5}$$

За да докажем и неравенство с противоположната посока, да разгледаме произволни подразделяния

$$\gamma'\colon \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = c$$

и

$$\gamma'': \qquad c=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n=b$$

на интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогава

$$\gamma: \quad a=x_0<\ldots<x_m=c=y_0<y_1<\ldots<y_n=b$$

е подразделяне на интервала $[a, b]$. При това

$$V_{\gamma'}+V_{\gamma''}=V_\gamma$$

и следователно $V_{\gamma'}+V_{\gamma''}\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi$, поради което

$$V_{\gamma'}\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi-V_{\gamma''}. \tag{6}$$

Да фиксираме γ'' и да оставим γ' да пробяга всички подразделяния на $[a, c]$. Неравенството (6) показва, че числото $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi-V_{\gamma''}$ е горна граница за множеството $\{V_{\gamma'}\}$. Тъй като $\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi$ е най-малката горна граница на това множество, то

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi-V_{\gamma''}$$

и следователно

$$V_{\gamma''}\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi-\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi. \tag{7}$$

Но подразделянето γ'' бе фиксирано произволно. Ето защо (7) по казва, че числото $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi-\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi$ е горна граница за множеството $\{V_{\gamma''}\}$, където γ'' пробягва всевъзможните подразделяния на $[c, b]$. Следователно $\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\ \varphi\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi-\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi$, или

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\ \varphi\leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi.$$

От това неравенство и от (5) следва (3) и предложението е доказано

§ 2.2. ПРЕДСТАВЯНЕ НА ФУНКЦИИТЕ С ОГРАНИЧЕНА ВАРИАЦИЯ КАТО РАЗЛИКИ НА МОНОТОННИ ФУНКЦИИ

Предложение 1.1 позволява за всяка функция $\varphi:[a, b]\to\mathbf{R}$ с ограничена вариация да се образува функцията $\Phi:[a, b]\to\mathbf{R}$, определена с

$$\varphi\ (x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi$$

за $x\in[a, b]$. Да разгледаме две точки x и y с $a\leqq x\leqq y\leqq b$. Тогава

$$\Phi\ (y)=\overset{y}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi+\overset{y}{\underset{x}{\mathrm{V}}}\ \varphi\geqq \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\ \varphi=\Phi\ (x),$$

понеже вариацията е винаги неотрицателна. Ето защо $\Phi(y) \geqq \Phi(x)$, т. е. функцията Φ е растяща.

Следващата теорема установява, че функциите с ограничена вариация притежават твърде проста структура.

2.2.1. Теорема. *Всяка функция с ограничена вариация може да се представи като разлика на две растящи функции.*

Доказателство. Нека функцията $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ има ограничена вариация. Очевидно

$$\varphi = \Phi - (\Phi - \varphi),$$

където Φ е функцията, определена по-горе. Ето защо теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че функцията $\Phi - \varphi$ е растяща. За тази цел трябва да се убедим, че при $a \leqq x \leqq y \leqq b$ е в сила неравенството

$$\Phi(x) - \varphi(x) \leqq \Phi(y) - \varphi(y),$$

или, което е същото,

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqq \bigvee_x^y \varphi. \tag{1}$$

За да докажем (1), ще отбележим, че точките x и y образуват подразделяне на интервала $[x, y]$ и поради това $|\varphi(y) - \varphi(x)|$ е едно от числата V_γ за φ в интервала $[x, y]$. Ето защо изпълнено е даже по-силното неравенство $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqq \bigvee_x^y \varphi$. С това теоремата е доказана.

Следващото предложение представлява определен самостоятелен интерес и същевременно позволява горната теорема малко да се допълни.

2.2.2. Предложение. *Нека функциите* $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbf{R}$ *са с ограничена вариация. Тогава и функциите*

$$\varphi + \psi, \quad \varphi - \psi, \quad \varphi\psi$$

са с ограничена вариация.

Доказателство. Ще се занимаем само с твърдението за $\varphi - \psi$, а останалите случаи ще предоставим на читателя.

Нека

$$\gamma: \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$. Тогава

$$\sum_{i=1}^{m} |(\varphi(x_i) - \psi(x_i)) - (\varphi(x_{i-1}) - \psi(x_{i-1}))|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{m} |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| \leqq \bigvee_a^b \varphi + \bigvee_a^b \psi.$$

По този начин съвкупността на числата V_γ за функцията $\varphi - \psi$ в интервала $[a, b]$ е ограничена отгоре. Ето защо $\varphi - \psi$ има ограничена вариация в $[a, b]$.

Вече видяхме, че монотонните функции са с ограничена вариация. По този начин от теорема 1 и предложение 2 получаваме следното твърдение:

2.2.3. Следствие. *Една функция* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ *е с ограничена вариация точно когато е разлика на две растящи функции.*

§ 2.3. ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕНА ВАРИАЦИЯ В $\mathbf{R}^n$

За да съобразим как най-удобно да пренесем в $\mathbf{R}^n$ разглежданията от предишните два параграфа, да разгледаме отново една функция $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$. За произволни x, y с $a \leqq x \leqq y \leqq b$ да положим

$$\mu([x, y)) = \varphi(y) - \varphi(x). \tag{1}$$

Така получаваме изображение μ, което на всеки полузатворен интервал $[x, y)$ в $[a, b]$ съпоставя числото (1).

Нека $a \leqq x \leqq y \leqq z \leqq b$. Тогава

$$\mu([x, z)) = \mu([x, y)) + \mu([y, z)),$$

т. е. μ притежава свойството адитивност.

Да отбележим също, че функцията φ е растяща точно когато стойностите на μ са неотрицателни.

Нека сега

$$a_1 \leqq b_1,\ a_2 \leqq b_2, \dots, a_n \leqq b_n \tag{2}$$

са n двойки от реални числа. Под *полузатворен паралелепипед* в $\mathbf{R}^n$, определен от числата (2), ще разбираме съвкупността на всички точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от $\mathbf{R}^n$ с $a_i \leqq x_i < b_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$.

Нека Δ е произволен полузатворен паралелепипед в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{S}$ е съвкупността на всички полузатворени паралелепипеди в $\mathbf{R}^n$, които се съдържат в Δ. Под *адитивна функция* в $\mathbf{S}$ ще разбираме всяко изображение $\mu : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$, което притежава следното свойство: винаги когато $\delta \in \mathbf{S}$, $\delta_i \in \mathbf{S}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $\delta = \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i$ и $\delta_i \cap \delta_j = \varnothing$ при $i \neq j$, изпълнено е равенството $\mu(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\delta_i)$.

Ще казваме, че една адитивна функция μ в $\mathbf{S}$ е с *ограничена вариация,* когато съществува такава константа M, че винаги когато

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i (\delta_i \in \mathbf{S}) \text{ и } \delta_i \cap \delta_j = \varnothing$$

при $i \neq j$, да е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^{m} |\mu(\delta_i)| \leqq M. \tag{3}$$

Точната горна граница на сумите в лявата страна на (3) се нарича в този случай *вариация* на μ в Δ. Вариацията на μ в Δ ще означаваме с $v(\Delta)$.

По аналогия с предишните два параграфа читателят ще установи, че ако μ има ограничена вариация в Δ, то μ има ограничена вариация във всеки подпаралелепипед на Δ. Така получаваме функция $v : S \to R$, която е неотрицателна и адитивна. Функцията μ *е с ограничена вариация точно когато може да се представи като разлика на две неотрицателни адитивни функции в* S.

§ 2.4. ОБОБЩЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО СХОДИМОСТ

В анализа понякога е удобно да се използува едно общо понятие за сходимост. Тук ще направим първата стъпка към въвеждането му.

Нека Γ е насочено надясно множество. Под *редица* с реални членове и *индексно множество* Γ ще разбираме всяко изображение $x : \Gamma \to R$, където R е множеството на реалните числа. В този случай стойността $x(\gamma)$ на x за произволен елемент γ на Γ обикновено се означава с x_γ, а x често се записва и по-сложно така: $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$.

Разбира се, обичайните редици

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

са редици с индексно множество съвкупността N на целите положителни числа, снабдена с обичайната си наредба.

Нека $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е редица от реални числа и a е реално число. Казва се, че a е *граница* на редицата $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\gamma_0 \in \Gamma$, че за всяко $\gamma \in \Gamma$, за което е изпълнено неравенството

(1) $$\gamma \geqq \gamma_0,$$

да е изпълнено и неравенството

(2) $$|x_\gamma - a| < \varepsilon.$$

Така въведените понятия създават определени удобства, понеже, от една страна, работят в широк кръг случаи, а същевременно притежават познатите от елементарния анализ свойства на сходящите редици. Да се заемем с обобщаването на част от тези свойства.

2.4.1. Предложение. *Всяка редица от реални числа може да има най-много една граница.*

Доказателство. Нека $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е редица от реални числа, а a и b са граници на тази редица. Тогава за произволно положително число ε съществува такова $\gamma_0 \in \Gamma$, че за всяко $\gamma \in \Gamma$ с (1) да е в сила (2). Тъй като и b е граница на разглежданата редица, съществува такова $\gamma_1 \in \Gamma$, че за всяко $\gamma \in \Gamma$ с $\gamma \geqq \gamma_1$ да е в сила $|x_\gamma - b| < \varepsilon$.

Но според дефиницията на редица множеството Γ е насочено надясно. Следователно съществува $\gamma \in \Gamma$ с $\gamma \geqq \gamma_0$ и $\gamma \geqq \gamma_1$. За него трябва да са изпълнени неравенствата (2) и $|x_\gamma - b| < \varepsilon$. Ето защо

$$|a - b| \leqq |a - x_\gamma| + |x_\gamma - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon,$$

т. е. $|a - b| < 2\varepsilon$. Тъй като ε е произволно положително число, от

послед
И
ници.
пред
—
и са
(3)
(4)
(5)
Ако
(6)
съ
7
(8
(

последното неравенство се получава $a=b$ и предложението е доказано.

И така, ако редицата $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ има граница a, тя няма други граници. В този случай се пише

$$a=\lim_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma \text{ или } a=\lim\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \text{ или } \underset{\gamma\to\infty}{x_\gamma\to a}.$$

Редиците, които имат граници, се наричат *сходящи*. Следващото предложение посочва правилата за смятане със сходящи редици.

2.4.2. Предложение. *Нека редиците $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ и $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ са сходящи, $a=\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ и $b=\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$. Тогава са сходящи и редиците*

$$\{x_\gamma+y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma},\ \{x_\gamma-y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma},\ \{x_\gamma\, y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

и са изпълнени равенствата

$$\lim\{x_\gamma+y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=a+b, \tag{3}$$

$$\lim\{x_\gamma-y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=a-b, \tag{4}$$

$$\lim\{x_\gamma\, y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=a\, b. \tag{5}$$

Ако са изпълнени и условията $b\neq 0$ и $y_\gamma\neq 0$ за всяко $\gamma\in\Gamma$, сходяща е и редицата $\left\{\dfrac{x_\gamma}{y_\gamma}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ и е изпълнено равенството

$$\lim\left\{\frac{x_\gamma}{y_\gamma}\right\}_{\gamma\in\Gamma}=\frac{a}{b}. \tag{6}$$

Доказателство. С малки промени то имитира съответното доказателство от елементарния анализ. Ето защо ще докажем само (3). Нека ε е произволно положително число. Тогава, разбира се, числото $\varepsilon/2$ също е положително и от сходимостта на $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ следва съществуването на такова $\gamma_1\in\Gamma$, че за всяко $\gamma\in\Gamma$ с

$$\gamma\geqq\gamma_1 \tag{7}$$

да е в сила

$$|x_\gamma-a|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Също така от сходимостта на $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ следва съществуването на такова $\gamma_2\in\Gamma$, че за всяко $\gamma\in\Gamma$ с

$$\gamma\geqq\gamma_2 \tag{9}$$

да е в сила

$$|y_\gamma-b|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

По този начин разполагаме с два елемента γ_1 и γ_2 на Γ. Но множеството Γ е насочено надясно. Ето защо съществува $\gamma_3\in\Gamma$ с

$$\gamma_3\geqq\gamma_1,\ \gamma_3\geqq\gamma_2. \tag{11}$$

Нека сега γ е елемент на Γ, за който е изпълнено

$$(12) \qquad \gamma \geqq \gamma_3.$$

От (11) и (12) следват неравенствата (7) и (9). По силата на изборите на γ_1 и γ_2 от (7) и (9) следват съответно (8) и (10). Ето защо при (12) имаме

$$|(x_\gamma+y_\gamma)-(a+b)| \leqq |x_\gamma-a|+|y_\gamma-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т. е.

$$|(x_\gamma+y_\gamma)-(a+b)| < \varepsilon.$$

С това (3) е доказано.

Следващата теорема показва, че и в този по-общ случай условието на Коши е необходимо и достатъчно за сходимост.

2.4.3. Теорема. *За да бъде сходяща една редица* $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *от реални числа, е необходимо и достатъчно за всяко* $\varepsilon>0$ *да съществува такова* $\gamma_0\in\Gamma$, *че за всеки два индекса* α, $\beta\in\Gamma$, *за които са изпълнени неравенствата*

$$(13) \qquad \alpha \geqq \gamma_0,\ \beta \geqq \gamma_0,$$

да е изпълнено и неравенството

$$(14) \qquad |x_\alpha - x_\beta| < \varepsilon.$$

Доказателство. Необходимостта се установява също както и в елементарния анализ. Ето защо ще се занимаем само с достатъчността.

От условието на теоремата се получава, че съществува такова $\gamma_1\in\Gamma$, че при $\gamma\in\Gamma$ с $\gamma\geqq\gamma_1$ да е в сила $|x_\gamma-x_{\gamma_1}|\leqq 1$. Аналогично се вижда и съществуването на такъв индекс $\gamma_2\geqq\gamma_1$, че за всяко $\gamma\in\Gamma$ с $\gamma\geqq\gamma_2$ да е изпълнено неравенството $|x_\gamma-x_{\gamma_2}|<\frac{1}{2}$. Сега пък добиваме възможност да определим индекс $\gamma_3\geqq\gamma_2$, за който от $\gamma\geqq\gamma_3$ винаги да следва $|x_\gamma-x_{\gamma_3}|<\frac{1}{3}$. Ако продължим този процес неограничено, ще получим такава безкрайна растяща редица от индекси

$$(15) \qquad \gamma_1\leqq\gamma_2\leqq\gamma_3\leqq\ldots\leqq\gamma_n\leqq\ldots,$$

че за всяко $\gamma\in\Gamma$ с

$$\gamma\geqq\gamma_n$$

да е изпълнено

$$|x_\gamma-x_{\gamma_n}|<\frac{1}{n}.$$

Да разгледаме сега редицата

$$(16) \qquad x_{\gamma_1},\ x_{\gamma_2},\ \ldots,\ x_{\gamma_n},\ \ldots$$

Тъй като редицата (15) е растяща, при $m>n$ ще имаме $|x_{\gamma_m}-x_{\gamma_n}|<\frac{1}{n}$. Ето защо редицата (16) удовлетворява условието на Коши.

Тъй като (16) е обичайна изброима редица, оттук следва, че тя е сходяща. Нека $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_{\gamma_n}$.

Ще се убедим, че a е граница и на редицата $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Нека за тази цел ε е произволно положително число. Да изберем $n>\frac{2}{\varepsilon}$ по такъв начин, че да е изпълнено и неравенството

$$|x_{\gamma_n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Сега при $\gamma\geqq\gamma_n$ ще имаме очевидно

$$|x_\gamma-a|\leqq|x_\gamma-x_{\gamma_n}|+|x_{\gamma_n}-a|<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

с което теоремата е доказана.

Да отбележим изрично, че в редицата (15) не винаги фигурират произволно големи елементи на Г. Въпреки това, като използуваме условието на Коши, успяваме да докажем неравенството $|x_\gamma-a|<\varepsilon$ за произволно големи γ.

§ 2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И НАЙ-ПРОСТИ СВОЙСТВА НА СТИЛТЕСОВИЯ ИНТЕГРАЛ

В тази точка ще обобщим римановия интеграл, който читателят познава от елементарния анализ. За тази цел на всеки ограничен и затворен интервал $[a, b]$ ще съпоставим по едно насочено надясно множество Г.

Елементите на Г ще бъдат всевъзможните крайни системи

$$\gamma:\quad \begin{cases} x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m; \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \end{cases} \tag{1}$$

от реални числа, за които

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_m=b \tag{2}$$

и

$$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]\qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

По този начин елементите γ на Г са съвкупности от по две неща: подразделяне (2) на интервала $[a, b]$ и междинни точки (3).

Сега ще въведем една проста преднаредба в Г. Нека наред с γ разгледаме още един елемент

$$\delta:\quad \begin{cases} y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n; \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{cases}$$

на Г. Ще казваме, че δ следва γ, и ще пишем $\gamma\leqq\delta$, когато е изпълнено неравенството

$$\max\{(x_i-x_{i-1})\}_{i=1}^m\geqq\max\{(y_j-y_{j-1})\}_{j=1}^n.$$

Това означава, че най-дългият от интервалите

$$(4) \qquad [y_{j-1}, y_j] \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

не надминава по дължина най-дългия от интервалите

$$(5) \qquad [x_{i-1}, x_i] \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

По този начин междинните точки не играят никаква роля при дефиницията на релацията $\lesssim$.

Непосредствено се съобразява, че така въведената релация $\lesssim$ е една преднаредба в Γ, т. е. че $\lesssim$ притежава свойствата: а) $\gamma \lesssim \gamma$ за всяко $\gamma \in \Gamma$; б) от $\alpha \lesssim \beta$ и $\beta \lesssim \gamma$ следва $\alpha \lesssim \gamma$. Тази преднаредба обаче не е наредба. Наистина от неравенствата $\gamma \lesssim \delta$ и $\delta \lesssim \gamma$ следва само, че най-дългите от интервалите (4) и (5) имат еднакви дължини.

Преднаредбата $\lesssim$ превръща Γ в насочено надясно множество, т. е. за всеки два елемента α и β на Γ съществува $\gamma \in \Gamma$ с $\alpha \lesssim \gamma$ и $\beta \lesssim \gamma$. За да построим такова γ, е достатъчно да разгледаме подразделяне, което съдържа подразделящите точки и на α, и на β, а междинните точки можем да изберем произволно.

По този начин на всеки интервал $[a, b]$ съпоставихме по едно насочено надясно множество Γ. Ще наричаме Γ *множество на подразделянията* на $[a, b]$.

Нека сега f и g са две реални функции, дефинирани в интервала $[a, b]$. За произволно $\gamma \in \Gamma$, зададено с (1), можем да образуваме числото

$$S_\gamma = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\ (g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

По този начин получаваме една (зависеща от функциите f и g) редица $\{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ с индексно множество Γ. Когато тази редица е сходяща, казва се, че функцията f е *интегрируема спрямо функцията* g в интервала $[a, b]$, а числото

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$$

се нарича *стилтесов интеграл* на f спрямо g в интервала $[a, b]$.

Така например, ако $f=c$ е някаква константа, f е интегрируема в интервала $[a, b]$ спрямо всяка функция $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ и

$$\int_a^b c\,dg(x) = c(g(b) - g(a)).$$

Наистина в този случай за всяко $\gamma \in \Gamma$ очевидно имаме $S_\gamma = c\ (g\ (b) - g\ (a))$.

Аналогично, ако $g=c$ е някаква константа, всяка функция $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема спрямо g и

$$\int_a^b f\ (x)\ dc = 0.$$

При $g(x)=x$ за всяко $x\in[a,b]$ една функция f е интегрируема спрямо g в интервала $[a,b]$ точно когато е интегрируема в риманов смисъл и

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

където отдясно стои римановият интеграл. Ето защо интегралът на Стилтес е обобщение на римановия интеграл, а означението (6) при $g(x)=x$ се съгласува с досега използваните означения.

Да посочим и пример, когато стилтесовият интеграл не съществува. Нека функцията $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е дефинирана с $f(x)=1$ при рационално x и $f(x)=0$ при ирационално x, а $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ е произволна функция с $g(b)\neq g(a)$. Нека γ_0 е произволен елемент на Γ. Да изберем произволно $\gamma\geq\gamma_0$ с рационални междинни точки. Тогава очевидно

$$S_\gamma=\sum_{i=1}^{m}(g(x_i)-g(x_{i-1}))=g(b)-g(a).$$

Ако пък $\delta\geq\gamma_0$ и междинните точки на δ са ирационални, то

$$S_\delta=0.$$

Тъй като $g(b)-g(a)\neq 0$, последните две равенства показват, че редицата $\{S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ не удовлетворява условието на Коши, поради което не е сходяща. Ето защо функцията f не е интегрируема спрямо g.

Следващите две предложения показват, че стилтесовият интеграл е линеен както спрямо f, така и спрямо g.

2.5.1. Предложение. *Нека функциите f_1, f_2 и g са дефинирани в интервала $[a,b]$, f_1 и f_2 са интегруеми спрямо g, а λ_1 и λ_2 са константи. Тогава функцията $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ е интегрируема спрямо g и е изпълнено равенството*

$$\int_a^b(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\,dg(x)=\lambda_1\int_a^b f_1(x)\,dg(x)+\lambda_2\int_a^b f_2(x)\,dg(x). \tag{7}$$

Доказателство. Нека γ е елемент на Γ, зададен с (1). Да положим

$$S_{1\gamma}=\sum_{i=1}^{m}f_1(\xi_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1})),$$

$$S_{2\gamma}=\sum_{i=1}^{m}f_2(\xi_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1})),$$

$$S_\gamma=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_1 f_1(\xi_i)+\lambda_2 f_2(\xi_i))\,(g(x_i)-g(x_{i-1})).$$

Така получаваме трите редици

$$\{S_{1\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma},\ \{S_{2\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma},\ \{S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}. \tag{8}$$

От горните равенства следва непосредствено

$$S_\gamma=\lambda_1\ S_{1\gamma}+\lambda_2\ S_{2\gamma} \tag{9}$$

за всяко $\gamma\in\Gamma$.

От друга страна, от определението на стилтесовия интеграл получаваме, че първите две от редиците (8) са сходящи и

$$\lim\ \{S_{1\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}=\int_a^b f_1(x)\ dg(x). \tag{10}$$

$$\lim\ \{S_{2\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}=\int_a^b f_2(x)\ dg(x). \tag{11}$$

Сега от (9) и правилата за смятане със сходящи редици (вж. предложение 4.2) следва, че и последната от редиците (8) е сходяща и

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma=\lambda_1 \lim_{\gamma\in\Gamma} S_{1\gamma}+\lambda_2 \lim_{\gamma\in\Gamma} S_{2\gamma}. \tag{12}$$

От (9) — (12) очевидно следва (7). С това предложението е доказано.

2.5.2. Предложение. *Нека функциите f, g_1 и g_2 са дефинирани в интервала $[a, b]$, f е интегрируема както спрямо g_1, така и спрямо g_2, а λ_1 и λ_2 са константи. Тогава функцията f е интегрируема и спрямо функцията $\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$ и е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\ d\ (\lambda_1 g_1\ (x)+\lambda_2\ g_2(x))$$

$$=\lambda_1 \int_a^b f(x\ \ dg_1(x)+\lambda_2 \int_a^b f(x)\ d\ g_2(x).$$

Д о к а з а т е л с т в о. Прилагат се същите съображения, както и при предишното доказателство. Подробностите предоставяме на читателя.

§ 2.6. АДИТИВНОСТ НА СТИЛТЕСОВИЯ ИНТЕГРАЛ

Ето формулировката на твърдението за адитивност.

2.6.1. Предложение. *Нека функциите f и g са дефинирани в интервала $[a, b]$ и f е интегрируема спрямо g в $[a, b]$. Тогава f е интегрируема спрямо g във всеки подинтервал на $[a, b]$ и за всяко $c\in(a, b)$ е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\ d\ g(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)\ dg(x). \tag{1}$$

Доказателство. С А, В и Г ще означим насочените множества на подразделянията съответно на интервалите $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$. Тъй като f е интегрируема по условие спрямо g в интервала $[a, b]$, редицата $\{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е сходяща, а следователно удовлетворява и условието на Коши (вж. теорема 4.3).

Ето защо за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\gamma_0 \in \Gamma$, за което от $\gamma \geqq \gamma_0$ винаги следва

(2) $$\left|S_\gamma - S_{\gamma_0}\right| < \varepsilon.$$

Без ограничение на общността можем да предположим, че c е деляща точка на γ_0, която е междинна за всеки от двата подинтервала на подразделянето, на което c е край. Ето защо точките на γ_0, които лежат в $[a, c]$, образуват подразделяне α_0 на $[a, c]$. Аналогично получаваме и подразделяне β_0 на $[c, b]$. При това, както не е трудно да се съобрази,

(3) $$S_{\gamma_0} = S_{\alpha_0} + S_{\beta_0}.$$

Нека сега α е подразделяне на $[a, c]$, за което е изпълнено неравенството $\alpha \geqq \alpha_0$. След разглеждане на точките от α и на точките от β_0 получаваме подразделяне γ на $[a, b]$ с $\gamma \geqq \gamma_0$. Ето защо за γ ще бъде изпълнено неравенството (2). Същевременно

$$S_\alpha - S_{\alpha_0} = S_\gamma - S_{\gamma_0}.$$

Ето защо от (2) следва

(4) $$\left|S_\alpha - S_{\alpha_0}\right| < \varepsilon.$$

Аналогично при $\beta \geqq \beta_0$ е в сила

(5) $$\left|S_\beta - S_{\beta_0}\right| < \varepsilon.$$

По този начин е показано, че редиците $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{S_\beta\}_{\beta \in B}$ удовлетворяват условието на Коши. Ето защо те са сходящи, или, което е същото, функцията f е интегрируема спрямо g във всеки от интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$.

Неравенствата (2), (4) и (5) са изпълнени за всички достатъчно големи γ, α и β. Ето защо след извършване на граничен преход от тях се получават неравенствата

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\, g(x) - S_{\gamma_0}\right| \leqq \varepsilon,$$

$$\left|\int_a^c f(x)\, d\, g(x) - S_{\alpha_0}\right| \leqq \varepsilon$$

и

$$\left|\int_c^b f(x)\, d\, g(x) - S_{\beta_0}\right| \leqq \varepsilon,$$

които заедно с (3) дават

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\,g(x)-\int_a^c f(x)\,d\,g(x)-\int_c^b f(x)\,d\,g(x)\right|\leqq 3\,\varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно положително число, последното неравенство влече (1). С това предложението е доказано.

Да отбележим изрично, че може да се случи f да е интегруема спрямо g във всеки от интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$, без при това f да е интегруема спрямо g в $[a, b]$.

§ 2.7. ИНТЕГРИРАНЕ ПО ЧАСТИ ПРИ СТИЛТЕСОВИТЕ ИНТЕГРАЛИ

Оказва се, че при стилтесовите интеграли винаги може да се интегрира по части.

2.7.1. Предложение. *Нека функциите f и g са дефинирани в интервала $[a, b]$ и f е интегруема спрямо g в този интервал. Тогава и функцията g е интегруема спрямо f в $[a, b]$ и е изпълнено равенството*

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,d\,g(x)=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_a^b g(x)\,d\,f(x).$$

Доказателство. Вече видяхме, че свойствата на стилтесовия интеграл се получават от свойства на крайните суми след граничен преход. По същия начин стоят нещата и при интегрирането по части. То се основава на едно тъждество, наречено преобразуване на Абел, което играе определена роля и в други въпроси на класическия анализ.

Нека $a_0, a_1, \dots, a_m, a_{m+1}$ и $b_0, b_1, \dots, b_m$ са две системи от числа. Тогава е изпълнено равенството

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{m} a_i\,(b_i-b_{i-1})=a_{m+1}\,b_m-a_0\,b_0-\sum_{i=1}^{m+1} b_{i-1}\,(a_i-a_{i-1}),$$

което е и преобразуването на Абел. То се доказва непосредствено.

За произволно подразделяне

$$\gamma:\begin{cases} a=x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_m=b;\\ \xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_m\end{cases}$$

на $[a, b]$ с γ' ще означаваме подразделянето

$$\gamma':\begin{cases} a=\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_m,\ \xi_{m+1}=b;\\ x_0,\ x_1, \dots, x_{m-1},\ x_m\end{cases}$$

и ще положим

$$T_\gamma=\sum_{i=1}^{m} g(\xi_i)\,\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big),$$

$$S_{\gamma'}=\sum_{i=1}^{m+1} f(x_{i-1})\,(g(\xi_i)-g(\xi_{i-1})).$$

От (2) следва

(3) $$T_\gamma=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-S_{\gamma'}.$$

В това равенство оставяме γ да расте неограничено. От определението на γ' следва, че то също расте неограничено. Тъй като функцията f е интегрируема спрямо g в $[a, b]$ съгласно условието на предложението, ще имаме

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} S_{\gamma'}=\int_a^b f(x)\,d\,g(x).$$

Ето защо от (3) се получава, че и редицата $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е сходяща и е изпълнено равенството

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_a^b f(x)\,d\,g(x),$$

откъдето (1) се получава незабавно. С това предложението е доказано.

§ 2.8. ИНТЕГРИРАНЕ НА НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ СПРЯМО ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕНА ВАРИАЦИЯ

Следващата теорема посочва едно общо условие за съществуване на стилтесовия интеграл.

2.8.1. Теорема. *Нека функциите f и g са дефинирани в интервала $[a, b]$, f е непрекъсната и g е с ограничена вариация. Тогава f е интегрируема спрямо g в интервала $[a, b]$.*

Доказателство. За произволно подразделяне

(1) $$\gamma:\begin{cases} a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m=b;\\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_m\end{cases}$$

на $[a, b]$ да положим

$$S_\gamma=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1})).$$

По определение трябва да покажем, че така получената редица $\{S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е сходяща. Съгласно теорема 4.3 за тази цел е достатъчно да се убедим, че тя удовлетворява условието на Коши.

Нека ε е произволно положително число. Функцията f по предположение е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Ето защо тя е и равномерно непрекъсната в този интервал. Следователно съществува такова число $\delta>0$, че за всеки две точки x' и x'' от $[a, b]$, за които $|x'-x''|<\delta$, да е в сила

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Да разгледаме сега елемент

$$\gamma_0:\begin{cases} a=y_0,\ y_1,\ldots,y_n=b;\\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots,\eta_n\end{cases}$$

на Г, за който

(2) $$y_l-y_{l-1}<\delta \qquad (l=1, 2, \ldots, n),$$

и нека зададеният с (1) елемент γ на Г да удовлетворява условието $\gamma\geqq\gamma_0$. Тогава ще бъдат изпълнени и неравенствата

(3) $$x_l-x_{l-1}<\delta \qquad (l=1, 2, \ldots, m).$$

Сега да означим с γ_1 такъв елемент на Г, който съдържа делящите точки и на γ_0, и на γ:

$$\gamma_1:\begin{cases} a=z_0,\ z_1,\ z_2,\ldots,z_p=b;\\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ldots,\zeta_p.\end{cases}$$

Нека за делящите точки x_l на γ имаме $x_l=z_{j_l}$ $(l=1, 2,\ldots, m)$. Тогава S_{γ_1} може очевидно да се представи във вида

$$S_{\gamma_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\zeta_j)\,(g(z_j)-g(z_{j-1})).$$

От друга страна, за S_γ имаме очевидно

$$S_\gamma=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\xi_i)\,(g(z_j)-g(z_{j-1})).$$

Ето защо

$$S_\gamma-S_{\gamma_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} (f(\xi_i)-f(\zeta_j))\,(g(z_j)-g(z_{j-1}))$$

и следователно

(4) $$|S_\gamma-S_{\gamma_1}|\leqq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} |f(\xi_i)-f(\zeta_j)|\,|g(z_j)-g(z_{j-1})|.$$

Да разгледаме произволни i и j, за които $i=1, 2,\ldots, m$ и $j_{i-1}<j\leqq j_i$. Тогава

$$x_{i-1}\leqq\xi_i\leqq x_i \text{ и } x_{i-1}\leqq\zeta_j\leqq x_i,$$

което заедно с (3) дава $|\xi_i-\zeta_j|<\delta$. Ето защо от избора на δ се получава $|f(\xi_i)-f(\zeta_j)|<\varepsilon$. Сега от (4) следва

$$|S_\gamma-S_{\gamma_1}|\leqq\varepsilon\sum_{j=1}^{p}|g(z_j)-g(z_{j-1})|.$$

Така получихме

$$|S_\gamma - S_{\gamma_1}| \leqq \varepsilon \bigvee_a^b g$$

и аналогично

$$|S_{\gamma_0} - S_{\gamma_1}| \leqq \varepsilon \bigvee_a^b g.$$

Ето защо

$$|S_\gamma - S_{\gamma_0}| \leqq 2\varepsilon \bigvee_a^b g,$$

с което е установено, че редицата $\{S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ удовлетворява условието на Коши. По този начин теоремата е доказана.

§ 2.9. ПРЕДСТАВЯНЕ НА СТИЛТЕСОВИЯ ИНТЕГРАЛ КАТО РИМАНОВ

Нека функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$, а функцията g е диференцируема и производната ѝ е непрекъсната в този интервал. Вече знаем, че при тези предположения g е с ограничена вариация (вж. § 1). Ето защо интегралът $\int_a^b f(x)\, d\, g(x)$ съществува по силата на теорема 8.1. Следващото предложение показва, че въпросният интеграл може да се сведе до риманов.

2.9.1. Предложение. *Нека функцията* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *е интегруема в риманов смисъл в* $[a, b]$, *а функцията* $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ *е диференцируема в този интервал и производната ѝ е интегруема в риманов смисъл в* $[a, b]$. *Тогава* $f g'$ *е интегруема в* $[a, b]$ *и е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\, d\, g(x) = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, d\, x. \tag{1}$$

Доказателство. Тъй като функциите f и g' са интегруеми в риманов смисъл в $[a, b]$, същото е вярно и за произведението $f g'$. Оттук, разбира се, следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова подразделяне γ_0 на $[a, b]$, че за всяко подразделяне

$$\gamma: \begin{cases} a = x_0, \ x_1, \ x_2, \dots, x_m = b; \\ \xi_1, \ \xi_2, \dots, \xi_m \end{cases}$$

с $\gamma \geqq \gamma_0$ да е в сила

$$\left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\, (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, d\, x \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ако положим

$$S_\gamma = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\, (g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

от теоремата за крайните нараствания следва

$$S_\gamma=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\, g'(\xi_i^*)\,(x_i-x_{i-1}), \tag{3}$$

където ξ_i^* е точка от интервала $[x_{i-1}, x_i]$.

Разбира се, (2) запазва валидността си, ако заместим ξ_i с ξ_i^*. Ето защо от (2) и (3) следва

$$\left|S_\gamma-\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx\right| \tag{4}$$

$$\leqq \varepsilon+\sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i^*)-f(\xi_i)|\, |g'(\xi_i^*)|\,(x_i-x_{i-1}).$$

Тъй като функцията g' е интегрируема в $[a, b]$, тя е ограничена в $[a, b]$, т. е. съществува константа M, за която е изпълнено неравенството $|g'(x)|\leqq M$ за всяко $x\in[a, b]$. Сега от (4) се получава

$$\left|S_\gamma-\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx\right| \tag{5}$$

$$\leqq \varepsilon+M\sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i^*)-f(\xi_i)|\,(x_i-x_{i-1}).$$

Тъй като, от друга страна, и функцията f е интегрируема в риманов смисъл, без ограничение на общността можем да считаме, че подразделянето γ_0 е избрано така, че да е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i^*)-f(\xi_i)|\,(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

при $\gamma\geqq\gamma_0$. Ето защо от (5) се получава

$$\left|S_\gamma-\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx\right|\leqq\varepsilon\,(1+M)$$

при всяко $\gamma\geqq\gamma_0$, с което предложението е доказано.

§ 2.10. ОЦЕНКА НА СТИЛТЕСОВИЯ ИНТЕГРАЛ

Следващото предложение съдържа важно свойство на стилтесовия интеграл.

2.10.1. Предложение. *Нека функцията f е дефинирана и ограничена в интервала $[a, b]$, а функцията g има ограничена вариация в този интервал. Ако при тези предположения f е интегрируема спрямо g в този интервал, то*

$$(1) \qquad \left| \int_a^b f(x)\, d\, g(x) \right| \leqq \sup_{x \in [a,\, b]} |f(x)| \; \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека

$$\gamma : \begin{cases} a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b; \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \end{cases}$$

е произволно подразделяне на $[a, b]$. За съответната сума

$$S_\gamma = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

имаме очевидно

$$|S_\gamma| \leqq \sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i)|\, |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

$$\leqq \sup_{x \in [a,\, b]} |f(x)| \sum_{i=1}^{m} |g(x_i) - g(x_{i-1})|.$$

Ето защо

$$|S_\gamma| \leqq \sup_{x \in [a,\, b]} |f(x)| \; \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g,$$

откъдето (1) се получава след граничен преход. С това предложението е доказано.

Като приложение на това предложение ще отбележим следното елементарно правило за граничен преход в интеграла на Стилтес.

2.10.2. Предложение. *Нека g е някаква функция с ограничена вариация в интервала $[a, b]$, а*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е редица от непрекъснати в интервала $[a, b]$ функции, която клони равномерно в $[a, b]$ към функцията f. Тогава

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\, d\, g(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, d\, g(x).$$

Д о к а з а т е л с т в о. Разбира се, функцията f е непрекъсната, поради което интегралът отляво на (2) съществува. От равномерната сходимост на редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова ν, че при $n > \nu$ да е в сила

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

за всяко $x \in [a, b]$. Сега от (1) се получава

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, d\, g(x) - \int_a^b f(x)\, d\, g(x) \right|,$$

$$=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,d\,g(x)\right| \leqq \varepsilon \bigvee_a^b g$$

при $n>\nu$ и предложението е доказано.

§ 2.11. ТЕОРЕМА НА ХЕЛИ

В стилтесовия интеграл фигурират две функции f и g. Вече видяхме по какъв начин се извършва граничен преход спрямо първата от тях. Тук ще видим как се извършва граничен преход спрямо втората функция.

2.11.1. Лема. *Нека функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$, g е с ограничена вариация в този интервал, ε е положително число и δ е такова положително число, че за всеки две точки x' и x'' от $[a, b]$, за които $|x'-x''|<\delta$, да е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Тогава за всяко подразделяне*

$$\gamma:\begin{cases} a=x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_m=b;\\ \xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_m\end{cases}$$

на $[a, b]$, за което са изпълнени неравенствата $x_i-x_{i-1}<\delta$ за всяко $i=1, 2, \dots, m$, е изпълнено и неравенството

$$\left|\sum_{i=1}^m f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))-\int_a^b f(x)\,d\,g(x)\right| \leqq \varepsilon \bigvee_a^b g. \tag{1}$$

Доказателство. Нека подразделянето γ удовлетворява изискванията на лемата. Тогава от адитивността на стилтесовия интеграл и от правилото за интегриране на константи от § 5 следва

$$\left|\sum_{i=1}^m f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))-\int_a^b f(x)\,d\,g(x)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^m f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))-\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,d\,g(x)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(\xi_i)-f(x))\,d\,g(x)\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^m \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(\xi_i)-f(x))\,d\,g(x)\right|.$$

В i-тото събираемо в последната сума x се изменя в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, който съгласно изискването за γ има дължина, по-малка от δ. От друга страна, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ето защо от избора на δ следва, че при $x_{i-1}\leqq x\leqq x_i$ е в сила $|f(\xi_i)-f(x)|<\varepsilon$. Сега от предложение 10.1 и от адитивността на вариацията (вж. предл. 2.1) следва

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1}))-\int_a^b f(x)\,d\,g(x)\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} \varepsilon \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} g=\varepsilon \bigvee_a^b g.$$

С това лемата е доказана.

2.11.2. Теорема (Хели). *Нека функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ е редица от функции с ограничена вариация в интервала $[a, b]$ и g е функция с ограничена вариация в този интервал. Нека освен това са изпълнени условията:*

а) *съществува гъсто подмножество D на интервала $[a, b]$, за което $a \in D$, $b \in D$ и*

$$\lim_{\alpha\in A} g_\alpha(x)=g(x)$$

за всяко $x \in D$;

б) *съществува такова число M, че за всяко $\alpha \in A$ да е изпълнено неравенството $\bigvee_a^b g_\alpha \leq M$.*

При тези предположения е в сила равенството

$$\lim_{\alpha\in A} \int_a^b f(x)\,d\,g_\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,d\,g(x). \tag{2}$$

Доказателство. Да напомним най-напред, че едно множество $D\subset[a, b]$ се нарича гъсто в $[a, b]$, когато всяка околност на всяка точка от $[a, b]$ съдържа точки от D. Така например, ако интервалът $[a, b]$ не е изроден, множеството на рационалните точки в $[a, b]$ е гъсто в $[a, b]$.

Пристъпвайки към доказателството на теоремата, да изберем произволно положително число ε. Функцията f е по условие непрекъсната в $[a, b]$, а следователно е и равномерно непрекъсната в този интервал. Ето защо съществува такова $\delta>0$, че за всеки две точки x', x'' от $[a, b]$, за които е изпълнено неравенството $|x'-x''|<\delta$, да е изпълнено и неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Да означим с

$$\gamma:\begin{cases} a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m=b;\\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m\end{cases}$$

подразделяне на $[a, b]$, за което $x_i-x_{i-1}<\delta$ и $x_i\in D$ за всяко $i=1, 2, \ldots, m$. Тъй като D е гъсто в $[a, b]$, $a\in D$ и $b\in D$, такова γ очевидно съществува. То позволява прилагането на лема 1 за f и за произволна функция с ограничена вариация в $[a, b]$.

Да положим

$$S_\gamma(f, g_\alpha)=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,(g_\alpha(x_i)-g_\alpha(x_{i-1})) \tag{3}$$

и

(4) $$S_\gamma(f, g)=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\left(g(x_i)-g(x_{i-1})\right).$$

От лема 1 и от условието б) на доказаното предложение следват неравенствата

(5) $$\left|S_\gamma(f, g_\alpha)-\int_a^b f(x)\, d\, g_\alpha(x)\right| \leqq \varepsilon M$$

и

(6) $$\left|S_\gamma(f, g)-\int_a^b f(x)\, d\, g(x)\right| \leqq \varepsilon \mathop{\mathrm{V}}_a^b g.$$

От друга страна, в (3) и (4) фигурират само краен брой точки x_i от D, които не зависят от индекса α. Ето защо от условието а) следва съществуването на такова $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, че за всяко $\alpha \in \mathrm{A}$ с $\alpha \geqq \alpha_0$ да е в сила неравенството

$$|S_\gamma(f, g_\alpha)-S_\gamma(f, g)|<\varepsilon.$$

От (5), (6) и от последното неравенство следва

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\, g_\alpha(x)-\int_a^b f(x)\, d\, g(x)\right|<\varepsilon M+\varepsilon+\varepsilon \mathop{\mathrm{V}}_a^b g$$

за всяко $\alpha \geqq \alpha_0$. С това теоремата е доказана.

§ 2.12. СТИЛТЕСОВ ИНТЕГРАЛ В $\mathbf{R}^n$

В този параграф ще опишем накратко по какъв начин се въвежда стилтесов интеграл в $\mathbf{R}^n$.

Нека

(1) $$a_1 \leqq b_1,\ a_2 \leqq b_2, \ldots, a_n \leqq b_n$$

са n двойки от реални числа. Наред с полузатворения паралелепипед Δ в $\mathbf{R}^n$, определен от числата (1), ще разглеждаме и затворения паралелепипед $\bar{\Delta}$, определен от тези числа. Той се състои от всички точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $\mathbf{R}^n$, за които са изпълнени неравенствата

$$a_\nu \leqq x_\nu \leqq b_\nu$$

за всички $\nu=1, 2, \ldots, n$.

Под *подразделяне*

(2) $$\gamma:\begin{cases}\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m;\\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\end{cases}$$

на $\bar{\Delta}$ ще разбираме всяка крайна съвкупност от полузатворени паралелепипеди Δ_i в $\mathbf{R}^n$ и точки $\xi_i \in \bar{\Delta}_i$, за които

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$$

и

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$$

при $i \neq j$.

Съвкупността Г на всевъзможните подразделяния на $\bar{\Delta}$ ще насочим надясно. За целта ще се условим да пишем $\gamma_1 \geqq \gamma_2$ за два елемента γ_1 и γ_2 на Г, когато най-големият от диаметрите на паралелепипедите на γ_1 не надминава най-големия от диаметрите на паралелепипедите на γ_2. Ще наричаме Г *множество на подразделянията на* Δ.

Нека S е съвкупността на всички полузатворени паралелепипеди, които се съдържат в Δ, и $\mu : S \longrightarrow R$ е произволна адитивна функция в S.

Да разгледаме произволна функция $f : \bar{\Delta} \longrightarrow R$. За произволно $\gamma \in \Gamma$, зададено с (2), можем да образуваме числото

$$S_\gamma = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\, \mu\,(\Delta_i).$$

По този начин получаваме една редица $\{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ с индексно множество Г. Когато тази редица е сходяща, се казва, че функцията f е *интегрируема спрямо адитивната функция* μ в паралелепипеда $\bar{\Delta}$, а числото

$$\int_{\bar{\Delta}} f\,(x)\, d\,\mu\,(x) = \lim_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$$

се нарича *интеграл* на f спрямо μ в паралелепипеда $\bar{\Delta}$.

При различни μ се получават различни примери за интеграли. Например, ако μ е определено с равенството

$$\mu\,(\Delta) = (b_1 - a_1)\,(b_2 - a_2)\, \ldots\, (b_n - a_n),$$

когато паралелепипедът Δ е определен от числата (1), горната конструкция води до римановия интеграл в R^n. По такъв начин въведеното тук интегриране в смисъл на Стилтес е обобщение на класическото риманово интегриране.

Интересните свойства на стилтесовия интеграл върху правата се пренасят естествено и в този по-общ случай. Да отбележим например линейността спрямо f и спрямо μ. Адитивността сега придобива следния вид:

Нека функцията f е интегрируема спрямо μ в паралелепипеда $\bar{\Delta}$ и (2) е подразделяне на $\bar{\Delta}$. Тогава f е интегрируема спрямо μ и във всеки от паралелепипедите $\bar{\Delta}_i$ и е изпълнено равенството

$$\int_{\bar{\Delta}} f\,(x)\, d\,\mu\,(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\bar{\Delta}_i} f\,(x)\, d\,\mu\,(x).$$

Особено важно е, че непрекъснатите функции $f:\bar{\Delta}\longrightarrow R$ са интегрируеми спрямо адитивните функции $\mu: S\longrightarrow R$ с ограничена вариация. Тъй като неотрицателните адитивни функции $\mu: S\longrightarrow R$ очевидно притежават ограничена вариация, непрекъснатите функции $f:\bar{\Delta}\longrightarrow R$ са интегрируеми спрямо всички неотрицателни адитивни функции.

Препоръчваме на читателя да докаже тези твърдения, като използува за модел приведените вече доказателства от едномерния случай. Той би могъл също да се опита да пренесе в R^n и теоремата на Хели.

Задачи към втора глава

Подредици

Нека Γ и Δ са насочени надясно множества. За едно изображение $\varphi:\Delta\longrightarrow\Gamma$ се казва, че *расте неограничено,* когато за всяко $\gamma\in\Gamma$ съществува такова $\delta_0\in\Delta$ че за всяко $\delta\in\Delta$ с $\delta\geqq\delta_0$ да е в сила $\varphi(\delta)\geqq\gamma$. Нека $x:\Gamma\longrightarrow X$ е някаква редица от елементи на множеството X. Под *подредица* на $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ се разбира всяка композиция $x\circ\varphi:\Delta\longrightarrow X$, където Δ е произволно насочено надясно множество и $\varphi:\Delta\longrightarrow\Gamma$ е изображение, което расте неограничено. Подредицата $x\circ\varphi$ обикновено се означава с $\{x_{\varphi_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$.

Задача 1. Ако една редица $x:\Gamma\longrightarrow R$ е сходяща, всяка нейна подредица е сходяща и има същата граница.

Задача 2. Да се докаже, че за всяко насочено надясно множество Γ съществуват такова насочено надясно множество Δ и такова неограничено растящо изображение $\varphi:\Delta\longrightarrow\Gamma$, че за всяка ограничена редица $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от реални числа подредицата $\{x_{\varphi_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ да е сходяща (у н и в е р с а л н а п о д р е д и ц а).

У п ъ т в а н е. Разгледайте ултрафилтър Δ в Γ, който за всяко $c\in\Gamma$ съдържа множеството $\{\gamma\in\Gamma:\gamma\geqq c\}$. Насочете Δ надясно, като за произволни елементи δ_1 и δ_2 на Δ положите $\delta_1\leqq\delta_2$ точно когато $\delta_1\supset\delta_2$. Подчинете изображението $\varphi:\Delta\longrightarrow\Gamma$ на единственото условие $\varphi(\delta)\in\delta$ за всяко $\delta\in\Delta$. След това покажете, че подредицата $\{x_{\varphi_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ удовлетворява условието на Коши. За тази цел за произволно $\varepsilon>0$ покрийте съвкупността на всички членове x_γ на дадената редица с краен брой интервали $M_1, M_2,\ldots, M_n$ с дължини, по-малки от ε, и като използувате зад. 4, гл. I, покажете, че поне едно от множествата

$$\delta_i=\{\gamma\in\Gamma: x_\gamma\in M_i\}\qquad (i=1, 2,\ldots, n)$$

принадлежи на Δ.

Функции с ограничена вариация

Задача 3. Да се докаже, че за всяка функция $g:[a, b]\longrightarrow R$ с ограничена вариация множеството на точките на прекъсване на g е изброимо или крайно.

У п ъ т в а н е. Забележете най-напред, че твърдението е вярно за растящите функции.

Задача 4. Нека $g:[a, b]\longrightarrow R$ е функция с ограничена вариация. Да се докаже,че:
а) за всяко $\xi\in(a, b]$ съществува границата $g(\xi-0)=\lim\limits_{\substack{x\to\xi\\ x<\xi}} g(x)$;

б) за всяко $\xi \in [a, b)$ съществува границата $g(\xi+0) = \lim\limits_{\substack{x\to\xi \\ x>\xi}} g(x)$.

Задача 5. Нека функциите $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$ са с ограничена вариация и $|g|$ притежава положителна долна граница в интервала $[a, b]$. Да се докаже, че тогава частното $\frac{f}{g}$ също е с ограничена вариация.

Задача 6. Нека $x, y, z: [a, b] \to \mathbf{R}$ са непрекъснати функции. Да се докаже, че кривата с параметрични уравнения

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (t \in [a, b])$$

е ректифицируема точно когато всяка от функциите x, y и z е с ограничена вариация.

Задача 7. Да се докаже, че функцията $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$$

е диференцируема, но няма ограничена вариация.

Задача 8. Нека $a < b$ и $A > 0$. Да се докаже, че за всяка редица $\{g_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от функции $g_\gamma: [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация, за които $|g_\gamma(a)| \leq A$ и $\bigvee\limits_a^b g_\gamma \leq A$ за всяко $\gamma \in \Gamma$, съществуват подредица $\{g_{\varphi_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ и функция $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация, за които $\lim\limits_{\delta\in\Delta} g_{\varphi_\delta}(x) = g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$.

Упътване. Образувайте произволна универсална подредица на $\{g_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Стилтесов интеграл

Задача 9. Една функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема спрямо всяка функция $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация точно когато е непрекъсната.

Задача 10. Ако за някаква функция $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ интегралът $\int\limits_a^b f(x)\,d\,g(x)$ съществува за всяка непрекъсната функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, то g е с ограничен вариация.

Задача 11. Нека функцията $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната, а функцията $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ е растяща. Да се докаже, че тогава съществува точка $\xi \in [a, b]$ с

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\,g(x) = f(\xi)\,(g(b) - g(a))$$

(първа теорема за средните стойности).

Задача 12. Нека функцията $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е растяща, а функцията $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната. Да се докаже, че тогава съществува точка $\xi \in [a, b]$ с

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,d\,x = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,d\,x + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,d\,x$$

(втора теорема за средните стойности).

Упътване. Положете $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ и установете равенството

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

След това интегрирайте по части и приложете първата теорема за средните стойности.

Трета глава

НОРМИРАНИ ПРОСТРАНСТВА

Линейните пространства са значително математическо обобщение на заобикалящото ни тримерно пространство. Те се появяват естествено в анализа и са един от източниците на геометричната интуиция, характерна за него. Читателят знае, че крайномерните линейни пространства са важни за анализа. Не по-малка роля играят и безкрайномерните реални и комплексни пространства и именно основите на този негов аспект се обсъждат в тази и в следващата глава.

И тук, както и в крайномерния анализ, е нужна сходимост. Тя се извлича от понятието норма и модификациите му, като прототип е дължината на вектор. Така се получават нормираните линейни пространства. Те позволяват въвеждането на непрекъснатите линейни функционали, учението за които е и ядрото на настоящата глава. Самите те образуват пространство, наречено спрегнато. Основният резултат за тях е теоремата на Хан — Банах, която гарантира съществуването им и е един от първите нетривиални общи резултати от функционалния анализ.

Параграфите 1 — 4 са алгебрични. В § 1 са посочени примери на важни за анализа пространства от функции. § 2 е посветен на максималните подпространства, наречени хиперравнини. Линейните функционали са въведени в § 3. Връзката им с хиперравнините, която е далечно обобщение на обичайната линейна аналитична геометрия, е представена в § 4. Анализ се появява едва в § 5, където са въведени понятията норма и полунорма. Те позволяват в § 6 да се изучават непрекъснати изображения. Понятията отворено и затворено множество се пренасят в § 7 от $\mathbf{R}^n$ *в произволно нормирано пространство. На непрекъснатите линейни функционали е посветен § 8, а непрекъснатите линейни оператори са обсъдени бегло в § 11. Спрегнатите пространства са въведени в § 9. Теоремата на Хан — Банах в реалната и комплексната й форма е изучена в § 10. С нейна помощ в § 12 всяко нормирано пространство е отъждествено с част от второто си спрегнато. В § 13 са разгледани линейните функционали в* $C([a, b])$.

Пропускането на части от тази глава при първо четене не се препоръчва.

§ 3.1. ЛИНЕЙНИ ПРОСТРАНСТВА

Читателят владее от линейната алгебра понятието *линейно пространство* над произволно поле. За анализа са най-интересни случаите, когато се работи с полето на реалните или с полето на комплексните числа. В първия случай се говори за *реално*, а във втория — за *комплексно* линейно пространство. Тук ще имаме пред вид и двата случая: когато говорим за линейно пространство, то може да бъде както реално, така и комплексно; ако желаем да подчертаем, че разглеждаме само единия от случаите, ще уточняваме това изрично.

Няма да привеждаме дефиницията на понятието линейно пространство, тъй като читателят я познава от линейната алгебра. Ще напомним само, че ако $\mathbf{H}$ е полето на реалните или полето на комплексните числа и L е линейно пространство над $\mathbf{H}$, зададени са две операции: събиране на елементи на L и умножение на елементи на L с елементи на $\mathbf{H}$. И двете операции в резултат дават елементи на L. При това за тях се предполага, че удовлетворяват аксиоми, гарантиращи възможността да се смята, както с обичайните тримерни вектори. Линейните пространства, които ще разглеждаме в тази книга, са съставени предимно от функции, като операциите са събиране на функции и умножение на функция със скалар.

3.1.1. Пример. Нека X е произволно множество. Тогава съвкупността L на всички функции $f: X \to \mathbf{R}$ е реално линейно пространство спрямо операциите събиране на функции и умножение на функции със скалари. Аналогично съвкупността $L_{\mathbf{C}}$ на функциите $f: X \to \mathbf{C}$, където $\mathbf{C}$ е полето на комплексните числа, е комплексно линейно пространство.

3.1.2. Пример. Нека $X \subset \mathbf{R}^n$ и $C(X, \mathbf{R})$ е съвкупността на всички непрекъснати функции $f: X \to \mathbf{R}$. Тъй като сумата на две непрекъснати функции отново е непрекъсната функция, а произведението на непрекъсната функция и реално число също е непрекъсната функция, така получаваме реално линейно пространство. Аналогично съвкупността $C(X, \mathbf{C})$ на комплексните непрекъснати функции $f: X \to \mathbf{C}$ е комплексно линейно пространство.

3.1.3. Пример. Съвкупността $R([a, b])$ на всички функции $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, които са интегрируеми в риманов смисъл, е реално линейно пространство. По-общо, ако Δ е паралелепипед в $\mathbf{R}^n$, съвкупността $R(\bar{\Delta})$ на всички функции $f: \bar{\Delta} \to \mathbf{R}$, които са интегрируеми в риманов смисъл в $\bar{\Delta}$, е реално линейно пространство.

3.1.4. Пример. Ако $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ е произволна функция, съвкупността $S(g)$ на всички функции $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, които са интегрируеми в смисъл на Стилтес спрямо g, е реално линейно пространство.

3.1.5. Пример. Съвкупността $V([a, b])$ на функциите $\varphi: [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация е реално линейно пространство. По-общо, ако Δ е полузатворен паралелепипед в $\mathbf{R}^n$, а $\mathbf{S}$ — съвкупността на всички полузатворени подпаралелепипеди на Δ, съвкупността $V(\bar{\Delta})$ на всички адитивни функции $\mu: \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация е реално линейно пространство.

Други примери на реални и на комплексни линейни пространства ще срещнем по-нататък в тази книга. Сега да разгледаме някои прости общи понятия, свързани с линейните пространства.

Нека L е линейно пространство. Едно подмножество L_1 на L се нарича *подпространство* на L, когато притежава следните три свойства:

а) сборът на всеки два елемента на L_1 е елемент на L_1;

б) произведението на произволен елемент на L_1 и произволен скалар отново е елемент на L_1;

в) $L_1 \neq \varnothing$.

Тези свойства, разбира се, показват, че самото L_1 е линейно пространство.

Например едноелементното множество $\{0\}$ е подпространство на L. Цялото L също е подпространство на L. Пространствата от примерите 2—5 са подпространства на онези от пример 1.

Директно се проверява, че сечението на произволна фамилия от подпространства на едно линейно пространство L е отново подпространство на L. Ето защо, ако A е произволно подмножество на L, сечението $L(A)$ на всички линейни подпространства на L, които съдържат A, е подпространство на L. Така построеното подпространство на L се нарича *линейна обвивка* на A.

3.1.6. Предложение. *Нека L е линейно пространство и A е подмножество на L. Тогава линейната обвивка $L(A)$ на A е съвкупността на всички елементи на L от вида*

$$x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

където n е произволно цяло неотрицателно число, λ_i са скалари, а a_i — елементи на A.

Доказателството предоставяме на читателя като упражнение върху дефиницията.

Нека L отново е линейно пространство. Под *афинно подпространство* M на L се разбира всяко множество със следните две свойства:

г) за всеки два елемента x, y на M и за всеки два скалара λ и μ с $\lambda+\mu=1$ е в сила $\lambda x+\mu y \in M$;

д) $M \neq \varnothing$.

3.1.7. Предложение. *Нека L е линейно пространство и $M \subset L$. Ако съществува $m \in M$, за което множеството*

$$M-m=\{x-m : x \in M\} \tag{1}$$

да е подпространство на L, то M е афинно подпространство на L. Обратно, ако M е афинно подпространство на L, то за всяко $m \in M$ множеството (1) е подпространство на L.

Доказателство. Нека най-напред (1) е подпространство на L. Да разгледаме произволни елементи x, y на M и произволни скалари λ и μ с $\lambda+\mu=1$. Тъй като $M-m$ е подпространство на L, то

$$M-m \ni \lambda (x-m)+\mu (y-m)=\lambda x+\mu y-m.$$

Ето защо съществува $z \in M$ със $z-m=\lambda x+\mu y-m$. Тогава

$$\lambda x+\mu y=z \in M$$

и M се оказа афинно подпространство на L. Проверката на обратното твърдение е аналогична.

Така виждаме, че афинните подпространства на L са точно онези подмножества на L, които се получават от подпространствата на L след *транслация*.

§ 3.2. ХИПЕРРАВНИНИ

Нека L е линейно пространство. Да разгледаме съвкупността Λ на всички подпространства на L, които са различни от самото L. Ако снабдим Λ с релацията $\subset$, очевидно получаваме наредено множество. Максималните в смисъл на Цорн елементи на Λ се наричат *хиперравнини* в L. По този начин едно подпространство H на L е хиперравнина в L точно когато $H \neq L$ и за всяко подпространство L_1 на L с $L_1 \supset H$ и $L_1 \neq H$ е в сила $L_1=L$.

Така например хиперравнините в равнината $\mathbf{R}^2$ са правите линии през началото, а хиперравнините в $\mathbf{R}^3$ — всевъзможните равнини през началото. Читателят ще съобрази също така, че хиперравнините в $\mathbf{R}^n$ са всевъзможните $(n-1)$-мерни подпространства на $\mathbf{R}^n$. Следващата теорема гарантира съществуването на хиперравнини в найобщия случай.

3.2.1. Теорема. *Нека L е линейно пространство и L_1 е подпространство на L с $L_1 \neq L$. Тогава съществува хиперравнина H в L с $H \supset L_1$.*

Доказателство. Първото, което ни идва наум, е да приложим лемата на Цорн към множеството Λ, тъй като трябва да построим негов максимален елемент. Но тази програма е неизпълнима, понеже не всяко насочено надясно подмножество на Λ притежава мажоранта (посочете подходящ пример). Ето защо ще приложим лемата на Цорн към друго множество.

Нека $a \in L \setminus L_1$. Да означим с X съвкупността на всички подпространства M на L с $a \bar{\in} M$. Очевидно $L_1 \in X$. Нека Ξ е непразна верига в X. Очевидно обединението

$$N=\bigcup_{M \in \Xi} M$$

е подпространство на L и $a \bar{\in} N$. Тогава $N \in X$ и N е мажоранта за Ξ. Ето защо X удовлетворява условието на лемата на Цорн. Поради това съществуват максимални елементи H на X с $H \supset L_1$.

Теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че всеки такъв максимален елемент H е хиперравнина. Очевидно $H \not\ni a$ и следователно $H \neq L$. Нека сега K е подпространство на L с $K \supset H$ и $K \neq H$. Поради максималността на H ще имаме

$$(1) \qquad a \in K.$$

Нека сега $x \in L \setminus H$. Да разгледаме множеството H_1 на всички вектори от вида

$$(2) \qquad h+\lambda x,$$

където h пробягва H, а λ е съвкупността на всички скалари. Очевидно H_1 е линейно подпространство на L, $H_1 \supset H$ и $H_1 \neq H$, тъй като $x \notin H$ и $x \in H_1$. Отново от максималността на H следва $a \in H_1$. Ето защо съществуват $h \in H$ и скалар λ, за които $h+\lambda x=a$. Тъй като $a \notin H$, то $\lambda \neq 0$. Следователно

$$x=\frac{1}{\lambda}a-\frac{1}{\lambda}h.$$

От (1), от последното равенство и от $K \supset H$ следва $x \in K$. Тъй като x бе произволен елемент на $L \setminus H$, оттук следва $K \supset L \setminus H$. От друга страна, имаме $K \supset H$ и поради това $K=L$. С това е установено, че H действително е хиперравнина и теоремата е доказана.

Да отбележим изрично, че приведеното доказателство в същност дава повече от формулираното. Именно за произволно $a \in L \setminus L_1$ построихме хиперравнина $H \supset L_1$ с $a \notin H$. Ето защо *подпространството L_1 съвпада със сечението на всички хиперравнини, които го съдържат*. Поради това хиперравнините в L са в определен смисъл достатъчно много.

Максималните афинни подпространства на едно линейно пространство L, които не съвпадат с L, се наричат *афинни хиперравнини* в L. От предложение 1.7 непосредствено се получава, че едно афинно подпространство M на L е афинна хиперравнина точно когато за някое (а следователно и за всяко) $m \in M$ множеството

$$M-m=\{x-m : x \in M\}$$

е хиперравнина в L. Това показва, че *хиперравнините са точно онези афинни хиперравнини, които минават през началото.*

§ 3.3. ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ

Ако желаем да пренесем обичайната аналитична геометрия на $\mathbf{R}^3$ в общия случай на линейни пространства, имаме нужда от подходящи прости функции, които да участвуват в уравненията на хиперравнините, също както линейните форми $ax+by+cz$ бяха използувани, за да се напишат уравненията на равнините в $\mathbf{R}^3$. Това са линейните функционали.

Нека L е линейно пространство и $\mathbf{H}$ е полето на скаларите му. Едно изображение $l: L \to \mathbf{H}$ се нарича *линеен функционал* в L, когато притежава следните две свойства:

а) изпълнено е равенството

$$l(x+y)=l(x)+l(y)$$

за всеки два елемента x и y на L;

б) изпълнено е равенството

$$l(\lambda x)=\lambda\, l(x)$$

за всяко $\lambda \in \mathbf{H}$ и за всяко $x \in L$.

3.3.1. Пример. Нека X е произволно множество, а L — линейното пространство на всички функции $f: X \to \mathbf{R}$. Да фиксираме произволно $x_0 \in X$ и да положим $l(f)=f(x_0)$ за произволно $f \in L$. Така получаваме линеен функционал $l: L \to \mathbf{R}$ в реалното линейно пространство L. Аналогично се построяват линейни функционали и в комплексното пространство на всички функции $f: X \to \mathbf{C}$.

3.3.2. Пример. Нека $R([a, b])$ е линейното пространство на функциите $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, които са интегрируеми в риманов смисъл в интервала $[a, b]$. Ако за произволно $f \in R([a, b])$ положим

$$l(f)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

получаваме очевидно линеен функционал в $R([a, b])$.

3.3.3. Пример. Да разгледаме линейното пространство $C([a, b])$ на функциите $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, които са непрекъснати в интервала $[a, b]$. Нека g е някаква функция с ограничена вариация в $[a, b]$. Съгласно теорема 2.8.1 за всяко $f \in C([a, b])$ може да се образува интегралът

$$l(f)=\int_a^b f(x)\,d\,g(x).$$

Така получаваме един зависещ от g линеен функционал $l: C([a, b]) \to \mathbf{R}$

3.3.4. Пример. Нека $V([a, b])$ е линейното пространство на функциите $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация, а $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е произволна непрекъсната функция. Ако за произволно $g \in V([a, b])$ положим

$$l(g)=\int_a^b f(x)\,d\,g(x),$$

получаваме пример за линеен функционал във $V([a, b])$.

От дефиниционните свойства а) и б) на линеен функционал следва и по-общото равенство

$$l\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, l(x_i).$$

Нека сега L е комплексно линейно пространство. Тогава L може да се разглежда и като реално линейно пространство. Съществува интересна връзка между реалните и комплексните линейни функционали в L. Да отбележим най-напред, че ако $l: L \to \mathbf{C}$ е комплексен линеен функционал, като комплексна функция той има представянето

$$l(x)=l_1(x)+\mathrm{i}\, l_2(x), \tag{1}$$

където i е имагинерната единица. При това l_1 и l_2 са реални линейни функционали в L. Следващото предложение описва връзката между комплексните линейни функционали в L и техните реални части.

3.3.5. Предложение. *Нека L е комплексно линейно пространство. Ако на произволен комплексен линеен функционал l в L съпоставим реалната му част l_1, получаваме биекция между съвкупността на комплексните линейни функционали в L и съвкупността на реалните линейни функционали в L. Обратната биекция на произволен реален линеен функционал l_1 в L съпоставя комплексния линеен функционал l, определен от равенството*

$$l(x)=l_1(x)-\mathbf{i}\,l_1(\mathbf{i}x) \qquad (x\in L). \tag{2}$$

Доказателство. Нека най-напред l е комплексен линеен функционал в L. Ако в (1) заместим x с $\mathbf{i}x$, поради хомогенността на l спрямо всякакви комплексни скалари ще имаме

$$l(x)=l_2(\mathbf{i}x)-\mathbf{i}\,l_1(\mathbf{i}x),$$

което заедно с (1) дава $l_2(x)=-l_1(\mathbf{i}x)$ поради реалността на l_1 и l_2. Сега от (1) следва, че l се изразява чрез реалната си част l_1, както в (2). По този начин реалната част l_1 на l напълно възстановява l.

Остава да покажем, че за произволен реален линеен функционал l_1 в L изображението $l: L\to \mathbf{C}$, определено с (2), е комплексен линеен функционал в L. Разбира се, свойството а) от определението на линеен функционал не буди съмнение и същото важи за б) при реални скалари. Ето защо нужно е б) да се провери само при $\lambda=\mathbf{i}$.

Нека $x\in L$. Тогава от (2) се получава

$$l(\mathbf{i}x)=l_1(\mathbf{i}x)+\mathbf{i}\,l_1(x)=\mathbf{i}\,(l_1(x)-\mathbf{i}\,l_1(\mathbf{i}x))=\mathbf{i}\,l(x)$$

и предложението е доказано.

Нека L е линейно пространство. Очевидно сборът на два линейни функционала в L е линеен функционал в L. Също така произведението на линеен функционал в L и на скалар е линеен функционал в L. Ето защо съвкупността на всички линейни функционали в L е линейно пространство. То се нарича *алгебрично спрегнато* на L. Разбира се, алгебрично спрегнатото пространство на L е реално, когато L е реално, и е комплексно при комплексно L.

§ 3.4. ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ И ХИПЕРРАВНИНИ

Следващата теорема показва, че съществува тясна връзка между линейните функционали в линейно пространство L и хиперравнините в L.

3.4.1. Теорема. *Ако L е линейно пространство и l е ненулев линеен функционал в L, множеството*

$$H=\{x\in L: l(x)=0\} \tag{1}$$

е хиперравнина в L. За всяка хиперравнина H в L съществуват линейни функционали l в L с (1). При това за два ненулеви линейни функционала l и l_1 съответните им хиперравнини (1) и

$$H_1=\{x\in L: l_1(x)=0\} \tag{2}$$

съвпадат точно когато l и l_1 са колинеарни.

Доказателство. Нека l е ненулев линеен функционал в L. Непосредствено се проверява, че множеството (1) е подпространство на L. Тъй като функционалът l е ненулев, то $H \neq L$.

Ето защо, за да се убедим, че H е хиперравнина, остава само да покажем, че H е максимално измежду истинските подпространства на L. Нека L_1 е подпространство на L с $L_1 \supset H$ и $L_1 \neq H$. Да изберем точка $a \in L_1 \setminus H$. Тъй като $a \notin H$, то $l(a) \neq 0$.

Нека сега x е произволен елемент на L. Тогава

$$x = \left(x - \frac{l(x)}{l(a)}\, a\right) + \frac{l(x)}{l(a)}\, a. \tag{3}$$

За първото от събираемите в дясната страна на (3) имаме

$$l\left(x - \frac{l(x)}{l(a)}\, a\right) = l(x) - \frac{l(x)}{l(a)}\, l(a) = 0,$$

поради което то принадлежи на H, а следователно и на L_1. Тъй като $a \in L_1$, същото е вярно и за второто събираемо. Ето защо от (3) се получава $x \in L_1$. Тъй като x е произволен елемент на L, оттук следва $L_1 = L$ и максималността на H е установена. С това е показано, че (1) е хиперравнина.

Нека сега H е произволна хиперравнина в L. Да изберем по произволен начин елемента $a \in L \setminus H$. Ще се убедим, че за всяко $x \in L$ съществуват единствено $h \in H$ и единствен скалар λ, за които

$$x = h + \lambda a. \tag{4}$$

За да се убедим в съществуването на h и λ, да отбележим найнапред, че множеството L_1 на всички елементи на L от вида (4), където h пробягва H, а λ — съвкупността на всички скалари, очевидно е подпространство на L. Това подпространство съдържа H. При това включването е строго, понеже $a \in L_1$, но $a \notin H$. Тъй като H е по условие хиперравнина, то $L_1 = L$. С това съществуването на $h \in H$ и на скалар λ с (4) е доказано. Пристъпваме към единствеността. Нека за някакви елементи h_1, h_2 на H и за някакви скалари λ_1 и λ_2 имаме

$$h_1 + \lambda_1 a = h_2 + \lambda_2 a. \tag{5}$$

Тогава, ако допуснем, че $\lambda_1 \neq \lambda_2$, бихме получили

$$a = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\, (h_2 - h_1) \in H,$$

което е невъзможно, понеже $a \notin H$. Ето защо $\lambda_1 = \lambda_2$. Сега от (5) се получава $h_1 = h_2$ и единствеността е доказана.

След като вече разполагаме с (4), можем да пристъпим към дефинирането на един линеен функционал: за произволно $x \in L$ разглеждаме представянето на x във вида (4) и полагаме $l(x) = \lambda$. Така получаваме изображение $l : L \to \mathbf{H}$, където $\mathbf{H}$ е полето на скаларите. От дадената дефиниция непосредствено следва, че l е линеен функционал и че $l(x)=0$ точно когато $x \in H$. По този начин е доказано и второто твърдение от теоремата.

Да разгледаме сега два линейни функционала l и l_1 в L, за които хиперравнините (1) и (2) съвпадат, и да изберем произволно $a \in L \setminus H$. Тъй като H е хиперравнина, всяко $x \in L$ ще има представяне от вида (4). Тогава

$$l(x)=\lambda l(a) \text{ и } l_1(x)=\lambda l_1(a).$$

Тъй като $a \bar{\in} H$ и $a \bar{\in} H_1$, то $l(a) \neq 0$ и $l_1(a) \neq 0$. Ето защо от горните равенства следва

$$l(x)=\frac{l(a)}{l_1(a)} l_1(x)$$

за всяко $x \in L$ и теоремата е доказана.

Като първо приложение на тази теорема ще отбележим възможността за отделяне с линейни функционали на линейните подпространства и точките, които не им принадлежат. Нека L_1 е подпространство на L и $a \in L \setminus L_1$. По силата на бележките след теорема 2.1 съществува хиперравнина H с $H \supset L_1$ и $a \bar{\in} H$. Ако l е линеен функционал в H с (1), l ще се анулира тъждествено върху L_1 и ще бъде в сила $l(a) \neq 0$.

Следващото предложение показва по какъв начин афинните хиперравнини могат да се описват с помощта на линейни функционали.

3.4.2. Предложение. *Нека L е линейно пространство и l е ненулев линеен функционал в L, а c — произволен скалар. Тогава множеството*

$$H=\{x \in L : l(x)=c\} \tag{6}$$

е афинна хиперравнина в L. За всяка афинна хиперравнина H в L съществуват линейни функционали l в L и скалари c, за които е изпълнено (6). При това за два ненулеви линейни функционала l и l_1 в L и за два скалара c и c_1 съответните им афинни хиперравнини (6) и

$$H_1=\{x \in L : l_1(x)=c_1\}$$

съвпадат точно когато съществува ненулев скалар λ с

$$l_1=\lambda\, l \text{ и } c_1=\lambda\, c.$$

Доказателство. Нека l е ненулев линеен функционал в L и c е скалар. Тъй като $l \neq 0$, съществува $a \in L$ с $l(a) \neq 0$. Тогава

$$l\left(\frac{c}{l(a)}\, a\right)=\frac{c}{l(a)}\, l(a)=c,$$

поради което от (6) следва

$$\frac{c}{l(a)}\, a \in H.$$

Ето защо $H \neq \varnothing$. Нека сега $h \in H$. Непосредствено се съобразява, че

$$H-h=\{x \in L : l(x)=0\}. \tag{7}$$

Ето защо от теорема 1 следва, че $H-h$ е хиперравнина. Но тогава H е афинна хиперравнина.

Обратно, ако H е афинна хиперравнина и $h \in H$, то $H-h$ е хиперравнина и съгласно теорема 1 съществува линеен функционал l в L, за който е в сила (7). Непосредствено се съобразява, че тогава

$$H=\{x \in L : l(x)=l(h)\}$$

и първата част от предложението е доказана. Останалото се доказва аналогично. Подробностите предоставяме на читателя.

§ 3.5. ПОЛУНОРМИ И НОРМИ

Читателят знае ролята, която дължините на векторите играят при математическия анализ в $\mathbb{R}^n$. Оказва се, че и в много от важните за анализа пространства понятието дължина на вектор запазва смисъла и значението си. Тук ще уточним това понятие и ще разгледаме няколко примера.

Нека L е линейно пространство. Едно изображение

$$\|\cdot\| : L \longrightarrow [0, \infty)$$

се нарича *полунорма* в L, когато притежава свойствата:

а) изпълнено е неравенството

$$\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$$

за всеки два елемента x и y на L (неравенство на триъгълника);

б) изпълнено е равенството

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$

за всяко $x \in L$ и за всеки скалар λ (положителна хомогенност).

От хомогенността, разбира се, следва $\|0\|=0$.

Една полунорма $\|\cdot\|$ в L се нарича *норма*, когато притежава следното допълнително свойство:

в) за всяко $x \in L$, за което $\|x\|=0$, е изпълнено $x=0$ (анизотропност).

3.5.1. Пример. Нека L е линейно пространство и l е линеен функционал в L. Ако за произволно $x \in L$ положим

$$\|x\| = |l(x)|,$$

получаваме една полунорма в L. В общия случай тя не е норма, тъй като съществуват ненулеви елементи x на L с $l(x)=0$.

3.5.2. Пример. Нека $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ е произволна растяща функция и $S(g)$ е линейното пространство на функциите $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, които са интегрируеми спрямо g. Ако за произволно $f \in S(g)$ положим

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| \, d\,g(x), \tag{1}$$

получаваме полунорма в $S(g)$. Специално, ако разгледаме пространството $R([a, b])$ на интегрируемите в риманов смисъл функции в $[a, b]$ и за произволно $f \in R([a, b])$ положим

$$(2) \qquad \|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

получаваме полунорма в $R([a, b])$. Тези полунорми не са норми

3.5.3. Пример. В пространството $C([a, b])$ на непрекъснатите функции $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ можем да разглеждаме полунормите (1) и (2). При това (2) сега е норма (докажете това). Понякога тя се нарича *интегрална норма* в $C([a, b])$.

3.5.4. Пример. Нека X е множество и L е линейното пространство на всички ограничени функции $f: X \to \mathbf{R}$. Ако за произволно $f \in L$ положим

$$(3) \qquad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

получаваме една норма в L. Тя се нарича *равномерна норма* в L. Равномерната норма е особено интересна, когато X е (например) част от $\mathbf{R}^n$ и $C(X)$ е съвкупността на ограничените непрекъснати функции в X. Ако X е компактно, $C(X)$ съвпада съгласно теоремата на Вайерщрас със съвкупността на всички непрекъснати функции в X. Ето защо равномерната норма може да се разглежда например в $C([a, b])$. По този начин в $C([a, b])$ посочихме две норми — равномерната и интегралната. За всяка от тях съществуват интересен кръг задачи, при решаването на които тя се използува.

Понятията полунорма и норма са естествени обобщения на дължината на вектор от $\mathbf{R}^3$. Те подпомагат внасянето на геометрична интуиция в анализа. По-късно ще срещнем други интересни примери на полунорми и норми.

Едно линейно пространство L се нарича *полунормирано*, когато в L е зададена някаква полунорма. Ако в L е зададена норма, L се нарича *нормирано пространство*.

Ако L е полунормирано пространство, под *разстояние* между два елемента x и y на L ще разбираме числото

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Ако L е нормирано пространство, разстоянието между всеки два различни елемента на L е строго положително. В полунормираните пространства обаче може да се случи разстоянието между различни елементи да е нула.

Два елемента x и y на едно полунормирано пространство L ще наричаме *несъществено различни* (*еквивалентни*), когато разстоянието между тях е нула.

Ако пространството L е нормирано, несъщественото различие означава съвпадане. В общия случай то е само една релация за еквивалентност. Да докажем например транзитивността. Нека x, y и z са елементи на L с

$$\|x-y\|=0 \text{ и } \|y-z\|=0.$$

Тогава

$$\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\leqq\|x-y\|+\|y-z\|=0$$

и тъй като по дефиниция $\|x-z\|\geqq 0$, то $\|x-z\|=0$. С това транзитивността на релацията несъществено различие е доказана.

Читателят ще съобрази, че ако x е несъществено различно от x_1 и y е несъществено различно от y_1, то $x+y$ е несъществено различно от x_1+y_1. Също при тези условия λx е несъществено различно от λx_1 за всеки скалар λ и $\|x\|=\|x_1\|$. Ето защо всичко, което е дадено в L, е инвариантно спрямо несъщественото различие.

Това позволява да определим равенството в L като несъществено различие. При това, както вече видяхме, няма да се появят никакви неудобства при извършване на линейните операции или при пресмятане на нормите в L. Нещо повече, всеки елемент x на L с $\|x\|=0$ е несъществено различен от нулата и *при новата релация равенство L става нормирано пространство*.

Ако не желаем да усложняваме релацията равенство в L, същото нормирано пространство можем да получим и с факторизиране.

3.5.5. Предложение. *Нека L е полунормирано пространство, R е релацията несъществено различие в L и*

$$\varphi : L \longrightarrow L/R$$

е съответното канонично изображение. Тогава в L/R има единствена структура на полунормирано пространство, за която са изпълнени равенствата

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y), \tag{4}$$

$$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x), \tag{5}$$

$$\|\varphi(x)\|=\|x\| \tag{6}$$

за произволни x, y от L и за всеки скалар λ. При това единствената полунорма в L/R, за която е изпълнено (6), *е норма.*

Доказателство. По същество то се свежда тъкмо до проверяване инвариантността на онова, което е дадено в L, спрямо несъщественото различие. Предоставяме подробностите на читателя.

Ако елементите на L имат абстрактна природа, най-добре е да се извърши факторизиране. Ако обаче те имат конкретен характер, се препоръчва да останем в L, като през цялото време вместо с равенството си служим с несъщественото различие. Само по един пункт се налага да бъдем внимателни: понятията, които по-нататък ще въвеждаме в L, трябва да са инвариантни при несъщественото различие.

§ 3.6. СХОДИМОСТ И НЕПРЕКЪСНАТОСТ В НОРМИРАНИ ПРОСТРАНСТВА

Нека L е полунормирано пространство, $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е редица от елементи на L и a е елемент на L. Казва се, че a е *граница* на редицата $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, и се пише

$$a=\lim_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma \text{ или } a=\lim \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \text{ или } x_\gamma \xrightarrow[\gamma\to\infty]{} a,$$

когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв индекс $\gamma_0\in\Gamma$, че за всички $\gamma\in\Gamma$ с $\gamma\gtrsim\gamma_0$ да е в сила

$$\|x_\gamma-a\|<\varepsilon.$$

Ако полунормата на L не е норма, границата не е единствена. Ако a е граница на редицата $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, нейни граници са всички точки b от L, които са несъществено различни от a, и това са всичките ѝ граници.

Правилата за намиране на граници от § 2.4 се пренасят почти без промяна и в тази по-обща ситуация. Вместо (5) от § 2.4 обаче се появява очевидно правило за намиране на граница на произведение на редица от скалари и редица от вектори. Условието на Коши от теорема 2.4.3 и тук е необходимо, за да бъде една редица сходяща. То обаче не е достатъчно. Нормираните пространства, в които условието на Коши е достатъчно, за да е налице сходимост, се разглеждат в следващата глава.

Нека сега L и M са полунормирани пространства и $X\subset L$. Едно изображение $f: X\to M$ се нарича *непрекъснато в някоя точка* $\xi\in X$, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че за всяко $x\in X$, за което е изпълнено неравенството $\|x-\xi\|<\delta$, да е изпълнено и неравенството $\|f(x)-f(\xi)\|<\varepsilon$.

Както трябва да се очаква, и тук е налице теорема на Хайне. *Ако изображението f е непрекъснато в точката ξ от дефиниционната си област X, за всяка редица $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, членовете на която са от X и която има ξ за граница, съответната редица $\{f(x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ от функционалните стойности има за граница $f(\xi)$. Обратно, ако за всяка обичайна редица*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

от елементи на X с граница ξ съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

от функционалните стойности има за граница $f(\xi)$, функцията f е непрекъсната в точката ξ.

Това твърдение се доказва също както и в елементарния анализ и поради това не ще привеждаме доказателството му.

Изображението f се нарича *непрекъснато*, когато е непрекъснато във всяка точка ξ на дефиниционната си област X.

За да посочим пример, ще покажем, че *нормата в L е непрекъсната*.

Наистина, ако x и y са елементи на L, то

$$\|x\|=\|(x-y)+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|$$

и следователно

$$\|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|.$$

Аналогично

$$\|y\|-\|x\|\leq\|x-y\|.$$

Ето защо

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leq\|x-y\| \tag{1}$$

и непрекъснатостта на нормата е вече очевидна.

Нещо повече, (1) показва, че нормата е *равномерно непрекъсната в L*.

§ 3.7. ОТВОРЕНИ И ЗАТВОРЕНИ МНОЖЕСТВА В НОРМИРАНИ ПРОСТРАНСТВА

Нека L е полунормирано пространство. Едно подмножество F на L се нарича *затворено*, когато заедно с всяка обичайна редица от свои елементи съдържа и границите ѝ.

От тази дефиниция директно се получават следните свойства на затворените множества:

а) *празното множество и цялото L са затворени*;

б) *сечението на произволна фамилия от затворени множества е затворено множество*;

в) *обединението на краен брой затворени множества е затворено множество*.

От б) следва, че ако A е произволно подмножество на L, измежду затворените подмножества на L, съдържащи A, има едно, което се съдържа във всички останали. То се нарича затворена обвивка на A и се означава с $\bar{A}$.

3.7.1. Предложение. *Нека L е полунормирано пространство и A е подмножество на L. Тогава затворената обвивка на A се състои от границите на всевъзможните сходящи (обичайни) редици от елементи на A.*

Доказателство Да означим с Λ съвкупността на границите на всевъзможните сходящи редици от елементи на A. Тъй като $\bar{A}$ е затворено множество и $A\subset\bar{A}$, от определението на затворено множество следва $\Lambda\subset\bar{A}$. Ето защо твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че Λ е затворено. Нека

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

е редица от елементи на Λ и η е нейна граница. Тъй като $y_n\in\Lambda$, то y_n е граница на някаква редица от елементи на A. Следователно съществува $x_n \in A$ с $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$. Сега не е трудно да се съобрази, че η е граница и на редицата

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

чиито членове са от A. Ето защо $\eta \in \Lambda$ и Λ се оказа затворено. С това предложението е доказано.

От него и от правилата за смятане със сходящи редици непосредствено следва, че *затворената обвивка на подпространство на L е подпространство на L*. Читателят ще получи също като следствие, че

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

за всеки две подмножества A и B на L. Ако $A, B \subset L$, множеството A се нарича *гъсто* в B, когато $B \subset \overline{A}$. Съгласно горното предложение това очевидно означава, че за всяко $b \in B$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $a \in A$, за което $\|b - a\| < \varepsilon$.

Едно подмножество U на L се нарича *отворено*, когато допълнението му $L \setminus U$ е затворено. От а), б) и в) веднага се получават следните свойства на отворените множества:

а′) $\varnothing$ и L са отворени множества;

б′) обединението на всяка фамилия от отворени множества е отворено множество;

в′) сечението на краен брой отворени множества е отворено множество.

3.7.2. Предложение. *Едно множество U в едно полунормирано пространство L е отворено точно когато за всяко $\xi \in U$ съществува такова $\varepsilon > 0$, че за всяко $x \in L$ с $\|x - \xi\| < \varepsilon$ да е в сила $x \in U$.*

Доказателство. Нека най-напред U е отворено. Да допуснем, че съществува такава точка $\xi \in U$, че за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува $x \in L$ с $\|x - \xi\| < \varepsilon$ и $x \bar{\in} U$. Ако дадем на ε последователно стойностите $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, ще получим редица

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

членовете на която удовлетворяват неравенствата $\|x_n - \xi\| < \frac{1}{n}$ и условието $x_n \in L \setminus U$. Но тогава ξ би трябвало да е граница на тази редица и от затвореността на $L \setminus U$ би следвало $\xi \in L \setminus U$, което е противоречие. С това е доказана необходимостта.

За да докажем достатъчността, ще се убедим, че множеството $L \setminus U$ е затворено. Нека за тази цел (1) е редица от елементи на $L \setminus U$ и нека ξ е нейна граница. Ако допуснем, че $\xi \bar{\in} L \setminus U$, ще съществува $\varepsilon > 0$, за което от $\|x - \xi\| < \varepsilon$ винаги следва $x \in U$. Но от известно място нататък членовете на (1) удовлетворяват неравенството $\|x_n - \xi\| < \varepsilon$ и поради това би трябвало да е изпълнено условието $x_n \in U$ в противоречие с $x_n \in L \setminus U$. С това предложението е доказано.

3.7.3. Теорема. *Нека L и M са полунормирани пространства $X \subset L$ и $f: X \to M$ е някакво изображение. При тези предположения следващите три условия са еквивалентни:*

а) *изображението f е непрекъснато;*

б) *за всяко затворено множество F в M съществува затворено множество F_1 в L, за което $f^{-1}(F) = F_1 \cap X$;*

в) *за всяко отворено множество U в M съществува отворено множество U_1 в L, за което $f^{-1}(U) = U_1 \cap X$.*

Доказателство. Еквивалентността на б) и в) се получава чрез очевидно преминаване към допълнения и е предоставена на читателя.

Ще покажем най-напред, че от а) следва б). Дадено е, че f е непрекъснато. Твърдението ще бъде доказано, ако установим равенството

$$f^{-1}(F) = X \cap \overline{f^{-1}(F)}.$$

Нека $\xi \in X \cap \overline{f^{-1}(F)}$. Тогава съществува редица (1) от елементи на $f^{-1}(F)$, за която $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тъй като членовете на (1) са от $f^{-1}(F)$, то $f(x_n) \in F$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$ От друга страна, $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ съгласно теоремата на Хайне. Сега от затвореността на F следва $f(\xi) \in F$, т. е. $\xi \in f^{-1}(F)$. С това е доказано включването $X \cap \overline{f^{-1}(F)} \subset$ $\subset f^{-1}(F)$. Но противоположното включване е очевидно и всичко е доказано.

Остава да се убедим, че от б) следва а). Нека за целта (1) е редица от елементи на X, $\xi \in X$ и ξ е граница на (1). Трябва да покажем, че $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Да допуснем противното. Тогава ще съществува такова $\varepsilon > 0$, че за безбройно много n да е в сила

(2) $$\|f(x_n) - f(\xi)\| \geq \varepsilon.$$

Като преминем към подредици, без ограничение на общността можем да предполагаме, че (2) е изпълнено за всички n. Да означим сега с F затворената обвивка на съвкупността $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ на образите на членовете на (1). Съгласно (2) $f(\xi)$ не може да бъде граница на редица от тази съвкупност и от предложение 1 следва $f(\xi) \notin F$. Ето защо

(3) $$\xi \notin f^{-1}(F).$$

От друга страна, по условие съществува затворено множество F_1 в L, за което $f^{-1}(F) = F_1 \cap X$. От това равенство следва $x_n \in F_1$ и тъй като ξ е граница на (1), то $\xi \in F_1$. Ето защо $\xi \in F_1 \cap X$ и следователно $\xi \in f^{-1}(F)$ в противоречие с (3). С това теоремата е доказана.

В предишния параграф видяхме, че нормата е непрекъсната. Сега от горната теорема следва, че за всяко $\xi \in L$ и за всяко $\varepsilon > 0$ множеството

(4) $$B(\xi, \varepsilon) = \{x \in L : \|x - \xi\| \leq \varepsilon\}$$

е затворено. Наистина това множество е прообраз чрез нормата на затвореното множество $[0, \xi]$ от числовата права. Множеството

(5) $$O(\xi, \varepsilon)=\{x \in L : \|x-\xi\| < \varepsilon\}$$

пък е отворено. И действително това множество очевидно е прообразът чрез нормата на отвореното множество $(-\infty, \varepsilon)$ от $\mathbf{R}$.

Множествата (4) и (5) се наричат съответно *затворено кълбо* и *отворено кълбо* с център ξ и радиус ε. Те играят определена техническа роля по-нататък. Тук ще отбележим само, че съгласно предложение 2 *едно подмножество U на L е отворено точно когато заедно с всяка своя точка съдържа и цяло отворено кълбо с център в тази точка.*

§ 3.8. НЕПРЕКЪСНАТИ ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ

Тук ще разгледаме непрекъснатите линейни функционали в едно полунормирано пространство L. Следващата теорема посочва няколко свойства на един линеен функционал, еквивалентни с непрекъснатостта.

3.8.1. Теорема. *Нека L е полунормирано пространство и l е линеен функционал в L. Тогава следващите шест условия са еквивалентни:*

а) *функционалът l е непрекъснат в нулата;*

б) *функционалът l е равномерно непрекъснат;*

в) *функционалът l е непрекъснат;*

г) *съществува число $M \geqq 0$, за което е изпълнено неравенството*

(1) $$|l(x)| \leqq M \|x\|$$

за всяко $x \in L$;

д) *функционалът l е ограничен върху единичното кълбо*

$$B=\{x \in L : \|x\| \leqq 1\};$$

е) *множеството*

$$H=\{x \in L : l(x)=0\}$$

е затворено.

Доказателство. Най-напред ще установим еквивалентността на условията а) — г).

Нека l е непрекъснат в точката 0 и ε е произволно положително число. Тогава съществува такова $\delta > 0$, че при $x \in L$ и $\|x\| < \delta$ да е в сила $|l(x)| < \varepsilon$. Нека x' и x'' са произволни точки на L с $\|x'-x''\| < \delta$. Тъй като l е линеен функционал, от начина, по който бе избрано δ, следва

$$|l(x')-l(x'')|=|l(x'-x'')| < \varepsilon$$

и равномерната непрекъснатост на l е доказана. С това е установено, че от а) следва б).

Преходът от б) към в) е тривиален.

Нека е налице в). Да допуснем, че г) не е изпълнено. Тогава за всяко $n=1, 2, \ldots$ ще съществува такова $x_n \in L$, че да е изпълнено неравенството

(2) $$|l(x_n)| > n\,\|x_n\|.$$

От (2) следва $\|x_n\| \neq 0$. Наистина в противен случай бихме имали $\|x_n - 0\| = \|x_n\| = 0$, поради което $\|x_n - 0\|$ би било по-малко от всяко положително число. Но тогава от непрекъснатостта на l би следвало, че $|l(x_n)|$ е по-малко от всяко положително число. В такъв случай бихме имали $l(x_n) = 0$, което противоречи на (2), тъй като $\|x_n\| \geqq 0$. И така $\|x_n\| \neq 0$. Сега от (2) следва

(3) $$\left|l\left(\frac{1}{n\,\|x_n\|}\,x_n\right)\right| > 1.$$

От друга страна,

$$\left\|\frac{x_n}{n\,\|x_n\|} - 0\right\| = \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|x_n\| = \frac{1}{n}.$$

Ето защо редицата с общ член $\frac{x_n}{n\,\|x_n\|}$ има 0 за граница. От непрекъснатостта на l тогава следва, че редицата с общ член $l\left(\frac{x_n}{n\,\|x_n\|}\right)$ клони към нула в противоречие с (3). С това е установено, че от в) следва г).

Тъй като преходът от г) към а) е тривиален, еквивалентността на условията а) — г) е установена.

Поради хомогенността на l и на нормата условията г) и д) са очевидно еквивалентни.

Сега ще покажем, че условието е) следва от в). Нека функционалът l е непрекъснат. Разбира се, H е праобразът чрез l на едноточковото множество $\{0\}$ в полето на скаларите, а това едноточково множество е затворено. Ето защо от теорема 7.3 следва, че H е затворено.

Накрая ще установим, че а) следва от е). Нека множеството H е затворено и

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (x_n \in L)$$

е редица, която има нулата за граница. Трябва да покажем, че редицата

$$l(x_1), l(x_2), \ldots, l(x_n), \ldots$$

клони към нула. Да допуснем противното. Тогава чрез преминаване към подредици без ограничение на общността можем да предположим съществуването на такова $\varepsilon > 0$, че за всяко $n = 1, 2, \ldots$ да е изпълнено неравенството $|l(x_n)| \geqq \varepsilon$. Но тогава редицата

(4) $$\frac{x_1}{l(x_1)}, \frac{x_2}{l(x_2)}, \ldots, \frac{x_n}{l(x_n)}, \ldots$$

също би клоняла към нула. Същевременно

$$l\left(\frac{x_n}{l(x_n)}\right) = 1.$$

Нека сега a е елемент на L с $l(a) = 1$. Тогава

$$l\left(a - \frac{x_n}{l(x_n)}\right) = 0$$

и следователно всички членове на редицата

$$(5)\qquad a-\frac{x_1}{l(x_1)},\ a-\frac{x_2}{l(x_2)},\ \ldots,\ a-\frac{x_n}{l(x_n)},\ \ldots$$

са от H. Тъй като (4) клони към 0, (5) има за граница a. От затвореността на H сега следва $a \in H$ в противоречие с $l(a)=1$ и определението на H. С това теоремата е доказана.

§ 3.9. СПРЕГНАТО ПРОСТРАНСТВО НА НОРМИРАНО ПРОСТРАНСТВО

Нека L е полунормирано пространство. С L^* ще означаваме съвкупността на всевъзможните непрекъснати линейни функционали в L. Очевидно сборът на два непрекъснати линейни функционала в L е непрекъснат линеен функционал в L, а също така произведението на непрекъснат линеен функционал и скалар е непрекъснат линеен функционал. Ето защо L^* е линейно пространство.

Ще превърнем L^* в нормирано пространство. За целта е нужно да въведем норма в L^*. Вече видяхме, че произволен непрекъснат линеен функционал l в L е ограничен върху единичното кълбо

$$B=\{x \in L : \|x\| \leq 1\}.$$

Ето защо за всяко $l \in L^*$ може да се образува числото

$$\|l\|=\sup_{x \in B} |f(x)|.$$

По този начин се получава изображение $\| \ \|: L^* \to [0, \infty)$. Непосредствено се съобразява, че това е една норма в L^*.

Така полученото нормирано пространство L^* се нарича *спрегнато пространство* на L.

Непосредствено се съобразява, че за константа M е изпълнено неравенството

$$(1)\qquad |l(x)| \leq M$$

за всяко $x \in L$ с $\|x\| \leq 1$ точно когато е изпълнено неравенството

$$(2)\qquad |l(x)| \leq M\,\|x\|$$

за всяко $x \in L$. Тъй като по определение $\|l\|$ е най-малката константа M, за която е в сила (1), то $\|l\|$ е и най-малката константа M, за която е изпълнено (2). По този начин за всяко $x \in L$ и за всяко $l \in L^*$ имаме

$$(3)\qquad |l(x)| \leq \|l\|\,\|x\|,$$

като $\|l\|$ е най-малката константа, за която е в сила (3) за всяко $x \in L$.

Описанието на спрегнатото пространство на дадено нормирано пространство е един от интересните въпроси на функционалния анализ. В задачите към тази глава читателят ще намери такива примери.

§ 3.10. ТЕОРЕМА НА ХАН — БАНАХ

В § 4 видяхме, че в едно линейно пространство винаги има достатъчно много линейни функционали. Тук ще уточним този резултат, като се убедим, че в нормираните пространства винаги има достатъчно много непрекъснати линейни функционали.

3.10.1. Теорема (Хан — Банах). *Нека L е реално полунормирано пространство, L_1 е подпространство на L и $l_1 : L_1 \to \mathbf{R}$ е непрекъснат линеен функционал в L_1. Тогава съществува непрекъснат линеен функционал $l : L \to \mathbf{R}$ със следните две свойства:*

а) *изпълнено е равенството $l(x)=l_1(x)$ за всяко $x \in L_1$;*

б) $\|l\|=\|l_1\|$.

Доказателство. За да се убедим в съществуването на l, ще си послужим с лемата на Цорн. За целта ще означим с X съвкупността на всички наредени двойки (Λ, λ), където Λ е подпространство на L с $\Lambda \supset L_1$ и $\lambda : \Lambda \to \mathbf{R}$ е линеен функционал със следните две свойства:

а′) изпълнено е равенството $\lambda(x)=l_1(x)$ за всяко $x \in L_1$;

б′) изпълнено е неравенството $|\lambda(x)| \leqq \|l_1\| \, \|x\|$ за всяко $x \in \Lambda_1$.

Сега в X ще внесем наредба. За два елемента (Λ, λ) и (Λ', λ') на X ще пишем

$$(\Lambda, \lambda) \leqq (\Lambda', \lambda'),$$

когато $\Lambda \subset \Lambda'$ и е изпълнено равенството $\lambda'(x)=\lambda(x)$ за всяко $x \in \Lambda$. Читателят ще се убеди, че релацията $\leqq$ действително е наредба в X.

Нека сега Ξ е произволна непразна верига в X. Ще се убедим, че Ξ притежава мажоранта в X. За целта най-напред ще положим

$$\Lambda_0 = \cup \{\Lambda : (\Lambda, \lambda) \in \Xi\} \tag{1}$$

и ще покажем, че Λ_0 е подпространство на L. Нека $a \in \Lambda_0$ и $b \in \Lambda_0$. Тогава съществуват $(\Lambda_1, \lambda_1) \in \Xi$ и $(\Lambda_2, \lambda_2) \in \Xi$ с

$$a \in \Lambda_1, \quad b \in \Lambda_2. \tag{2}$$

По условие обаче множеството Ξ е верига. Ето защо ще бъде изпълнено някое от неравенствата

$$(\Lambda_1, \lambda_1) \leqq (\Lambda_2, \lambda_2), \; (\Lambda_2, \lambda_2) \leqq (\Lambda_1, \lambda_1). \tag{3}$$

Нека е налице например първото от тях. Съгласно дефиницията на $\leqq$ от него следва $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Ето защо от (2) следва

$$a \in \Lambda_2, \quad b \in \Lambda_2. \tag{4}$$

Тъй като Λ_2 е подпространство на L, за произволни скалари α и β ще имаме

$$\alpha a + \beta b \in \Lambda_2 \subset \Lambda_0, \tag{5}$$

с което е проверено, че Λ_0 действително е подпространство на L.

Сега ще дефинираме линеен функционал $\lambda_0 : \Lambda_0 \to \mathbf{R}$. Нека a е произволен елемент на Λ_0, а (Λ_1, λ_1) и (Λ_2, λ_2) са елементи на Ξ с $a \in \Lambda_1$ и $a \in \Lambda_2$. Тъй като Ξ е верига, ще бъде в сила поне едното от неравенствата (3). Нека отново е налице първото от тях. Тогава от определението на $\leq$ следва $\lambda_2(a)=\lambda_1(a)$. Това показва, че при фиксирано $a\in\Lambda_0$ числото $\lambda(a)$ не зависи от случайността при избора на $(\Lambda, \lambda)\in\Xi$ с $a\in\Lambda$. Сега полагаме

$$\lambda_0(a)=\lambda(a), \tag{6}$$

където (Λ, λ) е произволно избран елемент на Ξ с $a\in\Lambda$.

Ще покажем, че така определеното изображение $\lambda_0:\Lambda_0\to\mathbf{R}$ е линеен функционал. Нека $a\in\Lambda_0$ и $b\in\Lambda_0$. Тогава съществуват $(\Lambda_1, \lambda_1)\in\Xi$ и $(\Lambda_2, \lambda_2)\in\Xi$ с (2). Разбира се, поне едното от неравенствата (3) е отново изпълнено и пак ще предположим, че такова е първото от тези неравенства. Поради това ще бъде налице (4). Разбира се, ако α и β са произволни скалари, ще бъде изпълнено и (5). Ето защо от определението (6) следва

$$\begin{aligned}\lambda_0(\alpha a+\beta b)&=\lambda_2(\alpha a+\beta b)\\&=\alpha\,\lambda_2(a)+\beta\,\lambda_2(b)=\alpha\,\lambda_0(a)+\beta\,\lambda_0(b),\end{aligned}$$

тъй като λ_2 е линеен функционал. Това показва, че λ_0 е линеен функционал в Λ_0.

Ще се убедим, че двойката (Λ_0, λ_0) е елемент на X. От (1) очевидно следва $\Lambda_0\supset L_1$. Нека $x\in L_1$. Тъй като за всяко $(\Lambda, \lambda)\in\Xi$ имаме $\Lambda\supset L_1$ и $\lambda(x)=l_1(x)$ съгласно а′), от (6) се получава

$$\lambda_0(x)=\lambda(x)=l_1(x),$$

с което е проверено условието а′) за (Λ_0, λ_0).

За да проверим и б′) за (Λ_0, λ_0), нека $a\in\Lambda_0$. Тогава за някое $(\Lambda, \lambda)\in\Xi$ ще бъде в сила $a\in\Lambda$ и тъй като условието б′) е изпълнено за (Λ, λ), от (6) следва

$$|\lambda_0(a)|=|\lambda(a)|\leq\|l_1\|\;\|a\|,$$

с което е проверено б′) за (Λ_0, λ_0). Така се убедихме, че $(\Lambda_0, \lambda_0)\in X$.

Сега ще покажем, че (Λ_0, λ_0) е мажоранта за Ξ. Нека $(\Lambda, \lambda)\in\Xi$. Тогава от (1) следва $\Lambda\subset\Lambda_0$. Същевременно от (6) намираме $\lambda_0(a)=\lambda(a)$ за всяко $a\in\Lambda$. Следователно неравенството $(\Lambda, \lambda)\leq(\Lambda_0, \lambda_0)$ е изпълнено за всяко $(\Lambda, \lambda)\in\Xi$.

Така показахме, че всяка непразна верига Ξ в X притежава мажоранта в X. Същевременно X не е празно, тъй като (L_1, l_1) е елемент на X. Ето защо X има максимални елементи. Да означим с (Λ, λ) произволен максимален елемент на X.

Ще покажем, че $\Lambda=L$. Да допуснем противното. Тогава би съществувал елемент ξ на L с $\xi\notin\Lambda$. Сега за произволни елементи a и b на Λ намираме

$$\begin{aligned}|\lambda(a)-\lambda(b)|&=|\lambda(a-b)|\leq\|l_1\|\;\|a-b\|\\&=\|l_1\|\;\|(a+\xi)-(b+\xi)\|\leq\|l_1\|\;\|a+\xi\|+\|l_1\|\;\|b+\xi\|,\end{aligned}$$

тъй като, бидейки елемент на X, двойката (X, λ) притежава свойството б′). От тази верига от равенства и неравенства следва

(7) $$\lambda(a)-\|l_1\|\,\|a+\xi\|\leqq\lambda(b)+\|l_1\|\,\|b+\xi\|$$

за произволни елементи a и b на Λ.

Да разгледаме фамилията

$$\{[\lambda(c)-\|l_1\|\,\|c+\xi\|,\ \lambda(c)+\|l_1\|\,\|c+\xi\|]\}_{c\in\Lambda}$$

от затворени интервали в $\mathbf{R}$. Неравенството (7) показва, че всеки два интервала от тази фамилия имат обща точка. Ето защо от теоремата на Кантор следва, че съществува реално t, за което са изпълнени неравенствата

$$\lambda(c)-\|l_1\|\,\|c+\xi\|\leqq t\leqq\lambda(c)+\|l_1\|\,\|c+\xi\|$$

за всяко $c\in\Lambda$. От тях очевидно следва

(8) $$|\lambda(c)-t|\leqq\|l_1\|\,\|c+\xi\|$$

за всяко $c\in\Lambda$.

Сега да означим с Λ' съвкупността на всички елементи на L от вида

(9) $$c+\alpha\,\xi,$$

където c пробягва Λ, а α — съвкупността на всички реални числа. Тогава Λ' е линейно подпространство на L,

(10) $$\Lambda'\supset\Lambda \text{ и } \Lambda'\neq\Lambda,$$

тъй като $\xi\in\Lambda'$ и $\xi\,\overline{\in}\,\Lambda$.

Нека $c'+\alpha'\,\xi=c''+\alpha''\,\xi$ за някакви c' и c'' от Λ и за някакви α' и α'' от $\mathbf{R}$. Ако допуснем, че $\alpha'\neq\alpha''$, от това равенство би следвало

$$\xi=\frac{1}{\alpha'-\alpha''}\,(c''-c')\in\Lambda$$

в противоречие с $\xi\,\overline{\in}\,\Lambda$. Ето защо $\alpha'=\alpha''$. Сега непосредствено се съобразява, че и $c'=c''$. Ето защо всеки елемент на Λ' има единствено представяне във вида (9).

Следователно, ако за произволни $c\in\Lambda$ и $\alpha\in\mathbf{R}$ положим

(11) $$\lambda'(c+\alpha\,\xi)=\lambda(c)-\alpha\,t,$$

получаваме коректно определено изображение $\lambda':\Lambda'\longrightarrow\mathbf{R}$. Тъй като λ е линеен функционал в Λ, от (11) следва, че и λ' е линеен функционал в Λ'.

Ще покажем, че $(\Lambda',\lambda')\in X$. Тъй като $\Lambda'\supset\Lambda$ съгласно (10) и $\Lambda\supset L_1$, то $\Lambda'\supset L_1$. Също така просто се проверява и наличието на а′) за (Λ',λ').

Сега ще проверим, че (Λ',λ') притежава и свойството б′), т. е. че е изпълнено неравенството

(12) $$|\lambda(c)-\alpha\,t|\leqq\|l_1\|\,\|c+\alpha\,\xi\|$$

за произволни $c\in\Lambda$ и $\alpha\in\mathbf{R}$. При $\alpha=0$ (12) е изпълнено, понеже $(\Lambda,\lambda)\in X$ и следователно (Λ,λ) притежава свойството б′). Поради хомогенността (12) при $\alpha\neq0$ очевидно е еквивалентно с

$$\left|\lambda\left(\frac{c}{\alpha}\right)-t\right|\leqq\|l_1\|\,\left\|\frac{c}{\alpha}+\xi\right\|,$$

което следва от (8), тъй като $\frac{c}{\alpha} \in \Lambda$. С това свойството б') за (Λ', λ') е проверено и следователно $(\Lambda', \lambda') \in X$.

Освен това Λ' удовлетворява (10), а от (11) за $\alpha=0$ получаваме $\lambda'(c)=\lambda(c)$ за всяко $c \in \Lambda$. Следователно

$$(\Lambda', \lambda') \geqq (\Lambda, \lambda).$$

Сега от максималността на (Λ, λ) следва $(\Lambda, \lambda)=(\Lambda', \lambda')$. Ето защо $\Lambda=\Lambda'$, което противоречи на второто условие (10). Полученото противоречие показва, че $\Lambda=L$.

Така се оказа, че функционалът λ е дефиниран в цялото L. Сега от а') и б') следва $\lambda(x)=l_1(x)$ за всяко $x \in L_1$ и $|\lambda(x)| \leqq \|l_1\| \, \|x\|$ за всяко $x \in L$. С това се убедихме, че функционалът λ е непрекъснат и че $\|\lambda\| \leqq \|l_1\|$. От друга страна, при $x \in L_1$ имаме

$$|l_1(x)|=|\lambda(x)| \leqq \|\lambda\| \, \|x\|,$$

поради което $\|l_1\| \leqq \|\lambda\|$. С това теоремата е доказана.

Горното доказателство е едно типично приложение на лемата на Цорн. Да отбележим изрично, че то може да се раздели на две части: съществуване на максимална двойка (Λ, λ) и използуване на максималността на (Λ, λ), за да се убедим, че λ притежава желаните свойства.

Лемата на Цорн бе използувана само в първата част и разглежданията там бяха тривиални — нещо, което е типично за този метод. Максималността на (Λ, λ) използувахме чрез една увеличаваща конструкция. В същност всяко построение, което по даден елемент на X дава негова мажоранта, осигурява и по едно свойство на максималните елементи на X. Нетривиални моменти при използването на лемата на Цорн се наблюдават главно при изобретяването на такива увеличаващи конструкции. Те напомнят преминаването от n към $n+1$ при обичайната индукция.

Функционалите l със свойството а) от формулировката на теоремата на Хан — Банах се наричат *продължения* на l_1. По този начин тази теорема твърди, че *всеки непрекъснат линеен функционал, дефиниран върху подпространство, притежава непрекъснато продължение със същата норма*.

Следващата теорема показва, че непрекъснати продължения съществуват и в комплексния случай.

3.10.2. Теорема. *Нека L е комплексно полунормирано пространство, L_1 е подпространство на L и $l_1 : L_1 \to \mathbf{C}$ е непрекъснат линеен функционал в L_1. Тогава съществува непрекъснат линеен функционал $l : L \to \mathbf{C}$ със следните две свойства:*

а) *изпълнено е равенството $l(x)=l_1(x)$ за всяко $x \in L_1$;*

б) $\|l\|=\|l_1\|$.

Доказателство. Тази комплексна форма на теоремата на Хан — Банах ще установим с помощта на доказаната вече теорема 1. Функционалът l_1 може да се представи във вида

$$l_1(x)=l_1'(x)-\mathrm{i}\, l_1'(\mathrm{i}\, x), \tag{13}$$

където $l_1': L_1 \to \mathbf{R}$ е линеен функционал в реалното векторно пространство, което се получава от L_1, след като там се ограничим само с умножаване с реални скалари (вж. предложение 3.1). Тъй като l_1' е реалната част на l_1, l_1' е непрекъснато и

$$(14) \qquad \|l_1'\| \leqq \|l_1\| .$$

От теорема 1 следва, че l_1' притежава непрекъснато продължение $l': L \to \mathbf{R}$, което е линеен функционал в реалното пространство L и за което е изпълнено равенството

$$(15) \qquad \|l'\| = \|l_1'\| .$$

Съгласно предложение 3.1 изображението $l: L \to \mathbf{C}$, определено с равенството

$$(16) \qquad l(x) = l'(x) - \mathrm{i}\, l'(\mathrm{i}\, x),$$

е комплексен линеен функционал в L. От (16) и от непрекъснатостта на l' следва, че и функционалът l е непрекъснат. Тъй като, от друга страна, l' е продължение на l_1', от (13) и (16) следва, че и l е продължение на l_1.

Ето защо $\|l_1\| \leqq \|l\|$ и теоремата ще бъде доказана, ако се убедим в противоположното неравенство. За тази цел за произволно $x \in L$ избираме комплексно число z, за което $|z|=1$ и $z\, l(x) \geqq 0$. Тогава от комплексната хомогенност на l следва

$$|l(x)| = |z\, l(x)| = l(zx) = l'(zx)$$
$$\leqq \|l'\|\, |zx| = \|l'\|\, \|x\|,$$

тъй като съгласно (16) имаме $l(zx) = l'(zx)$ поради $l(zx) \geqq 0$. Следователно $\|l\| \leqq \|l'\|$, а това заедно с (14) дава $\|l\| \leqq \|l_1\|$. Ето защо $\|l\| = \|l_1\|$ и теоремата е доказана.

§ 3.11. ЛИНЕЙНИ ОПЕРАТОРИ

Понятието линеен функционал притежава важно естествено обобщение. Нека L и M са две линейни пространства с едно и също поле на скаларите $\mathbf{H}$. Едно изображение $u: L \to M$ се нарича *линейно* или *линеен оператор*, когато притежава следните две свойства:

а) изпълнено е равенството

$$u(x+y) = u(x) + u(y)$$

за всеки два елемента x и y на L;

б) изпълнено е равенството

$$u(\lambda x) = \lambda\, u(x)$$

за всяко $\lambda \in \mathbf{H}$ и за всяко $x \in L$.

Когато пространствата L и M са полунормирани, добиваме възможност да разглеждаме непрекъснатите линейни оператори от L към M. Те образуват линейно пространство, което понякога се означава $[L, M]$. Също както и при линейните функционали, се доказва, че едно линейно изображение $u : L \to M$ е непрекъснато точно когато съществува константа C, за която е изпълнено неравенството $\|u(x)\| \leqq C \|x\|$ за всяко $x \in L$. Най-малката такава константа C се означава с $\|u\|$. Читателят ще провери, че така полученото изображение $\|\ \| : [L, M] \to [0, \infty)$ е норма в $[L, M]$. По този начин $[L, M]$ придобива естествена структура на нормирано пространство.

Примери за непрекъснати линейни изображения са идентитетът $e : L \to L$ на произволно полунормирано пространство, а така също изображението φ от предложение 5.5. Ако $u : L \to M$ и $v : M \to K$ са непрекъснати линейни изображения, непрекъсната е и композицията $v \circ u$. Линейните биекции $u : L \to M$, които запазват нормата — $\|u(x)\| = \|x\|$ за всяко $x \in L$, — се наричат *изоморфизми*. При наличие на изоморфизъм пространствата L и M се наричат *изоморфни*.

Математиката и физиката доставят интересни и разнообразни примери за непрекъснати линейни изображения.

§ 3. 12. ПОТОПЯВАНЕ НА НОРМИРАНО ПРОСТРАНСТВО ВЪВ ВТОРОТО МУ СПРЕГНАТО

Спрегнатото пространство L^* на едно полунормирано пространство L е, както знаем, също нормирано. Ето защо можем да образуваме и неговото спрегнато пространство L^{**}. Последното се нарича *второ спрегнато* на L.

На произволен елемент x на L ще съпоставим елемент $i(x)$ на L^{**}. Съгласно дефиницията на L^{**} обектът $i(x)$ би трябвало да е линеен функционал $i(x) : L^* \to \mathrm{H}$, където H е полето на скаларите. Определяме $i(x)$ с равенството

(1) $$(i(x))\ (l) = l(x)$$

за произволно $l \in L^*$. Разбира се, дясната страна на (1) има смисъл, понеже l е линеен функционал в L. По този начин при фиксирано x на всеки елемент l на L^* съпоставихме по един скалар (1). Следователно така получихме изображение $i(x) : L^* \to \mathrm{H}$. Непосредствено се проверява, че изображението $i(x)$ е линеен функционал в L^* (извършете проверката!). Ще покажем, че този линеен функционал е непрекъснат. От (1) поради непрекъснатостта на l следва

(2) $$|(i(x))\ (l)| = |l(x)| \leqq \|l\|\ \|x\| = \|x\|\ \|l\|$$

за всяко $l \in L^*$. С това непрекъснатостта на $i(x)$ е установена. Нещо повече, от (2) следва и неравенството

(3) $$\|i\ (x)\| \leqq \|x\|$$

за всяко $x \in L$.

По този начин на всеки елемент x на L съпоставихме елемент $i(x)$ на L^{**}. Все едно определихме изображение

(4) $$i : L \longrightarrow L^{**}.$$

3.12.1. Теорема. *За всяко полунормирано пространство L изображението i е линейно и запазва нормата.*

Доказателство. Линейността на i следва непосредствено от определението. Проверката ѝ предоставяме на читателя като упражнение върху определението на i.

По този начин остана да проверим само запазването на нормата. При $\|x\|=0$ то следва от (3). При $\|x\|\neq 0$ ще използуваме теоремата на Хан — Банах.

Да разгледаме подпространството L_1 на L, породено от x, т. е. съвкупността на всички произведения от вида λx, където λ пробягва съвкупността на скаларите. За произволен скалар λ да положим

$$l_1(\lambda x)=\lambda\ \|x\|.$$

Така получаваме линеен функционал $l_1 : L_1 \to \mathbf{H}$. Освен това

$$|l_1\ (\lambda x)|=|\lambda|\ \|x\|=\|\lambda x\|,$$

т. е. $|l_1(y)|=\|y\|$ за всяко $y\in L_1$. От това равенство следва $\|l_1\|=1$.

Според теоремата на Хан — Банах l_1 притежава непрекъснато продължение $l : L \to \mathbf{H}$ с $\|l\|=1$. За така построения линеен функционал l и за така избрания елемент x очевидно имаме

$$|(i(x))(l)|=|l(x)|=|l_1(x)|=\|x\|=\|x\|\ \|l\|.$$

Ето защо $\|i(x)\|\geq\|x\|$. Сега от (3) следва $\|i(x)\|=\|x\|$. С това теоремата е доказана.

На практика всеки елемент x на L се *отъждествява* със съответния си елемент $i\ (x)$ от L^{**}. Поради запазването на нормата имаме $i(x)=i(y)$ за два елемента x и y на L точно когато x и y са несъществено различни. По-специално, ако L е нормирано пространство, i е инекция. Тъй като в полунормирания случай равенството най-често се схваща като несъществено различие, и в единия, и в другия случай говорим за *влагане* на L във второто му спрегнато.

§ 3.13. ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ В C ([a, b])

Да се върнем отново към пространството C ([a, b]) на всички функции $f : [a, b]\to\mathbf{R}$, които са непрекъснати в интервала $[a, b]$. Да снабдим C ([a, b]) с равномерната норма

(1) $$\|f\|=\sup\ \{|f\ (x)|\ :\ x\in[a,\ b]\}.$$

В пример 3.3 видяхме, че за произволна функция $g : [a, b]\to\mathbf{R}$ с ограничена вариация равенството

(2) $$l(f)=\int_a^b f(x)\ dg(x) \qquad (f\in C\ ([a,\ b]))$$

определя линеен функционал l в C ([a, b]). Тъй като съгласно предложение 2.10.1 е в сила

$$|l\ (f)|\leq\|f\|\ \mathop{\mathrm{V}}_a^b\ g,$$

функционалът l е непрекъснат и за него е в сила неравенството $\|l\| \leqq \bigvee_a^b g$. Следващата теорема показва, че по този начин могат да бъдат получени всички непрекъснати линейни функционали в $C([a, b])$.

3.13.1. Теорема (Ф. Рис). *За всеки непрекъснат линеен функционал* $l: C([a, b]) \to \mathbb{R}$ *съществува функция* $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ *с ограничена вариация, за която е изпълнено* (2) *за всяко* $f \in C([a, b])$ *и освен това* $\|l\| = \bigvee_a^b g$.

Доказателство. Нека L е пространството на всички ограничени функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, снабдено с равномерната норма (дефинирана с (1) за всяко $f \in L$). Очевидно $C([a, b])$ е подпространство на L и съгласно теоремата на Хан — Банах функционалът l, зададен по условие в $C([a, b])$, притежава непрекъснато продължение до цялото L, което има нормата на l и ще бъде означавано също с l. Ще фиксираме произволно такова продължение l. По този начин $l(f)$ придобива смисъл и за произволни ограничени *прекъснати* функции в $[a, b]$.

За да се възползуваме от това, за произволни (фиксирани) $x, y \in [a, b]$, за които $x \leqq y$, ще разгледаме функцията $\chi_{xy}: [a, b] \to \mathbb{R}$, определена с

$$\chi_{xy}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leqq z < x \text{ и } y \leqq z \leqq b, \\ 1 & \text{при } x \leqq z < y, \end{cases}$$

когато $y < b$, и с

$$\chi_{xb}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leqq z < x, \\ 1 & \text{при } x \leqq z \leqq b. \end{cases}$$

Непосредствено се проверява, че за тези функции са изпълнени равенствата

(3) $$\chi_{ay} - \chi_{ax} = \chi_{xy}$$

при $a \leqq x < y \leqq b$.

Функцията $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ ще определим с $g(x) = l(\chi_{ax})$ при $a \leqq x \leqq b$. Ще покажем най-напред, че g е функция с ограничена вариация. За тази цел да разгледаме произволно подразделяне

(4) $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Очевидно

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, (g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

където за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ числото ε_i е 1 или -1. От друга страна, от (3) се получава

(5) $$g(x_i) - g(x_{i-1}) = l\left(\chi_{ax_i} - \chi_{ax_{i-1}}\right) = l\left(\chi_{x_{i-1} x_i}\right)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, l(\chi_{x_{i-1}\,x_i}) = l\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}\right).$$

От друга страна, читателят лесно ще съобрази, че функцията вдясно на последното от тези равенства за всяко $x \in [a, b]$ приема стойност 1 или -1. Ето защо

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}\right\| = 1$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})| \leqq \|l\|\, \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}\right\| = \|l\|$$

за всяко подразделяне (4) на $[a, b]$ на подинтервали. Поради това функцията g е с ограничена вариация и е изпълнено неравенството

$$\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} g \leqq \|l\|. \tag{6}$$

Нека сега $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е произволна непрекъсната функция, а ε — произволно положително число. Тъй като f е равномерно непрекъсната, съществува положително число δ, за което е изпълнено $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$ за всеки две точки $x', x'' \in [a, b]$ с $|x'-x''| < \delta$. Да разгледаме произволно подразделяне (4) на $[a, b]$ с $x_i - x_{i-1} < \delta$ за всяко $i=1, 2, \ldots, n$. Читателят лесно ще съобрази, че при произволен избор на междинните точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ е в сила

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}(x)\right| < \varepsilon$$

за всяко $x \in [a, b]$. Ето защо

$$\left\|f - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}\right\| < \varepsilon$$

и

$$\left|l(f) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, l(\chi_{x_{i-1}\,x_i})\right| = \left|l\left(f - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}\right)\right|$$

$$\leqq \|l\|\, \left\|f - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \chi_{x_{i-1}\,x_i}\right\| \leqq \|l\|\, \varepsilon.$$

Поради (5) оттук следва

$$\left|l(f) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, (g(x_i)-g(x_{i-1}))\right| \leqq \varepsilon\, \|l\|$$

за всяко подразделяне (4) на $[a, b]$ с $x_i - x_{i-1} < \delta$ и при всеки из бор на междинните точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. От това неравенство и от определението на стилтесовия интеграл (вж. § 2.5) следва (2). От (2), както вече видяхме, се получава $\|l\| \leq \bigvee_a^b f$, а това заедно с (6) дава $\|l\| = \bigvee_a^b f$. С това теоремата е доказана.

Така виждаме, че стилтесовият интеграл играе основна роля при изучаването на ограничените линейни функционали в $C([a, b])$. Това до голяма степен мотивира въвеждането на самия стилтесов интеграл.

Задачи към трета глава

Неравенства на Хьолдер и Минковски

Задача 1. Да се докаже неравенството на Хьолдер

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

за произволни комплексни a_i, b_i и положителни p, q с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Упътване. Като използувате хомогенността, сведете към положителни a_i и b_i, за които $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = 1$. След това намерете (например с метода на Лагранж) най-голямата стойност на функцията $\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ при условията $x_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$.

Задача 2. Да се докаже неравенството на Минковски

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

за произволни комплексни a_i, b_i и $p \geq 1$.

Упътване. При неотрицателни a_i и b_i използувайте равенството

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}$$

и неравенството на Хьолдер.

Задача 3. Нека $p > 1$, C е положителна константа, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са реални числа, за които е изпълнено неравенството

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

за произволни реални числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Да се докаже, че при тези предположения е изпълнено неравенството $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \leq C^q$, където числото q е определено от $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Упътване. Сведете към случая $a_i > 0$ и забележете, че е изпълнено неравенството $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq C$ при допълнителните условия $x_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$. В това неравенство поставете онези x_i, за които лявата му страна приема най-голяма стойност (при дадените допълнителни условия).

Класически норми в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$

Задача 4. Нека $p \geq 1$. Ако за произволен вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $\mathbf{R}^n$ положим

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

получаваме норма в $\mathbf{R}^n$. Сходимостта спрямо всяка от така получените норми е покоординатната.

Задача 5. Ако за произволен вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\mathbf{R}^n$ положим

$$\| x \|_\infty = \max \left\{ | x_i | \right\}_{i=1}^{n},$$

получаваме норма в $\mathbf{R}^n$. Сходимостта спрямо тази норма е покоординатната.

Задача 6. Всеки линеен функционал в $\mathbf{R}^n$ е непрекъснат спрямо нормите $\| \ \|_p$ $(p \geq 1)$ и $\| \ \|_\infty$.

Задача 7. Нека $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е наредена n-орка от реални числа и l е линейният функционал в $\mathbf{R}^n$, определен с $l(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ за всяка точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $\mathbf{R}^n$. Да се докаже, че

а) ако $\mathbf{R}^n$ се снабди с нормата $\| \ \|_1$, то $\| l \| = \| a \|_\infty$;

б) ако $\mathbf{R}^n$ се снабди с нормата $\| \ \|_p$ за някое $p > 1$, то $\| l \| = \| a \|_q$, където q е определено от равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

в) ако $\mathbf{R}^n$ се снабди с нормата $\| \ \|_\infty$, то $\| l \| = \| a \|_1$.

Упътване. За да докажете б), използвайте неравенството на Хьолдер и задача 3.

Задача 8. За пространството $\mathbf{C}^n$ формулирайте и докажете твърдения, аналогични на онези от зад. 4 — 7.

Пространствата l^p и $l^p_{\mathbf{C}}$

Нека $p \geq 1$. С l^p $\left(l^p_{\mathbf{C}}\right)$ се означава съвкупността на всички безкрайни редици $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от реални (комплексни) числа, за които редът $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p$ е сходящ. С l^∞ $\left(l^\infty_{\mathbf{C}}\right)$ се означава съвкупността на всички ограничени редици $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от реални (комплексни) числа. От неравенството на Минковски (вж. зад. 2) непосредствено следва, че заедно с всеки два свои елемента $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ всяко от тези множества съдържа и сумата им

$$x + y = \{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Оттук директно се получава, че въпросните множества са реални (комплексни) линейни пространства.

Задача 9. Нека $p \geq 1$. Ако за произволен елемент $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^p положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

получаваме норма в l^p.

Задача 10. Ако за произволен елемент $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^{∞} положим $\|x\|_{\infty} = \sup \{|x_i|\}_{i=1}^{\infty}$, получаваме норма в l^{∞}.

Задача 11. Нека пространството l^1 е снабдено с нормата $\| \ \|_1$ и $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е произволен елемент на l^{∞}. Тогава за всяко $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от l^1 редът $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ е сходящ. Ако положим $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ за всеки елемент $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^1, получаваме непрекъснат линеен функционал l в l^1 с норма $\|l\| = \|a\|_{\infty}$. За всеки непрекъснат линеен функционал l в l^1 съществува единствен елемент $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^{∞}, за който е в сила $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ за всяко $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от l^1.

Задача 12. Нека $p > 1$, q е числото, определено от равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l^p е снабдено с нормата $\| \ \|_p$ и $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е елемент на l^q. Тогава за всяко $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от l^p редът $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ е сходящ. Ако положим $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ за всеки елемент $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^p, получаваме непрекъснат линеен функционал l в l^p с норма $\|l\| = \|a\|_q$. За всеки непрекъснат линеен функционал l в l^p съществува единствен елемент $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^q, за който е в сила $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ за всяко $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от l^p.

Упътване. За да докажете първата част, използувайте неравенството на Хьолдер и зад. 3. За да докажете втората част, за $n = 1, 2, \ldots$ с e_n означете елемента на l^p, за който $x_i = 0$ при $i \neq n$ и $x_n = 1$. Положете $a_n = l(e_n)$. След това докажете равенството $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ в съвкупността F на онези елементи $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^p, за които само краен брой x_i са различни от нула. По-нататък използувайте зад. 7,б), за да докажете неравенствата $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \leq \|l\|^q$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и заключете, че $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^q$. За да докажете равенството $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ за всяко $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от l^q, забележете, че множеството F е гъсто в l^p.

Задача 13. Нека пространството l^{∞} е снабдено с нормата $\| \ \|_{\infty}$ и $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е произволен елемент на l^1. Тогава за всяко $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от l^{∞} редът $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ е сходящ. Ако положим $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ за всеки елемент $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^{∞}, получаваме непрекъснат линеен функционал l в l^∞ с норма $\|l\| = \|a\|_1$. Съществуват непрекъснати линейни функционали l в l^∞, които не притежават описаното представяне.

Упътване. За да докажете втората част, с L означете съвкупността на онези елементи $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^∞, за които границата $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ съществува. За всяко такова x положете $l(x) = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$ и проверете, че l е непрекъснат линеен функционал в L. Продължете този функционал до непрекъснат линеен функционал l в цялото l^∞ с помощта на теоремата на Хан — Банах и се убедете, че така полученото l няма представяне от вида $l(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.

Задача 14. За пространствата $l^p_{\mathbb{C}}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ формулирайте и докажете твърдения, аналогични на онези от зад. 9 — 13.

Линейни функционали в $C([a, b])$

Задача 15. Нека $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ са функции с ограничена вариация. Да се докаже, че ако е изпълнено равенството

$$g(x) - g(a) = h(x) - h(a) \tag{1}$$

за всички x от едно гъсто в $[a, b]$ множество D с $b \in D$, то за всяка непрекъсната функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е в сила

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dh(x). \tag{2}$$

Задача 16. Нека $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ е функция с ограничена вариация, ξ и η са числа с $a \leq \xi < \eta \leq b$ и $f_{\xi\eta} : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъснатата функция, която приема стойност 1 в $[a, \xi]$, стойност 0 в $[\eta, b]$ и е линейна в $[\xi, \eta]$. Да се докаже равенството

$$\int_a^b f_{\xi\eta}(x)\,dg(x) = \frac{1}{\eta - \xi}\int_\xi^\eta g(x)dx - g(a).$$

Упътване. Използвайте адитивността на интеграла вляво и интегрирайте по части.

Задача 17. Нека $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ са функции с ограничена вариация и нека за всяка непрекъсната функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е изпълнено равенството (2). Да се докаже, че тогава:

а) равенството (1) е изпълнено за всички точки $x \in [a, b]$, в които и двете функции g, h са непрекъснати отляво (отдясно);

б) равенството (1) е изпълнено за всички точки x от едно гъсто в $[a, b]$ множество D с $b \in D$.

Упътване. За да докажете а), използвайте зад. 16 и теоремата на Лайбниц и Нютон. За да докажете б), си послужете с а) и със зад. 3, гл. II.

Нека $a < b$. С $V([a, b])$ ще означаваме линейното пространство на всички функции $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ с ограничена вариация, които са непрекъснати отляво навсякъде в (a, b) и удовлетворяват условието $g(a) = 0$. Ако за всяко $g \in V([a, b])$ положим $\|g\| = \bigvee\limits_a^b g$, пространството $V([a,b])$ става нормирано.

Задача 18. Ако на произволна функция $g \in V([a, b])$ се съпостави линейният функционал l в $C([a, b])$, определен с равенството

$$l(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x) \tag{3}$$

за всяко $f \in C([a, b])$, получава се изоморфизъм между $V([a, b])$ и спрегнатото пространство на $C([a, b])$. Този изоморфизъм запазва нормите.

Упътване. При зададено l, за да докажете единствеността на $g \in V([a, b])$ с (3), използувайте зад. 17,а). За да докажете съществуването на g, използувайте най-напред теорема 13.1, съгласно която съществува функция $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограничена вариация с

$$l(f) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

за всяко $f \in C([a, b])$ и $\|l\| = \bigvee_a^b h$. След това разгледайте функцията $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, определена с $g(a) = 0$, $g(\xi) = h(\xi - 0) - h(a)$ (границата съществува съгласно зад. 4,а), гл. II) за $\xi \in (a, b)$ и $g(b) = h(b) - h(a)$. Покажете, че $g \in V([a, b])$ и че $\|g\| \leqq \bigvee_a^b h$. Използувайте зад. 15, за да докажете (3). От (3) извлечете неравенството $\|l\| \leqq \|g\|$, като си послужите с предложение 2.10.1, и накрая заключете, че $\|l\| = \|g\|$.

Задача 19. За всяка функция $f \in C([a, b])$ равенството

$$l(g) = \int_a^b f(x)\, dg(x) \qquad (g \in V([a, b])) \tag{4}$$

определя непрекъснат линеен функционал във $V([a, b])$ с $\|l\| = \|f\|$. За всяка точка $c \in (a, b)$ функционалът l във $V([a, b])$, определен с $l(g) = g(c)$, е непрекъснат, но няма представяне от вида (4).

Упътване. За да докажете първото твърдение, използвайте зад. 18 и теорема 12.1.

Еквивалентни норми

Две норми $\|\ \|$ и $\|\ \|_1$ в едно линейно пространство L се наричат *еквивалентни*, когато пораждат една и съща сходимост. При това условие затворените множества, отворените множества и непрекъснатите линейни функционали в L са едни и същи спрямо двете норми.

Задача 20. Две норми $\|\ \|$ и $\|\ \|_1$ в едно линейно пространство L са еквивалентни точно когато съществуват положителни константи c и C, за които са изпълнени неравенствата

$$c\|x\| \leqq \|x\|_1 \leqq C\|x\|$$

за всяко $x \in L$.

Задача 21. Да се докаже, че всеки две норми в крайномерно линейно пространство са еквивалентни.

Задача 22. Нека $p \geqq 1$. Ако за всяко $f \in C([a, b])$ положим

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

получаваме норма в $C([a, b])$. Да се докаже, че никои две от тези норми не са еквивалентни. Никоя от тях не еквивалентна също така и с равномерната норма.

Четвърта глава

БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА

Нормираните пространства са обобщение на $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{C}^m$, а читателят знае колко съдържателен е математическият анализ в последните. Интересно е, че съществена част от него може да се пренесе и в онези нормирани пространства, в които условието на Коши е достатъчно за сходимост — банаховите пространства. Различни съвкупности от функции, които възникват съвсем естествено, са именно такива пространства. Тук ще се ограничим с елементи на общата им теория, а главните примери ще се появят в следващите глави. Всяко нормирано пространство може да се потопи в банахово — неговото попълнение. Така получаваме конструкция с важно приложение в абстрактната теория на интеграла. В банаховите пространства е валиден един общ принцип за съществуване, наречен теорема на Бер. От нея следва например, че обратното изображение на непрекъсната линейна биекция между банахови пространства е непрекъснато — един частен случай на т. нар. теорема за отвореното изображение. От последната се получава, че за непрекъснатост на линейно изображение е достатъчна затвореност на графиката му. Същият принцип показва, че ако една редица от непрекъснати линейни оператори притежава глобална особеност, тя се наблюдава непременно и в отделна точка. Компактността и свойствата ѝ се пренасят почти непосредствено от $\mathbf{R}^m$ в банаховите пространства. Всичко това мотивира предприетото в шеста и девета глава построяване на банахови пространства.

Дефиницията на банахово пространство се съдържа в § 1. Параграфи 2 и 3 са посветени на съществуването и единствеността на попълнението. В § 4 е представена теоремата на Бер, а в § 5 се разглеждат изпъкнали множества. В § 6, 7 и 8 са доказани трите основни теореми: за отвореното изображение, за затворената графика и за фиксиране на особеностите. Параграф 9 съдържа основните свойства на компактните множества, а § 10 — теоремата на Вайерщрас — Стоун.

При първо четене са задължителни само § 1 — 3. От останалите параграфи са необходими формулировките на представените там теореми.

§ 4.1. ДЕФИНИЦИЯ НА БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО

Нека L е нормирано пространство. Една редица $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от елементи на L се нарича *фундаментална*, когато удовлетворява условието на Коши, т. е. когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв индекс γ_0, че за всеки два индекса α, $\beta\in\Gamma$ с $\alpha\geqq\gamma_0$ и $\beta\geqq\gamma_0$ да е в сила

$$\|x_\alpha - x_\beta\| < \varepsilon.$$

Разбира се, сходящите редици са фундаментални, но обратното не винаги е вярно. Нормираните пространства L, всяка фундаментална редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

от елементи на които е сходяща, се наричат *пълни нормирани пространства* или още *банахови пространства*.

Ето няколко примера за банахови пространства.

4.1.1. Пример. Най-простите примери за банахови пространства са $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$, снабдени например с нормата

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

4.1.2. Пример. Нека X е произволно множество. Пространството L на всички ограничени функции $f: X\to\mathbf{R}$, снабдено с равномерната норма

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|, \tag{1}$$

е банахово. Същото се отнася и за пространството на всички ограничени комплексни функции $f: X\to\mathbf{C}$, снабдено с нормата (1).

4.1.3. Пример. Нека L е нормирано пространство и X е произволно подмножество на L. Тогава пространството $C(X)$ на всички ограничени непрекъснати функции $f: X\to\mathbf{R}$, снабдено с равномерната норма (1), е банахово. Това твърдение следва от добре известната теорема, че границата на всяка равномерно сходяща редица от непрекъснати функции е непрекъсната (обмислете подробностите!). Специално пространството $C([a, b])$, снабдено с равномерната норма, е банахово.

Следващата теорема, която е модификация на пример 3, посочва други примери за банахови пространства.

4.1.4. Теорема. *За произволно нормирано пространство L спрегнатото пространство L^* е банахово.*

Доказателство. Да напомним (вж. § 3.9), че L^* се състои от всички непрекъснати линейни функционали l в L с обичайните операции събиране и умножение със скалари и норма най-малката константа M, за която е изпълнено неравенството $|l(x)|\leqq M\|x\|$ за всяко $x\in L$.

Нека сега

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

е фундаментална редица от елементи на L^*. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова ν, че при $m, n > \nu$ да е в сила

(2) $$\|l_m - l_n\| < \varepsilon.$$

От (2) се получава

(3) $$|l_m(x) - l_n(x)| = |(l_m - l_n)(x)| \leqq \|l_m - l_n\| \|x\|$$

за всяко $x \in L$. Поради това за всяко $x \in L$ редицата

$$l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x), \ldots$$

е фундаментална. Тъй като пространството на скаларите (**R** или **C**) е пълно, тази редица е сходяща. Ето защо за всяко $x \in L$ може да се образува границата

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} l_n(x)$$

и по този начин на всяко $x \in L$ се съпоставя скалар $l(x)$. От свойствата на границите на редиците от реални и комплексни числа и от дефиницията на линеен функционал непосредствено следва, че l е линеен функционал в L. От друга страна, от (2) и (3) следва

$$|l_m(x) - l_n(x)| \leqq \varepsilon \|x\|$$

при $m, n > \nu$. Ако в това неравенство извършим граничния преход $(n \to \infty$, ще получим

(4) $$|l_m(x) - l(x)| \leqq \varepsilon \|x\|$$

за всяко $m > \nu$ и за всяко $x \in L$. От (4) най-напред следва, че функционалът $l_m - l$ е непрекъснат и тъй като l_m е непрекъснат по условие, функционалът l също е непрекъснат, т. е. $l \in L^*$. От друга страна, отново от (4) следва $\|l_m - l\| \leqq \varepsilon$ при $m > \nu$ и теоремата е доказана.

Следващото предложение позволява по дадено банахово пространство да се построяват нови.

4.1.5. Предложение. *Нека L е банахово пространство и L_1 е затворено подпространство на L. Тогава L_1 също е банахово пространство.*

Доказателство. Нека

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

е фундаментална редица от елементи на L_1. Тогава, разбира се, тя е фундаментална и в L и поради пълнотата на L притежава граница x_0 в L. Твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че $x_0 \in L_1$, а това следва от определението на затворено множество.

Други примери на банахови пространства се съдържат в следващите две глави, а така също в девета и десета глава.

§ 4.2. ПОПЪЛВАНЕ НА НОРМИРАНИ ПРОСТРАНСТВА ДО БАНАХОВИ

Следващата теорема показва, че всяко нормирано пространство поражда банахово пространство, в което се потопява.

4.2.1. Теорема. *За всяко нормирано пространство L съществува банахово пространство $\widehat{L}$ със следните две свойства:*

а) *L е подпространство на $\widehat{L}$;*

б) *$\widehat{L}$ съвпада със затворената обвивка на L.*

Доказателство. Съгласно теорема 3.12.1 съществува линейно изображение $i: L \to L^{**}$, което запазва нормата. Да отъждествим елементите на L с образите им в L^{**}. Тогава L се превръща в подпространство на L^{**}. От друга страна, L^{**} е пълно съгласно теорема 1.4. Ето защо и затворената обвивка $\overline{L}$ на L в L^{**} е пълна съгласно предложение 1.5. Вече виждаме, че пространството $\widehat{L}=\overline{L}$ удовлетворява двете изисквания а) и б) на теоремата. С това всичко е доказано.

Нека L е нормирано пространство. Всяко банахово пространство $\widehat{L}$ със свойствата а) и б) от теорема 1 се нарича *попълнение* на L. Така виждаме, че всяко нормирано пространство притежава попълнение. Тъй като след отъждествяване на несъществено различните елементи на едно полунормирано пространство се получава нормирано пространство, същото е вярно и за полунормираните пространства.

При построяването на попълнението $\widehat{L}$ съществено използувахме теоремата на Хан — Банах, тъй като именно тя гарантира наличието на влагане $i: L \to L^{**}$. С оглед на онова, което следва, е желателно да разполагаме и с едно по-просто описание на попълнението.

За целта да отбележим най-напред, че поради пълнотата на $\widehat{L}$ всяка фундаментална редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

от елементи на L има граница

$$\xi=\lim_{n\to\infty} x_n \tag{2}$$

в $\widehat{L}$. При това от непрекъснатостта на нормата следва

$$\|\xi\|=\lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Две фундаментални редици (1) и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

от елементи на L се наричат *конфинални*, когато $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n-y_n)=0$.

Забележете, че конфиналността се изразява чрез L, а не чрез $\widehat{L}$. Директно се съобразява, че две фундаментални редици от елементи на L имат една и съща граница в $\widehat{L}$ точно когато са конфинални. Ето защо конфиналността е релация на еквивалентност. Същевременно поради условието б) и предложение 3.7.1 всеки елемент на L е граница на редица от елементи на L, която очевидно е фундаментална.

Така виждаме, че *ако на всеки елемент* ξ *на* $\widehat{L}$ *съпоставим множеството на всички фундаментални редици* (1) *от елементи на* L, *за които е в сила* (2), *получаваме биекция между елементите на* $\widehat{L}$ *и класовете от конфинални фундаментални редици от елементи на* L.

Тези бележки очевидно могат да се използуват за директно построяване на попълнението, но макар и естествена, така получената конструкция е по-тромава от приведената по-горе.

§ 4.3. ЕДИНСТВЕНОСТ НА ПОПЪЛНЕНИЕТО

От казаното в края на предишния параграф може да се получи очевидно единствеността на попълнението. Преди да обсъдим този въпрос, ще се занимаем с една задача за продължаване на непрекъснати линейни изображения.

4.3.1. Теорема. *Нека* L *е нормирано пространство,* M *е банахово пространство и* $\widehat{L}$ *е някакво попълнение на* L. *Тогава всяко непрекъснато линейно изображение* $u: L \to M$ *притежава единствено непрекъснато линейно продължение* $\widehat{u}: \widehat{L} \to M$.

Доказателство. Най-напред ще се занимаем с единствеността на $\widehat{u}$. Нека ξ е произволен елемент на $\widehat{L}$. Тъй като $\widehat{L}$ съвпада със затворената обвивка на L, съществува редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

от елементи на L, за която е изпълнено равенството

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{2}$$

От непрекъснатостта на $\widehat{u}$ се получава $\widehat{u}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{u}(x_n)$ и тъй като $x_n \in L$ и $\widehat{u}$ е продължение на u, то

$$\widehat{u}(\xi) = \lim_{n\to\infty} u(x_n). \tag{3}$$

Тези разглеждания важат за всяко непрекъснато продължение $\widehat{u}: \widehat{L} \to M$ на u. Поради (3) всички такива продължения съвпадат.

Освен че дават единствеността на $\widehat{u}$, тези разсъждения ни подсещат как да определим $\widehat{u}$. Нека ξ е елемент на $\widehat{L}$ и (1) е редица от елементи на L, за която е в сила (2). Тогава (1) е фундаментална редица.

От непрекъснатостта на u следва, че и редицата

$$u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n), \ldots \tag{4}$$

е фундаментална. Наистина нека ε е произволно положително число. Тогава съществува такова ν, че при $m, n > \nu$ да е в сила

$$\|x_m - x_n\| \leqq \varepsilon.$$

Тогава

$$\|u\ (x_m) - u\ (x_n)\| = \|u\ (x_m - x_n)\|$$
$$\leqq \|u\|\ \|x_m - x_n\| \leqq \varepsilon\ \|u\|$$

за всички $m, n > \nu$. С това фундаменталността на редицата (4) е доказана.

Тъй като членовете на (4) принадлежат на банаховото пространство M, тази редица е сходяща. Ето защо границата (3) съществува. Въпреки това все още не сме в състояние да определим $\widehat{u}\ (\xi)$ с (3). Наистина при фиксирано ξ редиците (1) с (2) в общия случай са много и не е изключено, когато те се променят, да се променя и границата вдясно на (3). Ако случаят би бил такъв, дефиницията (3) не би била коректна, преди да сме посочили по какъв точно начин избираме (1) с (2).

Тук не се налага обаче да избираме по специален начин редицата (1) с (2). Нека наред с (1) и

(5) $$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

е редица от елементи на L с

(6) $$\xi = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ и от непрекъснатостта на u следва $\lim\limits_{n\to\infty} (u\ (x_n) - u\ (y_n)) = 0$. Ето защо за всеки две редици (1) и (5) съответно с (2) и (6) границите $\lim\limits_{n\to\infty} u\ (x_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u\ (y_n)$ съвпадат.

Вече сме готови да определим $\widehat{u}$. За произволно $\xi \in \widehat{L}$ избираме произволна редица (1) от елементи на L, за която е изпълнено (2), и определяме $\widehat{u}\ (\xi)$ с (3). Така получаваме изображение $\widehat{u} : \widehat{L} \to M$.

Ако $\xi \in L$, от (2) и непрекъснатостта на u следва $u\ (\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} u\ (x_n)$, което заедно с (3) дава $\widehat{u}\ (\xi) = u\ (\xi)$. Ето защо $\widehat{u}$ е продължение на u. Същевременно от линейността на u и от (3) непосредствено следва, че и изображението $\widehat{u}$ е линейно.

Ето защо остана да се докаже само непрекъснатостта на $\widehat{u}$. Тъй като u е непрекъснато, за произволно $n = 1, 2, \ldots$ е в сила неравенството

$$\|u\ (x_n)\| \leqq \|u\|\ \|x_n\|.$$

От него и от (2), (3) след граничния преход $n \to \infty$ се получава

(7) $$\|\widehat{u}\ (\xi)\| \leqq \|u\|\ \|\xi\|$$

за произволно $\xi \in \widehat{L}$. С това теоремата е доказана.

От (7) очевидно следва $\|\widehat{u}\| = \|u\|$. Ще отбележим също така че без особени промени горното доказателство осигурява съществу ването на единствено непрекъснато продължение $\widehat{u}:\widehat{L}\to M$ на произволно (не непременно линейно) равномерно непрекъснато изображение $u:L\to M$, като при това $\widehat{u}$ се оказва равномерно непрекъснато.

Преминаваме към единствеността на попълнението.

4.3.2. Предложение. *Нека L е нормирано пространство, а $\widehat{L}$ и $\check{L}$ са две попълнения на L. Тогава съществува единствено непрекъснато линейно изображение $i:\widehat{L}\to\check{L}$ с $i(x)=x$ за всяко $x\in L$. Изображението i е биекция и запазва нормите.*

Доказателство. Влагането $u:L\to\check{L}$, определено с $u(x)=x$ за всяко $x\in L$, притежава единствено непрекъснато линейно продължение

$$i:\widehat{L}\longrightarrow\check{L}$$

съгласно теорема 1. С това съществуването и единствеността на са установени.

Нека сега $\xi\in\widehat{L}$ и (1) е редица от елементи на L с (2). Тогава $i(x_n)=x_n$ и следователно

$$\|i(x_n)\|=\|x_n\|$$

на всяко $n=1, 2,\dots$ След граничен преход в това неравенство се получава $\|i(\xi)\|=\|\xi\|$, поради което i запазва нормата. Оттук, разбира се, следва, че i е инективно.

За да установим и сюрективността, нека η е произволен елемент на $\check{L}$. Тогава съществува редица (5) от елементи на L с $\eta=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Същевременно за всяко $n=1, 2,\dots$ е изпълнено равенството

$$y_n=i(y_n). \tag{8}$$

Бидейки сходяща в $\check{L}$, редицата (5) е фундаментална в L. Тъй като пространството $\widehat{L}$ е пълно, (5) притежава граница в $\widehat{L}$:

$$\xi=\lim_{n\to\infty} y_n.$$

След граничен преход в (8) сега се получава $\eta=i(\xi)$ и предложението е доказано.

§ 4.4. ТЕОРЕМА НА БЕР

Да напомним, че ако ξ е елемент на някакво нормирано пространство L и δ е положително число, с $B(\xi,\delta)$ означаваме затвореното кълбо с център ξ и радиус δ:

$$B(\xi,\delta)=\{x\in L:\|x-\xi\|\leqq\delta\}.$$

4.4.1. Теорема (Р. Бер). *Нека L е банахово пространство, а*

$$F_1, F_2,\dots, F_n,\dots$$

е редица от затворени подмножества на L с

(1) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = L.$$

Тогава съществуват число $n=1, 2, \ldots$, *число* $\delta > 0$ *и точка* $\xi \in L$, *за които*

$$B(\xi, \delta) \subset F_n.$$

Доказателство. Допускаме противното. Тогава никое кълбо с положителен радиус не се съдържа в никое от множествата F_n. Да разгледаме произволно кълбо $B(\xi_1, r_1)$ с $r_1 > 0$. Съгласно допускането съществува точка

$$\xi_2 \in B\left(\xi_1, \frac{r_1}{2}\right) \setminus F_1.$$

Тъй като ξ_2 не принадлежи на затвореното множество F_1, тя принадлежи на отвореното множество $L \setminus F_1$. Ето защо съществува кълбо с положителен радиус и център ξ_2, което не пресича F_1. Следователно съществува число r_2 с $0 < r_2 < \frac{r_1}{2}$ и $B(\xi_2, r_2) \cap F_1 = \emptyset$. За всички точки $x \in B(\xi_2, r_2)$ са в сила неравенствата

$$\|x - \xi_1\| \leqq \|x - \xi_2\| + \|\xi_2 - \xi_1\| \leqq r_2 + \frac{r_1}{2} < r_1,$$

поради което $x \in B(\xi_1, r_1)$. Следователно $B(\xi_2, r_2) \subset B(\xi_1, r_1)$.

Съгласно допускането множеството F_2 също не съдържа кълба с положителни радиуси. Ето защо съществува точка

$$\xi_3 \in B\left(\xi_2, \frac{r_2}{2}\right) \setminus F_2.$$

Сега ξ_3 не принадлежи на затвореното множество F_2 и поради това съществува r_3 с $0 < r_3 < \frac{r_2}{2}$ и $B(\xi_3, r_3) \cap F_2 = \emptyset$. Също както и по-горе, се доказва включването $B(\xi_3, r_3) \subset B(\xi_2, r_2)$.

И така нататък. Ако продължим този процес неограничено, ще получим безкрайна редица

(2) $$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots$$

от точки на L и безкрайна редица

(3) $$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

от положителни числа, за които са изпълнени условията

(4) $$0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2},$$

(5) $$B(\xi_{n+1}, r_{n+1}) \cap F_n = \emptyset,$$

(6) $$B(\xi_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(\xi_n, r_n)$$

за всяко $n = 1, 2, 3, \ldots$

От (4) следва, че редицата (3) клони към нула. Тъй като от (6) се получава $\xi_{n+k} \in B(\xi_n, r_n)$ при $k = 1, 2, \ldots$, то $\|\xi_{n+k} - \xi_n\| \leqq r_n$ и следователно редицата (2) е фундаментална. От друга страна, пространството L е пълно по условие. Ето защо редицата (2) е сходяща

Нека

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

Да разгледаме произволно $n=1, 2, \ldots$ и да го фиксираме. Вече видяхме, че при $k=1, 2, \ldots$ имаме $\xi_{n+k} \in B\ (\xi_n, r_n)$. Тъй като затворените кълба са затворени множества съгласно § 3.7, то

$$\xi \in B\ (\xi_n, r_n).$$

Сега (5) показва, че е изпълнено и условието $\xi \overline{\in} F_n$. Тъй като n бе избрано произволно, това противоречи на (1). С това теоремата е доказана.

Теоремата на Бер е забележително общо твърдение за съществуване. Тя притежава редица важни приложения, част от които ще бъдат обсъдени в § 6, 7 и 8.

§ 4.5. ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА

Нека L е линейно пространство. Едно множество A в L се нарича *изпъкнало,* когато заедно с всеки две свои точки съдържа и съединяващата ги отсечка. Това означава, че за произволни $x, y \in A$ и $\lambda \in \mathrm{R}$ с $0 < \lambda < 1$ е в сила $\lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in A$.

4.5.1. Пример. Празното множество, цялото L, едноточковите множества и по-общо афинните подпространства са изпъкнали.

4.5.2. Пример. Ако L е нормирано, отворените кълба, а също и затворените кълба са изпъкнали множества. Да установим това за затворените кълба. Нека $\xi \in L$ и $\delta > 0$. Да изберем произволно $x, y \in B\ (\xi, \delta)$. Тогава при $0 < \lambda < 1$ е в сила

$$\|x-\xi\| \leq \delta, \quad \|y-\xi\| \leq \delta.$$

Нека $\lambda \in \mathrm{R}$ и $0 < \lambda < 1$. От горните неравенства се получава

$$\|\lambda x + (1-\lambda)\ y - \xi\| = \|\lambda\ (x-\xi) + (1-\lambda)\ (y-\xi)\|$$
$$\leq \lambda\ \|x-\xi\| + (1-\lambda)\ \|y-\xi\| \leq \lambda\ \delta + (1-\lambda)\ \delta = \delta.$$

Следователно $\lambda x + (1-\lambda)\ y \in B\ (\xi, \delta)$ и изпъкналостта на $B\ (\xi, \delta)$ е установена.

4.5.3. Предложение. *Нека L е нормирано пространство и A е изпъкнало множество в L. Тогава затворената обвивка $\overline{A}$ също е изпъкнало множество.*

Д о к а з а т е л с т в о. Съгласно предложение 3.7.1 $\overline{A}$ се състои от границите на всевъзможните сходящи редици от елементи на A

Нека $x, y \in \overline{A}$. Тогава съществуват редици

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

от точки на A с

(1) $$x=\lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } y=\lim_{n\to\infty} y_n.$$

Тъй като A е изпъкнало, при $0<\lambda<1$ ще имаме

(2) $$\lambda x_n+(1-\lambda) y_n \in A.$$

От друга страна,

$$\|\lambda x_n+(1-\lambda) y_n-(\lambda x+(1-\lambda) y)\|$$
$$\leq \lambda \|x_n-x\|+(1-\lambda) \|y_n-y\|.$$

Последният израз клони към нула при неограниченото нарастване на n съгласно (1). Ето защо

$$\lambda x+(1-\lambda) y=\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n+(1-\lambda) y_n)$$

и следователно $\lambda x+(1-\lambda) y\in \bar{A}$ съгласно (2). С това изпъкналостта на $\bar{A}$ е установена и предложението е доказано.

4.5.4. Предложение. *Нека L и L_1 са линейни пространства и $u: L\to L_1$ е линейно изображение. Тогава образът чрез u на всяко изпъкнало множество в L е изпъкнало множество в L_1.*

Доказателство. Непосредствена проверка.

§ 4.6. ТЕОРЕМА ЗА ОТВОРЕНОТО ИЗОБРАЖЕНИЕ

Вече знаем (вж. теорема 3.7.3), че ако L и L_1 са нормирани пространства и $u: L\to L_1$ е непрекъснато изображение, то прообразът чрез u на всяко отворено множество U_1 в L_1 е отворен в L. В общия случай обаче не е вярно, че образът чрез u на отворено множество в L е отворен в L_1 (посочете подходящ пример!). В този параграф ще се запознаем с една удобна система от достатъчни условия, при наличието на които това винаги е така. Този вид условия са интересни, защото водят до непрекъснатостта на обратното изображение $u^{-1}: L_1\to L$, когато u е биекция.

4.6.1. Теорема. *Нека L и L_1 са банахови пространства и $u: L\to L_1$ е непрекъсната линейна сюрекция. Тогава образът чрез u на всяко отворено множество в L е отворен в L_1.*

Както и трябва да се очаква, доказателството на тази теорема е дълго. Ето защо в началото ще отделим някои негови технически части в три леми.

4.6.1.1. Лема. *При предположенията на теоремата съществуват $\eta\in L_1$ и числа $n=1, 2,\ldots, \lambda>0$ с*

(1) $$B(\eta, \lambda)\subset\overline{u(B(0, n))}.$$

Наистина множествата

$$\overline{u(B(0, n))} \qquad (n=1, 2,\ldots)$$

са затворени, а от сюрективността на u следва

$$L_1 = u\ (L) = u\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B\ (0,\ n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} u\ (B\ (0,\ n)).$$

Сега твърдението следва от теоремата на Бер. Ще отбележим, че това е единственото място в доказателството на теорема 1, където се използува теоремата на Бер.

4.6.1.2. Лема. *При предположенията на теоремата съществуват числа* $n=1, 2, \ldots$ *и* $\mu > 0$, *за които*

$$B\ (0,\ \mu) \subset \overline{u\ (B\ (0,\ n))}. \tag{2}$$

Наистина кълбото $B\ (0,\ n)$ в L е изпъкнало множество. Ето защо от линейността на u следва, че и образът $u\ (B\ (0,\ n))$ е изпъкнал съгласно предложение 5.4. Сега от предложение 3 от предишния параграф получаваме, че и множеството $\overline{u\ (B\ (0,\ n))}$ е изпъкнало.

Нека точката $\eta \in L_1$ и числата $n=1, 2, \ldots,\ \lambda > 0$ удовлетворяват условието (1). Ще покажем, че

$$-\eta \in \overline{u\ (B\ (0,\ n))}. \tag{3}$$

Тъй като $\eta \in \overline{u\ (B\ (0,\ n))}$ съгласно (1), съществува редица

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$$

от точки на $B\ (0,\ n)$ с $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} u\ (x_n)$. Тогава

$$-\eta = \lim_{n\to\infty} (-u\ (x_n)) = \lim_{n\to\infty} u\ (-x_n)$$

и понеже точките $-x_n$ също са от $B\ (0,\ n)$, (3) е изпълнено.

От друга страна, при $\|y\| \leqq \frac{\lambda}{2}$ е в сила $\|2y+\eta-\eta\| \leqq \lambda$, т. е

$$2y+\eta \in B\ (\eta,\ \lambda) \subset \overline{u\ (B\ (0,\ n))} \tag{4}$$

съгласно (1). От изпъкналостта на $\overline{u\ (B\ (0,\ n))}$ сега следва

$$y = \frac{1}{2}\ (2y+\eta) + \frac{1}{2}\ (-\eta) \in \overline{u\ (B\ (0,\ n))}$$

съгласно (3) и (4), т. е. $B\left(0,\ \frac{\lambda}{2}\right) \subset \overline{u\ (B\ (0,\ n))}$, и (2) е доказано

4.6.1.3. Лема. *При предположенията на теоремата съществува такова число* $\sigma > 0$, *че за всяко* $\xi \in L$ *и за всяко* $r > 0$ *да е в сила*

$$B\ (u\ (\xi),\ \sigma r) \subset \overline{u\ (B\ (\xi,\ r))}. \tag{5}$$

Да положим $\sigma = \frac{\mu}{n}$, където μ и n са числата от лема 1. Тогава

$$B\ (u\ (\xi),\ \sigma r) = u\ (\xi) + B\ (0,\ \sigma r). \tag{6}$$

Но

$$B\ (0,\ \sigma r) = \frac{\sigma r}{\mu}\ B\ (0,\ \mu), \tag{7}$$

което именно е съвкупността на векторите, получени от векторите на $B(0, \rho)$ след умножение със $\frac{\sigma r}{\rho}$. От друга страна, читателят ще съобрази, че

$$\frac{\sigma r}{\rho}\,\overline{u(B(0,\rho))} = \overline{\frac{\sigma r}{\rho}\,u(B(0,\rho))}\,.$$

Сега от (2), (6) и (7) се получава

$$(8)\qquad B(u(\xi), \sigma r) \subset u(\xi) + \overline{u\left(B\left(0, \frac{\sigma r}{\rho}\,\rho\right)\right)}$$

$$= u(\xi) + \overline{u(B(0, r))}$$

съгласно определението на σ. Но, както не е трудно да се съобрази:

$$u(\xi) + \overline{u(B(0, r))} = \overline{u(\xi) + u(B(0, r))}.$$

Ето защо от (8) следва (5) и лемата е доказана.

Доказателство на теорема 1. Нека U е отворено множество в L. Трябва да докажем, че множеството $u(U)$ е отворено. Все едно нужно е да се убедим, че за всяко $\xi \in U$ съществува кълбо с положителен радиус δ и с център $u(\xi)$, което изцяло се съдържа в $u(U)$. Но множеството U е отворено. Ето защо съществува $r > 0$ с $B(\xi, r) \subset U$. Следователно целта ще бъде постигната, ако покажем че за всяко $\xi \in L$ и за всяко $r > 0$ съществува $\delta > 0$ с

$$(9)\qquad B(u(\xi), \delta) \subset u(B(\xi, r)).$$

Това включване напомня доказаното вече включване (5) с единствената разлика, че вляво на (5) е затворената обвивка на едно множество, а в (9) няма затворена обвивка. При доказателството на (5) използувахме пълнотата на L_1 чрез теоремата на Бер. Сега от (5) ще извлечем по-силното условие (9), като за целта ще използуваме пълнотата на L. Ето как може да стане това.

При зададено $r > 0$ полагаме $\delta = \frac{1}{2}\sigma r$, където σ е числото от предишната лема. Тогава поради (5) за всяко $x \in L$ и за всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$ ще имаме

$$(10)\qquad B\left(u(x), \frac{\delta}{2^n}\right) \subset \overline{u\left(B\left(x, \frac{r}{2^{n+1}}\right)\right)}.$$

Нека $y \in B(u(\xi), \delta)$. От (10) при $n = 0$ следва

$$y \in \overline{u\left(B\left(\xi, \frac{r}{2}\right)\right)}.$$

Тъй като точките от затворената обвивка на едно множество са граници на редици от точки на самото множество, в $u\left(B\left(\xi, \frac{r}{2}\right)\right)$ съществуват точки, произволно близки до y. Да изберем $x_1 \in L$ с

$$(11)\qquad x_1 \in B\left(\xi, \frac{r}{2}\right), \quad \|y - u(x_1)\| < \frac{\delta}{2}.$$

Тогава $y \in B\left(u(x_1), \frac{\delta}{2}\right)$ и от (10) при $n=1$ следва

$$y \in \overline{u\left(B\left(x_1, \frac{r}{2^2}\right)\right)}.$$

Поради това в $u\left(B\left(x_1, \frac{r}{2^2}\right)\right)$ съществуват точки, произволно близки до y. Да изберем $x_2 \in L$ с

(12) $$x_2 \in B\left(x_1, \frac{r}{2^2}\right), \quad \|y - u(x_2)\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

Тогава $y \in B\left(u(x_2), \frac{\delta}{2^2}\right)$ и от (10) при $n=2$ се получава

$$y \in \overline{u\left(B\left(x_2, \frac{r}{2^3}\right)\right)}.$$

Поради това в $u\left(B\left(x_2, \frac{r}{2^3}\right)\right)$ съществуват точки, произволно близки до y. Да изберем $x_3 \in L$ с

(13) $$x_3 \in B\left(x_2, \frac{r}{2^3}\right), \quad \|y - u(x_3)\| < \frac{\delta}{2^3}.$$

И така нататък. Ако продължим този процес неограничено, ще получим безкрайна редица

(14) $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

от елементи на L, за която наред с (11) — (13) са изпълнени условията

(15) $$x_{n+1} \in B\left(x_n, \frac{r}{2^{n+1}}\right), \quad \|y - u(x_{n+1})\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

за всяко $n = 1, 2, \ldots$

Първото от условията (15) показва, че $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{r}{2^{n+1}}$. Ето защо

(16) $$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{r}{2^{n+k}} + \frac{r}{2^{n+k-1}} + \ldots + \frac{r}{2^{n+1}} \leq \frac{r}{2^n}.$$

Следователно редицата (14) е фундаментална. Поради пълнотата на L тази редица е сходяща.

Нека

(17) $$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Тогава от непрекъснатостта на u се получава $u(x) = \lim_{n \to \infty} u(x_n)$ и от вторите от неравенствата (15) следва

(18) $$y = u(x).$$

Същевременно от първите условия в (11), (12), (13) и (15) аналогично на (16) следва $\|x_n - \xi\| \leq r$, което заедно със (17) и непрекъснатостта на нормата дава $\|x - \xi\| \leq r$ или, което е същото, $x \in B(\xi, r)$. Сега от (18) се получава $y \in u(B(\xi, r_1))$ и тъй като y бе произволно избрано в $B(u(\xi), \delta)$, (9) е установено. По този начин е доказана и теоремата.

4.6.2. Следствие. *Нека L и L_1 са банахови пространства и $u: L \to L_1$ е непрекъсната линейна биекция. Тогава обратната биекция $u^{-1}: L_1 \to L$ е непрекъсната.*

Наистина съгласно теорема 3.7.3 твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че за всяко отворено множество U в L прообразът на U чрез u^{-1} е отворен в L_1. Но

$$(u^{-1})^{-1}(U) = u(U)$$

и твърдението се получава от теорема 1.

Теорема 1 изразява важно свойство на банаховите пространства и притежава редица интересни приложения. Едно от тях е разгледано в следващия параграф.

§ 4.7. ТЕОРЕМА ЗА ЗАТВОРЕНАТА ГРАФИКА

В следствие 2 от предишния параграф видяхме, че за всяка непрекъсната линейна биекция между банахови пространства обратната биекция се оказва непрекъсната от само себе си. Оказва се, че теоремата за отвореното изображение може да бъде полезна не само при установяване на непрекъснатостта на u^{-1}, но и на самото u. Преди да пристъпим към този въпрос, се налага да обсъдим някои дефиниции.

Нека L и L_1 са множества и $u: L \to L_1$ е произволно изображение. Под графика на u се разбира съвкупността G на всевъзможните наредени двойки от вида $(x, u(x))$, където x пробягва L. Очевидно $G \subset L \times L_1$, където $L \times L_1$ е *декартовото произведение* на L и L_1, т. е. съвкупността на всички наредени двойки (x, y), където x и y пробягват съответно L и L_1. Читателят ще съобрази, че изображението u може да бъде възстановено, ако е дадена графиката му.

С декартовото произведение на L и L_1 се свързват двете проекции

$$p: L \times L_1 \to L \quad \text{и} \quad p_1: L \times L_1 \to L_1,$$

дефинирани съответно с

$$p(x, x_1) = x \quad \text{и} \quad p_1(x, x_1) = x_1.$$

В специалния случай, когато L и L_1 са линейни пространства, декартовото произведение също притежава естествена линейна структура: при нея събирането и умножението със скалари се извършват покоординатно. Ако $L \times L_1$ се снабди с тази линейна структура (както ще правим винаги по-нататък), проекциите p и p_1 стават линейни изображения. Непосредствено се проверява също така, че ако в този случай $u: L \to L_1$ е линейно изображение, графиката на u е линейно подпространство на $L \times L_1$.

Ако L и L_1 са не само линейни, но и банахови пространства, декартовото произведение $L \times L_1$ притежава различни естествени структури на банахово пространство. Те са еквивалентни в определен смисъл, който не ще обсъждаме тук. При една от тях нормата се задава с равенството

(1) $$\|(x, x_1)\| = \max(\|x\|, \|x_1\|).$$

Читателят ще провери, че спрямо тази норма сходимостта е покоординатна, т. е. условието

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

е изпълнено спрямо тази норма точно когато са изпълнени и двете условия

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Поради това при тази норма *проекциите* p и p_1 *са непрекъснати*. Една редица

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

от елементи на $L \times L_1$ е фундаментална спрямо нормата (1) точно когато са фундаментални двете редици

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

Оттук непосредствено се получава, че *пространството* $L \times L_1$ *при нормата* (1) *е банахово*.

Ако едно изображение $u: L \to L_1$ *между банахови пространства е непрекъснато, графиката му е затворено подпространство на* $L \times L_1$.

Наистина нека

$$(x_1, u(x_1)), (x_2, u(x_2)), \ldots, (x_n, u(x_n)), \ldots$$

е редица от точки от графиката на u с

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, u(x_n)) = (x, y).$$

Тогава

(2) $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } \lim_{n\to\infty} u(x_n) = y.$$

От първото от тези условия и от непрекъснатостта на u следва $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u(x)$, което заедно с второто от условията (2) показва, че $y = u(x)$, т. е. че (x, y) е точка от графиката на u. С това твърдението е доказано.

От доказателството се вижда, че графиката на u е затворена точно когато от условията (2) следва $y = u(x)$. За да сравним по-добре тези две условия, да си спомним, че изображението u е непрекъснато точно когато от първото от условията (2) следва, че редицата

(3) $$u(x_1),\ u(x_2),\ \ldots,\ u(x_n),\ \ldots$$

е сходяща и границата ѝ е $u(x)$. *Затвореността на графиката пък означава, че винаги когато е изпълнено първото от условията* (2) *и редицата* (3) *е сходяща, границата на* (3) *е* $u(x)$. Разбира се, в общия случай от затвореността на графиката не следва, че изображението u е непрекъснато, но, както показва следващата теорема, в някои интересни случаи това е така.

4.7.1. Теорема. *Нека L и L_1 са банахови пространства и $u: L \to L_1$ е линейно изображение със затворена графика. Тогава изображението u е непрекъснато.*

Доказателство. Вече споменахме, че графиката G на u е линейно подпространство на линейното пространство $L \times L_1$. Но L и L_1 са банахови пространства и поради това $L \times L_1$ също е банахово. Тъй като по условие графиката G е затворена, G е банахово подпространство на $L \times L_1$ (вж. предложение 1.5).

Да разгледаме изображението $u_1 : L \to G$, дефинирано с

$$u_1(x) = (x,\ u(x))$$

за всяко $x \in L$. Очевидно то е линейна биекция между L и G. При това обратната биекция $u_1^{-1} : G \to L$ съвпада с първата проекция p. Вече видяхме, че p е непрекъснато линейно изображение. От друга страна, G и L са банахови пространства и поради това е приложимо следствие 2 от предишния параграф. Ето защо изображението u_1 е непрекъснато.

От друга страна,

$$p_1(u_1(x)) = p_1(x,\ u(x)) = u(x),$$

т. е. u се оказа композиция на непрекъснатите изображения u_1 и p. Следователно u е непрекъснато и теоремата е доказана.

§ 4.8. ФИКСАЦИЯ НА ОСОБЕНОСТИТЕ

В предишните два параграфа разглеждахме приложения на теоремата на Бер към отделни линейни изображения. Тук ще приложим същия метод към редици от такива изображения.

4.8.1. Теорема. *Нека L е банахово, а L_1 е нормирано пространство и*

(1) $$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

е редица от непрекъснати линейни изображения $u_n : L \to L_1$. При тези предположения, ако редицата

(2) $$\|u_1\|,\ \|u_2\|,\ \ldots,\ \|u_n\|,\ \ldots$$

от нормите на изображенията (1) *е неограничена, съществува точка $\xi \in L$, за която редицата*

(3) $$\|u_1(\xi)\|,\ \|u_2(\xi)\|,\ \ldots,\ \|u_n(\xi)\|,\ \ldots$$

от нормите на стойностите на изображенията (1) *в точката* ξ *не е ограничена.*

Доказателство. Да допуснем, че редицата (3) е ограничена за всяко $\xi \in L$. За произволно $k=1, 2, \ldots$ да означим с F_k съвкупността на всички точки $x \in L$, за които са изпълнени неравенствата $\|u_n(x)\| \leqq k$ за всяко $n=1, 2, \ldots$ Тъй като операторите (1) и нормата са непрекъснати, всяко от множествата F_k е затворено. От друга страна, от направеното допускане за ограниченост на всяка от редиците (3) следва

$$L=\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Тъй като L е по предположение банахово пространство, към множествата F_k е приложима теоремата на Бер. Ето защо съществуват $\xi \in L$, $k=1, 2, \ldots$ и $\delta>0$ с $B(\xi, \delta) \subset F_k$. Съгласно определението на F_k това означава, че за всяко $x \in L$, за което е изпълнено неравенството

$$\|x-\xi\| \leqq \delta, \tag{4}$$

е изпълнено и неравенството

$$\|u_n(x)\| \leqq k \tag{5}$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$

Сега ще се убедим, че изображенията u_n са равномерно ограничени върху кълбото $B(0, \delta)$. Наистина нека $x \in B(0, \delta)$, т. е.

$$\|x\| \leqq \delta. \tag{6}$$

Тогава

$$\|x+\xi-\xi\|=\|x\| \leqq \delta, \quad \|-x+\xi-\xi\|=\|x\| \leqq \delta$$

и тъй като от (4) следва (5), то

$$\|u_n(x+\xi)\| \leqq k, \quad \|u_n(-x+\xi)\| \leqq k.$$

Следователно

$$\|u_n(x)\|=\left\|u_n\left(\frac{1}{2}(x+\xi)-\frac{1}{2}(-x+\xi)\right)\right\|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\|u_n(x+\xi)\|+\frac{1}{2}\|u_n(-x+\xi)\| \leqq k$$

за всяко $x \in L$ с (6) и за всяко $n=1, 2, \ldots$ От тези равенства и неравенства и от хомогенността непосредствено се получава, че при $\|x\| \leqq 1$ е в сила $\|u_n(x)\| \leqq \frac{k}{\delta}$. С други думи, $\|u_n\| \leqq \frac{k}{\delta}$ за всяко $n=1, 2, \ldots$ в противоречие с условието за неограниченост на редицата (2). С това теоремата е доказана.

Тя също притежава интересни приложения. Ето едно от тях.

4.8.2. Теорема (Банах—Щайнхауз). *Нека* L *е банахово, а* L_1 *е нормирано пространство и*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

е редица от непрекъснати линейни изображения $u_n : L \to L_1$, за която редицата

(7) $$u_1(x),\ u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

е сходяща за всяко $x \in L$. При тези предположения изображението $u : L \to L_1$, дефинирано с $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ за всяко $x \in L$, е линейно и непрекъснато. Освен това е изпълнено и неравенството

(8) $$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

Доказателство. Тъй като редицата (7) е сходяща за всяко $x \in L$, редицата от нормите на (7) е ограничена за всяко $x \in L$. Ето защо от теорема 1 следва, че и редицата от нормите на операторите (1) е ограничена. Нека $\|u_n\| \leq M$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$ Тогава за произволно $x \in L$ от определението на $u(x)$ следва $\|u(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n(x)\|$. Но

$$\|u_n(x)\| \leq \|u_n\| \|x\| \leq M \|x\|.$$

Ето защо $\|u(x)\| \leq M \|x\|$ за всяко $x \in L$. С това непрекъснатостта на u е доказана.

Нещо повече, по същество установихме, че ако неравенството $\|u_n\| \leq M$ е изпълнено за безбройно много n, то $\|u\| \leq M$. Оттук не е трудно да се извлече и неравенството (8). С това теоремата е доказана.

Да отбележим изрично, че в общия случай непрекъснатостта на границата се установява с изискването за равномерна сходимост. Горната теорема показва, че в случая на линейни изображения с дефиниционна област банахово пространство това изискване не се налага.

§ 4.9. КОМПАКТНИ МНОЖЕСТВА В БАНАХОВИТЕ ПРОСТРАНСТВА

Едно множество C в нормирано пространство L се нарича *компактно*, когато всяка редица

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$$

от елементи на C притежава сходяща подредица, чиято граница принадлежи на C.

Компактните множества в L притежават добре известните свойства на компактните множества в $\mathbb{R}^n$. Така например, *ако изображението $f : C \to L_1$ е непрекъснато в компактното множество C, то е равномерно непрекъснато в C. Също, ако C е компактно множество, L_1 е нормирано пространство и $f : C \to L_1$ е непрекъснато изображение, образът $f(C)$ е компактен.*

Да докажем второто от тези твърдения. Нека

(2) $$y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$$

е редица от елементи на $f(C)$. Тогава, разбира се, съществува редица (1) от елементи на C, за която $y_m = f(x_m)$. Нека

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots$$

е сходяща подредица на (1) с граница $\xi \in C$. Тогава

$$\lim_{k\to\infty} y_{m_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = f(\xi) \in f(C)$$

поради непрекъснатостта на f в ξ и компактността на $f(C)$ е доказана.

Също както и в крайномерния случай, се установява, че *компактните множества са затворени.* Оттук се получава и едно друго полезно следствие. Именно *ако $f: C \to L_1$ е непрекъсната инекция с компактна дефиниционна област, обратната инекция $f^{-1}: f(C) \to C$ също е непрекъсната.*

Наистина нека F е произволно затворено множество в L. От определението на компактно множество веднага следва, че сечението $F \cap C$ също е компактно. От друга страна,

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F \cap C)$$

и следователно множеството $(f^{-1})^{-1}(F)$ е компактно, поради което е и затворено. Сега твърдението следва от теорема 3.7.3.

Така виждаме, че компактните множества играят полезна роля при изучаване на непрекъснатите изображения. Ето защо тук ще посочим няколко условия, еквивалентни с компактността.

4.9.1. Теорема. *Едно множество C в банахово пространство L е компактно точно когато е затворено и за всяко $n=1, 2, \ldots$ съществуват краен брой отворени кълба $O_1, O_2, \ldots, O_k$ с радиуси $\frac{1}{n}$ и с центрове в C, за които*

(3) $$C \subset O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_k.$$

Доказателство. Нека най-напред множеството C е компактно. Вече видяхме, че тогава C е затворено. Да допуснем сега, че за някое $n=1, 2, \ldots$ не съществуват краен брой отворени кълба с радиуси $\frac{1}{n}$ и с (3). Тогава за всеки краен брой кълба $O_1, O_2, \ldots, O_k$ с радиуси $\frac{1}{n}$ и с центрове в C ще имаме

(4) $$C \setminus (O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_k) \neq \varnothing.$$

Да изберем произволно $x_1 \in C$. Тогава кълбото $O\left(x_1, \frac{1}{n}\right)$ няма да покрие C и следователно ще съществува точка

$$x_2 \in C \setminus O\left(x_1, \frac{1}{n}\right).$$

Сега поради (3) отново ще имаме точка

$$x_3 \in C \setminus \left(O\left(x_1, \frac{1}{n}\right) \cup O\left(x_2, \frac{1}{n}\right)\right).$$

И така нататък. Продължаваме този процес неограничено. Така ще стигнем до една редица (1) от елементи на C, за която е изпълнено условието

$$x_{m+1} \in C \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} O\left(x_i, \frac{1}{n}\right)\right)$$

за всяко $m=1, 2, \ldots$ От него непосредствено следва, че за всеки два различни индекса i и j е в сила $\|x_i - x_j\| \geqq \frac{1}{n}$. Тъй като n е фиксирано, последното неравенство показва, че (1) не притежава фундаментална подредица. Толкова повече, (1) не притежава сходяща подредица в противоречие с компактността на C. С това необходимостта е доказана.

За да докажем достатъчността, нека (1) е произволна редица от елементи на C. По условие съществуват краен брой кълба $O_{11}, O_{12}, \ldots, O_{1k_1}$ с радиуси $\frac{1}{2}$, за които

(5) $$C \subset O_{11} \cup O_{12} \cup \ldots \cup O_{1k_1}.$$

Същевременно за всяко цяло положително m имаме $x_m \in C$. Тъй като целите положителни числа са безбройно много, а кълбата вдясно на (5) са само краен брой, то ще съществува такова безкрайно множество N_1 от цели положителни числа, че членовете на (1) с номера от N_1 да принадлежат на едно и също от кълбата вдясно на (5). Тъй като тези кълба са с радиуси $\frac{1}{2}$, за всеки два индекса i и j от N_1 ще бъде в сила

(6) $$\|x_i - x_j\| < 1.$$

Също по условие има краен брой кълба $O_{21}, O_{22}, \ldots, O_{2k_2}$ с радиуси $\frac{1}{4}$, за които

(7) $$C \subset O_{21} \cup O_{22} \cup \ldots \cup O_{2k_2}.$$

От друга страна, за всяко $m \in N_1$ имаме $x_m \in C$. Тъй като вдясно на (7) отново имаме само краен брой кълба, а N_1 е безкрайно множество, ще съществува такава безкрайна част N_2 на N_1, че всички членове на (1) с индекси от N_2 да принадлежат само на едно от тези кълба. Тъй като сега радиусите са $\frac{1}{4}$, за всеки два индекса i и j от N_2 ще имаме

(8) $$\|x_i - x_j\| < \frac{1}{2}.$$

На третата стъпка ще разгледаме краен брой отворени кълба с радиуси $\frac{1}{6}$, които покриват C. Тъй като N_2 е безкрайно множество от индекси и за всяко $m \in N_2$ е в сила $x_m \in C$, това ще ни позволи да намерим такова безкрайно множество $N_3 \subset N_2$, че при $i, j \in N_3$ да бъде в сила

(9) $$\|x_i - x_j\| < \frac{1}{3}.$$

Като продължим този процес неограничено, ще получим намаляваща редица

$$N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_k \supset \dots$$

от безкрайни множества от цели положителни числа, за която по аналогия с (6), (8) и (9) са изпълнени неравенствата

$$\|x_i - x_j\| < \frac{1}{k} \tag{10}$$

винаги когато $i,\ j \in N_k$.

Сега да изберем безкрайна редица

$$m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$$

от цели положителни числа, за която $m_k \in N_k$ за всяко $k=1, 2, \dots$ Ще покажем, че подредицата

$$x_{m_1},\ x_{m_2}, \dots,\ x_{m_k}, \dots \tag{11}$$

на (1) е фундаментална. Нека k и l са цели положителни числа с $k<l$. Тогава $m_k \in N_k$ и $m_l \in N_l \subset N_k$. Ето защо от (10) следва $\|x_{m_k} - x_{m_l}\| < \frac{1}{k}$ и фундаменталността на (11) е доказана.

Тъй като L е банахово пространство, редицата (11) е сходяща. От друга страна, C е затворено множество и за всяко цяло положително k имаме $x_{m_k} \in C$. Ето защо границата на (11) е елемент на C. С това компактността на C е установена и теоремата е доказана.

Тази теорема притежава удобни следствия. Така например, *ако L е банахово пространство и $C \subset L$, затворената обвивка $\overline{C}$ е компактна точно когато за всяко $n=1, 2, \dots$ съществуват краен брой кълба с радиуси $\frac{1}{n}$ и с центрове в C, за които е в сила* (3) Необходимостта, разбира се, следва непосредствено от теорема 1. За да се убедим в достатъчността, за произволно $n=1, 2, \dots$ да изберем краен брой кълба $o_1, o_2, \dots, o_k$ с радиуси $\frac{1}{2n}$, за които е в сила (3). Тогава

$$\overline{C} \subset \overline{o}_1 \cup \overline{o}_2 \cup \dots \cup \overline{o}_k \subset O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_k,$$

където O_i е кълбо със същия център, както и o_i, и с радиус $\frac{1}{n}$. Сега компактността на $\overline{C}$ следва от теорема 1.

Като друго следствие можем да посочим следния вариант на тази теорема. *Ако L е нормирано пространство, едно подмножество C на L е компактно точно когато е пълно* (т. е. всяка фундаментална редица от елементи на C е сходяща и границата ѝ е от C) *и удовлетворява условието* (3). За да избегнем една банална дедукция, ще отбележим, че горното доказателство функционира без промени и сега.

Като по-интересно следствие трябва да се схваща следната теорема, която описва компактността чрез отворените множества в L.

4.9.2. Теорема. *Едно множество C в банахово пространство L е компактно точно когато за всяка фамилия $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ от отворени множества в L с*

$$C \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \tag{12}$$

съществуват краен брой елементи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ на Λ с

$$C \subset U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \ldots \cup U_{\lambda_k}. \tag{13}$$

Доказателство. Нека най-напред C е компактно и $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ е фамилия от отворени подмножества на L с (12). Ще покажем, че съществува такова число $n=1, 2, \ldots$, че всяко отворено кълбо с радиус $\frac{1}{n}$ и център в C да се съдържа в някое U_λ. Да допуснем противното. Тогава за всяко $n=1, 2, \ldots$ ще съществува точка $x_n \in C$, за която кълбото $O\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ не се съдържа в никое U_λ. Така получаваме една безкрайна редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

от елементи на C. Тъй като C е компактно, тя притежава сходяща подредица

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{14}$$

чиято граница $\xi = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ принадлежи на C. Сега от (12) следва съществуването на $\lambda \in \Lambda$ с $\xi \in U_\lambda$. Тъй като U_λ е отворено множество, съществува $\delta > 0$, за което $O(\xi, \delta) \subset U_\lambda$ (вж. § 3.7). Но редицата (14) клони към ξ. Ето защо за всички достатъчно големи k ще имаме $x_{n_k} \in O\left(\xi, \frac{\delta}{2}\right)$. Нека k е така голямо, че наред с последното условие да е налице и условието $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$. Да разгледаме произволно $x \in O\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$. Тогава

$$\|x-\xi\| \leq \|x-x_{n_k}\| + \|x_{n_k}-\xi\| < \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

и следователно $x \in O(\xi, \delta)$. Тъй като, от друга страна, $O(\xi, \delta) \subset U_\lambda$, то $x \in U_\lambda$. Така показахме, че $O\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset U_\lambda$, което противоречи на избора на x_{n_k}. Полученото противоречие ни убеждава в съществуването на n с желаното свойство.

Съгласно теорема 1 съществуват краен брой отворени кълба $O_1, O_2, \ldots, O_k$ с радиуси $\frac{1}{n}$ и с центрове в C, за които е изпълнено (3). Съгласно избора на n за всяко $l=1, 2, \ldots, k$ съществува λ_l с $O_l \subset U_{\lambda_l}$. Сега (13) се получава от (3). По този начин е доказана необходимостта.

Достатъчността се доказва така: Нека n е произволно цяло положително число. Да фиксираме n и да разгледаме фамилията на всички отворени кълба $O\left(x, \frac{1}{n}\right)$ с радиуси $\frac{1}{n}$ и центрове в C. Тъй като отворените кълба са отворени множества, а тук предполагаме, че за всяка фамилия от отворени множества с (12) съществува крайна подфамилия с (13), вече е ясно, че от разглежданите кълба ще могат да се изберат краен брой, за които е в сила (3). Ето защо, за да можем с помощта на теорема 1 да заключим, че C е компактно, трябва само да покажем, че C е затворено.

За тази цел ще се убедим, че множеството $L \setminus C$ е отворено. Нека $\xi \in L \setminus C$. За всяко $x \in C$ да разгледаме отвореното кълбо

$$O\left(x, \frac{1}{2}\|x-\xi\|\right). \tag{15}$$

Очевидно кълбата (15) покриват C и следователно краен брой от тях също ще покриват C. Нека последните имат центрове $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогава ще имаме

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{k} O\left(x_i, \frac{1}{2}\|x_i-\xi\|\right). \tag{16}$$

Да положим

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}\| x_1-\xi \|, \frac{1}{2}\| x_2-\xi \|, \ldots, \frac{1}{2}\|x_k-\xi\|\right\}. \tag{17}$$

Очевидно $\delta > 0$. Да допуснем, че някой елемент x на кълбото $O(\xi, \delta)$ принадлежи на C. Тогава съгласно (16) ще съществува x_i с

$$\|x-x_i\| < \frac{1}{2}\|x_i-\xi\|.$$

От друга страна, от (17) следва $\|x-\xi\| < \frac{1}{2}\|x_i-\xi\|$. Ето защо

$$\|x_i-\xi\| \leqq \|x_i-x\| + \|x-\xi\| < \frac{1}{2}\|x_i-\xi\| + \frac{1}{2}\|x_i-\xi\|,$$

т. е. $\|x_i-\xi\| < \|x_i-\xi\|$, което е противоречие. С това е показано, че $O(\xi, \delta) \subset L \setminus C$. Ето защо множеството $L - C$ е отворено и следователно C е затворено. Сега компактността на C следва от теорема 1. С това теоремата е доказана.

Да отбележим, че фамилиите $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ от отворени подмножества на L с (12) се наричат *отворени покрития* на C. Поради това горната теорема се формулира накратко и така: *Едно множество C в банахово пространство е компактно точно когато всяко отворено покритие на C притежава крайно подпокритие.*

Нека сега L е произволно нормирано пространство. Тъй като L е подпространство на банаховото пространство $\widehat{L}$, отворените множества в L са сечения на отворени множества в $\hat{L}$ с L. Оттук директно следва, че *едно множество $C \subset L$ е компактно точно когато от всяко отворено покритие на C може да се избере крайно подпокритие*. Оттук след преминаване към допълнения се получава още една характеристика на компактността в нормираните пространства. *Едно множество C в нормирано пространство L е компактно точно когато за всяка фамилия $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ от затворени подмножества на L със*

$$\bigcap_{i=1}^{k} (F_{\lambda_i} \cap C) \neq \emptyset \tag{18}$$

за всеки краен брой индекси $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ от Λ е изпълнено и по-силното условие

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F_\lambda \cap C) \neq \emptyset.$$

Оттук директно следва, че *сечението на всяка насочена наляво фамилия от непразни затворени подмножества на компактно множество не е празно*. Наистина (18) в случая е налице, понеже по предположение съществува елемент F на дадената фамилия с $F_{\lambda_i} \supset F$ за всяко $i=1, 2, \ldots, k$.

Компактността безспорно е една от основните концепции на анализа. Тя има значително по-широка сфера на действие от банаховите пространства, с които тук се ограничихме поради съображения за простота.

§ 4. 10. ТЕОРЕМА НА ВАЙЕРЩРАС — СТОУН

Нека X е компактно множество в някое нормирано пространство. Да означим с $C(X)$ множеството на всички непрекъснати функции $f: X \to \mathbf{R}$. Разбира се, $C(X)$ е реално линейно пространство. При това, ако положим

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

за всяко $f \in C(X)$, получаваме една норма в $C(X)$. Сходимостта спрямо тази норма съвпада с равномерната сходимост на редици от функции, а след снабдяване с тази норма $C(X)$ става банахово пространство. Тук ще обърнем внимание върху още едно обстоятелство, свързано с $C(X)$. Именно произведението fg на всеки две функции f и g от $C(X)$ е отново елемент на $C(X)$. Така наред с линейните операции в $C(X)$ е налице още една операция — умножението. Директно се проверява неравенството

$$\|fg\| \leq \|f\| \; \|g\|$$

за всеки два елемента f и g на $C(X)$. От това неравенство следва, че *умножението е непрекъсната функция на двата си аргумента*. За да се убедим в това, нека

(1) $$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

и

(2) $$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$$

са две сходящи редици от елементи на $C(X)$ с граници

(3) $$f=\lim_{n\to\infty} f_n \text{ и } g=\lim_{n\to\infty} g_n.$$

Тъй като
$$f_n g_n - fg = (f_n - f)g_n + f(g_n - g),$$
то
$$\|f_n g_n - fg\| \leqq \|f_n - f\| \, \|g_n\| + \|f\| \, \|g_n - g\|.$$
От друга страна, $\|g_n\| \leqq \|g_n - g\| + \|g\|$ и следователно
$$\|f_n g_n - fg\| \leqq \|f_n - f\| \, \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \, \|g\| + \|f\| \, \|g_n - g\|$$
От това неравенство и от (3) следва $\lim\limits_{n\to\infty} f_n g_n = fg$ и твърдението е доказано.

Едно линейно подпространство A на $C(X)$ се нарича *подалгебра* на $C(X)$, когато от $f, g \in A$ винаги следва $fg \in A$. От горното предложение следва, че затворената обвивка $\bar{A}$ на произволна подалгебра A на $C(X)$ е подалгебра на $C(X)$. Наистина нека $f \in \bar{A}$ и $g \in \bar{A}$. Тогава (вж. предложение 3.7.1) съществуват редици (1) и (2) от елементи на A с (3). Тъй като A е подалгебра на $C(X)$, то $f_n g_n \in A$. От друга страна, от (3) се получава $fg = \lim\limits_{n\to\infty} f_n g_n$, поради което $fg \in \bar{A}$. Тъй като вече знаем, че $\bar{A}$ е подпространство на $C(X)$, с това е показано, че $\bar{A}$ е подалгебра на $C(X)$.

Съвкупността $C(X)$ притежава едно забележително минимално свойство с разнообразни приложения. За да го установим, се нуждаем от едно свойство на затворените подалгебри на $C(X)$. То пък се базира на следното твърдение:

4.10.1. Лема. *За всяко $a > 0$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува полином P с нулев свободен член, за който е изпълнено неравенството*

(4) $$\big|\, |x| - P(x) \,\big| < \varepsilon$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$ с $|x| \leqq a$.

Доказателство. Да фиксираме a и ε и да изберем число $b > a$ по произволен начин. Добре известно е, че радиусът на сходимост на биномния ред

(5) $$(1-t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} t^n$$

е 1. Ето защо (5) е равномерно сходящ във всеки затворен подинтервал на $[0,1)$. По-специално това е така в интервала $\left[0, \frac{a^2}{b^2}\right]$.

Ето защо, ако с R означим парциална сума на (5) с достатъчно голям номер, ще бъде изпълнено неравенството

$$(6) \qquad |(1-t)^{1/2}-R(t)|<\frac{\varepsilon}{4b}$$

за всяко $t\in\left[0, \frac{a^2}{b^2}\right]$. Забележете, че R в (6) е полином на t.

Нека сега x е число с $|x|\leq a$. Тогава числото

$$(7) \qquad t=\frac{a^2-x^2}{b^2}$$

принадлежи на интервала $\left[0, \frac{a^2}{b^2}\right]$. Ето защо за него ще бъде в сила (6). Ако заместим t от (7) в (6) и умножим двете страни на така полученото неравенство с b, ще намерим

$$(8) \qquad \left|\sqrt{b^2-a^2+x^2}-Q(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4},$$

където

$$Q(x)=b\,R\left(\frac{a^2-x^2}{b^2}\right).$$

По този начин за всеки три положителни числа $b>a$ и ε съществува полином $Q(x)$, за който е в сила (8) за всяко $x\in\mathrm{R}$ с $|x|\leq a$.

От друга страна, изпълнено е и неравенството

$$\left||x|-\sqrt{b^2-a^2+x^2}\right|=\left|\frac{x^2-b^2+a^2-x^2}{|x|+\sqrt{b^2-a^2+x^2}}\right|\leq\sqrt{b^2-a^2}.$$

Сега е ясно, че ако се погрижим да е в сила $\sqrt{b^2-a^2}<\frac{\varepsilon}{4}$, от (8) ще следва

$$(9) \qquad \left||x|-Q(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

винаги когато $|x|\leq a$.

С това (4) все още не е доказано, тъй като не сме сигурни, че свободният член на Q е нула. Да положим $P(x)=Q(x)-Q(0)$. От (9) намираме $|Q(0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ и отново от (9) добиваме

$$\left||x|-P(x)\right|\leq\left||x|-Q(x)\right|+\left|Q(0)\right|<\varepsilon,$$

което влече (4). С това лемата е доказана.

Да отбележим изрично, че трикът с числото $b>a$ бе използван само за да избегнем проверката на равномерната сходимост на (5) в интервала $[0, 1]$.

4. 10. 2. Предложение. *Ако X е компактно множество в някакво нормирано пространство L и A е затворена подалгебра на $C(X)$, заедно с всеки свой елемент f алгебрата A съдържа и $|f|$.*

Доказателство. Твърдението се получава почти непосредствено от лема 1. Наистина нека $a=\|f\|$ и n е произволно цяло положително число. Тогава съществува полином P_n с нулев свободен член, за който е изпълнено неравенството

$$(10)\qquad \big|\,|x|-P_n(x)\,\big| < \frac{1}{n}$$

за всяко $x \in \mathbf{R}$ с $|x| \leqq \|f\|$. От (10) следва

$$(11)\qquad \big\|\,|f|-P_n(f)\,\big\| < \frac{1}{n}.$$

От друга страна, A е подалгебра на $C(X)$, а полиномът P_n няма свободен член. Сега не е трудно да се види, че $P_n(f) \in A$. По този начин (11) показва, че $|f|$ е граница на редица от елементи на A. Тъй като A е затворено подмножество на $C(X)$, то $|f| \in A$ и предложението е доказано.

Оттук непосредствено следва, че *ако A е затворена подалгебра на $C(X)$ и f, $g \in A$, функциите*

$$\sup(f, g) \ \textit{и} \ \inf(f, g),$$

определени съответно с

$$(\sup(f, g))(x) = \max(f(x), g(x)) \qquad (x \in X)$$

и

$$(\inf(f, g))(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad (x \in X),$$

също принадлежат на A. Наистина читателят ще съобрази, че са изпълнени равенствата

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \ \text{ и } \ \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

и твърдението очевидно следва от предложение 1. Разбира се, оттук с индукция следва, че *ако $f_1, f_2, \ldots, f_m$ са елементи на A, то и функциите* $\sup(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *и* $\inf(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, *определени със*

$$(\sup(f_1, f_2, \ldots, f_m))(x) = \max(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

и

$$(\inf(f_1, f_2, \ldots, f_m))(x) = \min(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

за всяко $x \in X$, също са от A.

За да произнесем главната теорема за $C(X)$, имаме нужда още от един термин. Ако A е подмножество на $C(X)$, а a и b са точки на X, казва се, че A *разделя* точките a и b, когато съществува функция $f \in A$, за която $f(a) \neq f(b)$. Разбира се, тук не се изключва възможността A да се състои и само от един елемент.

4.10.3. Теорема (Вайерщрас — Стоун). *Нека X е компактно множество в някакво нормирано пространство $\mathbf{L}$ и A е затворена подалгебра на $C(X)$, която съдържа всички константи. Ако $g \in C(X)$ и всеки две точки на X, които се разделят от g, се разделят и от A, то $g \in A$.*

Доказателство. Нека a и b са произволни точки от X. Ще покажем, че съществува функция $f_{ab} \in A$, за която са изпълнени равенствата

(12) $$f_{ab}(a)=g(a) \text{ и } f_{ab}(b)=g(b).$$

Ако $g(a)=g(b)$, полагаме f_{ab} да бъде константата $g(a)$ и (12) очевидно е изпълнено. При $g(a)\neq g(b)$ съществува по условието на теоремата функция $f\in A$, за която $f(a)\neq f(b)$. Да потърсим два скалара λ и μ, за които функцията $f_{ab}=\lambda+\mu f$ удовлетворява (12):

$$\lambda+\mu f(a)=g(a) \text{ и } \lambda+\mu f(b)=g(b).$$

Тъй като $f(a)\neq f(b)$, тази система има решение за λ и μ. С това съществуването на f_{ab} с (12) е доказано.

Да изберем сега цялото положително число n по произволен начин и да го фиксираме. Тъй като f_{ab} и g са непрекъснати функции, съществуват отворени множества U_{ab} в L, за които

(13) $$\left\{x\in X: f_{ab}(x)-g(x)<\frac{1}{n}\right\}=U_{ab}\cap X$$

(вж. теорема 3.7.3).

Сега да фиксираме b по произволен начин в X и да разгледаме фамилията $\{U_{ab}\}_{a\in X}$ от отворени подмножества на L. От първото от равенствата (12) и от (13) следва $a\in U_{ab}$ за всяко $a\in X$. Ето защо тази фамилия е отворено покритие на X. По теорема 9.2 съществуват краен брой точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ на X с

$$X\subset U_{a_1 b}\cup U_{a_2 b}\cup \ldots \cup U_{a_k b}.$$

Съгласно (13) това означава, че за всяко $x\in X$ е изпълнено поне едното от неравенствата

(14) $$f_{a_i b}(x)<g(x)+\frac{1}{n} \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

Сега да разгледаме функцията

(15) $$f_b=\inf(f_{a_1 b}, f_{a_2 b}, \ldots, f_{a_k b}).$$

Тъй като всяка от функциите f_{ab} е от A и A е затворена подалгебра на $C(X)$, то f_b също е елемент на A. От друга страна, от (14) и (15) следва, че е изпълнено неравенството

(16) $$f_b(x)<g(x)+\frac{1}{n}$$

за всяко $x\in X$, докато второто от равенствата (12) и равенство (15 показват, че е изпълнено и равенството

(17) $$f_b(b)=g(b).$$

По този начин за всяко $b\in X$ построихме функция $f_b\in A$, за която са изпълнени условията (16) и (17). Тъй като функциите f_b и g са непрекъснати, съществуват отворени множества V_b в L, за които

(18) $$\left\{x\in X: f_b(x)-g(x)>-\frac{1}{n}\right\}=V_b\cap X.$$

Да разгледаме фамилията $\{V_b\}_{b\in X}$. От (17) следва, че за всяко $b\in X$

е в сила $b \in V_b$. Ето защо тази фамилия е отворено покритие на X. Следователно съществуват краен брой точки $b_1, b_2, \ldots, b_l$ на X с

$$X \subset V_{b_1} \cup V_{b_2} \cup \ldots \cup V_{b_l}.$$

Съгласно (18) това означава, че за всяко $x \in X$ е изпълнено поне едното от неравенствата

(19) $$f_{b_i}(x) > g(x) - \frac{1}{n} \qquad (i=1, 2, \ldots, l).$$

Сега да разгледаме функцията

(20) $$f = \sup(f_{b_1}, f_{b_2}, \ldots, f_{b_l}).$$

Тъй като всяка от функциите f_b е от A, то $f \in A$. От друга страна, от (19) и (20) следва, че е изпълнено неравенството

(21) $$f(x) - g(x) > -\frac{1}{n}$$

за всяко $x \in X$. Същевременно от (16) и (20) се получава

$$f(x) - g(x) < \frac{1}{n}$$

за всяко $x \in X$, което заедно с (21) влече $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{n}$ за всяко $x \in X$. Все едно

(22) $$\|f - g\| < \frac{1}{n}.$$

По този начин за всяко $n=1, 2, \ldots$ построихме функция $f \in A$, за която е в сила (22). Ето защо g е граница на редица от функции от A. Тъй като A е затворено множество, оттук следва $g \in A$. С това теоремата е доказана.

Да разгледаме сега произволна подалгебра B на $C(X)$, която съдържа константите. Нека $g \in C(X)$ е такава функция, че всеки две точки на X, които се разделят от g, да се разделят и от B. Тогава за g и за затворената обвивка A на B са изпълнени условията на теорема 3. Ето защо $g \in A$. Все едно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $f \in B$ с $\|g - f\| < \varepsilon$. Последното по определение означава, че е изпълнено неравенството

(23) $$|g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

за всяко $x \in X$. Така установихме твърдението.

4.10.4. Следствие. *Ако X е компактно множество и B е подалгебра на $C(X)$, която съдържа константите, а $g: X \to \mathbf{R}$ е такава непрекъсната функция, че всеки две точки на X, които се разделят от g, се разделят и от B, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува функция $f \in B$, за която е в сила* (23) *за всяко $x \in X$.*

При тези обстоятелства се казва още, че g може да се *апроксимира* равномерно с елементи на B.

Един особено прост случай на следствие 4 имаме, когато подалгебрата B разделя всеки две различни точки на X. Тогава изискването за g е изпълнено автоматически и следователно всяка непрекъсната функция $g: X \to \mathbb{R}$ може да се апроксимира с елементи на B.

4.10.5. Пример. *Нека X е компактно множество върху правата* $\mathbb{R}$. Тогава функцията x разделя очевидно всеки две различни точки на X. Ето защо *всяка непрекъсната функция $g: X \to \mathbb{R}$ може да се апроксимира равномерно с полиноми на x.*

4.10.6. Пример. *Нека X е компактно множество в* $\mathbb{R}^n$. Тогава координатните функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ очевидно разделят различните точки на X. Следователно *всяка непрекъсната функция $g: X \to \mathbb{R}$ може равномерно да се апроксимира с полиноми $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Съществуват интересни приложения на следствие 4, при които B не разделя всеки две различни точки на X.

4.10.7. Пример. Да разгледаме компактния интервал $[-\pi, \pi]$. Читателят ще провери, че функциите от вида (*тригонометричните полиноми*)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{k}(a_i \cos ix+b_i \sin ix),$$

където a_i и b_i са реални числа, образуват подалгебра на $C([-\pi, \pi])$. Непосредствено се вижда, че те разделят всеки две различни точки a и b на $[-\pi, \pi]$, поне едната от които не съвпада с някоя от точките $-\pi$ или π. Всеки тригонометричен полином обаче приема равни стойности в точките $-\pi$ и π, поради което те не могат да бъдат разделени. Но следствие 4 отново е приложимо и показва, че *всяка непрекъсната функция $g: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, за която $g(-\pi)=g(\pi)$, може равномерно да се апроксимира с тригонометрични полиноми.*

Задачи към четвърта глава

Примери за банахови пространства

Задача 1. Да се докаже, че за всяко $p \geq 1$ пространствата l^p и $l^p_{\mathbb{C}}$ са банахови.

Задача 2. L е линейното пространство на всички сходящи редици $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от реални числа, снабдено с равномерната норма. Да се докаже, че L е банахово пространство.

Задача 3. Нека X е нормирано пространство, а Y — банахово пространство. Да се докаже, че нормираното пространство $[X, Y]$ (вж. § 3.11) е банахово.

Задача 4. Нека X е единичният затворен кръг в комплексната равнина и A е линейното пространство на всички непрекъснати функции $f: X \to \mathbb{C}$, които са аналитични във вътрешността на X. Да се докаже, че A е банахово пространство спрямо равномерната норма.

Общи свойства на банаховите пространства

Задача 5. Нека L е нормирано пространство и $\widehat{L}$ е попълнението на L. Да се докаже, че ако на произволен непрекъснат линеен функционал l в $\widehat{L}$ се съпостави рестрикцията му $l|L$ до L, се получава изоморфизъм между спрегнатите пространства $(\widetilde{L})^*$ и L^*. Този изоморфизъм запазва нормите.

Задача 6. Да се докаже, че във всяко банахово пространство всяка намаляваща редица

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \cdots \tag{1}$$

от затворени кълба има непразно сечение.

Упътване. Установете, че редицата от центровете на тези кълба е фундаментална.

Задача 7. Да се посочи пример на намаляваща редица (1) от затворени ограничени непразни изпъкнали множества в някакво банахово пространство, сечението на елементите на която да е празно.

Упътване. В $C([0, 1])$ разгледайте множествата B_n $(n = 1, 2, \dots)$ на функциите f, за които $0 \leqq f(x) \leqq x^n$ за всяко $x \in [0, 1]$ и $f(1) = 1$.

Задача 8. Да се докаже съществуването на функция $f \in C([0, 1])$, за която

$$\lim_{h\to 0} \sup \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| = \infty$$

за всяко $x \in [0, 1]$.

Упътване. За произволно $n = 1, 2, \dots$ означете с F_n съвкупността на всички функции $f \in C([0, 1])$, за които съществува $x \in [0, 1]$ с $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqq n$ за $h \neq 0$, и приложете теоремата на Бер.

Задача 9. Нека L и L_1 са банахови пространства, $u : L \to L_1$ е линейно изображение и L_1' е подпространство на L_1^*, което разделя точките на L_1. Да се докаже, че ако всяка от композициите $l \circ u$, където l пробягва L_1', е непрекъсната, непрекъснато е и изображението u.

Упътване. Приложете теоремата за затворената графика.

Задача 10. Нека L е линейно пространство, а $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ са две норми в L, спрямо всяка от които L е банахово пространство. Да се докаже, че:

а) ако всяка редица от елементи на L, която клони към нула спрямо $\|\ \|_1$, клони към нула и спрямо $\|\ \|_2$, нормите $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ са еквивалентни;

б) ако линейните функционали в L, които са непрекъснати както спрямо $\|\ \|_1$, така и спрямо $\|\ \|_2$, разделят точките на L, нормите $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ са еквивалентни.

Компактни множества

Задача 11. Затвореното единично кълбо в едно нормирано пространство L компактно точно когато L е крайномерно.

Упътване. За да установите необходимостта, с помощта на зад. 21 от III гл покажете най-напред, че всяко крайномерно подпространство на едно нормирано пространство е затворено. След това с индукция се убедете в съществуването на безкрайна редица $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от елементи на L, за която $\|x_i\| = 1$ за всяко $i = 1, 2, \dots$ и $\|x_i - x_j\| \geqq \frac{1}{2}$ при $i \neq j$.

Задача 12. Нека $p \geqq 1$ и $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е елемент на l^p с положителни координати Да се докаже, че множеството X на всички елементи $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ на l^p, за които са изпълнени неравенствата $|x_i| \leqq a_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots$, е компактно.

Задача 13. Нека L е нормирано пространство и $X \subset L$. Да се докаже, че:

а) X е компактно точно когато всяка редица $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от елементи на X притежава точка на сгъстяване, т. е. съществува такова $\xi \in X$, че за всяко $n = 1, 2, \dots$ и за всяко $c \in \Gamma$ съществува $\gamma \in \Gamma$ с $\gamma \geqq c$ и $\|x_\gamma - \xi\| < \frac{1}{n}$;

б) X е компактно точно когато всяка редица $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от елементи на X притежава сходяща подредица с граница от X.

Нека L е нормирано пространство, $X \subset L$ и A е съвкупност от функции $f: X \to \mathbf{R}$. Съвкупността A се нарича *равностепенно непрекъсната*, когато за всяко $\xi \in X$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко $x \in X$ с $\|x - \xi\| < \delta$ и за всяко $f \in A$ да е в сила $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Множеството A се нарича *равномерно равностепенно непрекъснато*, когато числото δ от предишната дефиниция може да се избере така, че да не зависи от ξ.

Задача 14. Нека X е компактно множество и A е равностепенно непрекъсната съвкупност от функции $f: X \to \mathbf{R}$. Да се докаже, че:

а) съвкупността A е равномерно равностепенно непрекъсната;

б) ако $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е редица от елементи на A и $f: X \to \mathbf{R}$ е функция, за която $f(x) = \lim\limits_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)$ за всяко $x \in X$, функцията f е непрекъсната и е изпълнено равенството $f = \lim\limits_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ спрямо равномерната норма.

Задача 15 (А р ц е л а — А с к о л и). Нека X е компактно множество и $C(X)$ е линейното пространство на всички непрекъснати функции $f: X \to \mathbf{R}$, снабдено с равномерната норма. Да се докаже, че едно множество $A \subset C(X)$ е компактно точно когато A е ограничено, затворено и равностепенно непрекъснато.

У п ъ т в а н е. Н е о б х о д и м о с т. Ограничеността на A следва от непрекъснатостта на нормата, а затвореността се съдържа в теорема 9.1, от която може също да се извлече и равностепенната непрекъснатост.

Д о с т а т ъ ч н о с т. Нека $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е редица от елементи на A. С помощта на зад. 2, II гл. изберете универсална подредница и положете $f(x) = \lim\limits_{\delta \in \Delta} f_{\varphi_\delta}(x)$ за всяко $x \in X$. Приложете зад. 13, б) и 14, б).

Теорема на Вайерщрас — Стоун

Задача 16. Да се докаже, че ако a и b са положителни числа с $a < b$ и $\varepsilon > 0$, съществува полином $P(x)$ с нулев свободен член, за който е изпълнено неравенството $\left|\frac{1}{x} - P(x)\right| < \varepsilon$ за всяко $x \in [a, b]$.

У п ъ т в а н е. Приложете теоремата на Вайерщрас — Стоун към функцията $\frac{1}{x^2}$ в интервала $[a, b]$.

Задача 17. Нека X е компактно множество и B е затворена подалгебра на $C(X)$. Да се докаже, че:

а) ако B съдържа функция, която не се анулира в X, то B съдържа константите;

б) ако за всяко $\xi \in X$ съществува $f \in B$ с $f(\xi) \neq 0$, то B съдържа константите.

У п ъ т в а н е. Сведете а) към зад. 16 и докажете б) с помощта на а).

Задача 18. Нека X е компактно множество, B е подалгебра на $C(X)$, а $g: X \to \mathbf{R}$ — такава непрекъсната функция, че всеки две точки на X, които се разделят от g, се разделят и от B. Да се докаже, че ако g се анулира във всяка точка $\xi \in X$, в която се анулират всички функции от B, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува функция $f \in B$, за която е изпълнено $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ за всяко $x \in X$.

У п ъ т в а н е. Съгласно следствие 10.4 и зад. 17, б) интересен е само случаят когато всички функции $f \in B$ се анулират в някоя точка ξ на X. При това условие разгледайте по-широката алгебра, съставена от функциите $\lambda + f$, където λ е константа и $f \in B$.

Задача 19 (к о м п л е к с н а ф о р м а н а т е о р е м а т а н а В а й е р щ р а с — С т о у н). Нека X е компактно множество, $C_C(X)$ е алгебрата на всички непрекъснати функции $f: X \to \mathbf{C}$, а B е подалгебра на $C_C(X)$ (устойчива спрямо умножение с комплексни скалари), която заедно с всеки свой елемент f съдържа и комплексно-спрегнатата функция $\bar{f}$. Нека $g: X \to \mathbf{C}$ е такава непрекъсната функция, че всеки две точки на X, които се разделят от g, се разделят и от B. Да се докаже, че ако g се анулира във всяка точка ξ на X, в която се анулират всички функции от B, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $f \in B$, че да е изпълнено неравенството $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ за всяко $x \in X$.

У п ъ т в а н е. Сведете към зад. 18.

АБСТРАКТНО ИНТЕГРИРАНЕ

Интегрирането е основен инструмент на анализа, но въпреки дългата му история пълноценната теория на интеграла бе създадена късно. Една от особеностите ѝ е широтата на действието. Тя повлия върху много области. Ще отбележим само редовете и трансформацията на Фурие, диференциалните и интегралните уравнения, теорията на вероятностите и значителното стимулиращо въздействие върху появата и развитието на функционалния анализ. Има множество примери за съвкупности от функции Φ в дадено множество X, които могат да се интегрират, т. е. във Φ е зададен подходящ линеен функционал $\int$. Той превръща Φ в нормирано пространство, което обикновено не е пълно. Тези предварителни данни са характерни за пространствата на Даниел. Особено интересни са пълните пространства на Даниел, наречени лебегови. Последните играят двояка роля: осигуряват важни за анализа и физиката пространства и интегрирането в тях е гъвкаво поради удобните теореми за граничен преход в интеграла — онези на Бепо Леви, Лебег и Фату. Гъвкавостта се дължи и на системното използване на онези подмножества на X, които не са съществени при интегрирането — пренебрежимите множества. В следващата глава ще се убедим, че всяко пространство на Даниел се потопява естествено в лебегово.

В § 1 е приведена дефиницията на пространство на Даниел, а § 2 съдържа примери за такива пространства. В § 3, 4 и 5 се изучават пренебрежимите множества. В § 6 е разгледан един въпрос за граничен преход под интеграла. В § 7 се запознаваме с два вида сходимост. Централното за тази глава понятие — пространство на Лебег — е въведено в § 8, където е доказана и теоремата на Бепо Леви. Параграфи 9 и 10 са посветени на теоремите на Лебег и Фату. Параграф 11 борави с едно обобщение.

При първо четене може да се пропуснат частта от § 7 след доказателството на предложение 7.1 и § 11.

§ 5. 1. ПРОСТРАНСТВА НА ДАНИЁЛ

В общата теория на интеграла се разглеждат произволно множество $X \neq \emptyset$ и линейно пространство Φ от реални функции $\varphi: X \to \mathbf{R}$ и се предполага валидността на следните четири аксиоми:

а) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $|\varphi| \in \Phi$;

б) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $\inf(1, \varphi) \in \Phi$;

в) зададен е *позитивен* линеен функционал $\int : \Phi \to \mathbb{R}$, т. е. линеен функционал, за който от $\varphi \in \Phi$ и $\varphi(x) \geq 0$ за всяко $x \in X$ следва $\int \varphi \geq 0$;

г) за всяка редица

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \ldots \geq \varphi_n(x) \geq \ldots$$

от елементи на Φ, която намалява за всяко $x \in X$ и за която

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$$

за всяко $x \in X$, е в сила

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0.$$

Една тройка $\langle X, \Phi, \int \rangle$ от множество X, линейно пространство Φ от реални функции в X и линеен функционал $\int : \Phi \to \mathbb{R}$, за които са изпълнени аксиомите а) — г), ще наричаме *пространство на Даниел*.

Аксиомите а) и б) изразяват свойства на самото пространство от функции Φ. Трябва да си мислим Φ като съвкупност от функции, които вече умеем да интегрираме. Тогава аксиомата а) изразява, че заедно с всяка интегруема функция нейният модул също е интегруема функция. От нея следва, че ако $\varphi, \psi \in \Phi$, то функциите $\inf(\varphi, \psi)$ и $\sup(\varphi, \psi)$, дефинирани съответно с

$$(\inf(\varphi, \psi))\ (x) = \min(\varphi(x), \psi(x)),$$

$$(\sup(\varphi, \psi))\ (x) = \max(\varphi(x), \psi(x))$$

за всяко $x \in X$, също принадлежат на Φ. Наистина читателят ще съобрази веднага, че са изпълнени равенствата

$$\inf(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|),$$

$$\sup(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|),$$

и твърдението следва от аксиома а) и от линейността на Φ. По-специално за всяко $\varphi \in \Phi$ функциите

$$\varphi^+ = \sup(0, \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|),$$

$$\varphi^- = -\inf(0, \varphi) = -\frac{1}{2}(\varphi - |\varphi|)$$

са от Φ. Същевременно $\varphi^+ \geq 0$, $\varphi^- \geq 0$ и $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, поради което *всяка функция от Φ е разлика на две неотрицателни функции от Φ.*

Аксиомата б) се нарича аксиома на Стоун. Тя е едно техническо изискване за Φ и има за цел да отстрани от разглеждане някои изродени ситуации. Тя се намесва съществено при изучаването на измеримите функции, функционалните пространства, а също и при разглеждането на взаимоотношението между интеграл и мярка, за които ще стане дума в следващите глави. В тази глава няма да прибягваме до услугите на аксиомата на Стоун.

Линейният функционал $\int$ *във* Φ *се нарича* ***интеграл***. Позитивността на интеграла означава, че интегралът на всяка неотрицателна функция от Φ е неотрицателен. Оттук следва, че за всеки две функции φ, $\psi \in \Phi$, за които $\varphi \leqq \psi$ ($\varphi(x) \leqq \psi(x)$ за всяко $x \in X$), е в сила $\int \varphi \leqq \int \psi$. Наистина тогава $\psi - \varphi \geqq 0$ и следователно $\int \psi - \int \varphi = \int (\psi - \varphi) \geqq 0$.

Също толкова просто се доказва и неравенството

$$\left|\int \varphi\right| \leqq \int |\varphi| \tag{1}$$

за всяко $\varphi \in \Phi$. Наистина от неравенствата

$$\varphi \leqq |\varphi| \text{ и } -\varphi \leqq |\varphi|$$

следва очевидно

$$\int \varphi \leqq \int |\varphi| \text{ и } -\int \varphi \leqq \int |\varphi|,$$

откъдето (1) се получава незабавно.

Аксиома г) е хипотеза за граничен преход под интеграла. Тя е твърде съществена за следващото изложение.

Да отбележим още, че ако за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\|\varphi\| = \int |\varphi|,$$

получаваме една полунорма във Φ. С известна неточност тя се нарича *първа норма* във Φ. *Интегралът* $\int : \Phi \to \mathbb{R}$ *е непрекъснат линеен функционал спрямо първата норма.* Наистина

$$\left|\int \varphi\right| \leqq \int |\varphi| = \|\varphi\|$$

за всяко $\varphi \in \Phi$. *Когато* $\int$ *не е тъждествено нула, неговата норма очевидно е* 1.

§ 5.2. ПРИМЕРИ ЗА ПРОСТРАНСТВА НА ДАНИЕЛ

Ще започнем с два съвършено прости примера.

5.2.1. Пример. Нека X е непразно множество, а Φ — линейното пространство на всички функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$, всяка от които е тъждествено нула вън от някакво (зависещо от φ) крайно множество в X. Аксиомите а) и б) от предишния параграф са очевидно изпълнени. За произволно $\varphi \in \Phi$ ще положим

$$\int \varphi = \sum_{x \in X} \varphi(x).$$

Тук сумата вдясно трябва да се разбира като сбор от всички стойности на φ в някакво крайно подмножество на X, вън от което φ се анулира тъждествено. Разбира се, въпросната сума не зависи от специалния избор на това крайно множество. Аксиомите в) и г) за така въведения интеграл във Φ се проверяват непосредствено.

5.2.2. Пример. Нека X е безкрайно множество и Φ е съвкупността на всички функции $\varphi: X \to \mathbf{R}$, всяка от които е тъждествено нула вън от някакво (зависещо от φ) изброимо множество в X и безкрайният ред

$$\sum_{x \in X} |\varphi(x)|$$

е сходящ. Ако за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\int \varphi = \sum_{x \in X} \varphi(x),$$

отново получаваме пространство на Даниел. Разбира се, ако X е изброимо, смисълът на дясната страна е ясен поради предположената абсолютна сходимост. Ако X не е изброимо, избираме произволно изброимо подмножество на X, вън от което φ се анулира тъждествено, и сумираме само в него. Независимостта на определението от това изброимо множество е очевидна. Препоръчваме на читателя да провери аксиома г).

Най-интересните примери за пространства на Даниел се базират на следващата теорема, която гарантира аксиома г) в широк кръг случаи.

5.2.3. Теорема (Д и н й). *Нека X е компактно множество в някакво нормирано пространство и*

$$(1) \qquad \varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \dots \geqq \varphi_n \geqq \dots$$

намаляваща редица от непрекъснати функции в X с

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = 0$$

за всяко $x \in X$. Тогава сходимостта на (1) *е равномерна.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека ε е произволно положително число. Трябва да се убедим в съществуването на такова n, че при $m \geqq n$ да е в сила $\varphi_m(x) < \varepsilon$ за всяко $x \in X$. Да допуснем противното. Тогава за всяко $n = 1, 2, \dots$ ще съществуват $m_n \geqq n$ и точка $x_n \in X$, за които $\varphi_{m_n}(x_n) \geqq \varepsilon$. Тъй като редицата (1) е намаляваща, то

$$\varphi_n(x_n) \geqq \varphi_{m_n}(x_n) \geqq \varepsilon.$$

По този начин получихме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от елементи на X, за която

$$(3) \qquad \varphi_n(x_n) \geqq \varepsilon$$

за всяко $n = 1, 2, \dots$

От компактността на X следва, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ притежава сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ с граница ξ от X. Нека l е произволно цяло положително число. Тогава за всички достатъчно големи k ще бъде в сила $n_k \geqq l$ и понеже редицата (1) е намаляваща, то

$$\varphi_l(x_{n_k}) \geqq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqq \varepsilon$$

съгласно (3). Следователно $\varphi_l(x_{n_k}) \geqq \varepsilon$ за всички достатъчно големи k. Но редицата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ клони към ξ, а φ_l е непрекъсната функция. Ето защо $\varphi_l(\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_l(x_{n_k})$ и поради това $\varphi_l(\xi) \geqq \varepsilon$. Последното неравенство е доказано за всяко $l = 1, 2, \ldots$, а това противоречи на (2). С това теоремата е доказана.

Следващата теорема осигурява наличието на аксиомата за граничен преход под интеграла в широк кръг от случаи.

5.2.4. Теорема. *Нека X е компактно множество, $C(X)$ е съвкупността на всички непрекъснати функции $\varphi: X \to \mathbb{R}$ и $\int : C(X) \to \mathbb{R}$ е произволен позитивен функционал. Тогава тройката $\langle X, C(X), \int \rangle$ е пространство на Даниел.*

Доказателство. Единственото, което трябва да установим, е аксиомата г) от определението на пространство на Даниел. Нека (1) е намаляваща редица от функции от $C(X)$ с (2) за всяко $x \in X$.

Нека ε е произволно положително число. Съгласно лемата на Дини съществува такова ν, че при $n > \nu$ да е в сила

$$0 \leqq \varphi_n(x) < \varepsilon \qquad (x \in X).$$

От позитивността на интеграла сега следва

$$0 \leqq \int \varphi_n \leqq \int \varepsilon = \varepsilon \int 1,$$

с което всичко е доказано, тъй като числото вдясно е произволно малко заедно с ε.

5.2.5. Пример. Ако в $C([a, b])$ разгледаме римановия интеграл

$$\int f = \int_a^b f(x)dx,$$

получаваме съгласно теорема 4 пространство на Даниел.

По-общо нека $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ е произволна растяща функция. Ако фиксираме α, стилтесовият интеграл

$$\int f = \int_a^b f(x) d\,\alpha(x)$$

очевидно е позитивен линеен функционал в $C([a, b])$. Следователно всяка растяща функция α дава по един пример за пространство на Даниел.

5.2.6. Пример. Нека $\bar{\Delta}$ е затворен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$. Ако в $C(\bar{\Delta})$ разгледаме римановия интеграл

$$\int f = \int\int_{\Delta} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

получаваме пространство на Даниел.

По-общо нека Δ е съответният полузатворен паралелепипед, $\mathbf{S}$ е съвкупността на всички полузатворени подпаралелепипеди на Δ и $\mu : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ е произволна н е о т р и ц а т е л н а адитивна функция. Ако фиксираме μ, интегралът

$$\int f = \int_{\Delta} f(x) d\,\mu(x)$$

е позитивен линеен функционал в $C(\bar{\Delta})$ (вж. § 2.12). Следователно отново получаваме пространство на Даниел.

Теорема 4 не изчерпва възможностите на теоремата на Дини. Нека L е нормирано пространство и X е множество в L. Една непрекъсната функция $f : X \to \mathbf{R}$ да наречем *финитна,* когато съществува компактно множество $Y \subset X$, за което f се анулира тъждествено в множеството $X \setminus Y$. Така например при $X = \mathbf{R}$ финитните функции $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ са онези непрекъснати функции, всяка от които се анулира тъждествено вън от подходящ интервал. Аналогично при $X = \mathbf{R}^n$ финитните функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ са непрекъснатите функции, които се анулират тъждествено вън от подходящи паралелепипеди. Ако $\varphi : X \to \mathbf{R}$ е финитна функция, всяко компактно множество Y в X, вън от което φ се анулира, се нарича *носител* на φ.

Следващата теорема обобщава теорема 4.

5.2.7. Теорема. *Нека X е множество в някакво нормирано пространство и $\Phi(X)$ е съвкупността на всички финитни функции $\varphi : X \to \mathbf{R}$. Тогава за произволен позитивен линеен функционал $\int : \Phi(X) \to \mathbf{R}$ тройката $\langle X, \Phi(X), \int \rangle$ е пространство на Даниел.*

Д о к а з а т е л с т в о. Предоставяме на читателя да обмисли несъществените модификации на доказателството на теорема 4, след които се получава теорема 7.

5.2.8. Пример. Нека Φ е съвкупността на финитните функции $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ако за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\int \varphi = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

където $[a, b]$ е носител на φ, получаваме очевидно коректно определен (независещ от специалния избор на носителя $[a, b]$) позитивен линеен функционал във Φ. Следователно $\langle \mathbf{R}, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. Разгледаният функционал $\int$ се нарича *инвариантен интеграл* в $\mathbf{R}$. Така посоченият пример е във всяко отношение основен в теорията на интеграла. Ето защо читателят постоянно трябва да го има пред вид.

По-общо, ако $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е произволна растяща функция и за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\int \varphi = \int_a^b \varphi(x)\, d\alpha(x),$$

където $[a, b]$ отново е носител на φ, пак получаваме пространство на Даниел.

5.2.9. Пример. Ако Φ е съвкупността на финитните функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и за произволно $\varphi \in \Phi$ разгледаме римановия интеграл

$$\int \varphi = \int\int_{\bar{\Delta}} \ldots \int \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

където $\bar{\Delta}$ е произволен носител на φ, получаваме отново пространство на Даниел. Функционалът $\int$ се нарича *инвариантен интеграл* в $\mathbf{R}^n$. И тук във Φ могат да се разглеждат много други интеграли, но инвариантният интеграл безспорно е най-интересният.

Ето и други интеграли във Φ. Нека $\mathbf{S}$ е съвкупността на всички полузатворени паралелепипеди в $\mathbf{R}^n$ и $\mu : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ е произволна неотрицателна адитивна функция (вж. § 2.3). Тогава функционалът

$$\int \varphi = \int_{\bar{\Delta}} \varphi(x)\, d\mu(x),$$

където $\bar{\Delta}$ е носител на φ (вж. § 2.12), превръща Φ в пространство на Даниел.

Така виждаме, че пространствата на Даниел се срещат често в анализа. Съществуват и други интересни примери на такива пространства.

§ 5.3. ПРЕНЕБРЕЖИМИ МНОЖЕСТВА

Нека $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. Една от характерните черти на теорията на интеграла е систематичното използване на такива множества A в X, че всяка функция $\varphi \in \Phi$, която се анулира тъждествено вън от A, има нулев интеграл. Тези множества могат да се пренебрегват в теорията на интеграла. Следва точното им описание.

Едно множество A в X се нарича *пренебрежимо*, когато съществуват растяща редица

(1) $$\varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \ldots \leqq \varphi_n \leqq \ldots$$

от неотрицателни елементи на Φ и число C, за които са изпълнени условията:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \infty$ за всяко $x \in A$;

б) $\int \varphi_n \leq C$ за всяко $n=1, 2, \ldots$

От тази дефиниция следва директно, че празното множество е пренебрежимо. Също така всички подмножества на едно пренебрежимо множество са пренебрежими. Читателят ще съобрази, че единственото пренебрежимо множество в примерите 2.1 и 2.2 е празното.

5.3.1. Пример. Едноточковите множества в $[a, b]$ са пренебрежими спрямо $C([a, b])$ и римановия интеграл. Нека $c \in [a, b]$. Да изберем за всяко $n=1, 2, \ldots$ по една неотрицателна непрекъсната функция $\psi_n : [a, b] \to \mathrm{R}$ с $\psi_n(c)=1$ и $\int\limits_a^b \psi_n \leq \frac{1}{2^n}$ и да положим

$$\varphi_n=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n.$$

Очевидно така получената редица (1) е растяща и са изпълнени а) и б) при $A=\{c\}$.

Аналогично се проверява, че едноточковите множества са пренебрежими и в $\mathbf{R}$, когато Φ е съвкупността на финитните функции, снабдена с римановия интеграл, и същото е вярно за $\mathbf{R}^n$. В тези случаи съществуват пренебрежими множества с мощността на континуума.

Следващите две прости предложения показват, че пренебрежимите множества са удобно свързани с интегрирането.

5.3.2. Предложение. *Нека $\varphi \in \Phi$, $\varphi \geq 0$ и $\int \varphi=0$. Тогава множеството*

$$A=\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$$

е пренебрежимо.

Доказателство. Читателят ще провери, че редицата

$$\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \ldots, n\varphi, \ldots$$

притежава свойствата а) и б).

5.3.3. Предложение. *Нека $\varphi \in \Phi$ и φ се анулира тъждествено вън от някакво пренебрежимо множество. Тогава*

$$\int \varphi=0.$$

Доказателство. Тъй като

$$\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi|,$$

достатъчно е да докажем, че $\int|\varphi|=0$. Все едно без ограничение на общността можем да предположим, че $\varphi \geqq 0$.

Да изберем редица (1) със свойствата а) и б). За произволно $\varepsilon>0$ да положим

(2) $$\psi_n=\sup(\varphi-\varepsilon\varphi_n,\ 0).$$

Тогава $\psi_n \in \Phi$ и понеже редицата (1) расте, редицата с общ член (2) очевидно е намаляваща.

От друга страна, за всяко $x \in X$ е в сила

(3) $$\varphi(x)-\varepsilon\varphi_n(x) \leqq 0$$

за всички достатъчно големи n. Наистина, ако $x \in X \setminus A$, в сила е $\varphi(x)=0$ и (3) следва от неотрицателността на φ_n. Ако пък $x \in A$, неравенството (3) следва от условието а).

От (3) заключаваме, че за всяко $x \in X$ е изпълнено $\psi_n(x)=0$ за всички достатъчно големи n. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=0$ за всяко $x \in X$. Сега от аксиомата за граничния преход под интеграла следва $\int\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, поради което съществува n с $\int\psi_n<\varepsilon$. Тъй като според (2) $\varphi-\varepsilon\,\varphi_n \leqq \psi_n$, от б) следват неравенствата

$$\int\varphi \leqq \varepsilon\int\varphi_n+\int\psi_n<\varepsilon C+\varepsilon,$$

поради което $\int\varphi$ е по-малък от всяко положително число. Същевременно от $\varphi \geqq 0$ следва $\int\varphi \geqq 0$. Ето защо $\int\varphi=0$ и предложението е доказано.

5.3.4. Следствие. *Ако две функции φ и ψ от Φ съвпадат тъждествено вън от някакво пренебрежимо множество, то*

$$\int\varphi=\int\psi.$$

5.3.5. Следствие. *Ако една функция φ приема само неотрицателни стойности вън от някакво пренебрежимо множество, то*

$$\int\varphi \geqq 0.$$

Наистина нека A е пренебрежимо множество и $\varphi(x) \geqq 0$ за всяко $x \in X \setminus A$. Да положим $\psi=\sup(\varphi,\ 0)$. Тогава $\psi \geqq 0$ и функциите φ, ψ съвпадат тъждествено вън от A. Ето защо

$$\int\varphi=\int\psi \geqq 0.$$

5.3.6. Следствие. *Ако φ и ψ са функции от Φ и е изпълнено неравенството $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ за всички $x \in X$ вън от някакво пренебрежимо множество, то*

$$\int \varphi \leqq \int \psi.$$

5.3.7. Следствие. *Цялото пространство X е пренебрежимо точно когато* $\int \varphi = 0$ *за всяко* $\varphi \in \Phi$.

Това следствие посочва примери на множества, които не са пренебрежими: такова е цялото X, когато интегралът не е тъждествено нула. Разбира се, пространствата на Даниел, в които цялото X е пренебрежимо, не са интересни.

§ 5.4. ОСНОВНО СВОЙСТВО НА ПРЕНЕБРЕЖИМИТЕ МНОЖЕСТВА

Удобствата, които теорията на интеграла предоставя, се дължат до голяма степен на следното свойство на пренебрежимите множества. С $\langle X, \Phi, \int \rangle$ ще означаваме произволно пространство на Даниел.

5.4.1. Теорема. *За всяка редица*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

от пренебрежими множества в X обединението $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *е пренебрежимо множество в X.*

Доказателство. Множеството A_1 е по предположение пренебрежимо. Ето защо по дефиниция съществуват редица

$$(1) \qquad 0 \leqq \varphi_{11} \leqq \varphi_{12} \leqq \ldots \leqq \varphi_{1k} \leqq \ldots$$

от елементи на Φ и число C_1, за които:

а$_1$) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{1k}(x) = \infty$ за всяко $x \in A_1$;

б$_1$) $\int \varphi_{1k} \leqq C_1$ за всяко $k = 1, 2, \ldots$

По аналогични причини съществуват и редица

$$(2) \qquad 0 \leqq \varphi_{21} \leqq \varphi_{22} \leqq \ldots \leqq \varphi_{2k} \leqq \ldots$$

от елементи на Φ и число C_2, за които:

а$_2$) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k}(x) = \infty$ за всяко $x \in A_2$;

б$_2$) $\int \varphi_{2k} \leqq C_2$ за всяко $k = 1, 2, \ldots$

И така нататък. Като използваме пренебрежимостта на A_n, ще получим редица

$$(3) \qquad 0 \leqq \varphi_{n1} \leqq \varphi_{n2} \leqq \ldots \leqq \varphi_{nk} \leqq \ldots$$

от елементи на Φ и число C_n, за които:

а$_n$) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{nk}(x) = \infty$ за всяко $x \in A_n$;

б$_n$) $\int \varphi_{nk} \leqq C_n$ за всяко $k=1, 2, \ldots$

Така получихме една редица от редици от неотрицателни функции от Φ и редица

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

от неотрицателни числа, за които са изпълнени условията а$_n$) и б$_n$) за всяко $n=1, 2, \ldots$

Сега да изберем такава редица

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

от положителни числа, че редът

$$C=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n C_n \tag{4}$$

да бъде сходящ, и да положим

$$\varphi_k=\varepsilon_1 \varphi_{1k}+\varepsilon_2 \varphi_{2k}+ \ldots +\varepsilon_k \varphi_{kk} \tag{5}$$

за всяко $k=1, 2, \ldots$ Така получаваме нова редица

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots \tag{6}$$

от елементи на Φ. Тъй като членовете на редиците (3) са неотри цателни, то $\varphi_k \geqq 0$. От друга страна,

$$\varphi_{k+1}-\varphi_k=\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(\varphi_{i,k+1}-\varphi_{ik})+\varepsilon_{k+1} \varphi_{k+1,k+1} \geqq 0,$$

тъй като редиците (1), (2) и (3) са растящи и $\varphi_{k+1,k+1} \geqq 0$. Ето защо редицата (6) е растяща.

Нека $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогава съществува $n=1, 2, \ldots$ с $x \in A_n$. От друга страна, от (5) при $k \geqq n$ следва $\varphi_k(x) \geqq \varepsilon_n \varphi_{nk}(x)$. Оттук поради а$_n$) получаваме $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \infty$.

От друга страна, от (5), а също от б$_1$), б$_2$), ..., б$_n$), ... следва

$$\int \varphi_k =\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \int \varphi_{ik} \leqq \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i C_i \leqq C$$

съгласно (4). С това теоремата е доказана.

Вече видяхме, че ако в $\mathbb{R}^n$ разгледаме съвкупността на финитните функции и римановия интеграл, едноточковите множества са пренебрежими. От теорема 1 следва, че в този случай са пренебрежими и всички изброими множества. По-специално това важи за $\mathbb{Q}^n$: съвкупността на точките от $\mathbb{R}^n$ с рационални координати. Така виждаме, че даже гъсти множества могат да бъдат пренебрежими.

§ 5.5. ТЕРМИНЪТ „ПОЧТИ НАВСЯКЪДЕ“

Пренебрежимите множества участвуват на всяка стъпка в теорията на интеграла и приложенията ѝ. Поради това е целесъобразно да свържем с тях още един термин.

Нека отново $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. За едно множество $\Xi \subset X$ се казва, че съдържа *почти всички точки* на X, когато допълнението му $X \setminus \Xi$ е пренебрежимо.

От теорема 4.1 следва, че ако

$$\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n, \ldots$$

е редица от подмножества на X, всеки от членовете на която съдържа почти всички елементи на X, то и сечението

$$\Xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Xi_n$$

съдържа почти всички елементи на X. Наистина след преминаване към допълнения намираме

$$X \setminus \Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus \Xi_n)$$

и пренебрежимостта на $X \setminus \Xi$ следва от пренебрежимостта на всяко от множествата $X \setminus \Xi_n$.

Също така X съдържа почти всички точки на X и ако $\Xi \subset \Xi_1 \subset X$ и Ξ съдържа почти всички точки на X, то и Ξ_1 съдържа почти всички точки на X.

Удобно е тази терминология малко да се разшири. Нека P е някакво свойство, което елементите на X могат да притежават или да не притежават. Казва се, че P е изпълнено *почти навсякъде* в X, когато множеството на всички точки x на X, за които P е изпълнено, съдържа почти всички точки на X. Разбира се, това означава, че множеството на всички точки x от X, за които P не е налице, е пренебрежимо.

От казаното следва, че ако

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

е редица от свойства, всяко от които е изпълнено почти навсякъде в X, свойствата (1) са изпълнени едновременно почти навсякъде в X.

При тази терминология предложение 3.2 изразява, че *ако φ е неотрицателна функция от Φ и $\int \varphi = 0$, то φ се анулира почти навсякъде*. Предложение 3.3 пък гласи, че *всяка функция φ от Φ, която е нула почти навсякъде, има нулев интеграл*. Аналогично следствие 3.4 показва, че *ако две функции от Φ съвпадат почти навсякъде, интегралите им са равни*. Следствие 3.6 пък ни учи, че *ако за две функции φ и ψ от Φ е изпълнено неравенството*

$\varphi(x) \leqq \psi(x)$ *почти навсякъде в* X, *то* $\int \varphi \leqq \int \psi$.

Да се върнем към първата норма

$$\|\varphi\| = \int |\varphi| \qquad (\varphi \in \Phi).$$

Да напомним, че две функции φ и ψ от Φ наричаме несъществено различни (вж. § 3.5), когато $\|\varphi - \psi\| = 0$, т. е. когато

$$\int |\varphi - \psi| = 0.$$

В съответствие с казаното това изразява, че φ и ψ съвпадат почти навсякъде. Също както в полунормираните пространства отъждествявахме несъществено различните елементи, в пространствата на Даниел ще отъждествяваме функциите, които съвпадат почти навсякъде.

§ 5.6. УСИЛВАНЕ НА АКСИОМАТА ЗА ГРАНИЧЕН ПРЕХОД ПОД ИНТЕГРАЛА

Пренебрежимите множества дават възможност да се усили аксиомата за граничния преход под интеграла.

5.6.1. Лема (з а г р а н и ч е н п р е х о д п о д и н т е г р а л а). *За всяка намаляваща редица*

(1) $$\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \ldots \geqq \varphi_n \geqq \ldots$$

от елементи на Φ, *за която е изпълнено равенството*

(2) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$$

почти навсякъде в X, *е в сила и равенството*

(3) $$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Да означим с A съвкупността на точките $x \in X$, за които границата (3) не съществува или пък ако съществува, не е нула. Съгласно условието на лемата множеството A е пренебрежимо. Ето защо по дефиниция съществуват редица

(4) $$0 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \ldots \leqq \psi_n \leqq \ldots$$

от елементи на Φ и число C, за които са изпълнени условията:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \infty$ за всяко $x \in A$;

б) $\int \psi_n \leqq C$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$

Да изберем положителното число ε по произволен начин и да положим

(5) $$\omega_n = \sup(\varphi_n - \varepsilon\,\psi_n,\ 0)$$

за всяко $n = 1, 2, \ldots$ По този начин получаваме редица

6) $$\omega_1 \geqq \omega_2 \geqq \ldots \geqq \omega_n \geqq \ldots$$

от елементи на Φ, която е намаляваща (тъй като (1) е намаляваща, (4) е растяща и $\varepsilon > 0$).

Ще се убедим, че

(7) $$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = 0$$

за всяко $x \in X$. Нека най-напред $x \in X \setminus A$. Съгласно дефиницията на A е в сила (2), което заедно с (5) директно дава (7). Нека сега $x \in A$. Тогава е в сила а). Тъй като, от друга страна, $\varphi_n(x) \leqq \varphi_1(x)$ съгласно (1), ясно е, че за всички достатъчно големи n ще имаме $\varphi_n(x) - \varepsilon\ \psi_n(x) < 0$ и съгласно (5) $\omega_n\ (x) = 0$. С това (7) е установено и в този случай.

Сега от аксиомата за граничния преход под интеграла следва

$$\lim_{n\to\infty} \int \omega_n = 0,$$

поради което за всички достатъчно големи n ще бъде в сила

$$\int (\varphi_n - \varepsilon\ \psi_n) \leqq \int \omega_n < \varepsilon.$$

Ето защо съгласно б)

(8) $$\int \varphi_n < \varepsilon + \varepsilon C.$$

От друга страна, (2) е в сила за почти всички $x \in X$, а редицата (1) е намаляваща. Следователно неравенството $\varphi_n(x) \geqq 0$ е изпълнено за почти всички $x \in X$. Ето защо $\int \varphi_n \geqq 0$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$ Тъй като (8) е изпълнено за всички достатъчно големи n, лемата е доказана.

§ 5.7. СХОДИМОСТ СПРЯМО НОРМАТА И СХОДИМОСТ ПОЧТИ НАВСЯКЪДЕ

Нека $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. Във Φ ще разглеждаме два вида сходимост.

Нека

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

е редица от елементи на Φ и $\varphi \in \Phi$. Както е естествено да се очаква, ще казваме, че редицата (1) *клони към* φ *почти навсякъде*, когато за почти всички точки $x \in X$ е в сила равенството

(2) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Ще казваме, че (1) *клони към* φ *по норма*, когато е изпълнено

(3) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$$

в нормираното пространство Φ. Тъй като по дефиниция $\|\varphi\| = \int |\varphi|$, равенството (3) означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова ν, че за всички $n > \nu$ да е в сила

$$\int |\varphi_n - \varphi| < \varepsilon.$$

В този параграф ще сравним, доколкото е възможно, тези два вида сходимост.

5.7.1. Предложение. *Ако (1) е редица от елементи на Φ, която клони по норма към някаква функция $\varphi \in \Phi$, то (1) притежава подредица, която клони към φ почти навсякъде.*

Доказателство. Нека

(4) $$C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$$

е сходящ ред с положителни членове. От (3) следва съществуването на редица

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

от цели положителни числа с

(5) $$\int |\varphi_{n_k} - \varphi| < C_k$$

а всяко $k = 1, 2, \dots$

Да положим $\psi_m = \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{n_k} - \varphi|$ за всяко $m = 1, 2, \dots$ Така получаваме растящата редица

(6) $$0 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \dots \leqq \psi_m \leqq \dots$$

При това

$$\int \psi_m = \sum_{k=1}^{m} \int |\varphi_{n_k} - \varphi| \leqq \sum_{k=1}^{m} C_k \leqq C$$

съгласно (4) и (5). Оттук следва, че множеството на всички $x \in X$, за които $\lim_{m\to\infty} \psi_m(x) = \infty$, е пренебрежимо. Следователно редицата (6) е сходяща почти навсякъде. Съгласно дефиницията на ψ_m това означава, че безкрайният ред $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)|$ е сходящ почти навсякъде. Но тогава общият му член трябва да клони към нула почти навсякъде, т. е. $\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) = \varphi(x)$ почти навсякъде. С това предложението е доказано.

Съществува вариант на горното предложение с аналогично доказателство. Той се отнася до фундаментални редици от елементи на Ф и ще бъде използуван еднократно по-нататък. Преди да пристъпим към обсъждането му, да напомним, че една редица (1) от елементи на Ф се нарича фундаментална, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $n=1, 2, \ldots$, че за всяко $m \geqq n$ да е в сила $\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon$, т. е.

$$\int |\varphi_m - \varphi_n| < \varepsilon.$$

5.7.2. Лема (за сходимост). *Всяка фундаментална редица*

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

от елементи на Ф притежава подредица, която е сходяща почти навсякъде.

Доказателство. Да разгледаме отново произволен сходящ ред (4) с положителни членове. Тъй като редицата (1) е по условие фундаментална, за всяко $k=1, 2, \ldots$ съществува такова ν_k, че при $m, n > \nu_k$ да е в сила

(7) $$\int |\varphi_m - \varphi_n| < C_k.$$

Да изберем сега редицата

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

с $n_k > \nu_k$ за всяко $k=1, 2, \ldots$ Тогава от (7) следва

(8) $$\int \left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right| < C_k$$

за всяко $k=1, 2, \ldots$

Да положим сега $\psi_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right|$. Също както и в доказателството на предишното твърдение, се установява, че безкрайният ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right|$ е сходящ почти навсякъде. Но тогава и редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right)$ е сходящ почти навсякъде. Тъй като l-тата му парциална сума е $\varphi_{n_{l+1}} - \varphi_{n_1}$, редицата

(9) $$\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \ldots, \varphi_{n_k}(x), \ldots$$

е сходяща почти навсякъде. С това лемата е доказана.

Разбира се, границата на (9) не е задължена да бъде елемент на Ф.

В предишните две твърдения от сходимост по норма или фундаменталност се правеше някакво заключение за сходимост почти навсякъде. Съществуват интересни теореми, при които от сходимост почти навсякъде и други предположения се прави заключение за сходимост по норма. Тук ще се запознаем само с една от тях, а останалите ще отложим за следващите параграфи. В доказателството на тази теорема се използува следното техническо твърдение.

5.7.3. Лема. *Нека* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *са елементи на* Φ *и*

(10) $$\varphi = \inf(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Тогава

(11) $$\|\varphi-\varphi_n\| \leqq \|\varphi_1-\varphi_2\|+\|\varphi_2-\varphi_3\|+\ldots+\|\varphi_{n-1}-\varphi_n\|.$$

Доказателство. Ще използуваме индукция спрямо n. При $n=1$ (11) е тривиално.

Нека сега (11) е изпълнено за някое $n=1, 2, \ldots$ и нека

$$\psi = \inf(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}),$$

където $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ са елементи на Φ. Ако определим φ с (10), ще имаме

$$\psi = \inf(\varphi, \varphi_{n+1}) = \frac{1}{2}\,(\varphi+\varphi_{n+1}-|\varphi-\varphi_{n+1}|),$$

откъдето

$$|\psi-\varphi_{n+1}| = \frac{1}{2}\,|(\varphi-\varphi_{n+1})+|\varphi-\varphi_{n+1}|| \leqq |\varphi-\varphi_{n+1}|.$$

Следователно

$$\|\psi-\varphi_{n+1}\| = \int|\psi-\varphi_{n+1}| \leqq \int|\varphi-\varphi_{n+1}| = \|\varphi-\varphi_{n+1}\|$$

и поради това

$$\|\psi-\varphi_{n+1}\| \leqq \|\varphi-\varphi_n\|+\|\varphi_n-\varphi_{n+1}\|.$$

От това неравенство и от (11) се получава

$$\|\psi-\varphi_{n+1}\| \leqq \|\varphi_1-\varphi_2\|+\ldots+\|\varphi_{n-1}-\varphi_n\|+\|\varphi_n-\varphi_{n+1}\|,$$

с което (11) е доказано за следващото n. По този начин доказателството на лемата е завършено.

5.7.4. Теорема. *Нека*

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

е фундаментална редица от елементи на Φ, $\varphi \in \Phi$ *и*

(2) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

почти навсякъде в X. *Тогава*

(3) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$$

по норма.

Доказателство. Трябва да установим, че

(12) $$\lim_{n\to\infty} \int|\varphi_n-\varphi| = 0.$$

Поради неравенствата

$$\big||\varphi_m-\varphi|-|\varphi_n-\varphi|\big| \leqq |(\varphi_m-\varphi)-(\varphi_n-\varphi)| = |\varphi_m-\varphi_n|$$

редицата

(13) $$|\varphi_1-\varphi|, |\varphi_2-\varphi|, \dots, |\varphi_n-\varphi|, \dots$$

също е фундаментална. Същевременно членовете ѝ са неотрицателни, интегралът в (12) е точно интегралът от общия член на (13) и $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n(x)-\varphi(x)|=0$ почти навсякъде съгласно (9). Да положим $\psi_n=|\varphi_n-\varphi|$.

Така виждаме, че теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че за произволна фундаментална редица

(14) $$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$$

от елементи на Φ с

(15) $$\psi_n(x) \geq 0$$

за всяко $x \in X$ и за всяко $n=1, 2, \dots$ и

(16) $$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x)=0$$

почти навсякъде е в сила

(17) $$\lim_{n\to\infty} \int \psi_n=0.$$

Нека за целта ε е произволно положително число. От фундаменталността на (14) следва съществуването на такова ν, че при $m, n > \nu$ да е в сила $\int |\psi_m-\psi_n| < \varepsilon$. Но тогава

$$\left|\int \psi_m-\int \psi_n\right| \leq \int |\psi_m-\psi_n| < \varepsilon$$

за всички $m, n > \nu$. Ето защо числовата редица

$$\int \psi_1, \int \psi_2, \dots, \int \psi_n, \dots$$

е фундаментална. Тъй като в $\mathbb{R}$ условието на Коши е достатъчно за сходимост, границата вляво на (17) съществува. От друга страна, от (15) следва $\int \psi_n \geq 0$ и въпросната граница е неотрицателна. Ето защо твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че границата вляво на (17) не може да е положителна.

Да допуснем противното. Тогава ще съществуват такова положително число ε_0 и индекс n_0, че при $n \geq n_0$ да е в сила

(18) $$\int \psi_n \geq \varepsilon_0.$$

Също както и в доказателството на лема 2, избираме редица

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

с $n_1 \geq n_0$ и

(19) $$\int |\psi_{n_k}-\psi_{n_{k+1}}| \leq \frac{\varepsilon_0}{2^{k+1}}$$

за всяко $k=1, 2, \ldots$ и след това полагаме

$$\omega_k = \inf\left(\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \ldots, \psi_{n_k}\right).$$

Очевидно

$$\omega_1 \geqq \omega_2 \geqq \ldots \geqq \omega_k \geqq \ldots,$$

а от (8) следва $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k(x)=0$ почти навсякъде. Сега от лемата за граничния преход под интеграла (лема 6.1) се получава

$$\lim_{k\to\infty} \int \omega_k = 0. \tag{20}$$

От друга страна, от лема 3, от определението на ω_k и от (19) следва

$$\left|\int \omega_k - \int \psi_{n_k}\right| \leqq \int \left|\omega_k - \psi_{n_k}\right| = \left\|\omega_k - \psi_{n_k}\right\|$$

$$\leqq \left\|\psi_{n_1} - \psi_{n_2}\right\| + \left\|\psi_{n_2} - \psi_{n_3}\right\| + \ldots + \left\|\psi_{n_{k-1}} - \psi_{n_k}\right\|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon_0}{2^2} + \frac{\varepsilon_0}{2^3} + \ldots + \frac{\varepsilon_0}{2^k} < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ето защо

$$\int \psi_{n_k} < \frac{\varepsilon_0}{2} + \int \omega_k,$$

което заедно с (20) показва, че за всички достатъчно големи k е в сила $\int \psi_{n_k} < \varepsilon_0$ в противоречие с (18). С това теоремата е доказана.

§ 5.6. ПРОСТРАНСТВА НА ЛЕБЕГ

Нека $\langle X, \Phi, \int\rangle$ е пространство на Даниел. Ако се условим да отъждествяваме функциите от Φ, които съвпадат почти навсякъде, Φ е нормирано пространство спрямо първата норма

$$\|\varphi\| = \int |\varphi|.$$

В предишната глава се убедихме, че особено интересни за анализа са онези нормирани пространства, които са пълни. Ето защо пространствата на Даниел, които са пълни спрямо първата норма, заслужават специално внимание.

Едно пространство на Даниел $\langle X, L, \int\rangle$ се нарича *пространство на Лебег*, когато (напред с аксиомите а) — г) от § 1) удовлетворява следните две аксиоми:

д) пространството L е пълно спрямо първата норма;

е) ако $f \in L$ и $g: X \to \mathbf{R}$ е функция, която почти навсякъде съвпада с f, то $g \in L$.

Първата от тези аксиоми е твърде съществена, а втората е само техническо изискване, имащо за цел да гарантира инвариантността.

Тя няма да бъде използувана в тази глава и се среща само епизодично в следващите.

В следващата глава ще покажем, че попълнението спрямо първата норма на произволно пространство на Даниел може да се реализира като пространство на Лебег. Тъй като вече се убедихме, че пространствата на Даниел са често явление, същото е вярно и за пространствата на Лебег. Всичко казано в предишните параграфи за пространствата на Даниел важи, разбира се, и за пространствата на Лебег. Но последните притежават още редица забележителни свойства, основните от които ще бъдат обсъдени тук и в следващите два параграфа.

Да отбележим още, че измежду примерите за пространства на Даниел от § 2 само пространствата от пример 2.2 са лебегови.

Следващата теорема посочва едно от основните свойства на пространствата на Лебег.

5.8.1. Теорема (Бéпо Лéви). *Нека* $\langle X, L, \int \rangle$ *е пространство на Лебег, а*

(1) $$f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots \leqq f_n \leqq \ldots$$

е редица от елементи на L, *която е растяща почти навсякъде и за която съществува константа* C *с*

(2) $$\int f_n \leqq C \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Тогава съществува функция $f \in L$, *към която редицата* (1) *клони по норма и почти навсякъде в* X. *При това е изпълнено и равенството*

(3) $$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Доказателство. От (1) следва, че редицата от интегралите на функциите f_n е растяща, а съгласно (2) тя е ограничена. Ето защо тази редица е сходяща.

Сега ще покажем, че редицата (1) е фундаментална. Нека ε е произволно положително число. Тогава съществува такова ν, че при $m \geqq n > \nu$ да е в сила

$$\int f_m - \int f_n < \varepsilon.$$

Тогава

$$\|f_m - f_n\| = \int |f_m - f_n| = \int (f_m - f_n) < \varepsilon,$$

тъй като редицата (1) е растяща почти навсякъде. Така фундаменталността на (1) е установена.

Тъй като L е пълно съгласно аксиома д), съществува функция $f \in L$, към която редицата (1) клони по норма.

От сходимостта по норма следва (3). Наистина, ако ε е положително число, за всички достатъчно големи n е в сила

$$\int |f_n - f| = \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Ето защо

$$\left| \int f_n - \int f \right| \leq \int |f_n - f| < \varepsilon$$

за всички достатъчно големи n и (3) е доказано.

Остана да покажем, че (1) клони към f почти навсякъде. Съгласно предложение 7.1 редицата (1) притежава подредица, която почти навсякъде клони към f. Тъй като (1) е растяща почти навсякъде, оттук непосредствено следва, че и самата редица (1) клони почти навсякъде към f. С това теоремата е доказана.

5.8.2. Следствие. *За всяка намаляваща почти навсякъде редица*

$$f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_n \geqq \ldots$$

от елементи на L, за която съществува константа C с

$$\int f_n \geqq C \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

съществува и функция $f \in L$, към която тази редица клони по норма и почти навсякъде в L. При това е изпълнено и равенството

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Доказателството се свежда до прилагане на теоремата на Бепо Леви към редицата

$$-f_1, -f_2, \ldots, -f_n, \ldots$$

§ 5.9. ТЕОРЕМА НА ЛЕБЕГ

Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. Следващата теорема, която дава възможност от сходимост почти навсякъде в X да се заключи, че е налице и сходимост по норма, посочва едно от основните свойства на пространствата на Лебег.

5.9.1. Теорема (Лебег). *Нека*

(1) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е редица от функции от L, която е сходяща почти навсякъде в X. Ако освен това съществува функция $g \in L$, за която почти навсякъде в X е изпълнено неравенството

(2) $$|f_n(x)| \leq g(x)$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$, то съществува функция $f \in L$, към която редицата (1) *клони по норма и почти навсякъде в X. При това е изпълнено и равенството*

(3) $$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Доказателство. От (2) следва, че неравенствата

$$-g(x) \leqq f_n(x) \leqq g(x) \tag{4}$$

са изпълнени почти навсякъде в X.

Да изберем по произволен начин числото $n=1, 2, \ldots$ и да го фиксираме. След това за произволно $k=1, 2, \ldots$ да положим

$$M_{nk}=\sup(f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}). \tag{5}$$

Така получаваме безкрайна растяща редица

$$M_{n1} \leqq M_{n2} \leqq \ldots \leqq M_{nk} \leqq \ldots \tag{6}$$

от елементи на L. За нея съгласно (4) е в сила $M_{nk}(x) \leqq g(x)$ почти навсякъде в X. Ето защо изпълнено е и неравенството $\int M_{nk} \leqq \int g$ за всяко $k=1, 2, \ldots$ Така виждаме, че към редицата (6) е приложима теоремата на Бепо Леви. Ето защо съществува функция $M_n \in L$, към която (6) клони почти навсякъде в X. От (5) следва, че е изпълнено и равенството

$$M_n(x)=\sup\,(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x), \ldots) \tag{7}$$

почти навсякъде в X.

Аналогично чрез разглеждане на функциите

$$m_{nk}=\inf\,(f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k})$$

намираме и функция $m_n \in L$, за която е изпълнено равенството

$$m_n(x)=\inf\,(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x), \ldots) \tag{8}$$

почти навсякъде в X.

Числото n бе фиксирано произволно. Ето защо можем да му дадем всичките стойности $1, 2, \ldots$ Така получаваме две редици:

$$M_1 \geqq M_2 \geqq \ldots \geqq M_n \geqq \ldots \tag{9}$$

и

$$m_1 \leqq m_2 \leqq \ldots \leqq m_n \leqq \ldots \tag{10}$$

от елементи на L. Първата от тях намалява почти навсякъде съгласно (7), докато втората расте почти навсякъде по силата на (8).

От (7) и (8) следват неравенствата

$$m_n(x) \leqq f_n(x) \leqq M_n(x) \tag{11}$$

за всички $n=1, 2, \ldots$ и почти за всички $x \in X$, а от (9)—(11) се получава, че и неравенствата

$$m_1(x) \leqq M_n(x),\ m_n(x) \leqq M_1(x) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

са изпълнени почти навсякъде в X. Следователно изпълнени са и неравенствата

$$\int m_1 \leqq \int M_n,\quad \int m_n \leqq \int M_1 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Ето защо към редиците (9) и (10) е приложима теоремата на

Бепо Леви. Следователно съществува функция $M \in L$, към която (9) клони по норма и почти навсякъде. Поради същите причини съществува и функция $m \in L$, към която (10) клони по норма и почти навсякъде.

Ще покажем, че почти навсякъде в X е изпълнено равенството

$$m(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=M(x). \tag{12}$$

Нека x е точка от X, за която са изпълнени условията:

а) изпълнени са равенствата (7) и (8) за всяко $n=1, 2, \ldots$;

б) редицата (1) е сходяща в точката x;

в) изпълнени са равенствата

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x)=m(x), \quad \lim_{n\to\infty} M_n(x)=M(x).$$

Нека ε е произволно положително число, а $l(x)$ — границата на редицата (1) в точката x. Тогава за всички достатъчно големи индекси p е в сила $l(x)-\varepsilon<f_p(x)<l(x)+\varepsilon$, което заедно със (7) дава

$$l(x)-\varepsilon \leqq M_n(x) \leqq l(x)+\varepsilon$$

за всички достатъчно големи n. Оттук и от в) следват неравенствата

$$l(x)-\varepsilon \leqq M(x) \leqq l(x)+\varepsilon$$

и тъй като ε е произволно положително число, второто от равенствата (12) е доказано. Аналогично при а) — в) се установява и първото от тези равенства. Всяко от условията а) — в) обаче е изпълнено почти навсякъде. Ето защо и (12) е налице почти навсякъде.

Да положим например $f=M$. Тогава $f \in L$ и от (12) следва, че редицата (1) клони почти навсякъде към f. Същевременно от (11) добиваме

$$\int m_n \leqq \int f_n \leqq \int M_n \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{13}$$

От друга страна, от теоремата на Бепо Леви се получава

$$\lim_{n\to\infty}\int m_n=\int m, \quad \lim_{n\to\infty}\int M_n=\int M, \tag{14}$$

а същевременно поради (12) имаме

$$\int m=\int M=\int f. \tag{15}$$

От (13) — (15) следва (3).

По този начин теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че редицата (1) клони към f и по норма. За тази цел да разгледаме редицата

$$|f_1-f|, \ |f_2-f|, \ldots, \ |f_n-f|, \ldots$$

Тя очевидно клони към 0 почти навсякъде и същевременно почти навсякъде са изпълнени и неравенствата

$$|f_n-f| \leqq |f_n|+|f| \leqq 2g.$$

Ето защо от доказаното вече следва

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|=\int 0=0,$$

което е и желаната сходимост по норма. С това теоремата е доказана.

Елементите f на L се наричат често *сумируеми функции* в X. Функцията g от условието на теорема 1 пък се нарича *сумируема мажоранта* на редицата (1). Изискването за съществуване на сумируема мажоранта е съществено за валидността на теоремата на Лебег.

С оглед на логическия анализ на понятието лебегово пространство е интересно да се отбележи, че в приведеното доказателство не се използваше, че $\langle X, L, \int\rangle$ е пространство на Лебег. Използувано бе само, че тройката $\langle X, L, \int\rangle$ е пространство на Даниел, в което е валидна теоремата на Бепо Леви (лебеговите пространства са такива съгласно предишния параграф).

§ 5. 10. ТЕОРЕМА НА ФАТУ

Тук ще се запознаем с друго основно свойство на пространствата на Лебег. За целта ще имаме нужда от следната лема, която е полезна и в други случаи.

5. 10. 1. Лема. *Нека*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{1}$$

е редица от сумируеми функции. Тогава съществува сумируема функция $g\geqq 0$, която е положителна почти във всички точки x, в които поне една от функциите (1) *не е нула.*

Доказателство. За да построим g, ще изберем такъв ред с положителни членове $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\|f_n\|$ да е сходящ. След това ще положим

$$g_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,|f_i| \tag{2}$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ Функциите g_n са от L и образуват растяща редица. Освен това

$$\int g_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int|f_i|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|f_i\|\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\|f_i\|.$$

Ето защо към редицата с общ член (2) е приложима теоремата на Бепо Леви. Поради това съществува функция h от L, към която функциите (2) клонят почти навсякъде. Читателят ще съобрази, че функцията $g=|h|$ удовлетворява всички изисквания на заключението на лемата.

5.10.2. Теорема (Фату). *Нека*

(1) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е редица от елементи на L, която е сходяща почти навсякъде и за която съществува такава константа C, че да са изпълнени неравенствата

(3) $$\|f_n\| \leqq C$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ *Тогава съществува функция* $f \in L$, *за която*

(4) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f\,(x)$$

почти навсякъде в X. За функцията f е изпълнено и неравенството

(5) $$\|f\| \leqq C.$$

Доказателство. Най-напред ще разгледаме специалния случай, когато функциите (1) са неотрицателни. За редицата (1) не е дадено, че притежава сумируема мажоранта, поради което към нея не е приложима теоремата на Лебег.

За да приложим все пак тази теорема, ще изберем по произволен начин число $N=1, 2, \ldots$ и функция $g \in L$, както в лема 1, ще ги фиксираме и ще положим

(6) $$f_{Nn} = \inf(f_n, Ng)$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$

Така получаваме една безкрайна редица

(7) $$f_{N1}, f_{N2}, \ldots, f_{Nn}, \ldots$$

от сумируеми функции, за която функцията Ng очевидно е сумируема мажоранта. Тъй като редицата (1) е сходяща почти навсякъде по условие, същото е вярно и за редицата (7). Ето защо по теоремата на Лебег съществува функция $F_N \in L$, за която

(8) $$\int F_N = \lim_{n\to\infty} \int f_{Nn}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f_{Nn}(x) = F_N(x)$$

почти навсякъде в X. От това равенство и от (6) следва

(9) $$F_N(x) = \min\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x),\ Ng(x)\right)$$

почти за всички $x \in X$.

Тъй като цялото положително число N бе фиксирано произволно, така построихме една редица

(10) $$F_1, F_2, \ldots, F_N, \ldots$$

от елементи на L. Но $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ в (9) не зависи от N, а Ng нараства с растенето на N поради $g \geqq 0$. Ето защо редицата (10) е растяща почти навсякъде. От друга страна, от (6) следва $f_{Nn} \leqq f_n$, а това заедно с (8) и (2) дава $\int F_N \leqq C$. Следователно към редицата (10) е приложима теоремата на Бепо Леви. Ето защо съществува функция $f \in L$, за която

$$(11) \qquad \lim_{N\to\infty} F_N(x) = f(x)$$

почти навсякъде и $\|f\| = \int f = \lim_{N\to\infty} \int F_N \leqq C$.

Остава да докажем (4), за да приключим случая на неотрицателни f_n. Ако за $x \in X$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, от (9) следва $F_N(x) = 0$, което заедно с (11) показва, че за почти всички такива x е в сила (4). Ако пък за някое $x \in X$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > 0$, тогава и функциите (1) ще приемат положителни стойности за всички достатъчно големи n. Ето защо тогава $g(x) > 0$. Сега (9) показва, че за всички достатъчно големи N е в сила

$$F_N(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

което заедно с (11) отново доказва (4) за почти всички такива x. С това теоремата е доказана при $f_n \geqq 0$.

Преминаваме към общия случай. Да разгледаме безкрайните редици с общи членове

$$(12) \qquad \frac{1}{2}(|f_n| + f_n),$$

$$(13) \qquad \frac{1}{2}(|f_n| - f_n).$$

Това са редици от неотрицателни сумируеми функции, които съгласно условието на теоремата притежават граници почти навсякъде в X. От друга страна, нормите на (12) и (13) са ограничени. За (12) например това се вижда така:

$$\left\| \frac{1}{2}(|f_n| + f_n) \right\| \leqq \frac{1}{2}(\|f_n\| + \|f_n\|) = \|f_n\| \leqq C.$$

Следователно към (12) и (13) е приложим доказаният вече частен случай от теоремата. Поради това съществуват сумируеми функции, към които (12) и (13) клонят почти навсякъде при неограниченото нарастване на n. От друга страна,

$$f_n = \frac{1}{2}(|f_n| + f_n) - \frac{1}{2}(|f_n| - f_n)$$

и следователно съществува и функция $f \in L$ с (4).

За да докажем, че за тази функция е налице и (5), прилагаме доказаното вече към редицата

$$|f_1|, \; |f_2|, \ldots, |f_n|, \ldots,$$

членовете на която са неотрицателни. Поради (3) нормите на $|f_n|$

не надминават C, а следователно същото е вярно и за нормата на $|f|$. Все едно изпълнено е (5). С това теоремата е доказана.

Ще отбележим изрично, че и тук, както и при теоремата на Лебег, не бе използувано, че $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. Послужихме си само с формално по-слабото изискване, че $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Даниел, в което е изпълнена теоремата на Бепо Леви.

§ 5.11. ФУНКЦИОНАЛИ С ОГРАНИЧЕНА ВАРИАЦИЯ

Нека $g:[a, b] \to \mathbb{R}$ е функция с ограничена вариация. Вече видяхме, че чрез равенството

$$l(f)=\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

тази функция поражда линеен функционал l в $C([a, b])$. Да изберем произволна неотрицателна функция f от $C([a, b])$. Тогава за всяка функция $h \in C([a, b])$ с $|h| \leqq f$ ще бъде в сила $|l(h)| \leqq \|h\| \; \|l\| \leqq \leqq \|f\| \; \|l\|$. По повод на това наблюдение ще разгледаме една обща дефиниция.

Нека X е непразно множество и Φ е линейно пространство от функции $\varphi: X \to \mathbb{R}$, за което от $\varphi \in \Phi$ следва $|\varphi| \in \Phi$ (изпълнено е условието а) от определението на пространство на Даниел). За един линеен функционал $l: \Phi \to \mathbb{R}$ ще казваме, че е с *ограничена вариация,* когато за всяка неотрицателна функция $\varphi \in \Phi$ съществува такова число c, че за всяко $\psi \in \Phi$ с $|\psi| \leqq \varphi$ да е в сила $|l(\psi)| \leqq c$.

5.11.1. Пример. Нека във Φ е зададена норма, която е *монотонна,* т. е. от $\varphi, \psi \in \Phi$ и $|\varphi| \leqq |\psi|$ следва $\|\varphi\| \leqq \|\psi\|$. Монотонни са например равномерните норми, а така също и първата норма от § 1. Също както по-горе, се установява, че тогава всеки непрекъснат линеен функционал във Φ е с ограничена вариация.

Следващата теорема показва, че функционалите с ограничена вариация са тясно свързани с позитивните линейни функционали.

5.11.2. Теорема. *Нека X е непразно множество и Φ е линейно пространство от функции $\varphi: X \to \mathbb{R}$, за което от $\varphi \in \Phi$ следва $|\varphi| \in \Phi$. При тези предположения един линеен функционал l във Φ е с ограничена вариация точно когато може да се представи като разлика на два позитивни линейни функционала.*

Доказателство. Нека най-напред l_1 е позитивен линеен функционал във Φ. Тогава при $\varphi, \psi \in \Phi$ и $|\psi| \leqq \varphi$ ще имаме $|l_1(\psi)| \leqq l_1(|\psi|) \leqq l_1(\varphi)$ и следователно l_1 е с ограничена вариация. От друга страна, от определението веднага следва, че разликата на два функционала с ограничена вариация е функционал с ограничена вариация. Ето защо разликата на всеки два позитивни линейни функционала е функционал с ограничена вариация. С това е доказана достатъчността.

Нека сега l е произволен функционал с ограничена вариация. Трябва да посочим два позитивни линейни функционала

(1) $$l^+ : \Phi \to \mathbf{R} \text{ и } l^- : \Phi \to \mathbf{R},$$

за които

(2) $$l = l^+ - l^-.$$

Ще започнем с l^+. В началото ще определим l^+ за неотрицателни функции φ от Φ с помощта на равенството

(3) $$l^+(\varphi) = \sup_{\psi} l(\psi),$$

където ψ пробягва съвкупността на всички функции от Φ с $0 \leqq \psi \leqq \varphi$. Разбира се, супремумът в (3) съществува при всяко фиксирано φ, понеже функционалът l е с ограничена вариация.

От тази дефиниция непосредствено се извлича положителната хомогенност, т. е. равенството

(4) $$l^+(\lambda\varphi) = \lambda l^+(\varphi)$$

за всяко $\varphi \in \Phi$ с $\varphi \geqq 0$ и за всеки скалар $\lambda \geqq 0$.

Малко по-трудно се установява адитивността на l^+, т. е. равенството

(5) $$l^+(\varphi_1 + \varphi_2) = l^+(\varphi_1) + l^+(\varphi_2)$$

за всеки две неотрицателни функции φ_1 и φ_2 от Φ.

Нека най-напред ψ_1 и ψ_2 са произволни функции от Φ с

$$0 \leqq \psi_1 \leqq \varphi_1 \quad \text{и} \quad 0 \leqq \psi_2 \leqq \varphi_2.$$

Тогава $0 \leqq \psi_1 + \psi_2 \leqq \varphi_1 + \varphi_2$, откъдето непосредствено добиваме

$$l(\psi_1) + l(\psi_2) = l(\psi_1 + \psi_2) \leqq l^+(\varphi_1 + \varphi_2),$$

т. е. $l(\psi_1) + l(\psi_2) \leqq l^+(\varphi_1 + \varphi_2)$. Оттук следва

(6) $$l^+(\varphi_1) + l^+(\varphi_2) \leqq l^+(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Да разгледаме сега произволна функция $\psi \in \Phi$ с $0 \leqq \psi \leqq \varphi_1 + \varphi_2$ и да положим $\psi_1 = \inf(\psi, \varphi_1)$, $\psi_2 = \psi - \psi_1$. Тогава неравенствата $0 \leqq \psi_1 \leqq \varphi_1$ и $\psi_2 \geqq 0$ са очевидни, а неравенството

(7) $$\psi_2 \leqq \varphi_2$$

се нуждае от доказателство само за такива $x \in X$, за които $\varphi_1(x) < \psi(x)$. Но тогава $\psi_1(x) = \varphi_1(x)$ и

$$\psi(x) \leqq \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \psi_1(x) + \varphi_2(x),$$

което заедно с определението на ψ_2 дава (7). По този начин $0 \leqq \psi_2 \leqq \varphi_2$ Сега от дефиницията на l^+ се получава

$$l(\psi) = l(\psi_1) + l(\psi_2) \leqq l^+(\varphi_1) + l^+(\varphi_2)$$

за всяко $\psi \in \Phi$ с $0 \leqq \psi \leqq \varphi_1 + \varphi_2$. Ето защо

$$l^+(\varphi_1 + \varphi_2) \leqq l^+(\varphi_1) + l^+(\varphi_2),$$

което заедно с (6) доказва (5).

Нека сега φ да е произволна от . ... лични начини да се представи във вида

(8) $$\varphi=\varphi_1-\varphi_2,$$

където φ_1 и φ_2 са неотрицателни функции от Φ. Едно такова представяне е например

$$\varphi=\frac{1}{2}(|\varphi|+\varphi)-\frac{1}{2}(|\varphi|-\varphi).$$

Ако $\varphi=\psi_1-\psi_2$ е друго такова представяне на φ, то $\varphi_1+\psi_2=\psi_1+\varphi_2$ и поради установената вече адитивност на l^+ за неотрицателни функции ще имаме

$$l^+(\varphi_1)+l^+(\psi_2)=l^+(\psi_1)+l^+(\varphi_2)$$

и следователно $l^+(\varphi_1)-l^+(\varphi_2)=l^+(\psi_1)-l^+(\psi_2)$. Ето защо, ако при (8) определим l^+ с равенството

(9) $$l^+(\varphi)=l^+(\varphi_1)-l^+(\varphi_2),$$

ще получим коректна дефиниция. Читателят ще провери с помощта на доказаното вече за неотрицателни функции, че така определеното изображение $l^+:\Phi\to\mathbf{R}$ е линеен функционал. Позитивността на l^+ следва непосредствено от определението.

Да положим $l^-=l^+-l$. Тогава, разбира се, е в сила (2) и теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че l^- също е позитивен линеен функционал. Това следва отново от определението (3): наистина при $\varphi\geqq 0$ неравенството $0\leqq\psi\leqq\varphi$ е изпълнено при $\psi=\varphi$ и поради това $l(\varphi)\leqq l^+(\varphi)$. Ето защо $l^-(\varphi)\geqq 0$ и теоремата е доказана.

Функционалите (1), определени в доказателството на горната теорема, се наричат съответно *положителна* и *отрицателна част на* l. Сборът $|l|=l^++l^-$ пък се нарича *модул* на l.

Нека сега във Φ е зададена монотонна норма. В пример 1 видяхме, че тогава непрекъснатите линейни функционали във Φ са с ограничена вариация. Ето защо всеки такъв функционал притежава положителна и отрицателна част.

5.11.3. Предложение. *Ако във Φ е зададена монотонна норма, всеки непрекъснат линеен функционал във Φ е разлика на два непрекъснати позитивни линейни функционала.*

Доказателство. Достатъчно е да се убедим, че за всеки непрекъснат линеен функционал $l:\Phi\to\mathbf{R}$ положителната част l^+ на l е непрекъсната. Нека $\varphi\in\Phi$. Тогава от позитивността на l^+ следва

(10) $$|l^+(\varphi)|\leqq l^+(|\varphi|).$$

От друга страна, при $\psi\in\Phi$ и $0\leqq\psi\leqq|\varphi|$ от монотонността на нормата следва

$$l(\psi)\leqq\|l\|\ \|\psi\|\leqq\|l\|\ \|\varphi\|.$$

Ето защо от дефиницията на l^+ се получава $l^+(|\varphi|)\leqq\|l\|\ \|\varphi\|$, което заедно с (10) дава $|l^+(\varphi)|\leqq\|l\|\ \|\varphi\|$. С това предложението е доказано.

Съгласно теоремата на Хан — Банах непрекъснатите линейни функционали във Φ разделят точките на Φ. Ето защо от предложение 3 се получава, че при направените предположения позитивните линейни функционали във Φ също разделят точките, т. е. в определен смисъл са достатъчно много. По-специално, ако X е компактно множество, в $C(X)$ има достатъчно много позитивни линейни функционали. Сега теорема 2.4 показва, че $C(X)$ може по разнообразни начини да се превърне в пространство на Даниел. За да посочим и друг общ метод за построяване на пространства на Даниел, имаме нужда от следната дефиниция:

Една тройка $\langle X, \Phi, \int \rangle$ от непразно множество X, линейно пространство Φ от реални функции, определени в X, и линеен функционал $\int$ във Φ ще наричаме *обобщено пространство на Даниел*, когато са налице следните четири условия:

а) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $|\varphi| \in \Phi$;

б) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $\inf(1, \varphi) \in \Phi$;

в) $\int$ е линеен функционал с ограничена вариация;

г) за всяка редица

$$\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \ldots \geqq \varphi_n \geqq \ldots \tag{11}$$

от елементи на Φ, която намалява за всяко $x \in X$ и за която $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)=0$ за всяко $x \in X$, е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi_n=0$.

5.11.4. Предложение. *Ако $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е обобщено пространство на Даниел, всяка от тройките*

$$\langle X, \Phi, \int^{+} \rangle, \ \langle X, \Phi, \int^{-} \rangle, \ \langle X, \Phi, \left|\int\right| \rangle$$

е пространство на Даниел.

Доказателство. Единственото, което се нуждае от доказателство, е аксиомата за граничния преход под интеграла. Тъй като $\int^{-}$ е положителната част на функционала $-\int$, който очевидно е с ограничена вариация, можем да се ограничим с проверката на тази аксиома само за $\int^{+}$.

Нека за тази цел (11) е намаляваща редица от елементи на Φ, която клони към нула навсякъде в X. Да изберем положително число ε и да го фиксираме. След това за произволно $n=1, 2, \ldots$ да изберем функция $\psi_n \in \Phi$ с $0 \leqq \psi_n \leqq \varphi_n$ и

$$\int^{+} \varphi_n - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int \psi_n. \tag{12}$$

За да използуваме г), имаме нужда от още една намаляваща редица от елементи на Φ. Определяме я с

$$\omega_n=\inf(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n). \tag{13}$$

Тъй като редицата (11) е намаляваща и за всяко $x \in X$ стойността $\omega_n(x)$ е някое от числата $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, от неравенствата $0 \leqq \psi_i \leqq \varphi_i$ следва

$$0 \leqq \psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n-\omega_n \leqq \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{n-1}.$$

От тези неравенства, от определението на $\int^+$ и от (12) се получава

$$\sum_{i=1}^{n} \int \psi_i - \int \omega_n \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \int^+ \varphi_i < \sum_{i=1}^{n-1} \int \psi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^i}$$

и следователно

$$\int \psi_n < \int \omega_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^i},$$

което заедно с (12) дава

$$\int^+ \varphi_n < \int \omega_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} < \int \omega_n + \varepsilon. \tag{14}$$

От друга страна, редицата (13) намалява и клони към нула навсякъде в X. Ето защо от г) следва $\lim_{n\to\infty} \int \omega_n=0$, което заедно с (14) дава $\int^+ \varphi_n < 2\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. С това предложението е доказано.

Задача към пета глава

Пренебрежими множества

Задача 1. Да се докаже, че единственото пренебрежимо множество в пространствата на Даниел от примери 2.1 и 2.2 е празното.

Задача 2. Нека $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ е растяща функция и $\langle X, C([a, b]), \int \rangle$ е пространството на Даниел от пример 2.5. Тогава:

а) едноточковото множество $\{a\}$ е пренебрежимо точно когато функцията α е непрекъсната в точката a;

б) при $c \in (a, b)$ множеството $\{c\}$ е пренебрежимо точно когато $\alpha(c+0) - \alpha(c-0) = 0$;

в) един отворен интервал в $[a, b]$ е пренебрежим точно когато α е константа в този интервал.

Лебегови пространства

Задача 3. Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег и $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ е такава функция, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват функции $\varphi, \psi \in L$, за които са изпълнени еравенствата $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ почти навсякъде в X и $\|\psi-\varphi\| < \varepsilon$. Тогава $f \in L$.

Упътване. Приложете теоремата на Бепо Леви.

Задача 4. Нека $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. Да се докаже, че следващите три условия са еквивалентни:

а) Φ е пълно спрямо първата норма;

б) във Φ е изпълнена теоремата на Бепо Леви;

в) във Φ е изпълнена теоремата на Фату.

Задача 5. Нека $X = \mathbf{N}$ и Φ е линейното пространство на всички ограничени редици $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ от реални числа. За $\varphi \in \Phi$ нека $\int \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i}{2^i}$. Да се докаже, че тройката $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел със следните свойства:

а) във Φ е изпълнена теоремата на Лебег;

б) във Φ е изпълнена аксиомата е) от определението на пространство на Лебег (вж. § 8);

в) Φ не е пълно спрямо първата норма.

Задача 6 (суми на пространства на Лебег). Нека $\langle X_\gamma, L_\gamma, \int_\gamma \rangle_{\gamma \in \Gamma}$ е непразна фамилия от пространства на Лебег и множествата X_γ не се пресичат две по две. Нека $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$. Да означим с L съвкупността на функциите $\varphi : X \to \mathbf{R}$, за които всяка от рестрикциите $\varphi | X_\gamma$ е елемент на съответното L_γ, най-много изброимо много такива рестрикции са различни от нула и е изпълнено условието $\sum_{\gamma \in \Gamma} \int |\varphi | X_\gamma| < \infty$. Ако за произволно $\varphi \in L$ положим $\int \varphi = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma (\varphi | X_\gamma)$, така получената тройка $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. Да се опишат пренебрежимите множества в това пространство.

Функционали с ограничена вариация

Нека X е непразно множество и Φ е такова линейно пространство от реални функции, дефинирани в X, че от $\varphi \in \Phi$ следва $|\varphi| \in \Phi$. В съвкупността на линейните функционали във Φ ще въведем наредба, като за два такива функционала l_1 и l_2 ще положим $l_1 \leq l_2$ точно когато $l_1(\varphi) \leq l_2(\varphi)$ за всяко $\varphi \in \Phi$ с $\varphi \geqq 0$.

Задача 7. Нека l е функционал с ограничена вариация във Φ. Да се докаже, че:

а) l^+ е най-малката позитивна мажоранта на l;

б) l^- е най-малката позитивна мажоранта на $-l$;

в) $|l|$ е най-малката позитивна мажоранта на l и $-l$;

г) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $|l(\varphi)| \leq |l|(|\varphi|)$.

Упътване. в) Ако m е позитивна мажоранта на l и $-l$, то $\frac{1}{2}(m+l)$ е позитивна мажоранта на l, а $\frac{1}{2}(m-l)$ на $-l$.

г) Представете φ във вида $\varphi = \frac{1}{2}(|\varphi| + \varphi) - \frac{1}{2}(|\varphi| - \varphi)$.

Задача 8. Ако $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е обобщено пространство на Даниел и за $\varphi \in \Phi$ положим $\|\varphi\| = \left|\int\right|(|\varphi|)$, получаваме полунорма във Φ. Да се докаже, че линейният функционал $\int$ е непрекъснат спрямо тази полунорма.

Шеста глава

ЛЕБЕГОВИ РАЗШИРЕНИЯ

Лебеговите пространства са естествено място за действие на теорията на интеграла, но тяхната приложимост се дължи не само на добрите им свойства, а още на едно щастливо обстоятелство: също както нормираните пространства могат да се потопяват в банахови, така и пространствата на Даниел $\langle X, \Phi, \int \rangle$ могат да се попълват до лебегови. Сред тези лебегови разширения на Φ има едно L със същите пренебрежими множества, както Φ, и то е минимално в смисъл, че се съдържа във всички останали лебегови разширения на Φ. То се построява, като банаховото попълнение $\widehat{\Phi}$ на Φ се представи като съвкупност от функции. Почти цялата глава е посветена на тази конструкция.

В § 1 е въведено понятието лебегово разширение на пространство на Даниел и е формулирана основната теорема. Нейното доказателство е представено в § 1—9. В § 2 е дефинирано L и за него са проверени първите две аксиоми за пространство на Даниел. § 3 е основен за цялото доказателство: в него L е отъждествено с $\widehat{\Phi}$. В § 4 в L е въведен интеграл и е показана позитивността му. В § 5 L е снабдено с норма и е установена пълнотата на L. Параграф 6 съдържа едно важно за доказателството техническо свойство на растящите редици от елементи на L. В § 7 за L е проверена аксиомата за граничния преход под интеграла. В § 8 е показано, че пренебрежимите спрямо L множества са пренебрежими и спрямо Φ, а § 9 съдържа края на доказателството на основната теорема. В § 10 е приведено едно описание на всички лебегови разширения на Φ, а § 11 е посветен на теоремата на Фубини.

Аксиоматичният подход към интегрирането, развит в предишната глава, позволява изучаването на лебеговите разширения да става независимо от конкретната им конструкция: запознаването със съществуването им може да се отложи. Ето защо при първо четене може да се пропусне всичко с изключение на § 1, 2 и 11.

§ 6.1. ЛЕБЕГОВИ РАЗШИРЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВО НА ДАНИЕЛ

Вече видяхме, че ако в пространство на Даниел $\langle X, \Phi, \int \rangle$ отъждествим функциите, които съвпадат почти навсякъде, Φ става нормирано пространство спрямо първата норма

$$\|\varphi\|=\int|\varphi|.$$

Ето защо Φ притежава попълнение $\widehat{\Phi}$. В тази глава ще покажем, че $\widehat{\Phi}$ може да се реализира като пространство на Лебег. Следващото определение уточнява подробностите.

Едно пространство на Лебег $\langle X, L, \int \rangle$ се нарича *лебегово разширение* на $\langle X, \Phi, \int \rangle$, когато притежава следните три свойства:

а) Φ е линейно подпространство на L;

б) интегралът в L е продължение на интеграла във Φ;

в) всеки елемент на L е граница спрямо първата норма на редица от елементи на Φ.

Да отбележим изрично, че елементите на L от горната дефиниция са функции в същото множество X, в което са дефинирани и функциите от Φ. Задаването на лебегово разширение на Φ означава разширяване на класа на интегрируемите функции до по-широка съвкупност, в която са изпълнени теоремите на Бепо Леви, Лебег и Фату. Следва основната теорема на тази глава.

6.1.1. Теорема. *Всяко пространство на Даниел $\langle X, \Phi, \int \rangle$ притежава единствено лебегово разширение $\langle X, L, \int \rangle$, за което пренебрежимите спрямо L множества са пренебрежими и спрямо Φ. Разширението L е минимално, т. е. съдържа се във всички останали лебегови разширения на Φ.*

Доказателството на тази теорема е дълго и заема първите девет параграфа. Тук ще разгледаме само въпросите за единственост и минималност.

Трябва да покажем, че ако L и L_1 са лебегови разширения на Φ и пренебрежимите спрямо L множества са пренебрежими и спрямо Φ, то $L \subset L_1$.

Нека $f \in L$. Съгласно в) от дефиницията на лебегово разширение съществува редица

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

от елементи на Φ, за която

(2) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$$

по норма. Но тогава редицата (1) е фундаментална. От друга страна, L_1 е лебегово пространство и следователно е пълно. Ето защо съществува $f_1 \in L_1$, за което

(3) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f_1$$

по норма.

От (2), (3) и предложение 5.7.1 следва, че (1) притежава подредица

$$\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_k}, \dots,$$

за която е в сила

(4) $$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) = f(x)$$

почти навсякъде спрямо L и

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) = f_1(x)$$

почти навсякъде спрямо L_1.

По условие пренебрежимите спрямо L множества са пренебрежими и спрямо Ф. Но $\Phi \subset L_1$ и пренебрежимите множества спрямо Ф са пренебрежими и спрямо L_1. Ето защо (4) е изпълнено и почти навсякъде спрямо L_1. По този начин f съвпада почти навсякъде спрямо L_1 с f_1 и $f_1 \in L_1$. Тъй като L_1 е пространство на Лебег, то $f \in L_1$ и следователно $L \subset L_1$.

С това е показано, че всяко лебегово разширение L на Ф, пренебрежимите множества спрямо което са пренебрежими и спрямо Ф, се съдържа в другите лебегови разширения на Ф. По този начин е установена и единствеността на L.

§ 6.2. ДЕФИНИЦИЯ НА L И ПРОВЕРКА НА АКСИОМИТЕ а) И б) ОТ ОПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ПРОСТРАНСТВО НА ДАНИЕЛ

От доказателството на единствеността на L от предишния параграф се вижда, че ако L действително съществува, то трябва да се състои от функциите $f: X \to \mathbf{R}$, за които съществуват такива фундаментални редици

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

от елементи на Ф, че да е изпълнено равенството

(2) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

почти навсякъде в X.

Тук разполагаме само с едно пространство на Даниел — Ф. Ето защо разполагаме и само с едно понятие „почти навсякъде“ — онова спрямо Ф. Така ще бъде до § 7 включително: „почти навсякъде“ ще означава „почти навсякъде спрямо Ф“.

Функциите $f: X \to \mathbf{R}$, за които съществуват фундаментални редици (1) с (2), ще наричаме *сумируеми* и с L ще означаваме съвкупността на всички сумируеми функции.

Тъй като сборът на две фундаментални редици, както и произведението на фундаментална редица и скалар също са фундаментални редици, от тази дефиниция непосредствено следва, че L е линейно пространство.

От друга страна, всяка функция $\varphi \in \Phi$ е граница (навсякъде) на фундаменталната редица

$$\varphi, \varphi, \ldots, \varphi, \ldots$$

и свойството а) от дефиницията на лебегово разширение е проверено. Засега нямаме възможност да проверяваме свойствата б) и в) от тази дефиниция, понеже в L все още не сме въвели интеграл.

Да пристъпим сега към проверката на аксиомата а) от определението на пространство на Даниел (вж. § 5.1) Нека $f \in L$. Тогава съществува фундаментална редица (1) от елементи на Φ с (2). От очевидното неравенство

$$\big||\varphi_m| - |\varphi_n|\big| \leqq |\varphi_m - \varphi_n| \tag{3}$$

следва, че и редицата

$$|\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots, |\varphi_n|, \ldots$$

е фундаментална. Освен това от (2) следва $|f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n(x)|$ почти навсякъде. Ето защо и $|f| \in L$.

Да проверим и аксиомата на Стоун. За целта е достатъчно да се убедим, че ако редицата (1) е фундаментална, фундаментална е и редицата с общ член

$$\inf(1, \varphi_n). \tag{4}$$

Тъй като

$$\inf(1, \varphi) = \frac{1}{2}(1 + \varphi - |1 - \varphi|),$$

то

$$\inf(1, \varphi_m) - \inf(1, \varphi_n) = \frac{1}{2}(\varphi_m - \varphi_n + |1 - \varphi_n| - |1 - \varphi_m|),$$

което заедно с (3) дава

$$|\inf(1, \varphi_m) - \inf(1, \varphi_n)| \leqq |\varphi_m - \varphi_n|,$$

и фундаменталността на (4) е проверена. С това е проверена и аксиомата б) от определението на пространство на Даниел.

§ 6.3. ОТЪЖДЕСТВЯВАНЕ НА L С $\widehat{\Phi}$

Проверката на аксиомите в) и г) за пространство на Даниел за L изисква наличието на интеграл в L. Същото се отнася и до проверката на аксиомите б) и в) от определението на лебегово разширение. За да улесним и проверката на пълнотата на L, и въвеждането на интеграла в L, предварително ще установим наличието на естествена връзка между L и попълнението $\widehat{\Phi}$ на Φ.

Ако $f \in L$ и $F \in \widehat{\Phi}$, ще пишем

$$f \varepsilon F \tag{1}$$

и ще казваме, че функцията f е *подчинена* на елемента F, когато съществува фундаментална редица

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{2}$$

от елементи на Φ със следните две свойства:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = F \tag{3}$$

по норма във $\widehat{\Phi}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{4}$$

почти навсякъде в X.

Както е определена, подчинеността е релация между елементи на L и елементи на $\widehat{\Phi}$. Ще се убедим, че ако се условим да отъждествяваме съвпадащите почти навсякъде елементи на L, подчинеността става биекция между L и $\widehat{\Phi}$.

За целта най-напред ще се убедим, че *подчинеността е едно изображение от L към $\widehat{\Phi}$*, т. е. че за всяко $f \in L$ съществува единствено $F \in \widehat{\Phi}$ с $f \varepsilon F$. Нека $f \in L$. Съгласно дефиницията на L съществува фундаментална редица (2) от елементи на Φ с (4). Разбира се, от пълнотата на $\widehat{\Phi}$ следва, че редицата (2) е сходяща по норма във $\widehat{\Phi}$, т. е. съществува $F \in \widehat{\Phi}$ с (3). За това F очевидно е в сила $f \varepsilon F$. Сега да установим единствеността. Нека $f \in L$, $F \in \widehat{\Phi}$, $G \in \widehat{\Phi}$, $f \varepsilon F$ и $f \varepsilon G$. Тогава съществува фундаментална редица (2) с (3) и (4), а също и фундаментална редица

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

от елементи на Φ с

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = G \tag{5}$$

по норма във $\widehat{\Phi}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = f(x) \tag{6}$$

почти навсякъде в X. От (4) и (6) следва

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n(x) - \omega_n(x)) = 0$$

почти навсякъде и тъй като редицата $\varphi_n - \omega_n$ очевидно е фундаментална, от теорема 5.7.4 следва равенството

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n - \omega_n) = 0$$

по норма. Сега от (3) и (5) се вижда, че $F = G$. С това е показано, че подчинеността е изображение от L към $\widehat{\Phi}$.

Предстои да покажем, че *подчинеността е сюрективно изоб-*

ражение. Нека за целта $F \in \widehat{\Phi}$. Тъй като $\widehat{\Phi}$ е попълнение на Φ, съществува редица (2) от елементи на Φ с (3). От (3) следва, че редицата (2) е фундаментална, и по силата на лема 5.7.2 съществува подредица

$$(7) \qquad \varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}, \ldots$$

на (2), която е сходяща почти навсякъде в X. Нека $f: X \to \mathbf{R}$ е функция, за която е изпълнено равенството $f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x)$ за всяко $x \in X$, за което редицата (7) е сходяща. Очевидно $f \in L$ и $f \in F$. С това сюрективността на подчинеността е доказана.

Сега ще се убедим, че *подчинеността е инвариантна спрямо съвпадането почти навсякъде.* Нека $f \in L$, $g \in L$, $F \in \widehat{\Phi}$, $G \in \widehat{\Phi}$, $f \in F$ и $g \in G$, като при това е изпълнено равенството

$$(8) \qquad f(x) = g(x)$$

почти навсякъде в X. Тогава съществуват фундаментална редица (2) с (3) и (4) и фундаментална редица

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$$

от елементи на Φ с

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n = G$$

по норма във $\widehat{\Phi}$ и

$$(10) \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x)$$

почти навсякъде в X. От (4), (8) и (10) следва $\lim_{n\to\infty} (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) = 0$ почти навсякъде в X. Тъй като редицата $\{\varphi_n - \psi_n\}$ е и фундаментална, от теорема 5.7.4 следва и равенството $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n - \psi_n) = 0$ по норма. Сега от (3) и (9) следва $F = G$ и инвариантността е доказана.

Предстои да докажем, че *подчинеността е инективна, когато в L вместо равенство се разглежда съвпадане почти навсякъде:* Нека $f \in L$, $g \in L$, $F \in \widehat{\Phi}$, $f \in F$ и $g \in F$. Тогава съществуват фундаментална редица (2) с (3) и (4) и фундаментална редица

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

от елементи на Φ с

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = F$$

по норма във $\widehat{\Phi}$ и

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = g(x)$$

почти навсякъде в X. От (3) и (11) се получава $\lim_{n\to\infty} (\varphi_n - \sigma_n) = 0$ по норма и по предложение 5.7.1 съществува редица

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

от цели положителни числа с $\lim_{n\to\infty}(\varphi_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)) = 0$ почти навсякъде в X. От (4), (12) и последното равенство следва, че f и g съвпадат почти навсякъде. С това е установена и инективността на подчинеността.

Така се убедихме, че подчинеността е биекция между L и $\widehat{\Phi}$. Тъй като сборът на две фундаментални редици във Φ и произведението на фундаментална редица със скалар отново са фундаментални редици във Φ, от дефиницията на подчинеността следва, че тя запазва и линейните операции, т. е. от $f \in L$, $g \in L$, $F \in \widehat{\Phi}$, $G \in \widehat{\Phi}$, $f \varepsilon F$ и $g \varepsilon G$ следват

$$(f+g) \ \varepsilon\ (F+G) \text{ и } \lambda f \ \varepsilon\ \lambda F$$

за произволен скалар $\lambda \in \mathbf{R}$. По този начин ***подчинеността е линеен изоморфизъм между*** L ***и*** $\widehat{\Phi}$.

§ 6.4. ВЪВЕЖДАНЕ НА ИНТЕГРАЛ В L И ПРОВЕРКА НА АКСИОМАТА в) ОТ ОПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ПРОСТРАНСТВО НА ДАНИЕЛ

Вече знаем (вж. § 5.1), че интегралът $\int : \Phi \to \mathbf{R}$ е непрекъснат линеен функционал спрямо първата норма

$$\|\varphi\| = \int |\varphi| \qquad (\varphi \in \Phi).$$

Ето защо по теорема 4.3.1 той притежава единствено непрекъснато продължение

(1) $$\int : \widehat{\Phi} \to \mathbf{R}$$

и то е линеен функционал във $\widehat{\Phi}$.

Вече сме готови да въведем и интеграл в L. В предишния параграф видяхме, че за произволно $f \in L$ съществува единствено $F \in \widehat{\Phi}$ с $f \varepsilon F$. По определение полагаме $\int f = \int F$ и получаваме изображение $\int : L \to \mathbf{R}$. Тъй като подчинеността запазва линейните операции и (1) е линеен функционал, така въведеният интеграл в L също е линеен функционал.

Желателно е да разполагаме и с описание на този интеграл без преминаване през $\widehat{\Phi}$. Ще покажем, че *ако* $f \in L$ *и*

(2) $$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

е фундаментална редица от елементи на Φ *с*

(3) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

почти навсякъде в X, то

(4)
$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n.$$

Наистина поради пълнотата редицата (2) е сходяща във $\hat{\Phi}$. Нека $F = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$. Тогава $f \in F$ и следователно

$$\int f = \int F = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

съгласно непрекъснатостта на $\int$ във $\hat{\Phi}$. С това (4) е доказано.

Разбира се, от (4) следва, че интегралът в L е продължение на интеграла във Φ, с което е проверено и условието б) от дефиницията на лебегово разширение от § I.

От (4) почти непосредствено следва също така, че *интегралът в L е позитивен линеен функционал*. Наистина нека $f \in L$ и $f(x) \geqq 0$ почти навсякъде в X, а (2) е фундаментална редица от елементи на Φ с (3). Тогава и редицата

$$|\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots, |\varphi_n|, \ldots$$

е фундаментална и от (3) следва

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x)| = |f(x)| = f(x)$$

почти навсякъде в X. Ето защо

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| \geqq 0,$$

тъй като интегралът във Φ е позитивен линеен функционал. С това е проверена и аксиомата в) от определението на пространство на Даниел.

Ще отбележим изрично, че тук показахме малко повече от тази аксиома: именно убедихме се, че *за да бъде в сила неравенството $\int f \geqq 0$, е достатъчно да имаме $f(x) \geqq 0$ почти навсякъде.*

§ 6.5. НОРМА И ПЪЛНОТА НА L

Както е естествено да се очаква, за произволно $f \in L$ ще положим

(1)
$$\|f\| = \int |f|.$$

Да разгледаме единствения елемент F на $\hat{\Phi}$ с $f \in F$. Вече знаем, че съществува фундаментална редица

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

от елементи на Φ с $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = F$ по норма във $\hat{\Phi}$ и

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

почти навсякъде. Тогава от непрекъснатостта на нормата във $\hat{\hat{\Phi}}$ и от определението на интеграла в L следва

$$\|F\|=\lim_{n\to\infty}\int|\varphi_n|=\int|f|=\|f\|.$$

И така нормата на произволен елемент f на L съвпада с нормата на единствения елемент F на $\hat{\Phi}$, на който f е подчинен. Така виждаме, че подчинеността не само е линеен изоморфизъм между L и $\hat{\Phi}$, но запазва и нормите. Тъй като пространството $\hat{\Phi}$ е пълно, *пълно е и пространството L спрямо нормата* (1).

От (1) следва непосредствено, че *интегралът в L е непрекъснат линеен функционал спрямо нормата* (1). Също, ако $f\in L$ и $\|f\|=0$, то $\|F\|=0$ и $F=0$. Ето защо *от $\|f\|=0$ следва, че f е нула почти навсякъде в X.*

§ 6. 6. РАСТЯЩИ И НАМАЛЯВАЩИ РЕДИЦИ ОТ ЕЛЕМЕНТИ НА L

Тук ще разгледаме едно техническо свойство на растящите и намаляващите редици от елементи на L.

6. 6. 1. Лема. *Ако*

(1) $$f_1\leqq f_2\leqq\ldots\leqq f_n\leqq\ldots$$

е растяща почти навсякъде в X редица от елементи на L, $f\in L$ и е изпълнено

(2) $$\lim_{n\to\infty}f_n=f$$

по норма в L, то за всяко $n=1, 2,\ldots$ е в сила

(3) $$f_n(x)\leqq f(x)$$

почти навсякъде в X.

Доказателство. Най-напред ще установим, че

(4) $$\lim_{n\to\infty}\sup(f_n, f)=f$$

по норма. Наистина от равенството

$$\sup(f_n, f)=\frac{1}{2}(f_n+f+|f_n-f|)$$

непосредствено следва

$$|\sup(f_n, f)-f|\leqq|f_n-f|$$

и $\|\sup(f_n, f)-f\|\leqq\|f_n-f\|$, което доказва (4).

От (4) поради непрекъснатостта на интеграла спрямо нормата следва

(5) $$\lim_{n\to\infty}\int\sup(f_n, f)=\int f.$$

От друга страна, от (1) следва, че редицата с общ член $\sup(f_n, f)$ е също растяща. Ето защо от позитивността на интеграла се получава, че и редицата вляво на (5) е растяща, а това заедно с (5) дава

$$\int \sup(f_n, f) \leq \int f \tag{6}$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ От (6) следва

$$\| \sup(f_n, f) - f \| = \int (\sup(f_n, f) - f) \leq 0,$$

поради което $\sup(f_n, f) = f$ почти навсякъде. Все едно почти за всички $x \in X$ е в сила $\max(f_n(x), f(x)) = f(x)$ и (3) е доказано.

6. 6. 2. Следствие. *Ако*

$$f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_n \geqq \ldots$$

е намаляваща почти навсякъде в X редица от елементи на L и за $f \in L$ е в сила $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ по норма, за всяко $n=1, 2, \ldots$ имаме

$$f_n(x) \geqq f(x)$$

почти навсякъде в X.

§ 6. 7. ПРОВЕРКА НА АКСИОМАТА г) ОТ ОПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ПРОСТРАНСТВО НА ДАНИЕЛ

Нека

$$f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_n \geqq \ldots \tag{1}$$

е намаляваща редица от елементи на L с

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \tag{2}$$

за всяко $x \in X$. Трябва да се убедим, че тогава

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = 0. \tag{3}$$

От (1) и (2) следва $f_n(x) \geqq 0$ за всяко $n=1, 2, \ldots$ и за всяко $x \in X$. Ето защо $\int f_n \geqq 0$ за всяко $n=1, 2, \ldots$

От друга страна, от (1) следва, че редицата

$$\int f_1, \int f_2, \ldots, \int f_n, \ldots$$

е намаляваща и тъй като членовете ѝ са неотрицателни, тя е сходяща, а следователно и фундаментална. Сега, също както и в доказателството на теоремата на Бепо Леви (вж. § 5. 8), се убеждаваме, че и редицата (1) е фундаментална. От установената вече пълнота на L следва, че редицата (1) е сходяща в L. Нека f е функция от L с

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n. \tag{4}$$

От следствие 6.2 се получава $f_n(x) \geq f(x)$ почти навсякъде. Ето защо от (2) намираме $f(x) \leq 0$ почти навсякъде. От доказаната вече позитивност на интеграла в L следва $\int f \leq 0$, което заедно с (4) и непрекъснатостта на интеграла спрямо нормата показва, че

(5) $$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq 0.$$

Същевременно вече видяхме, че $\int f_n \geq 0$ за всяко $n=1, 2, \ldots$ Сега (3) се получава директно от (5) и проверката на аксиомата г) от определението на пространство на Даниел е завършена.

Тъй като в § 2 проверихме аксиомите а) и б), а в § 4 — аксиомата в) от определението на тези пространства, с това е показано, че *L е пространство на Даниел.*

§ 6.8. ПРЕНЕБРЕЖИМОСТ СПРЯМО L

Тук ще покажем, че *множество $A \subset X$ е пренебрежимо спрямо L точно когато е пренебрежимо спрямо* Φ.

Вече знаем, че $\Phi \subset L$ и че интегралът в L е продължение на интеграла във Φ (вж. § 4). Оттук непосредствено се получава, че всяко множество A в X, което е пренебрежимо спрямо Φ, е пренебрежимо и спрямо L.

Ще покажем, че е вярно и обратното. Нека множеството $A \subset X$ е пренебрежимо спрямо L. Тогава по определение съществуват растяща редица

(1) $$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots$$

от елементи на L и число C със следните две свойства:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ за всяко $x \in A$;

б) $\int f_n \leq C$ за всяко $n=1, 2, \ldots$

От неравенствата (1) и б) следва, че редицата (1) е фундаментална, и понеже L е пълно, тя е и сходяща спрямо първата норма. Нека f е елемент на L с

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

От лема 6.1 следва, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството

(2) $$f_n(x) \leq f(x)$$

почти навсякъде в X спрямо Φ. Нека B е такова пренебрежимо спрямо Φ множество, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ и за всяко $x \in X \setminus B$ да е в сила (2). От а) следва очевидно $A \subset B$. Ето защо и A е пренебрежимо спрямо Φ и твърдението е доказано.

§ 6.9. КРАЙ НА ДОКАЗАТЕЛСТВОТО НА ТЕОРЕМА 1.1

В § 7 видяхме, че L е пространство на Даниел, а освен това в § 5 отбелязахме, че L е пълно спрямо първата норма. Нека сега $f \in L$ и $g: X \to \mathbb{R}$ е функция, която почти навсякъде спрямо L съвпада с f. От доказаното в предишния параграф за пренебрежимите спрямо L множества следва, че g съвпада почти навсякъде спрямо Φ с f. Ето защо от определението на L от § 2 следва, че L *е пространство на Лебег* (за определението на последните вж. § 5.8).

В § 2 видяхме, че Φ е подпространство на L. В § 4 се убедихме, че интегралът в L е продължение на интеграла във Φ. Нека сега $f \in L$. По определение съществува фундаментална редица

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{1}$$

от елементи на Φ, за която $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ почти навсякъде. От теорема 5.7.4 следва, че (1) клони към f и по норма. С това са проверени и изискванията а), б) и в) от определението на лебегово разширение от § 1. Следователно L *е лебегово разширение на* Φ.

Тъй като в предишния параграф вече видяхме, че пренебрежимите множества спрямо L са пренебрежими и спрямо Φ, съществуването на лебегово разширение с описаните в теорема 1.1 свойства е установено. Тъй като единствеността и минималността бяха проверени в § 1, теорема 1.1 е доказана.

В общия случай съществуват много лебегови разширения на едно пространство на Даниел и построеното в предишните параграфи е минималното. Тъй като след отъждествяване на съвпадащите почти навсякъде функции всяко от тези разширения дава попълнението $\hat{\Phi}$ на Φ, на пръв поглед разликата между многобройните лебегови разширения на едно пространство на Даниел е несъществена. Така е например в $\mathbb{R}^n$, където минималното лебегово разширение е достатъчно за целите на анализа. Минималното лебегово разширение на пространството на Даниел, получено от инвариантното интегриране (вж. пример 5.2.9), се означава с $L(\mathbb{R}^n)$, а елементите му се наричат *сумируеми функции* в $\mathbb{R}^n$.

В други случаи, като например интегрирането в локално компактните пространства, минималното разширение е неудобно и затова там се работи с по-широка съвкупност от сумируеми функции. Нещата биха били оптимални, ако съществуваше максимално лебегово разширение, но това не е така в интересните случаи. С оглед на всичко това в следващия параграф ще се запознаем с едно описание на всички възможни лебегови разширения на едно пространство на Даниел.

Да кажем няколко думи и за аксиомата на Стоун. Единственото място, където тя бе използвана в тази и в предишната глава, бе § 2: там използувахме, че тя е изпълнена във Φ, за да си осигурим валидността ѝ за L. Следователно всичко в тези глави функционира и без нея, но ако не е валидна във Φ, няма гаранции, че тя ще бъде изпълнена в L. Въпреки това ролята ѝ е съществена и това ще стане ясно от следващите две глави (вж. зад. 16, гл. 8).

§ 6.10. ОПИСАНИЕ НА ВСИЧКИ ЛЕБЕГОВИ РАЗШИРЕНИЯ

Нека $\langle X, \Phi; \int\rangle$ е пространство на Даниел. Една съвкупност $\mathbf{N}$ от подмножества на X ще наричаме *система за пренебрегване*, когато притежава следните четири свойства: а) пренебрежимите спрямо Φ множества принадлежат и на $\mathbf{N}$; б) ако $A \in \mathbf{N}$ и $B \subset A$, то $B \in \mathbf{N}$; в) обединението на всяка изброима фамилия от елементи на $\mathbf{N}$ е елемент на $\mathbf{N}$; г) за всяка намаляваща редица

$$\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \ldots \geqq \varphi_n \geqq \ldots$$

от елементи на Φ и за всяко $A \in \mathbf{N}$, за които $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ за всяк $x \in X \setminus A$, да е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0$.

Най-прост пример за система за пренебрегване е съвкупността на пренебрежимите спрямо Φ подмножества на X. Това е най-малката система за пренебрегване. За да посочим друг пример, ще казваме, че едно множество $A \subset X$ е *неглективно*, когато за всяко $\varphi \in \Phi$ множеството $\{x \in X:\ \varphi(x) \neq 0\} \cap A$ е пренебрежимо. Съвкупността $\mathbf{N}_0$ на неглективните множества е система за пренебрегване.

По-общ пример се получава, като се разгледа произволно лебегово разширение L на Φ. С N_L да означим съвкупността на всички пренебрежими спрямо L подмножества на X. Свойствата а) — г) за N_L се проверяват непосредствено. Ето защо N_L е система за пренебрегване. Ще я наричаме *съответна* на L.

6.10.1. Предложение. *Нека L и M са лебегови разширения на Φ, а N_L и N_M — съответните им системи за пренебрегване. При тези предположения включването $L \subset M$ е изпълнено точно когато е налице включването $N_L \subset N_M$.*

Доказателство. Необходимостта, разбира се, е тривиална. Достатъчността се установява по същия начин, по който в § 1 доказахме минималността на построеното в предишните параграфи лебегово разширение.

От това предложение очевидно следва, че две лебегови разширения на Φ съвпадат точно когато съответните им системи за пренебрегване съвпадат. Така виждаме, че лебеговите разширения се определят от своите системи за пренебрегване. За да бъде картината пълна, трябва да посочим още кои системи за пренебрегване съответстват на лебегови разширения на Φ.

6.10.2. Предложение. *За всяка система $\mathbf{N}$ за пренебрегване съществува лебегово разширение L на Φ с $\mathbf{N} = N_L$.*

Доказателство. Нека L_0 е минималното лебегово разширение на Φ. Ще определим L като съвкупността на функциите g:

$X \to \mathbf{R}$, за всяка от които съществуват такава функция $f \in L_0$ и такова $A \in \mathbf{N}$, че да е в сила равенството $g(x)=f(x)$ за всяко $x \in X \setminus A$. Интеграла пък определяме с равенството

$$\int g = \int f.$$

Останалото е въпрос на проверки, които предоставяме на читателя.

Ето защо *лебеговите разширения на Φ са в биективно съответствие със съвкупността на системите за пренебрегване и това съответствие запазва наредбата. На системата $\mathbf{N}_0$ на неглективните множества съответствува по този начин едно лебегово разширение $L_{\mathbf{N}_0}$. То е най-малкото лебегово разширение на Φ, в което неглективните множества са пренебрежими.*

§ 6.11. ТЕОРЕМА НА ФУБИНИ

Тук ще се занимаваме с интегриране върху произведение на две множества и ще получим теорема, която удобно свежда пресмятането на интеграли върху произведение до интегриране върху отделните множители. Ще предполагаме, че са зададени две лебегови пространства

(1) $$\langle X,\ L_X,\ \int_X\rangle \text{ и } \langle Y,\ L_Y,\ \int_Y\rangle.$$

За произведението $X \times Y$ ще предполагаме, че там е зададено пространство на Даниел

(2) $$\langle X \times Y,\ \Phi,\ \iint_{X \times Y}\rangle,$$

за което са налице свойствата а), б) и в), формулирани по-долу.

Функциите φ от Φ са определени в произведението $X \times Y$, т. е. това са функции на две променливи. Разбира се, ако фиксираме коя да е от тях, φ става функция на другата променлива. Ето първото предположение:

а) ако $\varphi \in \Phi$ и фиксираме произволно първата променлива x в X, функцията $\varphi(x, y)$ на y принадлежи на L_Y.

Това предположение дава възможност за всяко фиксирано x да се образува интегралът $\int_Y \varphi(x, y)$. Той е число, което може и да се изменя, когато x се мени. Ако на произволно $x \in X$ съпоставим числото $\int_Y \varphi(x, y)$, получаваме функция, определена в X. Ще означаваме тази функция накратко с $\int_Y \varphi(x, y)$. Ето второто предположение:

б) За всяко $\varphi \in \Phi$ функцията

(3) $$\int_Y \varphi(x,\ y)$$

на x принадлежи на L_X.

След като функцията (3) е от L_X, тя може да бъде интегрирана в X. Ето и третото предположение:

в) За всяко $\varphi \in \Phi$ е изпълнено равенството

(4) $$\int_{X \times Y}\!\!\int \varphi = \int_X \left[\int_Y \varphi(x,\ y)\right].$$

Главното от тези предположения е в), а а) и б) са само технически изисквания, целещи да придадат смисъл на дясната страна на (4).

6. 11. 1. Пример. Нека m и n са цели положителни числа. В пространствата $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^{m+n}$ да разгледаме съответните съвкупности от финитни функции Φ_m, Φ_n и Φ_{m+n}, снабдени със съответните риманови интеграли, както в пример 5.2.9. Нека минималните лебегови разширения на Φ_m и Φ_n са съответно L_m и L_n. Тогава за L_m, L_n и Φ_{m+n} са изпълнени условията а), б) и в). Наистина, ако $\varphi(x,\ y)$ е финитна функция в $\mathbf{R}^{m+n}$ и фиксираме произволно $x \in \mathbf{R}^m$, функцията $\varphi\ (x,\ y)$ на y е даже финитна в $\mathbf{R}^n$. Аналогично интегралът $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x,y)\ dy$ е финитна функция на x. Равенството (4) пък е добре известно свойство на римановите интеграли. Други примери ще посочим в § 8.6.

6. 11. 2. Лема. *Нека* (1) *са две пространства на Лебег,* (2) *е пространство на Даниел и са изпълнени условията* а), б) *и* в), *формулирани по-горе. Тогава за всяко пренебрежимо в* $X \times Y$ *множество* $A \subset X \times Y$ *множествата*

(5) $$A(x) = \{y \in Y : (x,\ y) \in A\} \qquad (x \in X)$$

са пренебрежими в Y *почти за всички* $x \in X$.

Доказателство. Тъй като A е пренебрежимо в $X \times Y$, съществува редица

(6) $$0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \ldots \leqq \varphi_n \leqq \ldots$$

от функции от Φ, която е растяща и удовлетворява условията

(7) $$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x,\ y) = \infty$$

за всяко $(x,\ y) \in A$ и

(8) $$\int_X \left[\int_Y \varphi_n\ (x,\ y)\right] \leqq C$$

за подходящо число C и за всяко $n = 1,\ 2, \ldots$ (тук използувахме предположението (4)).

Да положим

(9) $$f_n(x)=\int\limits_Y \varphi_n(x, y).$$

Така за всяко $n=1, 2, \ldots$ получаваме по една функция f_n от L_X. Чрез интегриране на (6) се вижда, че така получената редица

(10) $$f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots \leqq f_n \leqq \ldots$$

е растяща. От друга страна, (8) показва, че е изпълнено неравенството

$$\int\limits_X f_n(x) \leqq C.$$

Така се убедихме, че редицата (10) от елементи на L_X има ограничени интеграли. Следователно множеството

(11) $$\Xi=\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\infty\}$$

е пренебрежимо съгласно теоремата на Бепо Леви.

Нека сега $x_0 \in X \setminus \Xi$. От (10) и (11) следва, че редицата

$$f_1(x_0) \leqq f_2(x_0) \leqq \ldots \leqq f_n(x_0) \leqq \ldots$$

е ограничена. Сега (9) показва, че при така фиксираното x_0 е ограничена редицата от интегралите на редицата от функции на y:

(12) $$\varphi_1(x_0, y) \leqq \varphi_2(x_0, y) \leqq \ldots \leqq \varphi_n(x_0, y) \leqq \ldots$$

Да разгледаме произволно $y \in A(x_0)$. Тогава $(x_0, y) \in A$ и съгласно (7) редицата (12) расте неограничено в точката (x_0, y). Така посочихме редица (12) от елементи на L_Y, която има ограничени интеграли и расте неограничено за всяко $y \in A(x_0)$. Следователно множеството $A(x_0)$ е пренебрежимо. С това лемата е доказана.

Следващата теорема показва, че направените предположения а), б) и в) за Φ запазват валидността си и за минималното лебегово разширение на Φ.

6.11.3. Теорема (Фубини). *Нека* (1) *са две пространства на Лебег и* (2) *е пространство на Даниел, за което са изпълнени условията* а), б) *и* в), *формулирани по-горе. Ако L е минималното лебегово разширение на* (2) *и $F \in L$, то за почти всички $x \in X$ функцията $F(x, y)$ на y принадлежи на L_Y. Ако за всяко такова x положим*

(13) $$f(x)=\int\limits_Y F(x, y),$$

получаваме функция f, дефинирана почти навсякъде в X. Ако додефинираме f произволно за останалите $x \in X$, то $f \in L_X$ и

(14) $$\int\limits_X f(x)=\int\limits_X\int\limits_Y F(x, y).$$

Доказателство. Тъй като функцията F принадлежи на минималното лебегово разширение L на Φ, съгласно определението на L от § 2 съществува фундаментална редица

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{15}$$

от функции от Φ, за която е изпълнено условието

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, y) = F(x, y) \tag{16}$$

почти навсякъде в $X \times Y$.

Да означим с A съвкупността на всички точки (x, y) от $X \times Y$, за които (16) не е налице. Тогава множеството A е пренебрежимо в $X \times Y$. По лема 2 съществува такова пренебрежимо множество Ξ в X, че за всяко $x \in X \setminus \Xi$ множеството

$$A(x) = \{y \in Y : (x, y) \in A\} \tag{5}$$

е пренебрежимо в Y.

Редицата (15) е фундаментална. Поради това чрез преминаване към подредици без ограничение на общността можем да предполагаме, че тя удовлетворява и по-силното условие

$$\iint\limits_{X \times Y} |\varphi_{n+1}(x, y) - \varphi_n(x, y)| \leqq \frac{1}{2^n} \tag{17}$$

за всяко $n = 1, 2, \ldots$

Да разгледаме безкрайния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_Y |\varphi_{n+1}(x, y) - \varphi_n(x, y)|. \tag{18}$$

Неговите членове са функции на x и принадлежат на L_X. От друга страна,

$$\int\limits_X \Big[\int\limits_Y |\varphi_{n+1} - \varphi_n|\Big] = \iint\limits_{X \times Y} |\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leqq \frac{1}{2^n} \tag{19}$$

съгласно (4) и (17). Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ е сходящ, редът от интегралите на (18) е сходящ съгласно (19). Но членовете на (18) са неотрицателни и към този ред е приложима теоремата на Бепо Леви. Според нея (18) е сходящ почти навсякъде в X.

Да означим с Ξ_1 съвкупността на всички $x \in X$, за които редът (18) е разходящ. Тогава Ξ_1 е пренебрежимо множество в X. Тъй като и построеното по-горе множество Ξ е пренебрежимо, множеството $X \setminus (\Xi \cup \Xi_1)$ съдържа почти всички точки на X. Да разгледаме сега произволно x с

$$x \in X \setminus (\Xi \cup \Xi_1).$$

Тогава $A(x)$ е пренебрежимо в Y и следователно равенството (16) е изпълнено почти за всички $y \in Y$. От друга страна, безкрайният ред (18) е сходящ при така фиксираното x, поради което редицата

$$\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y), \ldots$$

от функции на y е фундаментална в L_Y. Тъй като (16) е изпълнено почти навсякъде в Y и L_Y е лебегово пространство, функцията $F(x, y)$ на y също е от L_Y и е изпълнено равенството

$$\int_Y F(x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \varphi_n(x, y). \tag{20}$$

Така проверихме, че за почти всички $x \in X$ функцията $F(x, y)$ на y е сумируема в Y и е в сила (20).

Ако определим функцията f с (13), от (20) следва, че редицата

$$\int_Y \varphi_1(x, y), \quad \int_Y \varphi_2(x, y), \ldots, \quad \int_Y \varphi_n(x, y), \ldots \tag{21}$$

от функции на x почти навсякъде в X клони към $f(x)$. Тъй като $\varphi_n \in \Phi$, членовете на (21) са от L_X. Ето защо, за да покажем, че $f \in L_X$, е достатъчно да се убедим, че (21) е фундаментална редица в L_X. Но

$$\int_X \left| \int_Y \varphi_{n+1} - \int_Y \varphi_n \right| \leqq \int_X \left[\int_Y |\varphi_{n+1} - \varphi_n| \right] = \int\int_{X\times Y} |\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leqq \frac{1}{2^n}$$

съгласно (4) и (17) и редицата (21) наистина е фундаментална в L_X. Тогава $f \in L_X$ и

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X \left[\int_Y \varphi_n \right] = \lim_{n\to\infty} \int\int_{X\times Y} \varphi_n = \int\int_{X\times Y} F$$

съгласно (4), (16) и фундаменталността на (15) в L. С това теоремата е доказана.

Равенството (14) от тази теорема се записва още така:

$$\int\int_{X\times Y} F(x,y) = \int_X \left[\int_Y F(x, y) \right],$$

или пък

$$\int\int_{X\times Y} F(x,y)\, dxdy = \int_X \left[\int_Y F(x, y)\, dy \right] dx.$$

Съществуването на дясната страна се гарантира от съществуването на лявата, т. е. от $F \in L$.

Задачи към шеста глава

Риманов и лебегов интеграл в R

Задача 1. Ако функцията $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема в риманов смисъл, тя е сумируема в $[a, b]$ (принадлежи на минималното лебегово разширение L ($[a, b]$) на C ($[a, b]$), снабдено с римановия интеграл) и римановият интеграл на f съвпада с лебеговия.

Упътване. Сведете към зад. 3, гл. 5.

Задача 2. Ако Δ е интервал и римановият интеграл $\int\limits_{\Delta} f$ е абсолютно сходящ, то f е сумируема в Δ и $\int\limits_{\Delta} f$ съвпада с лебеговия интеграл на f.

Упътване. Послужете си с теоремите на Бепо Леви и Лебег.

Задача 3. Нека $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, съдържаща всички рационални числа от интервала $[0, 1]$, и

$$U=(0,1)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n-\frac{1}{2^{n+2}},\ r_n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)\right).$$

Да се докаже, че функцията $\chi_U:[0,1]\to\mathbf{R}$, определена с $\chi_U(x)=1$ при $x\in U$ и $\chi_U(x)=0$ при $x\notin U$, е интегрируема в лебегов смисъл, но не съществува функция $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, която да е интегрируема в риманов смисъл и почти навсякъде да съвпада с χ_U.

Упътване. Ако такава функция f съществува, множеството $\{x:f(x)=1\}$ би било гъсто в $[0, 1]$. Ето защо бихме имали

$$\int_0^1\chi_U=(L)\int_0^1 f=(R)\int_0^1 f=\underline{\int_0^1} f=1.$$

От друга страна, разгледайте функциите $\chi_n:[0,1]\to\mathbf{R}$, определени с $\chi_n(x)=1$ при $|x-r_n|<\frac{1}{2^{n+2}}$ и $\chi_n(x)=0$ при $|x-r_n|\geq\frac{1}{2^{n+2}}$. Сега с помощта на теоремата на Бепо Леви установете, че функцията $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_n$ е сумируема. Като си послужите с неравенството $\chi_U\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_n$ и с теоремата на Лебег, убедете се, че и χ_U е сумируема и че е в сила неравенството

$$\int_0^1\chi_U\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\chi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Лебегови разширения

Задача 4. Нека $\langle X, L, \int\rangle$ е пространство на Лебег. Да се докаже, че една съвкупност $\mathbf{N}$ от подмножества на X е система за пренебрегване точно когато удовлетворява условията а), б), в) от § 10 и за всяка функция $f\in L$, за която $\{x\in X:f(x)\neq 0\}\in\mathbf{N}$, е в сила $\int f=0$.

Задача 5. Нека Ξ е такова подмножество на X, че за всяко $f\in L$, за което $\{x\in X:f(x)\neq 0\}\subset\Xi$, е в сила $\int f=0$. Да се докаже, че съвкупността $\mathbf{N}$ на обединенията от вида $A\cup B$, където A е пренебрежимо множество и $B\subset\Xi$, е система за пренебрегване.

Теорема на Фубини

Задача 6. Да се докаже, че:

а) при наличието на *континуум хипотезата* (мощността на континуума е най-малката неизброима мощност) в $[0, 1]$ съществува такава добра наредба $\prec$, че за всяко $x \in [0, 1]$ множеството $\{y \in [0, 1] : y \preceq x\}$ да е най-много изброимо;

б) множеството A на точките $(x, y) \in [0, 1]^2$, за които $y \preceq x$, не е пренебрежимо спрямо $L([0, 1])^2$.

Упътване. а) Приложете теоремата на Цермело. б) Разгледайте функцията $\varphi : [0, 1]^2 \to \mathbf{R}$, за която $\varphi(x, y) = 1$ при $x \prec y$ и $\varphi(x, y) = 0$ в противен случай. Като допуснете, че A е пренебрежимо, покажете, че φ е сумируема, и извлечете равенствата

$$1 = \iint\limits_{[0,1]^2} \varphi(x, y) \quad dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \varphi(x, \quad y)\; dx \right] dy = \int_0^1 0 dy = 0,$$

за да получите противоречие.

Задача 7. Да се докаже, че съвкупността на множествата A в $\mathbf{R}^2$, за които $A(x)$ е пренебрежимо в $\mathbf{R}$ почти за всички $x \in \mathbf{R}$, е система за пренебрегване в $\mathbf{R}^2$.

Седма глава

ИЗМЕРИМИ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА

Нека $\langle X, L, \int\rangle$ е лебегово пространство. Функциите в X, които след изрязване отгоре и отдолу със сумируеми функции винаги дават сумируеми функции — измеримите функции, — играят определена роля при интегрирането и заслужават специално внимание: от една страна, те лесно водят до сумируеми функции, от друга — съвкупността им е устойчива спрямо срещаните на практика операции над крайни съвкупности от функции и спрямо изброими гранични преходи, а, от трета — тази съвкупност е широка. При интегриране в $\mathbf{R}^m$ те се оказват добре свързани с по-тясната съвкупност на бореловите функции в $\mathbf{R}^m$. Чрез измеримите функции се въвеждат измерими множества в X, а бореловите функции водят до бореловите множества в $\mathbf{R}^m$. Бореловите функции и множества са тъкмо нещата, с които по принцип борави класическият анализ: този малко мъгляв термин означава онова, което математиците правят в $\mathbf{R}^m$, без особено да използуват аксиомата за избора, а студентите добиват представа за въпросния предмет в първите няколко семестъра.

В § 1 и 2 са въведени съответно измеримите функции и множества. Те са тясно свързани и това дава възможност в § 3 да покажем, че непрекъснатата функция от измерими функции е отново измерима. В § 4 и 5 свойствата на измеримите функции са използувани при интегрирането на комплексни функции, водещо в крайна сметка до интересни комплексни пространства. В § 6 е показано, че може да се интегрира не само в цялото X, а и в произволно измеримо подмножество на X, като отново се получава лебегово пространство. Параграфи 7 и 8 са посветени на аналогичната теория на бореловите функции и множества в $\mathbf{R}^m$. В § 9 е показано, че при всички възможни начини за интегриране в $\mathbf{R}^m$ измеримите функции и множества са, грубо казано, едни и същи: именно те в определен смисъл се покриват с бореловите. С други думи, интегрирането обхваща онова от $\mathbf{R}^m$, което по принцип срещаме в класическия анализ.

Задължителни при първо четене са § 1—6.

Нека $\langle X, L, \int\rangle$ е пространство на Лебег. Една функция $f: X \to \mathbf{R}$ се нарича *измерима*, когато за всяка неотрицателна функция $g \in L$ функцията

(1) $$\sup(-g, \inf(g, f))$$

е сумируема, т. е. принадлежи на L.

Тъй като при $f, g \in L$ функцията (1) очевидно принадлежи на L, *елементите на L са измерими функции*. Наред с тях обаче в общия случай съществуват и много други измерими функции. Така например *константата 1 е винаги измерима*. По същество това е аксиомата на Стоун. Наистина при $f=1$ функцията (1) съвпада с функцията $\inf(g, 1)$, която принадлежи на L съгласно аксиомата на Стоун. Следващото предложение дава възможност да се строят и други примери.

7.1.1. Предложение. *Ако*

(2) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е редица от измерими функции, която е сходяща почти навсякъде и $f: X \to \mathbf{R}$ е функция, за която е изпълнено равенството

(3) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

почти навсякъде, функцията f също е измерима.

Доказателство. Нека $g \in L$ и $g \geq 0$. Тогава по дефиниция

(4) $$\sup(-g, \inf(g, f_n)) \in L$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ Поради (3) редицата от функции (4) клони почти навсякъде към функцията (1). Същевременно g е сумируема мажоранта за редицата (4). Сега теоремата на Лебег (вж. § 5.9) показва, че функцията (1) е сумируема и предложението е доказано.

Тривиално следствие от това предложение е, че всяка функция, която почти навсякъде съвпада с измерима функция, също е измерима. То показва още обаче, че и *всяка функция, която почти навсякъде е граница на редица от сумируеми функции, е измерима*.

На практика класът на измеримите функции е толкова широк, че обхваща всички функции, с които анализът работи. Съществуването на неизмерими функции в $\mathbf{R}^n$ се установява с помощта на аксиомата за избора. Не бива да се мисли, че в общия случай всяка измерима функция е граница на редица от сумируеми функции.

Следващото предложение посочва удобно необходимо и достатъчно условие за измеримост на функция.

7.1.2. Предложение. *Една функция $f: X \to \mathbf{R}$ е измерима точно когато за всяка сумируема функция g съществува редица*

(5) $$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$$

от сумируеми функции, за която е изпълнено

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x) \tag{6}$$

за всички $x \in X$ с $g(x) \neq 0$.

Доказателство. Нека най-напред f е измерима. Тогава по силата на дефиницията всяка от функциите

$$g_n=\sup\ (-n\ |g|,\ \inf\ (n\ |g|,\ f))$$

($n=1$ 2, ...) е сумируема, а проверката на (6) е директна. С това е доказана необходимостта.

Нека сега за всяко $g \in L$ съществува редица (5) с (6). Да изберем $g \in L$ с $g \geqq 0$ и да положим

$$h_n=\sup\ (-g,\ \inf\ (g,\ g_n))$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ Така получаваме редица

$$h_1,\ h_2, \ldots, h_n, \ldots \tag{7}$$

от сумируеми функции, за които функцията g е сумируема мажоранта. От друга страна, поради (6) функцията (1) е граница на редицата (7). Ето защо теоремата на Лебег показва, че функцията (1) е сумируема. С това предложението е доказано.

Съвкупността на измеримите функции спрямо едно лебегово пространство $\langle X,\ L,\ \int\rangle$ ще означаваме с M. От предложение 2 почти непосредствено се получава, че *M е линейно пространство спрямо обичайното събиране и умножение със скалари*. Поради това *M съдържа константите*. В § 3 ще се убедим, че M е и алгебра, т. е. заедно с всеки два свои елемента съдържа и произведението им.

Също както и пространствата на Даниел, *M притежава и свойството заедно с всеки свой елемент f да съдържа и модула му $|f|$*. Наистина, ако $g \in L$ и $g \geqq 0$, функцията

$$\sup\ (-g,\ \inf\ (g,\ |f|))$$

съвпада, както това се проверява незабавно, с модула на функцията (1) и поради това е сумируема. Следователно $|f| \in M$.

От това свойство, разбира се, незабавно следва, че ако $f \in M$ и $g \in M$, то и $\sup\ (f,\ g) \in M$, $\inf\ (f,\ g) \in M$.

§ 7.2. ИЗМЕРИМИ МНОЖЕСТВА

Нека $\langle X,\ L,\ \int\rangle$ е пространство на Лебег. Ако $A \subset X$, *характеристичната функция* $\chi_A : X \to \mathbf{R}$ на A се дефинира с равенствата: $\chi_A(x)=1$ при $x \in A$ и $\chi_A(x)=0$ при $x \in X \setminus A$. Характеристичната функция на A определя напълно A и по този начин разглеждането на подмножества на X се свежда до работа с функции.

Едно подмножество A на X се нарича *измеримо,* когато характеристичната му функция е измерима.

Разбира се, $\chi_\emptyset$ е константата 0, а χ_X — константата 1 и поради това *$\emptyset$ и X са измерими*. Също така

$$\chi_{X\setminus A}=1-\chi_A$$

и поради това A е измеримо точно когато $X\setminus A$ е измеримо.

Нека A и B са измерими множества в X. Очевидно

$$\chi_{A\cup B}=\sup(\chi_A,\ \chi_B) \text{ и } \chi_{A\cap B}=\inf(\chi_A,\ \chi_B).$$

Сега от свойствата на измеримите функции следва, че $\chi_{A\cup B}$ и $\chi_{A\cap B}$ са измерими. Следователно измерими са и множествата $A\cup B$ и $A\cap B$. Оттук с индукция незабавно следва, че обединението и сечението на краен брой измерими множества също са измерими.

Тъй като съвкупността на измеримите функции е затворена спрямо изброими гранични преходи, това твърдение може да се усили. Именно *ако*

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n,\ \dots$$

е редица от измерими множества, сечението $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и обединението $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ също са измерими. Наистина нека

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ и } B=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогава

$$\chi_A=\lim_{n\to\infty} \chi_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n},$$

$$\chi_B=\lim_{n\to\infty} \chi_{A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n}$$

и следователно χ_A и χ_B са измерими. С това твърдението е доказано.

Така виждаме, че с измеримите множества може свободно да се работи без опасност да се напусне техният клас. Но от казаното дотук не е ясно дали те са достатъчно много. Следващата теорема показва, че измеримите множества са достатъчни поне за да се опишат измеримите функции, и това, както ще видим в следващия параграф, е от основна важност за теорията на самите измерими функции. В доказателството на тази теорема се използува аксиомата на Стоун (къде?).

7.2.1. Теорема. *За произволна функция $f: X\to \mathbf{R}$ следващите пет условия са еквивалентни:*

а) *функцията f е измерима;*

б) *за всяко $a\in\mathbf{R}$ множеството $\{x\in X: f(x)\geqq a\}$ е измеримо;*

в) *за всяко $a\in\mathbf{R}$ множеството $\{x\in X: f(x)>a\}$ е измеримо;*

г) *за всяко $a\in\mathbf{R}$ множеството $\{x\in X: f(x)<a\}$ е измеримо;*

д) *за всяко $a\in\mathbf{R}$ множеството $\{x\in X: f(x)\leqq a\}$ е измеримо.*

Доказателство. Еквивалентността на б) — д) е почти очевидна. Наистина б) и г) са еквивалентни, понеже фигуриращите в тези условия множества са взаимно допълнителни. Същото се отнася до в) и д). Еквивалентността на б) и в) следва от равенствата

$$\{x\in X: f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X: f(x)\geqq a+\frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x\in X: f(x)\geqq a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X: f(x)>a-\frac{1}{n}\right\},$$

тъй като обединението и сечението на изброимо много измерими множества са измерими.

Сега ще установим импликацията а) $\Longrightarrow$ в). Тъй като

$$\{x\in X: f(x)>a\}=\{x\in X: f(x)-a>0\}$$

и функциите f и $f-a$ са едновременно измерими, въпросната импликация ще бъде установена, ако при а) докажем в) в специалния случай $a=0$. Да определим функцията $f^+: X\to \mathbf{R}$ с равенствата: $f^+(x)=f(x)$ при $f(x)>0$ и $f^+(x)=0$ при $f(x)\leqq 0$. Очевидно $f^+=\sup(f, 0)$, поради което f^+ е измерима. От друга страна, характеристичната функция на множеството $\{x\in X: f(x)>0\}$ очевидно съвпада с границата $\liminf\limits_{n\to\infty}(n f^+, 1)$, която е измерима като граница на редица от измерими функции.

Накрая ще покажем, че от б) и г) следва а). Да изберем по произволен начин числото $n=1, 2, \ldots$ и за произволно цяло k да положим

(1) $$A_k=\left\{x\in X: \frac{k}{n}\leqq f(x)<\frac{k+1}{n}\right\}.$$

Като сечение на измеримите множества

$$\left\{x\in X: f(x)\geqq\frac{k}{n}\right\} \text{ и } \left\{x\in X: f(x)<\frac{k+1}{n}\right\}$$

множеството A_k очевидно е измеримо. Ето защо измерима е и характеристичната му функция χ_{A_k}. Да разгледаме безкрайния ред

(2) $$f_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}\chi_{A_k}.$$

Тъй като множествата (1) покриват X и нямат общи точки две по две, за всяко $x\in X$ най-много един от членовете на реда (2) е различен от нула. Ето защо този ред е сходящ за всяко $x\in X$. Като граница на редица от сумируеми функции сумата му f_n е измерима. Същевременно за всяко $x\in X$ е изпълнено неравенството

(3) $$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}.$$

Наистина за всяко $x\in X$ съществува единствено цяло k с $\frac{k}{n}\leqq f(x)<\frac{k+1}{n}$. Тъй като тогава сумата на реда (2) е $\frac{k}{n}$, (3) очевидно е изпълнено за това x. От (3) следва

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x\in X),$$

поради което f е граница на редица от измерими функции. Ето защо функцията f е измерима и теоремата е доказана.

Ще отбележим, че построението от последния абзац на това доказателство се използува и в други случаи.

§ 7.3. ЕДНО ПРИЛОЖЕНИЕ НА ИЗМЕРИМИТЕ МНОЖЕСТВА

Тук ще посочим някои свойства на измеримите функции, които следват от теорема 2.1. Следващото предложение установява, че измеримите функции образуват алгебра.

7.3.1. Предложение. *За всеки две измерими функции f и g произведението fg също е измерима функция.*

Доказателство. Първо ще покажем, че квадратът f^2 на всяка измерима функция също е измерима функция. Съгласно теорема 2.1 за целта е достатъчно да покажем, че за всяко $a\in \mathrm{R}$ множеството

$$\{x\in X : f^2(x)<a\} \tag{1}$$

е измеримо. При $a\leqq 0$ то е празното множество и това твърдение е очевидно. При $a>0$ пък имаме

$$\{x\in X : f^2(x)<a\}$$

$$=\{x\in X : f(x)<\sqrt{a}\}\cap\{x\in X : f(x)>-\sqrt{a}\}.$$

Тъй като функцията f по условие е измерима, измерими са и множествата вдясно на това равенство. Ето защо множеството (1) е измеримо като сечение на две измерими множества. С това е показано, че f^2 е измерима функция.

Измеримостта на fg вече следва от очевидното равенство

$$fg=\frac{1}{4}(f+g)^2-\frac{1}{4}(f-g)^2.$$

С това предложението е доказано.

От това предложение и от теоремата на Вайерщрас — Стоун следва, че над измеримите функции свободно могат да се извършват разнообразни операции и в резултат се получават все измерими функции. За да формулираме този резултат, имаме нужда от едно понятие.

Едно множество в R^n се нарича *F_σ-множество,* когато е обединение на изброимо много затворени подмножества на R^n. F_σ-множествата са разпространено явление в R^n. Така например затворените подмножества на R^n са очевидно и F_σ-множества. Читателят ще съобрази, че отворените множества в R^n също са F_σ. Обединението на изброимо много и сечението на краен брой F_σ-множества са F_σ. Ясно е също, че всяко F_σ-множество е обединение на изброимо много компактни подмножества на R^n.

7.3.2. Теорема. *Нека C е F_σ-множество в R^n и $F: C\to \mathrm{R}$ е произволна непрекъсната функция. Тогава за всяка n-орка* *от измерими функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *в* X, *за която е изпълнено условието*

(2) $$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \in C$$

за всяко $x \in X$, *функцията* $f: X \to \mathbf{R}$, *определена с равенството*

(3) $$f(x) = F\ (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

за всяко $x \in X$, *също е измерима.*

Доказателство. Съгласно условието C може да се представи във вида

(4) $$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k,$$

където C_k са компактни подмножества на $\mathbf{R}^n$. По теоремата на Вайерщрас — Стоун за всяко $k = 1, 2, \ldots$ съществува полином $P_k: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, за който е изпълнено неравенството

(5) $$|P_k\ (\xi) - F\ (\xi)| < \frac{1}{k}$$

за всяко $\xi \in C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$. Да положим

(6) $$g_k(x) = P_k\ (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

за всяко $x \in X$. Така за всяко цяло положително k получаваме функция $g_k: X \to \mathbf{R}$.

Но измеримите функции образуват линейно пространство, което съдържа константите съгласно § 1. Същевременно произведението на всеки две измерими функции е измерима функция съгласно предложение 1. Ето защо и всеки полином от краен брой измерими функции е измерима функция. Следователно функцията (6) е измерима.

От друга страна, от определението (3) на f, от (5) и от (6) следва

(7) $$|g_k(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

за всяко $x \in X$, за което

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \in \bigcup_{i=1}^{k} C_i.$$

Сега от (4) се получава, че за всяко $x \in X$ числото $f(x)$ е граница на редицата

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x), \ldots,$$

и теоремата следва от предложение 1.1

Да отбележим едно очевидно следствие от тази теорема, е нейно усилване. Условието (2) може да е изпълнено само навсякъде в X и $f: X \to \mathbf{R}$ да е такава функция, че (3) да е налиц отново почти навсякъде. При това заключението за измеримост f отново остава в сила.

От тази теорема може да се съди за измеримостта на много функции. Така например читателят ще провери, че на две измерими функции е измерима функция, стига да е различен от нула почти навсякъде. Също така за всяка измерима функция f и за всяко число $p>0$ функцията $|f|^p$ е измерима. Тези две следствия се получават почти директно и от теорема 2.1.

§ 7.4. КОМПЛЕКСНИ ИЗМЕРИМИ ФУНКЦИИ

Всяка функция $f: X \to \mathbf{C}$, където $\mathbf{C}$ е равнината на комплексните числа, може да се представи във вида

$$f=f_1+\mathrm{i}\, f_2, \tag{1}$$

където i е имагинерната единица, а f_1 и f_2 са реални функции. Представянето (1) очевидно е единствено. f_1 и f_2 се наричат съответно *реална* и *имагинерна* част на f. Функцията f се нарича *измерима*, когато са измерими реалната и имагинерната част на f.

Ако функцията f е измерима, измерим е и нейният модул $|f|$. Наистина

$$|f|=\sqrt{f_1^2+f_2^2}$$

и твърдението следва от теорема 3.2.

Още по-просто в този случай се пренасят и всички свойства на реалните измерими функции от § 1 и 3.

§ 7.5. ИНТЕГРИРАНЕ НА КОМПЛЕКСНИ ФУНКЦИИ

Нека отново $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. Да означим с $L\mathrm{c}$ съвкупността на всички функции от вида

$$f=f_1+\mathrm{i}\, f_2, \tag{1}$$

където f_1 и f_2 пробягват L. Така получените комплексни функции се наричат *сумируеми*. Поради единствеността на представянето (1) равенството

$$\int f=\int f_1+\mathrm{i}\int f_2 \tag{2}$$

коректно определя интегриране в $L\mathrm{c}$.

Разбира се, $L\mathrm{c}$ е комплексно линейно пространство. Ще покажем, че ***интегралът е комплексен линеен функционал в*** $L\mathrm{c}$. Адитивността е очевидна. Очевидна е и хомогенността при умножение с реални скалари. От нея и от определението (2) почти непосредствено следва и хомогенността при умножение с комплексни скалари. Наистина нека $a=a_1+\mathrm{i}\, a_2$ е комплексен скалар. Тогава

$$\int af=\int\left[(a_1 f_1-a_2 f_2)+\mathrm{i}\,(a_1 f_2+a_2 f_1)\right]$$
$$=a_1\int f_1-a_2\int f_2+\mathrm{i}\, a_1\int f_2+\mathrm{i}\, a_2\int f_1$$

$$=(a_1+i\ a_2)\left(\int f_1+i\int f_2\right)=a\int f$$

и твърдението е доказано.

Следващото предложение звучи съвсем обичайно.

7.5.1. Предложение. *За всяка сумируема функция* $f: X \to \mathbf{C}$ *функцията* $|f|$ *също е сумируема и е изпълнено неравенството*

$$\left|\int f\right| \leqq \int |f|. \tag{3}$$

Доказателство. Нека f има представянето (1). Тогава

$$|f|=\sqrt{f_1^2+f_2^2} \tag{4}$$

и, както вече видяхме в предишния параграф, $|f|$ е измерима функция. От (4) се получава още

$$|f| \leqq |f_1|+|f_2|, \tag{5}$$

където функцията $|f_1|+|f_2|$ принадлежи на L. Тъй като $|f|$ е измерима, функцията

$$\sup\ (-|f_1|-|f_2|,\ \inf\ (|f_1|+|f_2|,\ |f|))$$

трябва да е сумируема съгласно определението на измерима функция от § 1. Но съгласно (5) тази функция съвпада с $|f|$ и по този начин е показано, че $|f| \in L$.

Сега ще докажем неравенството (3). Нека за целта σ е комплексно число, за което $|\sigma|=1$ и

$$\left|\int f\right|=\sigma\int f.$$

Тогава

$$\left|\int f\right|=\int \sigma f=\int \operatorname{Re}\sigma f \leqq \int |\operatorname{Re}\sigma f| \tag{6}$$

съгласно (2), тъй като числото в лявата страна е реално. Но

$$|\operatorname{Re}\sigma f| \leqq |\sigma f|=|\sigma|\ |f|=|f|$$

и (3) следва от (6). С това предложението е доказано.

Също както и в реалния случай, на два елемента на Lc се гледа като на несъществено различни, когато съвпадат почти навсякъде. С равенството

$$\|f\|=\int |f|$$

за произволно $f \in Lc$ в Lc се определя норма. От пълнотата на L непосредствено следва, че и Lc е пълно. Ето защо *така построеното* Lc *е комплексно банахово пространство.*

В Lc се работи със същото удобство, както и в L. По-специално в Lc непосредствено се пренасят теоремите на Лебег и Фату от пета глава.

Ще отбележим изрично още едно свойство на Lc, което въпреки простотата си често е полезно. Предложение 1 показва, че за всяка функция $f \in Lc$ съществува сумируема мажоранта, т. е. неотрицателна функция $g \in L$, за която е изпълнено неравенството $|f(x)| \leqq g(x)$ за всяко $x \in X$. Любопитно е, че и от наличието на сумируема мажоранта в определен смисъл следва сумируемост.

7.5.2. Предложение. *Нека $f : X \to \mathbf{C}$ е измерима функция и $g \in L$ е неотрицателна функция, за която е изпълнено неравенството $|f(x)| \leqq g(x)$ почти навсякъде в X. Тогава функцията f е сумируема.*

Доказателство. Ако f има представянето (1), от условието на предложението следват неравенствата

$$|f_1| \leqq g \quad \text{и} \quad |f_2| \leqq g.$$

Но тогава

$$f_1 = \sup(-g, \ \inf(g, f_1))$$

и тъй като f_1 е измерима, от определението в § 1 следва, че f_1 е сумируема. Аналогично и f_2 е сумируема. Ето защо $f \in Lc$ и предложението е доказано.

§ 7.6. ИНТЕГРИРАНЕ ВЪРХУ ИЗМЕРИМИ МНОЖЕСТВА

Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. Ще покажем по какъв начин за всяко измеримо множество Y в X може да се въведе интегриране в Y, така че Y да стане пространство на Лебег.

На произволна функция $f : Y \to \mathbf{R}$ ще съпоставим функцията $\widetilde{f} : X \to \mathbf{R}$, определена с равенствата $\widetilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in Y$ и $\widetilde{f}(x) = 0$ при $x \in X \setminus Y$. Ще наричаме $\widetilde{f}$ *стандартно продължение* на f. Съответствието, което на f съпоставя $\widetilde{f}$ (*стандартното съответствие*), очевидно е линейно.

С L_Y ще означаваме съвкупността на всички функции $f : Y \to \mathbf{R}$, за които $\widetilde{f} \in L$. Очевидно L_Y е линейно пространство. При това от $f \in L_Y$ очевидно следва $|f| \in L_Y$ и $\inf(f, 1) \in L_Y$. Така се убедихме, че L_Y удовлетворява първите две аксиоми от определението на пространство на Даниел.

С помощта на равенството

$$\int_Y f = \int_X \widetilde{f}$$

определяме интеграл за всяко $f \in L_Y$. Така дефинираният интеграл $\int : L_Y \to \mathbf{R}$ очевидно е позитивен линеен функционал. Той удовлетворява и аксиомата за граничен преход под интеграла от определението на пространство на Даниел. Наистина нека

$$f_1 \geqq f_2 \geqq \ \ldots \geqq f_n \geqq \ldots$$

е намаляваща редица от елементи на L_Y с $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ за всяко $x \in Y$. Тогава редицата

$$\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \ldots, \widetilde{f_n}, \ldots$$

очевидно също е намаляваща и клони към нула навсякъде в X. Тъй като L е пространство на Даниел, то

$$\int_Y f_n = \int_X \widetilde{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и твърдението за L_Y е доказано.

По този начин получихме едно пространство на Даниел $\langle Y, L_Y, \int \rangle$. Следващото предложение показва, че L_Y съдържа интересни функции. За произволна функция $f: X \to \mathbf{R}$ с $f|Y$ ще означаваме функцията $f|Y: Y \to \mathbf{R}$, определена с $(f|Y)(x)=f(x)$ за всяко $x \in Y$. Тя се нарича *рестрикция* на f до Y.

7.6.1. Предложение. *За всяка сумируема функция f в X рестрикцията $f|Y$ е сумируема в Y.*

Доказателство. Да положим за краткост $g=f|Y$. От определението на стандартното продължение непосредствено следва

(1) $$\widetilde{g}=f\chi_Y.$$

Тъй като е произведение на измерими функции, функцията $f\chi_Y$ е измерима. Същевременно $|f\chi_Y| \leq |f|$, поради което $f\chi_Y$ притежава сумируема мажоранта. Ето защо и функцията $f\chi_Y$ е сумируема. Сега от (1) следва, че и функцията $\widetilde{g}$ е сумируема. Следователно $g \in L_Y$ и предложението е доказано.

От това предложение непосредствено следва, че *едно подмножество A на Y е пренебрежимо в Y* (пренебрежимо спрямо L_Y) *точно когато е пренебрежимо в X.*

Следващото предложение посочва важно свойство на L_Y.

7.6.2. Предложение. *За всяко измеримо множество Y в X пространството $\langle Y, L_Y, \int \rangle$ е лебегово.*

Доказателство. Ако $f \in L_Y$ и $g: Y \to \mathbf{R}$ е функция, за която $g(x)=f(x)$ почти навсякъде в Y, от предишното описание на пренебрежимите множества в Y следва $g \in L_Y$. Ето защо остава да се занимаем само с пълнотата на L_Y.

Нека за тази цел

(2) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е фундаментална редица от елементи на L_Y. Тогава редицата

(3) $$\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \ldots, \widetilde{f_n}, \ldots$$

е очевидно фундаментална в L и тъй като L е пространство на Лебег, редицата (3) е сходяща по норма в L. Нека

$$g=\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n. \tag{4}$$

Тогава g е функция от L и съгласно предложение 1 функцията $f=g|Y$ е от L_Y. Сега следните равенства и неравенства са очевидни:

$$\int_Y |f_n-f| = \int_X |\tilde{f}_n - g\,\chi_Y| = \int_X |\tilde{f}_n - g|\,\chi_Y \leqq \int_X |\tilde{f}_n - g|.$$

От тях и от (4) следва, че редицата (2) е сходяща в L_Y към функцията f. С това предложението е доказано.

Ще покажем, че и минималното лебегово разширение на пространство на Даниел се съгласува с интегрирането върху подмножества. Нека $\langle X, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел, L е минималното лебегово разширение на Φ и Y е измеримо (спрямо L) подмножество на X. С Φ_Y ще означаваме съвкупността на всички рестрикции $\varphi|Y$, където φ пробягва Φ. Във Φ_Y определяме интеграл с помощта на равенството

$$\int_Y \varphi|Y = \int_X \varphi\,\chi_Y \tag{5}$$

за произволно $\varphi|Y \in L_Y$. Непосредствено се проверява, че така се получава пространство на Даниел $\langle Y, \Phi_Y, \int \rangle$.

7.6.3. Предложение. *При въведените в предишния абзац означения L_Y е минималното лебегово разширение на Φ_Y.*

Доказателство. Тъй като всяка функция f от L е граница по нормата на редица от функции от Φ, след преминаване към рестрикции директно се вижда, че и всяка функция $g \in L_Y$ е граница на редица от функции от Φ_Y. С това е показано, че L_Y е лебегово разширение на Φ_Y.

Нека сега множеството $A \subset Y$ е пренебрежимо спрямо L_Y. Тогава A е пренебрежимо и спрямо L и понеже L е минималното лебегово разширение на Φ, A е пренебрежимо и спрямо Φ. Оттук веднага следва, че A е пренебрежимо и спрямо Φ_Y. С това е показано, че L_Y е минималното лебегово разширение на Φ_Y (вж. теорема 6.1.1).

7.6.4. Пример. Нека Φ е съвкупността на финитните функции върху правата. За всеки интервал $[a, b]$ читателят ще построи финитна функция $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с $\varphi(x)=1$ при $x \in [a, b]$ и $\varphi(x) < 1$ при $x \in \mathbf{R} \setminus [a, b]$. Тогава

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : \varphi(x) \geqq 1\}$$

и следователно интервалът $[a, b]$ е измерим. Ако снабдим Φ с римановия интеграл, $\langle \mathbf{R}, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. При това очевидно $\Phi_{[a, b]} = C([a, b])$. Читателят лесно ще се убеди, че рестрикцията (5) на интеграла $\int : \Phi \to \mathbf{R}$ до $[a, b]$ съвпада с римановия интеграл в $C([a, b])$. Ето защо минималното лебегово разширение на пространството $\langle [a, b], C([a,b]), \int \rangle$ съвпада с $L_{[a, b]}$. С други думи, в $[a, b]$ можем да интегрираме, разглеждайки $[a, b]$ като измеримо подмножество на $\mathbf{R}$, а също така и изхождайки от пространството $\langle [a, b], C([a, b]), \int \rangle$ на Даниел. Тези два метода за интегриране съвпадат. Аналогична бележка важи и за затворените паралелепипеди в $\mathbf{R}^n$.

За произволна сумируема функция f в X и за произволно измеримо множество Y в X се полага

$$\int_Y f = \int_Y f|Y.$$

От тази дефиниция непосредствено се получава

$$\int_Y f = \int_X f\chi_Y.$$

Така виждаме, че сумируемите в X функции свободно могат да се интегрират върху измеримите множества в Y. Следващата теорема посочва важно свойство на това интегриране.

7.6.5. Теорема (тотална адитивност на интеграла). *Нека f е сумируема функция в X, а*

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$$

е редица от измерими множества в X, сечението на всеки две от които е пренебрежимо. Ако $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, то

$$\int_Y f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Y_n} f, \tag{6}$$

като редът в дясната страна е абсолютно сходящ.

Доказателство. Очевидно χ_Y съвпада почти навсякъде със сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{Y_n}$. Ето защо почти навсякъде е изпълнено и равенството

$$f\chi_Y = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{Y_n}. \tag{7}$$

Същевременно функцията $|f|$ е сумируема мажоранта на редицата от парциалните суми на реда вдясно на (7). Равенството (6) сега се получава от теоремата на Лебег. Абсолютната сходимост на реда вдясно на (6) се установява, като доказаното вече се приложи към функцията $|f|$. С това теоремата е доказана.

Предоставяме на читателя сам да съобрази как върху измеримите множества се интегрират комплексни функции.

§ 7.7. БОРЕЛОВИ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^m$

По зададени функции в класическия анализ често се построяват нови функции. Въпреки че на пръв поглед нещата изглеждат необозрими, оказва се, че всички възможни конструкции от този вид се свеждат до две: образуване на граници на редици от построени вече функции и композиране на построени вече функции. При това се предполага, че е зададена някаква изходна съвкупност от функции. В практиката на класическия анализ тя винаги се състои от непрекъснати функции. Ето защо класическият анализ не напуска минималната съвкупност от функции, която съдържа непрекъснатите функции и е затворена относно гранични преходи и образуване на композиции. Тук ще се занимаваме с въпросната съвкупност.

Нека m и n са цели положителни числа. Множество B от изображения $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ще наричаме *устойчиво*, когато притежава следните две свойства:

а) всяко непрекъснато изображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е елемент на B;

б) за всяка редица

$$f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots \tag{1}$$

от елементи на B, която е сходяща за всяко $x \in \mathbb{R}^m$, границата

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \tag{2}$$

е елемент на B.

Съвкупността на всички възможни изображения $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е очевидно устойчива. Непосредствено се проверява, че сечението $\mathbf{B}$ на всички устойчиви множества B е устойчиво множество. $\mathbf{B}$ е най-малкото възможно устойчиво множество от изображения $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Елементите му се наричат *борелови изображения* от $\mathbb{R}^m$ към $\mathbb{R}^n$. В специалния случай $n=1$ те се наричат *борелови функции*.

Тъй като $\mathbf{B}$ е устойчиво множество, то притежава свойствата а) и б). С други думи, всички непрекъснати изображения $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ са борелови. Също така, ако една редица (1) от борелови изображения е сходяща навсякъде в $\mathbb{R}^m$, границата ѝ (2) отново е борелово изображение. Следващата теорема показва, че $\mathbf{B}$ е затворено не само спрямо гранични преходи, но и спрямо композиции.

7.7.1. Теорема. *Ако $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ са борелови изображения, композицията $g \circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ също е борелово изображение.*

Доказателство. Нека най-напред $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ е непрекъснато изображение. Да фиксираме g и да образуваме множеството B на всички изображения $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, за които композицията $g \circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ е борелово изображение. Ако f е непрекъснато, композицията $g \circ f$ е непрекъсната и следователно е борелова. Ето защо B притежава свойството а). Нека сега (1) е редица от елементи на B, която е сходяща навсякъде в $\mathbb{R}^m$, и (2) е границата ѝ. Тогава всяко от изображенията $g \circ f_k$ е борелово. От друга страна, от (2) и от непрекъснатостта на g следва

$$g \circ f(x) = \lim_{k \to \infty} g \circ f_k(x).$$

Тъй като B е затворено спрямо гранични преходи, то $g \circ f \in$ B. Следователно $f \in B$. По този начин се оказа, че B притежава и свойството б). Следователно B е устойчиво множество. Но бореловите изображения са елементи на всяко устойчиво множество. Следователно за всяко борелово изображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имаме $f \in B$. Съгласно определението на B това означава, че композицията $g \circ f$ е борелова.

Така показахме, че ако изображението f е борелово, а g е непрекъснато, композицията $g \circ f$ е борелова. Нека сега $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е произволно борелово изображение. Да фиксираме f и да образуваме съвкупността C на всички изображения $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, за които композицията $g \circ f$ е борелова. Предишният абзац показва, че C притежава свойството а). Директно се проверява, че C притежава и свойството б) (извършете проверката!). Ето защо C е устойчиво множество. Но тогава за произволно борелово изображение $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ имаме $g \in C$. Съгласно определението на C това означава, че композицията $g \circ f$ е борелова. С това теоремата е доказана.

Всяко изображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е еднозначно определено от своите координатни функции $f_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ с помощта на равенството

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^m). \tag{3}$$

7.7.2. Теорема. *Едно изображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е борелово точно когато координатните му функции са борелови.*

Доказателство. Необходимостта следва директно от теорема 1. Наистина координатната функция f_i очевидно съвпада с композицията $\pi_i \circ f$, където $\pi_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е i-тата проекция, която е непрекъсната и поради това е борелова.

Достатъчността се доказва с индукция спрямо n. При $n=1$ твърдението е тривиално. Преминаването от n към $n+1$ става на две стъпки, както в доказателството на теорема 1.

Нека достатъчността е налице за някое $n=1, 2, \ldots$ Трябва да покажем, че ако $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ са борелови, изображението

$$f \times g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \tag{4}$$

определено с

$$(f \times g)(x) = (f(x), g(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^m), \tag{5}$$

също е борелово.

Да изберем произволна непрекъсната функция g, да я фиксираме и да образуваме съвкупността B на всички изображения $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, за които (4) е борелово. Непосредствено се проверява, че B притежава свойствата а) и б). Ето защо за произволно борелово изображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ изображението (4) е борелово. По този начин е показано, че (4) е борелово винаги когато f е борелово и g е непрекъснато.

Сега избираме произволно борелово изображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, фиксираме го и образуваме съвкупността C на всички изображения $g: R^m \to R$, за които (4) е борелово. Свойството а) за C е проверено в предишния абзац, а проверката на б) е непосредствена. Ето защо C е устойчиво множество. Но тогава всяка борелова функция $g: R^m \to R$ принадлежи на C, което съгласно определението на C означава, че (4) е борелово. С това теоремата е доказана.

Тя показва, че изучаването на бореловите изображения се свежда към разглеждане на борелови функции. Ето защо по-нататък ще се съсредоточим върху последните.

Да покажем най-напред, че ако $f, g: R^m \to R$ са борелови функции, сборът им $f+g$ също е борелова функция. Наистина изображението $h: R^m \to R^2$, чиито координатни функции са f и g, е борелово съгласно теорема 2. Събирането на координатите $+: R^2 \to R$ пък е непрекъснато и следователно също е борелово. Но $f+g$ съвпада очевидно с композицията $+\circ h$ и поради това е борелово по теорема 1. Аналогично се показва, че произведението на две борелови функции е борелова функция. Читателят ще провери, че функцията $r: R^2 \to R$, определена с $r(x, y)=\frac{x}{y}$ при $y \neq 0$ и $r(x, y)=0$ при $y=0$, е борелова, като я представи във формата на граница на редица от непрекъснати функции. Ако частното $\frac{f}{g}$ има смисъл навсякъде в R^m, от очевидното равенство

$$\frac{f}{g}=r(f, g)$$

и теореми 1 и 2 следва, че то е борелова функция, стига f и g да са такива.

Ако $f_i: R^m \to R$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ са борелови функции, от теореми 1 и 2 следва, че за всяка борелова функция $F: R^n \to R$ функцията

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_n): R^m \to R \tag{6}$$

също е борелова. Наистина (6) съвпада с композицията $F\circ f$, където $f: R^m \to R^n$ е изображението с координатни функции f_i. Сега твърдението следва от теореми 1 и 2.

Тъй като всички мислими в класическия анализ операции над краен брой функции f_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ са от вида (6) за подходяща борелова функция F, според казаното с класически операции над борелови функции не може да се построи функция, която не е борелова.

Класът на бореловите функции е затворен не само спрямо класическите операции, но и спрямо изброими гранични преходи. Наред с това минималността му изразява, че всички негови функции са по принцип построими със средствата на класическия анализ. Ето защо бореловите функции са тъкмо онези, с които класическият анализ по принцип работи.

Сега ще изясним до определена степен връзката между бореловите и измеримите функции. Да означим с Φ съвкупността на финитните функции в R^m. С помощта на римановия интеграл тя се превръща в пространство на Даниел. Съществуват и много други начини за превръщане на Φ в пространство на Даниел. Наистина, ако снабдим Φ с равномерната норма, във Φ има достатъчно много непрекъснати линейни функционали съгласно теоремата на Хан — Банах. От друга страна, всеки такъв функционал е разлика на позитивни функционали (вж. предложение 5.11.3). Следователно във Φ има и достатъчно много позитивни линейни функционали, а всеки такъв функционал превръща Φ в пространство на Даниел по теорема 5.2.7.

По теорема 6.1.1 така можем да получим и разнообразни лебегови пространства $\langle \mathrm{R}^m, L, \int \rangle$, където $L \supset \Phi$. От тях особено важно е онова, което се получава от римановия интеграл, но другите също представляват значителен интерес. Толкова по-важно е, че бореловите функции притежават и следното свойство:

7.7.3. Теорема. *Нека* $\int : \Phi \to \mathrm{R}$ *е произволен позитивен линеен функционал във* Φ *и* $\langle \mathrm{R}^m, L, \int \rangle$ *е произволно лебегово разширение на пространството на Даниел* $\langle \mathrm{R}^m, \Phi, \int \rangle$. *Тогава всяка борелова функция* $f: \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ *е измерима спрямо* L.

Доказателство. Да означим с B съвкупността на измеримите спрямо L функции. Ще се убедим, че B е устойчиво множество.

За произволно $k = 1, 2, \ldots$ да разгледаме финитната функция φ_k, определена с

$$(7) \qquad \varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq k, \\ k + 1 - |x| & \text{при } k \leq |x| \leq k+1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq k+1. \end{cases}$$

За произволна непрекъсната функция $f: \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ произведението $\varphi_k f$ е финитна, а следователно и измерима спрямо L функция. Същевременно от (7) следва

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) f(x)$$

за всяко $x \in \mathrm{R}^m$, поради което f се оказва измерима спрямо L по предложение 1.1. По този начин $f \in B$, т. е. B притежава свойството а). Свойството б) пък е налице по силата на предложение 1.1. Тъй като бореловите функции образуват най-малкото възможно устойчиво множество, всяка борелова функция в R^m принадлежи на B, т. е. е измерима спрямо L. С това теоремата е доказана.

Тя показва, че бореловите функции са измерими при всеки начин на интегриране в R^m. С други думи, за да бъде сумируема една (срещана на практика в класическия анализ) функция при някакъв начин на интегриране, е достатъчно тя да притежава сумируема мажоранта. Това е една от причините за значителните удобства на лебеговото интегриране.

§ 7.8. БОРЕЛОВИ МНОЖЕСТВА В R^m

В предишния параграф се занимавахме с онези функции от класическия анализ, които са дефинирани в цялото R^m. Той обаче борави и с функции, които са дефинирани в части на R^m, но последните също имат специфика. Тук ще разгледаме тези специфични подмножества на R^m. Те се въвеждат и изучават с помощта на бореловите функции приблизително както измеримите множества се определят чрез измеримите функции.

Едно множество A в R^m се нарича *борелово*, когато характеристичната му функция χ_A е борелова. Казаното в § 2 за измеримите множества се пренася почти дословно за бореловите.

Така например *A е борелово точно когато $R^m \setminus A$ е борелово. Обединението и сечението на произволна редица*

(1) $$A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$$

от борелови множества също са борелови. Почти дословно се пренася и теорема 2.1. Да приведем съответната формулировка.

7.8.1. Теорема. *За произволна функция $f: R^m \to R$ следващите пет условия са еквивалентни:*

а) *функцията f е борелова;*

б) *за всяко $a \in R$ множеството $\{x \in R^m : f(x) \geqq a\}$ е борелово;*

в) *за всяко $a \in R$ множеството $\{x \in R^m : f(x) > a\}$ е борелово;*

г) *за всяко $a \in R$ множеството $\{x \in R^m : f(x) < a\}$ е борелово;*

д) *за всяко $a \in R$ множеството $\{x \in R^m : f(x) \leqq a\}$ е борелово.*

Предоставяме доказателството на читателя.

Тази теорема позволява да се посочат някои примери за борелови множества. Нека $\xi \in R^m$ и $\varepsilon > 0$. Отвореното кълбо с център ξ и радиус ε съвпада с множеството $\{x \in R^m : \|x-\xi\| < \varepsilon\}$. Тъй като функцията $\|x-\xi\|$ е непрекъсната, а следователно и борелова, отворените кълба са борелови множества по теорема 1.

Нека сега U е произволно отворено множество в R^m. U очевидно съвпада с обединението на всички отворени кълба O, които имат рационален радиус, центровете им са с рационални координати и удовлетворяват условието $O \subset U$. Тъй като така описаните кълба са изброимо много и са борелови, U също излиза борелово.

И така отворените множества в R^m са борелови. Следователно затворените множества, които са техните допълнения до R^m, също са борелови. Оттук следва, че обединението на изброимо много затворени множества е борелово, т. е. че F_σ-множествата са борелови, и т. н.

За да дадем директно описание на бореловите множества, имаме нужда от още едно понятие. Една съвкупност $\mathfrak{b}$ от подмножества на R^m се нарича *борелова алгебра*, когато притежава следните свойства:

а) отворените множества от R^m са елементи на b;

б) ако $A \in b$, то $R^m \setminus A \in b$;

в) обединението на всяка редица (1) от елементи на b е елемент на b.

Разбира се, бореловите множества в R^m образуват борелова алгебра. Друга такава алгебра образуват всички подмножества на R^m. Непосредствено се проверява, че сечението на произволна система от борелови алгебри в R^m е борелова алгебра в R^m. Ето защо сечението b на всички борелови алгебри в R^m също е борелова алгебра в R^m. Това е най-малката възможна борелова алгебра в R^m.

7.8.2. Теорема. *Бореловите множества в R^m образуват най-малката възможна борелова алгебра в R^m.*

Доказателство. Нека b е произволна борелова алгебра в R^m. Чрез преминаване към допълнения се съобразява, че b съдържа затворените множества в R^m, а също, че сечението на произволна редица (1) от елементи на b отново е елемент на b.

Сега, също както и в теорема 1, се доказва, че за всяка функция $f: R^m \to R$ условията б'), в'), г') и д'), които се получават от условията б), в), г) и д) от теорема 1 след заместване на думите „е борелово" с думите „принадлежи на b", са еквивалентни. Съвкупността на всички такива функции $f: R^m \to R$ ще означим с B. Непрекъснатите функции $f: R^m \to R$ удовлетворяват, да речем, б'), понеже съответното множество

$$\{x \in R^m : f(x) \geqq a\}$$

е затворено и поради това принадлежи на b.

За да покажем, че функциите от B образуват устойчиво множество, трябва още да се убедим, че за всяка редица

$$f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots \tag{2}$$

от елементи на B с

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \tag{3}$$

за всяко $x \in R^m$ функцията f също е от B. Да изберем произволно $a \in R$ и да го фиксираме. Тъй като функциите f_k са от B, за произволни цели положителни k и l множеството

$$\left\{x \in R^m : f_k(x) \geqq a + \frac{1}{l}\right\}$$

принадлежи на b. Следователно за произволни цели положителни n и l множеството

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{x \in R^m : f_k(x) \geqq a + \frac{1}{l}\right\} \tag{4}$$

принадлежи на b. Читателят ще провери, че от (3) следва равенството

$$\{x \in R^m : f(x) > a\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{x \in R^m : f_k(x) \geqq a + \frac{1}{l}\right\}. \tag{5}$$

Множеството в дясната му страна е обединение на изброимо много съвкупности от вида (4), които принадлежат на $\mathfrak{b}$, и следователно принадлежи на $\mathfrak{b}$. Ето защо (5) показва, че f удовлетворява условието б'), и поради това $f \in B$.

Така се убедихме, че функциите от B образуват устойчиво множество. Следователно всяка борелова функция в $\mathbb{R}^m$ е елемент на B. Нека сега A е борелово множество в $\mathbb{R}^m$. Тогава по определение функцията χ_A е борелова и следователно $\chi_A \in B$. Но тогава множеството

$$A=\left\{x \in \mathbb{R}^m : \chi_A(x) > \frac{1}{2}\right\}$$

принадлежи на $\mathfrak{b}$. Така установихме включването $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$ и теоремата е доказана.

Бореловите множества в $\mathbb{R}^m$ са всички подмножества на $\mathbb{R}^m$, които на практика се срещат в класическия анализ. По-специално така изглеждат и дефиниционните области на всички срещани в анализа функции. Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е произволно борелово множество. Една функция $f: A \to \mathbb{R}$ се нарича *борелова*, когато е рестрикция на борелова функция $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, дефинирана в цялото $\mathbb{R}^m$. Тъй като функцията χ_A също е борелова, за стандартното продължение $\widetilde{f}$ на f имаме $\widetilde{f}=\chi_A g$, поради което то също е борелово. Ето защо функцията f е борелова точно когато стандартното ѝ продължение $\widetilde{f}$ е борелово.

Оттук непосредствено се получава, че *ако (2) е безкрайна редица от борелови функции $f: A \to \mathbb{R}$ в бореловото множество A и границата (3) съществува за всяко $x \in A$, функцията f също е борелова за A.* Наистина при (3) за стандартните продължения имаме

$$\widetilde{f}(x)=\lim_{k\to\infty} \widetilde{f}_k(x)$$

за всяко $x \in \mathbb{R}^m$ и твърдението вече е очевидно.

Не всяка непрекъсната функция $f: A \to \mathbb{R}$ в едно борелово множество има непрекъснати продължения до цялото $\mathbb{R}^m$. Ето защо отнапред не е ясно дали една такава функция има и борелови продължения, т. е. дали самата тя е борелова. Следващото предложение дава утвърдителен отговор на този въпрос.

7.8.3. Предложение. *Всяка непрекъсната функция $f: A \to \mathbb{R}$ в борелово множество A е борелова.*

Доказателство. Нека a е произволно реално число. Ще покажем, че за затворената обвивка $\overline{B}$ на множеството

$$B=\{x \in A : f(x) \geqq a\}$$

е в сила

$$\overline{B} \cap A = B. \tag{6}$$

Наистина нека $\xi \in \overline{B} \cap A$. Тогава съществува редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

от елементи на B с $\xi=\lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Тъй като $x_k\in \bar{B}$, то $f(x_k)\geqq a$ за всяко $k=1, 2, \ldots$ От друга страна, $\xi\in A$ и следователно функцията f е непрекъсната в точката ξ. Ето защо $f(\xi)\geqq a$, т. е. $\xi\in B$. С това е показано включването $\overline{B}\cap A\subset B$. Тъй като противоположното включване е очевидно, (6) е доказано.

Тъй като B е затворено, то е борелово множество. Понеже същото е дадено и за A, от (6) следва, че множеството B е борелово.

Да разгледаме сега множеството

$$C=\{x\in \mathbf{R}^m : \widetilde{f}(x)\geqq a\}.$$

При $a>0$ множеството C очевидно съвпада с B и поради това е борелово. При $a\leqq 0$ пък имаме

$$C=B\cup(\mathbf{R}^m\setminus A),$$

което показва, че C отново е борелово. Ето защо функцията $\widetilde{f}$ удовлетворява условието б) от теорема 1 и следователно е борелова. С това предложението е доказано.

Следващото предложение дава директно описание на бореловите функции в борелово множество A.

7.8.4. Предложение. *Нека A е борелово множество в $\mathbf{R}^m$. Тогава съвкупността* $\mathbf{B}$ *на бореловите функции в A е най-малката възможна съвкупност, която съдържа непрекъснатите функции $f: A\to\mathbf{R}$ и заедно с всяка сходяща навсякъде в A редица от свои елементи съдържа и границата ѝ.*

Доказателство. Нека B е съвкупност от функции $f: A\to\mathbf{R}$, която съдържа непрекъснатите в A функции и заедно с всяка сходяща навсякъде в A редица от свои елементи съдържа и границата ѝ. Да означим с B' съвкупността на всички функции $g: \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$, рестрикциите на които до A принадлежат на B. Непосредствено се проверява, че B' е устойчиво множество. Ето защо бореловите функции в $\mathbf{R}^m$ принадлежат на B'. Но тогава техните рестрикции до A принадлежат на B. Тъй като това са всички борелови функции в A, предложението е доказано.

§ 7. 9. ИЗМЕРИМИ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА В $\mathbf{R}^m$

Нека Φ е съвкупността на финитните функции в $\mathbf{R}^m$ и $\int:\Phi\to\mathbf{R}$ е произволен позитивен линеен функционал. По теорема 5.2.7 тройката $\langle\mathbf{R}^m, \Phi, \int\rangle$ е пространство на Даниел. Вече видяхме, че бореловите функции в $\mathbf{R}^m$ са измерими спрямо минималното лебегово разширение L на Φ. Тъй като множество $A\subset\mathbf{R}^m$ по определение е борелово точно когато характеристичната му функция χ_A е борелова, от аналогичното определение на измеримите множества следва, че бореловите множества в $\mathbf{R}^m$ са измерими спрямо L. Тук ще покажем, че в определен смисъл е вярно и обратното.

След като във Ф е зададен интеграл, той определя и пренебрежимите множества в R^m. Разбира се, в общия случай те се променят, когато изменяме интеграла. По-нататък интегралът ще остава фиксиран и по този начин ще се фиксира и класът на пренебрежимите в R^m множества. Следващото предложение показва, че съществуват достатъчно много специални пренебрежими множества.

7. 9.1. Предложение. *За всяко пренебрежимо множество Ξ в R^m съществува борелово множество A, което съдържа Ξ и също е пренебрежимо.*

Доказателство. Тъй като Ξ е пренебрежимо, съществуват растяща редица

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \ldots \leqq \varphi_k \leqq \ldots$$

от финитни функции и константа C, за които

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \infty \tag{1}$$

за всяко $x \in \Xi$ и

$$\int \varphi_k \leqq C \tag{2}$$

за всяко $k=1, 2, \ldots$

Да изберем по произволен начин цялото положително число l и да положим

$$U_{kl} = \{x \in R^m : \varphi_k(x) > l\}.$$

Множествата U_{kl} са отворени и поради това са и борелови. Ето защо множеството

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} U_{kl}$$

също е борелово. От (1) непосредствено се вижда, че $\Xi \subset A$. Същевременно от определението на A следва, че (1) е налице не само при $x \in \Xi$, но и при $x \in A$. Тъй като освен това е изпълнено и (2), множеството A е пренебрежимо. С това предложението е доказано.

7. 9. 2. Теорема. *За всяка измерима функция $f: R^m \to R$ съществува борелова функция $g: R^m \to R$, която почти навсякъде съвпада с f.*

Доказателство. Съществуват изброимо много такива финитни функции в R^m, че във всяка точка от R^m поне една от тези функции не е нула. Такива са например функциите, определени с равенството (7) от § 7. Ето защо от лема 5.10.1 следва, че съществува сумируема функция, която е положителна навсякъде в R^m. Сега предложение 1.2 показва, че съществува редица

$$f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$$

от функции от L, за която е изпълнено равенството

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \tag{3}$$

почти навсякъде в $\mathbf{R}^m$. Тъй като L е лебегово разширение на Φ, за всяко f_k съществува финитна функция φ_k с

(4)
$$\int |f_k-\varphi_k| \leqq \frac{1}{2^k}.$$

От (4) следва, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k-\varphi_k|$ е сходящ, а това заедно с теоремата на Бепо Леви показва, че е сходящ и редът $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k-\varphi_k|$ почти навсякъде в $\mathbf{R}^m$. Но тогава общият му член почти навсякъде клони към нула, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} (f_k(x)-\varphi_k(x))=0.$$

От това равенство и от (3) следва, че е изпълнено равенството

(5)
$$f(x)=\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$$

почти навсякъде в $\mathbf{R}^m$.

Съгласно предложение 1 съществува борелово множество A, което е пренебрежимо, и равенството (5) е изпълнено навсякъде в бореловото множество $\mathbf{R}^m \setminus A$. Тъй като функциите φ_k са финитни, те са непрекъснати, а следователно и борелови в $\mathbf{R}^m \setminus A$. Но тогава и границата им f е борелова функция в $\mathbf{R}^m \setminus A$. Следователно тя има борелово продължение $g: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$. Очевидно функциите f и g съвпадат вън от пренебрежимото множество A и теоремата е доказана.

7.9.3. Следствие. *За всяко измеримо множество X в $\mathbf{R}^m$ съществуват борелови множества A_1 и A_2, за които са изпълнени включванията*

$$A_1 \subset X \subset A_2$$

и разликата $A_2 \setminus A_1$ е пренебрежима.

С други думи, твърди се, че с точност до пренебрежими множества измеримите множества също са борелови. Тъй като в тези въпроси се работи с точност до пренебрежимо множество, по-широките понятия измерима функция и измеримо множество могат да се избягнат при интегрирането в $\mathbf{R}^m$; съгласно теорема 2 за всяка функция $f \in L$ съществува борелова функция g в $\mathbf{R}^m$, която почти навсякъде съвпада с f. Ето защо, ако се задоволим само с боределовите сумируеми функции, по принцип няма да загубим нищо. С други думи, средствата на класическия анализ осигуряват възможността за пълноценно интегриране в $\mathbf{R}^m$.

Задачи към седма глава

Борелови функции и множества

Задача 1. Да се докаже, че всяка функция $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ с ограничена вариация е борелова.

Задача 2. Ако $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ е редица от борелови функции $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, всяко от множествата $\{x \in \mathbb{R}^m : \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ съществува$\}$ и $\{x \in \mathbb{R}^m : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \infty\}$ е борелово.

Задача 3. Ако $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е борелова функция, множеството D на точките x, в които функцията f е диференцируема, е борелово и функцията $f' : D \to \mathbb{R}$ също е борелова.

Задача 4. Да се докаже, че ако $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е борелово изображение и $B \subset \mathbb{R}^n$ е борелово множество, то множеството $f^{-1}(B)$ също е борелово.

Композиции на измерими функции

Задача 5. Ако $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег, за всяка m-орка $f_i : X \to \mathbb{R}$ от измерими функции и за всяка борелова функция $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ композицията $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ е измерима.

Задача 6. Да се докаже, че ако $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е измерима спрямо $L(\mathbb{R})$ функция, функцията $f(x-y)$ е измерима спрямо $L(\mathbb{R}^2)$.

Задача 7. Нека U и V са отворени множества в $\mathbb{R}^m$ и $F: U \to V$ е регулярна биекция между U и V. Да се докаже, че ако множество $A \subset U$ е пренебрежимо спрямо $L(\mathbb{R}^m)$, неговият образ $F(A)$ също е пренебрежим спрямо $L(\mathbb{R}^m)$.

Задача 8. Нека $m \geq n$, U е отворено множество в $\mathbb{R}^m$ и $F: U \to \mathbb{R}^n$ е еднократно гладко изображение, което има ранг n (поне една детерминанта от n-ти ред в матрицата на Якоби на F е различна от нула) във всяка точка на U. Да се докаже, че:

а) за всяко пренебрежимо спрямо $L(\mathbb{R}^n)$ множество $A \subset \mathbb{R}^n$ прообразът $F^{-1}(A)$ е пренебрежим спрямо $L(\mathbb{R}^m)$;

б) за всяка измерима функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ композицията $f \circ F$ е измерима.

Упътване. а) Сведете към зад. 7. б) Използувайте а), зад. 4 и следствие 9.3

Осма глава

ИНТЕГРАЛ И МЯРКА

Понятията дължина, лице и обем допускат общо разглеждане, което обхваща и много други неща. Това е предметът на теорията на мярката. Измерването на множества е на пръв поглед по-просто от мерeнето на функции, т. е. от интегрирането, и исторически първо се развива учението за мерките, а с негова помощ е въведено интегрирането. Впоследствие обаче се забелязва, че работата с функции в някои аспекти е по-проста от разглеждането на множества. Така възниква възможност интегралът да се въведе чрез нищожен минимум мерки и те после да бъдат въведени в пълния им обем с помощта на интегрирането. Кой от двата пътя ще бъде избран зависи от целта, но при щателно изучаване на интегрирането мярката не може да се изпусне. Ако $\langle X, L, \int \rangle$ *е пространство на Лебег, едно подмножество A на X се нарича сумируемо, когато* $\chi_A \in L$, *а интегралът на* χ_A *— негова мярка. Приемайки някои свойства на мерките за аксиоми, стигаме до измеримите пространства, които са основни в теорията на мярката. Тъй като в пета глава определихме аксиоматично и интеграла, сега имаме възможност да формулираме и докажем еквивалентността на двете теории.*

В § 1 са въведени сумируемите множества и мерките им. Параграф 2 е посветен на измеримите пространства. В § 3 е показано, че те пораждат интегриране, а в § 5 този резултат е пренесен при едни по-общи и по-достъпни образувания — адитивните пространства, чието изучаване продължава и в § 6. Еквивалентността на интеграла и мярката е установена в § 4. В § 7 са описани първите понятия на теорията на вероятностите. Параграфи 8 — 10 отново са посветени на спецификата на $\mathbb{R}^m$: *§ 8 — на сумируемите множества, § 9 — на инвариантния интеграл, а в § 10 е показано съществуването на неизмерими множества спрямо последния.*

При първо четене могат да се проучат само § 1 — 3, 5 и 6.

§ 8.1. МЯРКА НА СУМИРУЕМО МНОЖЕСТВО

Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. Едно подмножество A на X се нарича *сумируемо,* когато характеристичната му функция χ_A е сумируема.

Празното множество и по-общо пренебрежимите множества са сумируеми. Тъй като сумируемите функции са измерими, сумируемите множества са специален вид измерими множества. Не винаги измеримите множества са сумируеми. Но ако измеримото множество A се съдържа в сумируемо множество, A също е сумируемо, тъй като тогава характеристичната функция χ_A очевидно притежава сумируема мажоранта и следователно е сумируема. По този начин в случая, когато цялото X е сумируемо, т. е. когато $1 \in L$, измеримите и сумируемите множества съвпадат.

Ако A и B са сумируеми множества, множествата $A\cup B$, $A\cap B$ и $A\setminus B$ също са сумируеми. Наистина за характеристичните функции на тези множества са изпълнени неравенствата

$$\chi_{A\cup B}=\sup\ (\chi_A,\ \chi_B),\ \chi_{A\cup B}=\inf\ (\chi_A,\ \chi_B),\ \chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_{A\cup B}.$$

Ето защо те са сумируеми, тъй като χ_A и χ_B са сумируеми.

Ако A е сумируемо множество, *мярката* на A се дефинира с равенството

$$\mu\ (A)=\int \chi_A. \tag{1}$$

Очевидно мярката е неотрицателно число. При това $\mu\ (A)=0$ точно когато χ_A се анулира почти навсякъде, т. е. когато множеството A е пренебрежимо. Ето защо, ако A е сумируемо и $\mu\ (A)=0$, всяко множество $B\subset A$ е сумируемо.

Нека A и B са две сумируеми множества. Тъй като

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cup B},$$

от (1) следва

$$\mu\ (A\cup B)=\mu\ (A)+\mu\ (B)-\mu\ (A\cap B). \tag{2}$$

Ето защо, *ако сечението $A\cap B$ е пренебрежимо, то*

$$\mu\ (A\cup B)=\mu\ (A)+\mu\ (B).$$

Сега ще покажем, че *ако*

$$A_1\subset A_2\subset\ \dots\ \subset A_n\subset\ \dots \tag{3}$$

е растяща редица от сумируеми множества и редицата

$$\mu\ (A_1),\ \mu\ (A_2),\ \dots,\ \mu\ (A_n),\ \dots \tag{4}$$

е ограничена, обединението $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ също е сумируемо и

$$\mu\ (A)=\lim_{n\to\infty}\mu\ (A_n). \tag{5}$$

Наистина поради включванията в (3) редицата от характеристичните функции

$$\chi_{A_1}\leqq\chi_{B_2}\leqq\ \dots\ \leqq\chi_{A_n}\leqq\ \dots \tag{6}$$

е растяща. От друга страна, съгласно определението (1) редицата

(5) е точно редицата от интегралите на (6) и тя е ограничена по условие. Същевременно за всяко $x \in X$ очевидно е в сила

$$\chi_A(x)=\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x).$$

Ето защо от теоремата на Бепо Леви следва $\chi_A \in L$ и

$$\int \chi_A=\lim_{n\to\infty} \int \chi_{A_n},$$

което показва, че A е сумируемо и е изпълнено (5).

Аналогично се доказва, че *ако*

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

е намаляваща редица от сумируеми множества, сечението $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *също е сумируемо и*

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

8.1.1. Пример. Ще се убедим, че *ако интегралът в L не е тъждествено нула, в X непременно съществуват сумируеми множества с ненулева мярка.* При направеното предположение за ненулевост на интеграла съществува функция $f \in L$ с $f \geqq 0$ и

$$\int f>0. \tag{7}$$

За произволно $n=1, 2, \ldots$ да положим

$$A_n=\left\{x \in X: f(x) \geqq \frac{1}{n}\right\}. \tag{8}$$

Тъй като f е измерима функция, множествата (8) са измерими. От друга страна, непосредствено се установява неравенството $\chi_{A_n} \leqq nf$, което показва, че измеримата функция χ_{A_n} притежава сумируема мажоранта. Ето защо тази функция, а следователно и множествата (8) са сумируеми. От друга страна, от (8) следва, че са изпълнени включванията

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Ако допуснем, че $\mu(A_n)=0$ за всяко $n=1, 2, \ldots$, от (5) ще следва, че обединението $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ също е сумируемо и $\mu(A)=0$. От друга страна, от (8) следва

$$A=\{x \in X: f(x)>0\},$$

поради което функцията f е различна от нула само в пренебрежимото множество A. Но тогава $\int f=0$ в противоречие със (7). Следователно поне едно от множествата (8) има ненулева мярка.

В § 7.6 се убедихме, че интегралът е тотално адитивна функция в съвкупността на всички измерими множества в X. Следващата теорема посочва едно важно свойство на тази тотално адитивна функция.

8. 1.2. Теорема (абсолютна непрекъснатост на интеграла). *За всяко $f \in L$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко сумируемо множество A с $\mu(A) < \delta$ да е в сила* $\left|\int_A f\right| \leqq \varepsilon$.

Доказателство. Нека най-напред съществува константа $M > 0$ с $|f(x)| \leqq M$ за всяко $x \in X$. За произволно $\varepsilon > 0$ полагаме $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Ако A е сумируемо множество с $\mu(A) < \delta$, то

$$\left|\int_A f\right| \leqq \int_A |f| \leqq \int_A M = M\mu(A) < \varepsilon$$

и случаят е разгледан.

Общият случай се свежда към случая на ограничено f. За произволно $n = 1, 2, \ldots$ да изрежем отгоре и отдолу f, като положим

$$f_n = \sup(-n, \inf(n, f)).$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $|f - f_n| \leqq 2|f|$, от теоремата на Лебег следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n с

$$\int |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сега да положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. При $\mu(A) < \delta$ поради $|f_n(x)| \leqq n$ ще имаме

$$\left|\int_A f\right| \leqq \int_A |f - f_n| + \int_A |f_n| \leqq \int_A |f - f_n| + \int_A n$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и теоремата е доказана.

§ 8.2. ИЗМЕРИМИ ПРОСТРАНСТВА

В предишния параграф посочихме някои свойства на сумируемите множества в някакво пространство на Лебег и на техните мерки. Оказва се, че тези и въобще всички свойства на сумируемите множества и на мерките им следват от няколко само от тях, които могат да се формулират, без да се предполага наличието на структура на лебегово пространство. Ако те се приемат за аксиоми, стига се до понятието измеримо пространство.

Нека $X \neq \varnothing$ е произволно множество, а S — съвкупност от подмножества на X, за която са изпълнени следните условия:

а) $\varnothing \in S$;

б) ако $A \in S$ и $B \in S$, то $A \cup B \in S$;

в) ако $A \in S$ и $B \in S$, то $A \setminus B \in S$.

Ще предполагаме още, че е зададено изображение $\mu : S \to [0, \infty)$, за което:

г) при всеки избор на $A \in S$ и $B \in S$ с $A \cap B = \emptyset$ е в сила

$$\mu (A \cup B) = \mu (A) + \mu (B);$$

д) ако $A \in S$, $\mu (A) = 0$ и $B \subset A$, то $B \in S$;

е) ако

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

е растяща редица от елементи на S и редицата

$$\mu (A_1), \mu (A_2), \ldots, \mu (A_n), \ldots$$

е ограничена, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S;$$

ж) ако

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

е намаляваща редица от елементи на S със $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то

$$\lim_{n \to \infty} \mu (A_n) = 0.$$

Винаги когато в X са зададени съвкупност S от подмножества на X и изображение $\mu : S \to [0, \infty)$, за които са изпълнени свойствата а) — ж), ще казваме, че X е *измеримо пространство*, елементите на S ще наричаме *сумируеми множества* в X, а изображението μ — *мярка*.

Тривиален пример получаваме, като в произволно непразно множество X с S означим съвкупността, съставена само от празното множество, и положим $\mu (\emptyset) = 0$. По-интересен пример получаваме, като в произволно непразно множество X с S означим съвкупността на всички крайни множества в X и за произволно $A \in S$ определим $\mu (A)$ като брой на елементите на A.

За да посочим широк клас от примери, нека $\langle X, L, \int \rangle$ е произволно пространство на Лебег. С S да означим съвкупността на сумируемите в X множества, а за произволно $A \in S$ да положим

$$\mu (A) = \int \chi_A.$$

Съгласно казаното в предишния параграф така получаваме измеримо пространство. Ще казваме, че то е *породено* от лебеговото пространство L.

В § 4 ще се убедим, че ако на произволно лебегово пространство съпоставим породеното му измеримо пространство, получаваме биекция между едните и другите обекти. Тук ще се ограничим само с някои следствия от аксиомите а) — ж). По този начин ще стигнем и до някои свойства на сумируемите множества и мерките в едно лебегово пространство, които не бяха отбелязани в предишния параграф. Разбира се, те могат да се докажат и директно въз основа на дефинициите.

Измеримите пространства ще означаваме като тройки $\langle X, S, \mu\rangle$, но понякога за краткост ще пишем само S. По-нататък ще предполагаме, че е зададено измеримо пространство $\langle X, S, \mu\rangle$. От равенството

$$A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$$

и от аксиома в) очевидно следва, че при $A\in S$, $B\in S$ е в сила $A\cap B\in S$. Оттук се получава, че *сечението на краен брой елементи на S е елемент на S*. Аналогично от аксиома б) се получава, *че обединението на краен брой елементи на S е елемент на S*. По-нататък ще видим по какъв начин тези свойства се усилват.

От адитивността на мярката, изразена чрез аксиома г), следва $\mu(\varnothing)=\mu(\varnothing)+\mu(\varnothing)$, поради което $\mu(\varnothing)=0$. Също при $A\in S$, $B\in S$ и $A\subset B$ имаме

$$B=A\cup(B\setminus A) \text{ и } A\cap(B\setminus A)=\varnothing.$$

Следователно

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A).$$

Тъй като μ приема само неотрицателни стойности, оттук следва $\mu(A)\leqq\mu(B)$. И така *мярката μ е монотонна*.

Сега ще усилим адитивното свойство от аксиома г). Нека A и B са произволни елементи на S. Тогава

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B),$$

като сечението на двете множества вдясно е празно. Следователно

$$\mu(A)=\mu(A\setminus B)+\mu(A\cap B). \tag{1}$$

Аналогично

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup B \text{ и } (A\setminus B)\cap B=\varnothing.$$

Ето защо

$$\mu(A\cup B)=\mu(A\setminus B)+\mu(B). \tag{2}$$

След елиминиране на $\mu(A\setminus B)$ от (1) и (2) се получава

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B), \tag{3}$$

което усилва леко адитивността.

От (3) при $\mu(A\cap B)=\varnothing$ следва

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B).$$

С индукция от това равенство може да се извлече, че ако

$$A_1, A_2, \dots, A_n \tag{4}$$

са краен брой елементи на S с $\mu(A_i\cap A_j)=0$ при $i\neq j$, то

(5) $$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

което е *крайната адитивност на мярката*. Читателят ще съобрази също, че за всяка система (4) от елементи на S е изпълнено неравенството

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Оттук и от аксиома е) веднага се получава, че ако

(6) $$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

е произволна редица от сумируеми множества и редът $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ е сходящ, обединението $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ също е сумируемо. Аналогично A е сумируемо, ако всички членове на (6) се съдържат в някакво сумируемо множество.

Свойството от аксиома ж) се нарича понякога непрекъснатост на мярката. Тя допуска обобщение.

8.2.1. Предложение. *За всяка намаляваща редица*

(7) $$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

от елементи на S сечението $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ принадлежи на S и е изпълнено равенството

(8) $$\mu(A)=\lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доказателство. Най-напред ще се убедим, че A е сумируемо. Да разгледаме равенството

(9) $$A_1 \setminus A=\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n).$$

Тъй като всяко от множествата $A_1 \setminus A_n$ е сумируемо и е изпълнено включването $A_1 \setminus A_n \subset A_1$, където $A_1 \in S$, множеството вдясно на (9) принадлежи на S. Ето защо $A_1 \setminus A \in S$. От друга страна,

$$A=A_1 \setminus (A_1 \setminus A)$$

и сумируемостта на A е установена.

Сега ще докажем (8). Очевидно $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A)=\varnothing$. Но съгласно (7) редицата с общ член $A_n \setminus A$ също е намаляваща. Ето защо от ж) следва $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A)=0$. Но $A \subset A_n$ и следователно

$$\mu(A_n \setminus A)=\mu(A_n)-\mu(A).$$

Оттук (8) се получава веднага и предложението е доказано.

Следващото предложение е аналогично.

8.2.2. Предложение. *За всяка растяща редица*

(10) $$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

от елементи на S, *редицата от мерките на която е ограничена, обединението* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *принадлежи на* S *и е изпълнено равенството*

(11) $$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доказателство. Твърдението за сумируемост на A вече е доказано даже в малко по-обща форма. Ето защо имаме да докажем само (11). От очевидното равенство

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n) = \varnothing$$

и от аксиома ж) следва $\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = 0$. Тъй като, от друга страна, $A_n \subset A$, то

$$\mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n).$$

Оттук (11) се получава веднага и предложението е доказано.

Доказаното предложение е допълнение към аксиомата е). То позволява да се установи следното важно свойство на мярката:

8.2.3. Теорема (тотална адитивност на мярката). *За всяка редица*

(6) $$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

от елементи на S, *за която редът* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *е сходящ и* $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ *при* $i \neq j$, *обединението* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *е сумируемо и е изпълнено равенството*

(12) $$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Доказателство. Да положим

$$B_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

за всяко $n = 1, 2, \ldots$ Тогава

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

Ето защо от крайната адитивност (5) на мярката и от предложение 2 следва

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i),$$

с което (12) е доказано. По този начин е доказана и теоремата.

Това са основните свойства на измеримите пространства. Тук си поставихме за задача да ги получим от аксиомите а) — ж). В случая на лебегово пространство предложение 2 бе доказано директно с теоремата на Лебег. Тоталната адитивност на мярката в този случай пък следва например от тоталната адитивност на интеграла (вж. теорема 7.6.5). Може да се каже, че аксиома ж), предложения 1 и 2 и теорема 3 изразяват едно и също свойство на мярката и то е нейното централно свойство.

§ 8.3. ПРОСТРАНСТВО НА ДАНИЕЛ НА ИЗМЕРИМО ПРОСТРАНСТВО

Нека $\langle X, S, \mu\rangle$ е измеримо пространство. С Φ ще означаваме съвкупността на всички функции от вида

(1) $$f=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{A_i},$$

където $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са реални числа, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множества от S. Функциите от този вид ще наричаме *стъпаловидни*. Разбира се, *стъпаловидните функции образуват линейно пространство*. Понататък ще се убедим, че те играят важна роля в теорията на интеграла.

За онова, което следва, е важно да знаем, че всяка стъпаловидна функция f притежава представяне (1), в което имаме $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Това твърдение се получава непосредствено от следващото.

8.3.1. Лема. *Нека*

(2) $$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

са произволни елементи на S. Тогава съществуват елементи

(3) $$B_1, B_2, \ldots, B_p$$

на S, за които $B_i\cap B_j=\varnothing$ при $i\neq j$, и всяко от множествата (2) *е обединение на някои от множествата* (3).

Доказателство. Ще си послужим с индукция спрямо n. При $n=1$ няма какво да се доказва. Нека сега твърдението е вярно за някое n и

(4) $$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$$

са произволни елементи на S. Съгласно индукционното предположение съществуват множества $B_1, B_2, \ldots, B_p$ от S, които нямат общи точки две по две, и всяко от първите n от множествата (4) е обединение на краен брой от (3). Да разгледаме множествата

$$B_1 \setminus A_{n+1}, \ldots, B_p \setminus A_{n+1}, \; A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{p} B_i,$$

$$B_1 \cap A_{n+1}, \ldots, B_p \cap A_{n+1}.$$

Те очевидно принадлежат на S и не се пресичат две по две. Читателят ще се убеди, че всяко от множествата (4) е обединение на краен брой от тях. С това индукцията е завършена и лемата е доказана.

Читателят ще види сам как от тази лема следва, че *всяка стъпаловидна функция f притежава представяне* (1), *при което е в сила $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$*. Такива представяния на f ще наричаме *стандартни*.

От съществуването на стандартни представяния директно се получават някои свойства на линейното пространство Ф. Така например, ако представянето (1) на f е стандартно, то

$$|f| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \chi_{A_i}$$

и

$$\inf(1, f) = \sum_{i=1}^{n} \min(1, a_i) \chi_{A_i},$$

поради което $|f| \in \Phi$ и $\inf(1, f) \in \Phi$. По този начин *за Ф са проверени първите две аксиоми от определението на пространство на Даниел*.

Сега *във Ф ще въведем интеграл*. В случая, когато S е породено от лебегово пространство, стъпаловидните функции са очевидно сумируеми. От дефиницията на мярката от § 1 следва, че тогава за всяка стъпаловидна функция (1) е в сила

$$\int_X f = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i). \tag{5}$$

За произволно измеримо пространство S (за което не знаем дали е породено от лебегово, или не) е естествено да приемем (5) за дефиниция на интеграла. Но тъй като f може да има много представяния от вида (1), за да използваме дефиницията (5), е нужно да установим нейната коректност. Това става най-лесно, като се разглеждат стандартни представяния. В този случай коректността на (5) се получава от следното твърдение:

8.3.2. Лема. *Нека $A_1, A_2, \ldots, A_m$ са елементи на S с $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и нека $B_1, B_2, \ldots, B_n$ са множества от S с $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Да предположим освен това, че е изпълнено равенството*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}(x) \tag{6}$$

за всяко $x \in X$. Тогава е изпълнено и равенството

(7) $$\sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{n} b_i\mu(B_i).$$

Доказателство. Като изключим тривиалните случаи, можем да си мислим, че $A_i \neq \varnothing$, $a_i \neq 0$, $B_i \neq \varnothing$, $b_i \neq 0$. Функцията

(8) $$f(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i\chi_{B_i}(x)$$

приема очевидно само краен брой ненулеви стойности. Нека това са $c_1, c_2, \dots, c_k$. Очевидно

(9) $$\sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i)=\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{a_i=c_j}\mu(A_i),$$

(10) $$\sum_{i=1}^{n} b_i\mu(B_i)=\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{b_i=c_j}\mu(B_i).$$

От (8) следва, че са изпълнени и равенствата

(11) $$\bigcup_{a_i=c_j} A_i=f^{-1}(c_j)=\bigcup_{b_i=c_j} B_i \qquad (j=1, 2, \dots, k).$$

От друга страна, по условие $A_i \cap A_j=\varnothing$ при $i \neq j$ и $B_i \cap B_j=\varnothing$ при $i \neq j$. Ето защо от (11) и от крайната адитивност на мярката следва

$$\sum_{a_i=c_j}\mu(A_i)=\sum_{b_i=c_j}\mu(B_i) \qquad (j=1, 2, \dots, k),$$

което заедно с (9) и (10) дава (7). Така лемата е доказана.

Тя позволява, като използуваме само стандартни представяния (1), *да определим интеграла на произволна функция* $f \in \Phi$ *с* (5). Така получаваме изображение $\int : \Phi \to \mathbb{R}$. Ще се убедим, че *то е линеен функционал във* Φ. Нека наред с f да разгледаме и друга функция

$$g=\sum_{i=1}^{n} b_i\chi_{B_i}$$

от Φ. По лема 1 съществуват такива непресичащи се две по две множества

$$C_1, C_2, \dots, C_k$$

от S, че всяко A_i и всяко B_i да е обединение на няколко от тях. В такъв случай f и g притежават стандартни представяния от вида

$$f=\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\chi_{C_j} \quad \text{и} \quad g=\sum_{j=1}^{k} \beta_j\chi_{C_j}.$$

Тогава за произволни реални a и b имаме

$$af+bg=\sum_{j=1}^{k}(a\alpha_j+b\beta_j)\chi_{C_j}$$

и поради това

$$\int_X (af+bg)=\sum_{j=1}^{k}(a\alpha_j+b\beta_j)\ \mu(C_j)$$

$$=a\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\ \mu(C_j)+b\sum_{j=1}^{k}\beta_j\ \mu(C_j)=a\int_X f+b\int_X g,$$

с което *линейността на интеграла е доказана.*

Въпреки че това няма да бъде използувано по-нататък, ще отбележим, че от доказаната линейност следва (5) за произволно (не непременно стандартно) представяне (1) на f.

Позитивността на интеграла е почти непосредствена. Наистина при $f\geqq 0$ и стандартно представяне (1) имаме $a_i\geqq 0$, когато $\mu(A_i)\neq 0$. Ето защо от (5) и неотрицателността на мярката следва $\int_X f\geqq 0$.

За да приключим с проверката на аксиомите за пространство на Даниел за Ф, остана да се занимаем с *аксиомата за граничния преход под интеграла.* Нека за целта

$$f_1\geqq f_2\geqq\ldots\geqq f_n\geqq\ldots$$

е намаляваща редица от функции от Ф с

(12) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

за всяко $x\in X$.

Да изберем положителното число ε по произволен начин и да положим

(13) $$A_n=\{x\in X:\ f_n(x)\geqq\varepsilon\}.$$

Така получаваме намаляваща редица

(14) $$A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_n\supset\ldots$$

от елементи на S. От (12) следва, че сечението на (14) е празно. Ето защо за всички достатъчно големи n ще имаме $\mu(A_n)<\varepsilon$ съгласно аксиома ж) от определението на измеримо пространство (вж. предишния параграф).

Нека сега M е положително число с $f_1(x)\leq M$ за всяко $x\in X$ и

$$B=\{x\in X:\ f_1(x)>0\}.$$

Очевидно $B\in S$. Сега ще докажем неравенството

(15) $$f_n(x)\leq M\chi_{A_n}(x)+\varepsilon\chi_B$$

за всяко $x \in X$. Двете функции вдясно са неотрицателни. Освен това при $x \in A_n$ имаме $\chi_{A_n}(x)=1$ и $f_n(x) \leq f_1(x) \leq M$, поради което $f_n(x) \leq M\chi_{A_n}(x)$. Ако пък $x \in B \setminus A_n$, от (13) се получава $f_n(x) < \varepsilon = \varepsilon\chi_B(x)$. Накрая при $x \bar{\in} B$ имаме $f_n(x) \leq f_1(x)=0$ и (15) е доказано. Тъй като освен това разглежданата редица е намаляваща, от (12) следва $f_n(x) \geq 0$. Ето защо след интегриране получаваме

$$0 \leq \int\limits_X f_n \leq M\mu(A_n)+\varepsilon\mu(B),$$

което заедно с $\mu(A_n) < \varepsilon$ за всички достатъчно големи n дава

$$0 \leq \int\limits_X f_n \leq (M+\mu(B))\varepsilon.$$

По този начин $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n = 0$ и аксиомата за граничния преход е проверена.

По този начин на всяко измеримо пространство $\langle X, S, \mu\rangle$ съпоставихме по едно пространство на Даниел $\langle X, \Phi, \int\rangle$. Ще казваме, че последното е *породено* от S. В шеста глава на всяко пространство на Даниел съпоставихме по едно пространство на Лебег — неговото минимално лебегово разширение $\langle X, L, \int\rangle$. По този начин добиваме възможност на всяко измеримо пространство S да съпоставим по едно лебегово пространство L. Ще казваме, че последното е *породено* от S. В § 2 пък видяхме, че лебеговите пространства от своя страна пораждат измерими. С въпросите, които естествено възникват в случаи като този, ще се занимаем в следващия параграф. Тук ще разгледаме само пренебрежимите множества спрямо L.

8.3.3. Лема. *Нека $\langle X, S, \mu\rangle$ е измеримо пространство и $\langle X, L, \int\rangle$ е породеното от него лебегово пространство. При тези предположения множество $A \subset X$ е пренебрежимо спрямо L точно когато $A \in S$ и $\mu(A)=0$.*

Доказателство. Нека $A \in S$ и $\mu(A)=0$. Тогава $\chi_A \in \Phi$, $\chi_A \geq 0$ и $\int \chi_A = \mu(A) = 0$. Ето защо A е пренебрежимо спрямо Φ, а следователно и спрямо L.

Нека, обратно, A е пренебрежимо спрямо L. Тъй като L е минималното лебегово разширение на Φ, множеството A е пренебрежимо и спрямо Φ (вж. теорема 6.1.1). Ето защо съществува редица

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots$$

от стъпаловидни функции с

(16)
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$$
за всяко $x \in A$ и

(17)
$$\int_X f_n \leq C$$

за някакво число C и за всяко $n=1, 2, \ldots$

Да изберем произволно числото $N=1, 2, \ldots$, да го фиксираме и да положим

$$A_{nN}=\{x \in X : f_n(x) \geq N\}$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ Така получаваме растяща редица

$$A_{1N}\subset A_{2N}\subset \ldots \subset A_{nN}\subset \ldots$$

от елементи на S, за която съгласно (16) е изпълнено

(18)
$$A\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nN}.$$

От друга страна, от определението на A_{nN} следва $N\chi_{A_{nN}} \leq f_n$, което заедно със (17) дава

$$N\,\mu(A_{nN})=\int N\chi_{A_{nN}} \leq \int f_n \leq C,$$

и следователно $\mu(A_{nN}) \leq \frac{C}{N}$. Тъй като тази оценка не зависи от n, от предложение 2.2 следват $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{nN} \in S$ и

(19)
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nN}\right) \leq \frac{C}{N},$$

тъй като редицата $\{A_{nN}\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща.

По този начин за всяко $N=1, 2, \ldots$ построихме множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{nN}$ от S с (18) и (19). Сечението

$$B=\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nN}$$

също принадлежи очевидно на S. От друга страна, от (19) се получава

$$\mu(B) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nN}\right) \leq \frac{C}{N}$$

за всяко $N=1, 2, \ldots$ Ето защо $\mu(B)=0$.

От друга страна, от (18) намираме $A\subset B$. Сега от аксиомата д) от определението на измеримо пространство (вж. § 2) следва $A \in S$, което заедно с монотонността на мярката дава $\mu(A)=0$. По този начин лемата е доказана.

§ 8.4. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА ТЕОРИЯТА НА ИНТЕГРАЛА И НА ТЕОРИЯТА НА МЯРКАТА

Учението за лебеговите пространства се нарича понякога **теория на интеграла**, а учението за измеримите пространства — **теория на мярката**. Тук ще покажем, че те са еквивалентни. Точна формулировка съдържат следващите две теореми.

8.4.1. Теорема. *Нека $\langle X, L, \int\rangle$ е лебегово пространство, $\langle X, S, \mu\rangle$ е породеното от него измеримо пространство, а $\langle X, L_1, \int_1\rangle$ е породеното от измеримото пространство $\langle X, S, \mu\rangle$ лебегово пространство. Тогава*

$$\langle X, L, \int\rangle=\langle X, L_1, \int_1\rangle.$$

Доказателство. Тук е дадено едно пространство на Лебег L, S е съвкупността на сумируемите спрямо L подмножества на X, а μ е мярката в S, определена за всяко $A\in S$ с равенството

$$\mu(A)=\int\chi_A. \tag{1}$$

Да означим с Φ съвкупността на всички стъпаловидни спрямо S функции в X с въведения в предишния параграф интеграл във Φ. Тъй като за всяко $A\in S$ имаме $\chi_A\in L$, то $\Phi\subset L$. От (1) пък следва, че интегралът в L е продължение на интеграла във Φ.

Ще покажем, че L е лебегово разширение на Φ. За тази цел трябва само да установим, че Φ е гъсто в L спрямо първата норма. Нека $f\in L$. За произволно $n=1, 2, \ldots$ да разгледаме множествата

$$A_{-k}=\left\{x\in X:\ -\frac{k+1}{n}\leq f(x)<-\frac{k}{n}\right\},$$

$$A_k=\left\{x\in X:\ \frac{k+1}{n}\geq f(x)>\frac{k}{n}\right\}$$

за $k=1, 2, \ldots, n^2$. Характеристичните функции на тези множества са измерими съгласно теорема 7.2.1. Освен това χ_{A_k} например има за мажоранта функцията $\frac{n}{k}|f|$, която е сумируема. Ето защо тези множества са сумируеми. Поради това функцията

$$f_n=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n}\chi_{A_k}-\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n}\chi_{A_{-k}}$$

принадлежи на Φ. От друга страна, при $|f(x)|\leqq n$ е в сила

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}.$$

Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ за всяко $x\in X$. Същевременно от определението на f_n следва $|f_n| \leq |f|$ и тогава е налице и сумируема мажоранта. Но тогава от теоремата на Лебег се получава

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

по норма. С това е показано, че L е лебегово разширение на Φ.

От друга страна, от § 1 знаем, че едно множество A в X е пренебрежимо спрямо L точно когато $A \in S$ и $\mu(A)=0$. Ето защо лема 3.3 показва, че пренебрежимите спрямо L множества са пренебрежими и спрямо Φ. Сега от теорема 6.1.1 се получава, че $\langle X, L, \int \rangle$ е минималното лебегово разширение на Φ. Тъй като по определение същото е вярно и за $\langle X_1, L_1, \int_1 \rangle$, теоремата е доказана.

8.4.2. Теорема. *Нека $\langle X, S, \mu \rangle$ е измеримо пространство, $\langle X, L, \int \rangle$ е породеното от него лебегово пространство, а $\langle X, S_1, \mu_1 \rangle$ е породеното от лебеговото пространство $\langle X, S, L \rangle$ измеримо пространство. Тогава*

$$\langle X, S, \mu \rangle = \langle X, S_1, \mu_1 \rangle.$$

Доказателство. Тук е дадено измеримо пространство S, с Φ е означено пространството на Даниел на стъпаловидните функции, построено в предишния параграф, и L е минималното лебегово разширение на Φ.

С S_1 е означена съвкупността на сумируемите спрямо L подмножества A на X, т. е. онези, за които $\chi_A \in L$. Тъй като при $A \in S$ имаме $\chi_A \in \Phi \subset L$, то $A \in S_1$ и следователно $S \subset S_1$. Същевременно

$$\mu_1(A) = \int \chi_A = \mu(A)$$

съгласно дефиницията на μ_1 и на интеграла във Φ. Ето защо $\mu_1|S=\mu$.

Нека сега $A \in S_1$. Тогава за характеристичната функция χ_A имаме $\chi_A \in L$. Съгласно определението на L от § 6.2 това означава, че съществува фундаментална редица

(2) $$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

от елементи на Φ с

(3) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_A(x)$$

почти за всички $x \in X$. „Почти за всички" тук е спрямо Φ и съгласно лема 3.3 означава, че съвкупността B на точките $x \in X$, за които (3) не е изпълнено, принадлежи на S и $\mu(B)=0$. Съгласно аксиома д) от определението на измеримо пространство (вж. § 2) множествата $B \setminus A$ и $B \cap A$ са от S. Сега е ясно, че ако променим f_n, като положим $f_n(x)=0$ за $x \in B \setminus A$ и $f_n(x)=1$ за $x \in A$, и не правим други промени, условието (3) ще се окаже изпълнено навсякъде, а редицата (2) ще продължи да е съставена от стъпаловидни функции. Ето защо без ограничение на общността можем да считаме, че (3) е изпълнено навсякъде в X.

Сега за произволно $n=1, 2, \dots$ да положим

$$A_n=\left\{x\in X:\ f_n(x)>\frac{1}{2}\right\}.$$

Поради (3) е изпълнено равенството

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n. \tag{4}$$

Наистина при $x\in A$ поради (3) имаме $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$. Ето защо съществува $k=1, 2, \dots$, за което при $n\geqq k$ е в сила $f_n(x)>\frac{1}{2}$, т. е. $x\in\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$. Ето защо x принадлежи и на дясната страна на (4). Обратно, ако $x\overline{\in}A$, от (3) следва

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$$

и поради това отнякъде нататък $f_n(x)<\frac{1}{2}$. Следователно x не е елемент на дясната страна на (4). С това (4) е доказано.

Тъй като $f_n\in\Phi$, всяко от множествата A_n принадлежи на S. Ето защо за всяко $k=1, 2, \dots$ множеството $\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$ също принадлежи на S. От друга страна,

$$\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\subset A$$

и тъй като $S\subset S_1$ и $\mu_1|S=\mu$, то

$$\mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)\leqq\mu_1(A).$$

Така редицата от мерките на множествата

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcap_{n=2}^{\infty}A_n\subset\dots\subset\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\subset\dots \tag{5}$$

е ограничена и всяко от тях принадлежи на S. По аксиома е) от § 2 обединението на множествата (5) също принадлежи на S. Сега от (4) следва $A\in S$, поради което $S_1\subset S$.

Тъй като вече доказахме включването $S\subset S_1$, то $S_1=S$. Сега от доказаното вече $\mu_1|S=\mu$ следва $\mu_1=\mu$. С това теоремата е доказана.

Теорема 1 изразява, че ако за някакво лебегово пространство L са зададени само сумируемите спрямо L множества и мерките им, ние можем еднозначно да възстановим L. По този начин цялата информация за L се съдържа в по-простото образувание на сумируемите спрямо L множества и мерките им.

Аналогично може да се погледне и на теорема 2: ако за някакво измеримо пространство S образуваме породеното от него лебегово пространство L, сумируемите спрямо L множества са точно елементите на S и мерките им спрямо L съвпадат с първоначално дадените.

Нека X е произволно непразно множество. Да означим с $\mathbf{L}$ съвкупността на всички възможни лебегови пространства $\langle X, L, \int \rangle$, а с $\mathbf{S}$ — съвкупността на всички измерими пространства $\langle X, S, \mu \rangle$. Ако на произволно $L \in \mathbf{L}$ съпоставим породеното от него $S \in \mathbf{S}$, получаваме изображение $\sigma: \mathbf{L} \to \mathbf{S}$. По същия начин, ако на произволно $S \in \mathbf{S}$ съпоставим породеното от него $L \in \mathbf{L}$, стигаме до изображение $\lambda: \mathbf{S} \to \mathbf{L}$. Взети заедно, теореми 1 и 2 изразяват, че σ и λ са взаимно обратни биекции.

§ 8.5. АДИТИВНИ ПРОСТРАНСТВА

В § 3 на всяко измеримо пространство $\langle X, S, \mu \rangle$ съпоставихме по едно пространство на Даниел $\langle X, \Phi, \int \rangle$. Тук Φ е съвкупността на стъпаловидните функции

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \tag{1}$$

където $a_i \in \mathbf{R}$ и $A_i \in S$, а интегралът бе определен с равенството

$$\int f=\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \tag{2}$$

В същност направените в § 3 разсъждения имат по-широка сфера на действие: ако се анализира съдържанието на този параграф, може да се види, че не всички аксиоми от определението на измеримо пространство бяха съществени при построяването на Φ; при тази конструкция бяха използвани само аксиомите а) — г) и ж) от § 2. Да повторим тези аксиоми.

Нека X е произволно множество, $\mathbf{S}$ е съвкупност от подмножества на X и $\mu: \mathbf{S} \to [0, \infty)$ е изображение. Понякога е целесъобразно да се разглеждат тройки $\langle X, \mathbf{S}, \mu \rangle$, за които са изпълнени следните условия:

а) $\emptyset \in \mathbf{S}$;

б) ако $A \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbf{S}$, то $A \cup B \in \mathbf{S}$;

в) ако $A \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbf{S}$, то $A \setminus B \in \mathbf{S}$;

г) при всеки избор на $A \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbf{S}$ с $A \cap B = \emptyset$ е в сила

$$\mu(A \cup B)=\mu(A)+\mu(B);$$

д) ако

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

е намаляваща редица от елементи на $\mathbf{S}$ със $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\emptyset$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)=0.$$

Тройките $\langle X, \mathbf{S}, \mu\rangle$, за които са изпълнени горните условия а) — д), ще наричаме *адитивни пространства*.

Разбира се, измеримите пространства са специален вид адитивни пространства. Вече видяхме, че те са еквивалентни с лебеговите пространства и поради това притежават интересни и важни свойства, но построяването им изисква определени грижи. За разлика от тях адитивните пространства се наблюдават непосредствено, а, както ще видим, същевременно са суров материал за построяване на измерими пространства.

8.5.1. Пример. Нека a и b са реални числа с $a \leq b$. Ако с Δ означим кой да е от интервалите

$$(3) \qquad (a, b), [a, b), (a, b], [a, b],$$

под *дължина* на Δ се разбира числото $\mu(\Delta)=b-a$. С $\mathbf{S}$ да означим съвкупността на подмножествата A на $\mathbf{R}$, които могат да се представят като обединения на краен брой интервали от вида (3). Изискванията а) — в) за $\mathbf{S}$ се проверяват директно. Очевидно е също, че всяко $A \in \mathbf{S}$ може да се представи и като обединение на краен брой интервали от вида (3), никои два от които не се пресичат. Ако

$$(4) \qquad A=\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$$

е такова представяне на A, полага се $\mu(A)=\sum_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i)$. Независимостта на това определение от конкретния избор на представянето (4) е очевидна. Също така непосредствена е и проверката на адитивността г). Ясно е също така, че ако е в сила включване от вида

$$(5) \qquad A\subset\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i,$$

където $A \in \mathbf{S}$ и Δ_i са ограничени интервали, в сила е

$$(6) \qquad \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i).$$

От (5) следва (6) даже и при $k=\infty$, но това не е така очевидно. Наистина всичко казано по-горе важи и ако $\mathbf{R}$ се замести с рационалната права $\mathbf{Q}$. Но там от (5) не следва (6) при $k=\infty$ (защо?). Ние няма да се нуждаем от това твърдение при $k=\infty$ и поради това няма да се занимаваме с него, но предлагаме на читателя да се опита да го докаже, като използува метода, с който си служим по-нататък.

И така а) — г) са добре познати свойства на дължините на отсечки, но проверката на д) изисква повече грижи. Да разгледаме редица

$$(7) \qquad A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

от елементи на S със $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Да изберем произволно положително число ε. Всяко от множествата (7) е обединение на краен брой интервали. Общо в цялата редица имаме изброимо много краища на такива интервали:

$$(8) \qquad c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

Покриваме c_1 с отворен интервал δ_1 с дължина $\frac{\varepsilon}{2}$, c_2 с отворен интервал δ_2 с дължина $\frac{\varepsilon}{2^2}$. И така нататък. Така ще получим редица

$$(9) \qquad \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$$

от отворени интервали, за която

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\delta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

и освен това всяка от точките (8) принадлежи на поне един от интервалите (9).

Сега да разгледаме компактното множество $\bar{A}_1$. Ако $x \in \bar{A}_1$, ще съществува $n_x = 1, 2, \dots$, за което $x \bar{\in} A_{n_x}$, тъй като сечението на множествата (7) е празно. Ако сега x не е никоя от точките (8), ясно е, че съществува и цял отворен интервал Δ_x, за който $x \in \Delta_x$ и $\Delta_x \cap A_{n_x} = \varnothing$. Така получените интервали Δ_x и интервалите (9) очевидно образуват отворено покритие на $\bar{A}_1$. Тъй като $\bar{A}_1$ е компактно множество, само краен брой от тези интервали ще продължат да покриват A_1. Нека такива са

$$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_m} \text{ и } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l.$$

Тогава от (7) следва

$$(11) \qquad A_n \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_{x_i}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} \delta_j\right)$$

за всяко $n = 1, 2, \dots$ Тъй като точките $x_1, x_2, \dots, x_m$ са краен брой, от избора на интервалите Δ_x и от (11) следва, че за всички достатъчно големи n ще имаме

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{l} \delta_j,$$

и тъй като от (5) следва (6), то

$$\mu(A_n) \leq \sum_{j=1}^{l} \mu(\delta_j) < \varepsilon$$

съгласно (10). С това проверката на д) е приключена.

Този пример дава възможност за едно независимо построяване на интегрирането в $\mathbf{R}$. В следващия параграф той ще бъде пренесен и в $\mathbf{R}^n$.

Адитивните пространства притежават някои от свойствата на измеримите пространства. Така например обединението и сечението на краен брой елементи на $\mathbf{S}$ са елементи на $\mathbf{S}$. Също мярката μ е монотонна и е крайно адитивна. Доказателствата са същите, както и в § 2.

За произволно адитивно пространство да разгледаме съвкупността на стъпаловидните функции (1). Тъй като лема 3.1 се пренася без изменения в този по-общ случай, всяка стъпаловидна функция притежава стандартни представяния. Като се използува важещата и сега лема 3.2, с помощта на равенството (2) във Φ може да се въведе интеграл. Без каквито и да е промени в сравнение с § 3 за тройката $\langle X, \Phi, \int \rangle$ се установява, че е пространство на Даниел. По този начин на всяко адитивно пространство съответствува по едно пространство на Даниел. Ще казваме, че последното е *породено* от $\mathbf{S}$.

Различие в сравнение с § 3 има само в описанието на пренебрежимите множества. Ето как изглежда то в разглеждания случай.

8.5.2. Предложение. *Едно множество Ξ в X е пренебрежимо спрямо Φ точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува редица*

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

от елементи на $\mathbf{S}$ със следните две свойства:

$$\Xi \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon. \tag{13}$$

Доказателство. Нека най-напред множеството Ξ е пренебрежимо. Тогава съществува редица

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$$

от стъпаловидни функции с

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty \tag{14}$$

за всяко $x \in \Xi$ и

$$\int f_n \leq C \tag{15}$$

за някакво число $C > 0$ и за всяко $n = 1, 2, \dots$

Да изберем сега произволно положително число ε, да го фиксираме и да положим

$$B_n = \left\{ x \in X:\ f_n(x) \geq \frac{2C}{\varepsilon} \right\}$$

за $n = 1, 2, \dots$ Така получаваме растяща редица

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$$

от елементи на S, за която съгласно (14) е в сила

(16) $$\Xi \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Същевременно от определението на B_n следва $\frac{2C}{\varepsilon} \chi_{B_n} \leq f_n$, което заедно с (15) дава

$$\frac{2C}{\varepsilon} \mu(B_n) \leq \int \frac{2C}{\varepsilon} \chi_{B_n} \leq \int f_n \leq C,$$

и следователно

(17) $$\mu(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сега да положим

$$A_1 = B_1,\ A_2 = B_2 \setminus B_1, \ldots,\ A_n = B_n \setminus B_{n-1}, \ldots$$

От това определение и от (16) следва (12). Неравенството (13) пък се получава от равенствата

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(B_1) + \sum_{i=2}^{n} (\mu(B_i) - \mu(B_{i-1})) = \mu(B_n),$$

валидни за $n = 1, 2, \ldots$, и от (17). Така е доказана необходимостта.

За да установим достатъчността, за произволно $N = 1, 2, \ldots$ да образуваме редица

$$A_{N1}, A_{N2}, \ldots, A_{Nn}, \ldots \qquad (A_{Nn} \in S)$$

с

$$\Xi \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{Nn}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{Nn}) \leq \frac{1}{2^N}.$$

Ако положим $f_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{N=1}^{n} \chi_{A_{Nk}}$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$, получаваме растяща редица от стъпаловидни функции със свойствата (14) и (15) с $C = 1$. Така предложението е доказано.

Ако образуваме минималното лебегово разширение на Ф, ще получим лебегово пространство $\langle X, L, \int \rangle$. Това води до следното твърдение:

8.5.3. Теорема. *Всяко адитивно пространство може да се разшири до измеримо пространство по такъв начин, че мярката в него да е продължение на мярката на първото.*

Доказателство. За произволно адитивно пространство разглеждаме породеното от него пространство на Даниел, образуваме минималното лебегово разширение на последното и за така полученото лебегово пространство разглеждаме породеното от него измеримо пространство. То очевидно притежава желаните свойства. С това теоремата е доказана.

В същност горното доказателство дава минималното измеримо разширение на зададеното адитивно пространство. Доказателството на теорема 4.2 показва, че то се състои от множествата от вида

$$A=\left(\Xi_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right)\right) \setminus \Xi_2,$$

където $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ е редица от елементи на $\mathbf{S}$ с ограничени мерки, а Ξ_1 и Ξ_2 са пренебрежими множества.

§ 8.6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА АДИТИВНИ ПРОСТРАНСТВА

В предишния параграф видяхме, че на всяко адитивно пространство $\langle X, \mathbf{S}, \mu\rangle$ естествено съответствува пространство на Даниел, което с използуване на общата конструкция от шеста глава води до лебегово пространство. По този начин пример 5.1 дава възможност за директно построяване на лебегово интегриране в $\mathbf{R}$. Ако желаем със същата леснина да стигнем и до лебеговото интегриране в $\mathbf{R}^m$, имаме нужда от една обща конструкция, която се прилага и в други случаи.

Нека $\langle X, \mathbf{S}_X, \mu_X\rangle$ и $\langle Y, \mathbf{S}_Y, \mu_Y\rangle$ са две адитивни пространства. С $\Phi_{X\times Y}$ ще означим съвкупността на всички функции $f: X\times Y \to \mathbf{R}$, които могат да се представят във вида

(1) $$f(x, y)=\sum_{i=1}^{n} c_i\, \chi_{A_i}(x)\, \chi_{B_i}(y) \qquad (x\in X,\ y\in Y),$$

където $c_i \in \mathbf{R}$, $A_i \in \mathbf{S}_X$ и $B_i \in \mathbf{S}_Y$. Като си послужим с лема 3.1, можем да намерим елементи

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_p$$

на $\mathbf{S}_X$, никои два от които не се пресичат и такива, че всяко A_i да е обединение на няколко от тях. Тогава всяко χ_{A_i} ще бъде сбор на няколко от характеристичните функции

(2) $$\chi_{A'_1}, \chi_{A'_2}, \ldots, \chi_{A'_p}.$$

Аналогично съществуват и елементи

$$B'_1, B'_2, \ldots, B'_q$$

на $\mathbf{S}_Y$, които не се пресичат два по два и са такива, че всяко χ_{B_i} да е сбор на няколко от характеристичните функции

(3) $$\chi_{B'_1}, \chi_{B'_2}, \ldots, \chi_{B'_q}.$$

Ако заместим χ_{A_i} и χ_{B_i} с така описаните им представяния чрез (2) и (3) и извършим приведение, ще получим ново представяне (1) на f, което ще удовлетворява и условията

(4) $$(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$$

при $i \neq j$. Такива представяния на f ще наричаме *стандартни*.

Поради (4) при стандартно представяне (1) на f за всяко $(x, y) \in X \times Y$ най-много едно от събираемите в (1) може да е различно от нула. Ето защо

$$|f(x, y)| = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \, \chi_{A_i}(x) \, \chi_{B_i}(y)$$

и

$$(\inf(f, 1))(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \min(c_i, 1) \, \chi_{A_i}(x) \, \chi_{B_i}(y).$$

Така виждаме, че $\Phi_{X \times Y}$ удовлетворява и първите две аксиоми от определението на пространство на Даниел. Сега във $\Phi_{X \times Y}$ ще въведем интеграл. При всяко фиксирано $x \in X$ функцията (1) на y е стъпаловидна в Y. В съвкупността Φ_Y на стъпаловидните функции в Y вече въведохме интеграл, който ще означаваме с $\int\limits_Y$. Но тогава $f(x, y)$ може да се интегрира спрямо y и (1) дава

(5) $$\int\limits_Y f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}(x) \, \mu(B_i)$$

за всяко $x \in X$. Така получихме една функция (5) на x. Тя очевидно е стъпаловидна в X. Тъй като и в съвкупността Φ_X на стъпаловидните в X функции имаме интеграл $\int\limits_X$, отново можем да интегрираме и получаваме

(6) $$\int\limits_X \Big[\int\limits_Y f(x, y)\Big] = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i) \, \mu(B_i).$$

Сега по определение полагаме

(7) $$\int\limits_{X \times Y}\!\!\int f(x, y) = \int\limits_X \Big[\int\limits_Y f(x, y)\Big].$$

Разбира се, в (7) се използува само f, т. е. определението (7) не зависи от някакво конкретно представяне на f във вида (1). Равенството (6) пък показва, че за всяко представяне на f във вида (1) е в сила

(8) $$\int\limits_{X \times Y}\!\!\int f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i) \, \mu(B_i).$$

От (7) директно следва, че $\iint\limits_{X \times Y}$ е позитивен линеен функционал.

Тъй като аксиомата за граничния преход е изпълнена и във Φ_X, и във Φ_Y, също от (7) непосредствено се получава, че тя се удовлетворява и от $\iint\limits_{X \times Y}$. Така получихме едно пространство на Даниел $\langle X \times Y, \Phi_{X \times Y}, \iint\limits_{X \times Y} \rangle$.

Да отбележим, че (8) не бе използувано в това построение. То обаче е необходимо при снабдяването на $X \times Y$ със структура на адитивно пространство, което предстои. В $X \times Y$ да разгледаме съвкупността на $S_{X \times Y}$ на всевъзможните крайни обединения

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i,$$

където $A_i \in S_X$ и $B_i \in S_Y$.

Разбира се, празното множество принадлежи на $S_{X \times Y}$, а също обединение на два елемента на $S_{X \times Y}$ е отново елемент на $S_{X \times Y}$. От равенството

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times D) \cup (A \times B \setminus D)$$

се получава, че и разликата на елементи на $S_{X \times Y}$ отново е елемент на $S_{X \times Y}$. По този начин са проверени аксиомите а) — в) от определението на адитивно пространство (вж. § 5).

Сега в $S_{X \times Y}$ ще въведем мярка. Както и по-горе, се проверява, че за всяко $A \in S_{X \times Y}$ има представяне

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i, \tag{9}$$

където $A_i \in S_X$, $B_i \in S_Y$ и

$$(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset \tag{4}$$

при $i \neq j$. При (9) определяме

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\ \mu(B_i). \tag{10}$$

Нужно е, разбира се, да установим коректността на (10), т. е. независимостта на така въведеното $\mu(A)$ от конкретното представяне (9) на A с (4). Но от (9) и (4) следва

$$\chi_A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\ \chi_{B_i}(y)$$

за всички $(x, y) \in X \times Y$. Ето защо $\chi_A \in \Phi_{X \times Y}$ и поради това може да се интегрира. Сега от (8) се получава

$$\iint\limits_{X \times Y} \chi_A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, \mu(B_i)$$

и от (10) следва

(11) $$\mu(A) = \iint\limits_{X \times Y} \chi_A(x, y),$$

с което коректността на определението на μ е проверена. От нея веднага следва и адитивността на μ.

Накрая да проверим и аксиомата д) от определението на адитивно пространство. Нека

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

е намаляваща редица от елементи на $S_{X \times Y}$ със $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Но тогава редицата от характеристичните функции

(12) $$\chi_{A_1} \geqq \chi_{A_2} \geqq \ldots \geqq \chi_{A_n} \geqq \ldots$$

е намаляваща и клони към нула навсякъде в $X \times Y$. Тъй като $\Phi_{X \times Y}$ е пространство на Даниел, редицата от интегралите на (12) трябва да клони към нула. Поради (11) това означава, че редицата от мерките

$$\mu(A_1),\ \mu(A_2), \ldots,\ \mu(A_n), \ldots$$

също клони към нула и построението на адитивното пространство $S_{X \times Y}$ е завършено.

Така построеното адитивно пространство $S_{X \times Y}$ се нарича *произведение* на S_X и S_Y. На него, разбира се, съответствува пространство на Даниел. Читателят ще провери, че то е точно построеното погоре пространство $\langle X \times Y,\ \Phi_{X \times Y}, \iint\limits_{X \times Y} \rangle$. То бе построено предварително, понеже така се опростява проверката на коректността на определението (10) и на аксиомата д) за $S_{X \times Y}$. Да отбележим изрично, че при $A \in S_X$ и $B \in S_Y$ имаме $A \times B \in S_{X \times Y}$ и съгласно (10)

$$\mu(A \times B) = \mu(A)\ \mu(B).$$

Нека L_X и L_Y са минималните лебегови разширения съответно на S_X и S_Y. Непосредствено се проверява, че са изпълнени условията на теоремата на Фубини (вж. § 6.11). Ето защо, *ако $L_{X \times Y}$ е минималното лебегово разширение на $S_{X \times Y}$ и $F(x, y) \in L_{X \times Y}$, то почти за всички $x \in X$ функцията $F(x, y)$ на y е сумируема в Y. Така се получава функция*

$$f(x) = \int\limits_Y F(x, y),$$

дефинирана почти навсякъде в X. Ако додефинираме f произволно, то $f \in L_X$ и

$$\int_X f = \iint_{X \times Y} F.$$

Така построеното лебегово пространство $L_{X \times Y}$ зависи само от L_X и L_Y, но не и от специалния характер на адитивните пространства S_X и S_Y, използувани при построяването на $S_{X \times Y}$ и $L_{X \times Y}$. Функциите от вида

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\ g_i(y),$$

където $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $f_i \in L_X$ и $g_i \in L_Y$, принадлежат на $L_{X \times Y}$ и (съгласно теоремата на Фубини) се интегрират така:

$$\iint_{X \times Y} F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_X f_i \int_Y g_i.$$

Те очевидно образуват гъсто подпространство на $L_{X \times Y}$.

8.6.1. Пример. В пример 5.1 се убедихме, че крайните обединения на ограничени интервали върху правата с мярка обичайната дължина образуват адитивно пространство $\langle \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mu \rangle$, което може да се постави в основата на интегрирането в $\mathbf{R}$. Неговият квадрат

$$\langle \mathbf{R}^2, \mathbf{S}^2, \mu \rangle \tag{13}$$

може да послужи за построяване на теорията на интеграла в $\mathbf{R}^2$. Разбира се, за същата цел може да се използува и съвкупността на финитните функции в равнината, снабдена с обичайния риманов интеграл, но погледнато по същество, той се построява именно с помощта на (13).

Читателят ще съобрази по какъв начин трябва да се въведе произведение на произволен краен брой адитивни пространства. Това ще му помогне например да си изясни построяването на интеграла в $\mathbf{R}^m$. В основата ще бъдат паралелепипедите в $\mathbf{R}^m$, т. е. множествата от вида

$$\Delta = \prod_{i=1}^{m} \delta_i,$$

където δ_i са ограничени интервали. Ако краищата на δ_i са a_i и b_i, мярката на Δ се определя с

$$\mu(\Delta) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_m - a_m).$$

Както и при финитните функции (вж. пример 6.11.1), и тук теоремата на Фубини позволява интегрирането в $\mathbf{R}^{m+n}$ да се сведе до интегриране в $\mathbf{R}^n$ и в $\mathbf{R}^m$.

§ 8.7. ЗА ТЕОРИЯТА НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

След като бе внесена яснота в основите на тази теория, се разбра, че тя е една (обширна) част на еквивалентните теории на мярката и на интеграла. Тук имаме възможност да въведем само основните ѝ понятия.

Под *вероятностно пространство* се разбира всяко измеримо пространство $\langle X, S, \mu \rangle$, за което $X \in S$ и $\mu(X)=1$. По този начин всяко измеримо множество в X се съдържа в сумируемото множество X и следователно е сумируемо (вж. § 1). Елементите на S се наричат *събития*. За всяко събитие A числото $\mu(A)$ се нарича *вероятност* на A. Очевидно

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu(X)=1,$$

така че вероятността на всяко събитие е число от интервала $[0, 1]$. Цялото X се нарича *достоверно събитие*, а $\emptyset$ — *невъзможно събитие*. Ако е дадена една редица

$$(1) \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

от събития, множествата

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

също са събития. За първото от тях интуитивно казваме, че се наблюдава точно когато се наблюдават всичките събития (1), а за второто — точно когато се наблюдава поне едно от събитията (1). Ако A е събитие, $X \setminus A$ също е събитие и то се нарича *противоположно* на A. Тази терминология се съгласува с интуитивната представа за „вероятностен" избор на точка $x \in X$ (произволно „хвърляне" на точка x в X), при което се счита, че събитието A се наблюдава точно когато x се окаже в A.

Почти всички въведени дотук понятия от теорията на мярката и интеграла имат и вероятностни названия. Така например измеримите функции $f: X \to \mathbb{R}$ се наричат *случайни величини*. Мярката на множеството

$$\{x \in X: \ a \leq f(x) \leq b\}$$

тогава се интерпретира като вероятността при случаен избор на x от X числото $f(x)$ да попадне в интервала $[a, b]$. Ако случайната величина f е сумируема, интегралът

$$m=\int_X f$$

се нарича *математическо очакване* на f. Ако f има и сумируем квадрат, числото

$$\left(\int_X (f-m)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(вж. девета и десета глава) се нарича *дисперсия* на f. Аналогично и произведението на краен брой вероятностни пространства притежава вероятностна интерпретация, но на този въпрос няма да се спираме тук.

Не само въведените дотук понятия, но и доказаните теореми са важни за теорията на вероятностите. Някои от тях имат даже и вероятностни названия. Така например теорема 5.3 се нарича *теорема за продължение на вероятностите*.

Тази наука се развива на свой език, първите няколко думи от който вече въведохме. Той апелира към своеобразна интуиция, която е твърде съществена за изследователите. Разбира се, по принцип всичко може да се преведе на развиваният в тази книга език на анализа и получените резултати често са интересни и за самия анализ.

§ 8.8. СУМИРУЕМИ МНОЖЕСТВА В $\mathbb{R}^m$

При интегрирането в $\mathbb{R}^m$ е целесъобразно за изходна съвкупност от функции да се избере съвкупността Φ на финитните функции или пък съвкупността, състояща се от крайните линейни комбинации на характеристичните функции на паралелепипеди в $\mathbb{R}^m$. По-нататък ще се убедим в еквивалентността на тези два подхода.

Да започнем със съвкупността Φ на финитните функции. В § 7.7 — 7.9 изучихме измеримите множества и функции в $\mathbb{R}^m$ в този случай и видяхме, че при всеки интеграл във Φ те съвпадат с точност до пренебрежими множества с бореловите множества и функции в $\mathbb{R}^m$.

Оттук преди всичко следва, че всяко ограничено борелово множество в $\mathbb{R}^m$ е сумируемо при всеки избор на интеграла във Φ. Наистина характеристичната му функция очевидно притежава финитна мажоранта и следователно е сумируема. Така виждаме, че компактните множества в $\mathbb{R}^m$ са винаги сумируеми. Същото важи и за паралелепипедите в $\mathbb{R}^m$, които са произведения от вида

$$\Delta=\prod_{i=1}^{m} \delta_i,$$

където δ_i са ограничени интервали. Също така отворените множества са борелови и поради това ограничените отворени множества винаги са сумируеми.

Нека сега U е произволно отворено множество и за всяко $n=1, 2, \ldots$ с O_n е означено отвореното кълбо с център в началото и радиус n. Тогава множествата

$$(1) \qquad U\cap O_1\subset U\cap O_2\subset \ldots \subset U\cap O_n\subset \ldots$$

са ограничени и отворени и следователно са сумируеми. Тъй като, от друга страна, $U=\bigcup_{n=1}^{\infty} (U\cap O_n)$, от свойствата на мярката (вж. § 8.2) следва, че множеството U е сумируемо точно когато редицата от мерките на (1) е ограничена и тогава е изпълнено равенството

$$\mu(U)=\lim_{n\to\infty}\mu(U\cap O_n).$$

Читателят ще съобрази, че всяко отворено множество U може да се представи като обединение на изброимо много паралелепипеди $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ от вида $\Delta=\prod_{i=1}^{m}[a_i, b_i)$ (полузатворени паралелепипеди), които нямат общи точки два по два. От тоталната адитивност на мярката следва, че е изпълнено равенството

$$\mu(U)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\Delta_n),$$

като U е сумируемо точно когато редът вдясно е сходящ. Така *ние сме в състояние да опишем отворените сумируеми множества и мерките им спрямо някакъв интеграл във* Ф, *стига да познаваме мерките на полузатворените паралелепипеди спрямо този интеграл.* Това позволява да „мерим отвън" всички подмножества на R^m. Ако $A\subset R^m$ и A не се съдържа в сумируемо отворено множество, ще положим

(2) $$\mu^*(A)=\infty.$$

Ако пък A се съдържа в сумируемо отворено множество, $\mu^*(A)$ ще определим с равенството

(3) $$\mu^*(A)=\inf_U\mu(U),$$

където U пробягва съвкупността на всички сумируеми отворени множества, които съдържат A. Ще наричаме $\mu^*(A)$ *външна мярка* на A. Тя е определена за всяко подмножество A на R^m и стойностите ѝ или съвпадат със символа ∞, или пък са неотрицателни реални числа.

Външната мярка не е адитивна, но удовлетворява неравенството

(4) $$\mu^*(A\cup B)\leq\mu^*(A)+\mu^*(B),$$

което може да е строго даже и при $A\cap B=\emptyset$ (докажете това неравенство, като си послужите с дефиницията!). Ето как пренебрежимостта се изразява чрез външната мярка.

8.8.1. Предложение. *Едно множество $A\subset R^m$ е пренебрежимо точно когато $\mu^*(A)=0$.*

Доказателство. Нека най-напред A е пренебрежимо. Тогава (срв. с доказателството на предложение 5.2) съществува растяща редица

$$0\leq\varphi_1\leq\varphi_2\leq\ldots\leq\varphi_n\leq\ldots$$

от финитни функции, за която

(5) $$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\infty$$

за всяко $x\in A$ и

$$\int_{\mathbf{R}^m} \varphi_n \leq C \tag{6}$$

за някаква константа C и за всяко $n=1, 2, \ldots$ Избираме произволно положително число ε и полагаме

$$U_n=\left\{x \in \mathbf{R}^m : \ \varphi_n(x) > \frac{2C}{\varepsilon}\right\}$$

за $n=1, 2, \ldots$ Така получаваме растяща редица

$$U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots \tag{7}$$

от отворени множества, чието обединение $U=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ е, разбира се, отворено. Същевременно от (5) следва

$$A \subset U. \tag{8}$$

От друга страна, от (6) добиваме

$$\mu(U_n)=\int \chi_{U_n} \leq \int \frac{\varepsilon}{2C} \varphi_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

съгласно дефиницията на U_n. Тъй като U е обединение на растящата редица (7) от сумируеми множества, то

$$\mu(U)=\lim_{n\to\infty} \mu(U_n) < \varepsilon$$

съгласно (9). Тъй като ε е произволно положително число, от (8) следва $\mu^*(A)=0$.

Обратно, нека $\mu^*(A)=0$. Тогава за всяко $n=1, 2, \ldots$ съществува сумируемо отворено множество U_n с $U_n \supset A$ и $\mu(U_n) < \frac{1}{n}$. Ако положим

$$V_n=U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$$

за $n=1, 2, \ldots$, множествата V_n отново ще са сумируеми, отворени, ще удовлетворяват неравенствата $\mu(V_n) < \frac{1}{n}$ и включванията $V_n \supset A$, като освен това редицата

$$V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$$

ще бъде намаляваща.

Следователно сечението $V=\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ ще бъде сумируемо и ще имаме

$$\mu(V)=\lim_{n\to\infty} \mu(V_n)=0.$$

Ето защо V е пренебрежимо. Тъй като, от друга страна, $A \subset V$, то и A е пренебрежимо. С това предложението е доказано.

Външната мярка очевидно е монотонна. Ето защо от доказаното предложение и от (4) следва равенството

(10)
$$\mu^*(A)=\mu^*(A \cup B)$$
за всяко $A \subset \mathrm{R}^m$ и за всяко пренебрежимо B.

8.8.2. Предложение. *За всяко сумируемо множество A в R^m е в сила*

(11)
$$\mu(A)=\mu^*(A).$$

Доказателство. По определение характеристичната функция χ_A на A е сумируема. Ето защо съществува фундаментална редица
$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$
от стъпаловидни функции, за която е изпълнено условието

(12)
$$\chi_A(x)=\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$
почти навсякъде в R^m. Да разгледаме отворените множества

(13)
$$U_n=\left\{x \in X: \ \varphi_n(x) > \frac{1}{2}\right\}$$
и да положим

(14)
$$B_k=\bigcap_{n=k}^{\infty} U_n$$
за $k=1, 2, \ldots$ и

(15)
$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Да означим с C съвкупността на всички точки $x \in \mathrm{R}^m$, за които (12) не е изпълнено. Тогава от определенията (13)—(15) следва

(16)
$$A \subset B \cup C \text{ и } B \subset A \cup C.$$

Тъй като A е сумируемо и C е пренебрежимо, от тези включвания следва, че B също е сумируемо и $\mu(B)=\mu(A)$. Сега от първото от включванията (16) и от предложение 1 следва, че твърдението ще бъде доказано, ако за всяко $\varepsilon > 0$ успеем да посочим отворено множество V, което е сумируемо и удовлетворява условията

(17)
$$B \subset V \text{ и } \mu(V \setminus B) \leq \varepsilon.$$

За тази цел всяко от множествата B_k ще разширим до отворено сумируемо множество V_k с $\mu(V_k \setminus B_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ $(k=1, 2, \ldots)$. От (13) следва $\chi_{U_n} \leq 2|\varphi_n|$, поради което всяко от множествата U_n е сумируемо. Сега от (14) не е трудно да се заключи, че за всяко $k=1, 2, \ldots$ съществува $l > k$ с
$$\mu\left(\bigcap_{n=k}^{l} U_n \setminus B_k\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Полагаме
$$V_k=\bigcap_{n=k}^{l} U_n$$
и получаваме множество с желаните свойства. При $V=\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ усло-

вията (17) са изпълнени. Например второто от тях следва от очевидното включване

$$V\setminus B\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(V_k\setminus B_k).$$

С това предложението е доказано.

От (11) следва например, че при (2) не съществува сумируемо множество $U\supset A$, а при (3) инфимумът може да се пресмята по всички сумируеми множества $U\supset A$.

Нека отново A е произволно множество в $\mathbb{R}^m$. Под *вътрешна мярка* $\mu_*(A)$ на A ще разбираме числото

$$\mu_*(A)=\sup_C \mu(C),$$

където C пробягва съвкупността на всички компактни множества, които се съдържат в A. От свойствата на мярката следва, че ако в горното равенство оставим C да пробяга всевъзможните затворени сумируеми подмножества на A, ще стигнем до същото определение.

8.8.3. Предложение. *За всяко сумируемо множество A в $\mathbb{R}^m$ е в сила*

$$\mu(A)=\mu_*(A). \tag{18}$$

Доказателство. Произволно сумируемо множество в $\mathbb{R}^m$ очевидно е обединение на растяща редица от ограничени сумируеми множества. Ето защо от определението на μ_* се вижда, че (18) следва от своя специален случай на ограничено A. Поради това можем да предположим, че A е ограничено. Но тогава съществува затворено ограничено множество F, което съдържа A във вътрешността си.

Да изберем произволно положително число ε и да разгледаме сумируемото множество $F\setminus A$. Съгласно предложение 2 съществува отворено сумируемо множество $U\supset F\setminus A$ с

$$\varepsilon+\mu(F\setminus A)>\mu(U),$$

или, което е същото,

$$\varepsilon+\mu(F)-\mu(A)>\mu(U). \tag{19}$$

Тъй като $U\supset F\setminus A$, то $A\supset F\setminus U$. Освен това множеството $F\setminus U$ е затворено. От друга страна, от (19) следва

$$\mu(F\setminus U)\geq\mu(F)-\mu(U)>\mu(A)-\varepsilon$$

и предложението е доказано.

8.8.4. Предложение. *Едно множество A в $\mathbb{R}^m$ е сумируемо точно когато е изпълнено равенството*

$$\mu_*(A)=\mu^*(A)<\infty. \tag{20}$$

Доказателство. Ако A е сумируемо, (20) следва от предишните две предложения. Обратно, нека за някое $A\subset\mathbb{R}^m$ е в сила (20). Тогава за всяко $n=1, 2, \ldots$ съществуват сумируеми множества B_n и C_n с

$$B_n \subset A \subset C_n$$

(21)

и

$$\mu(C_n - B_n) < \frac{1}{n}\,. \tag{22}$$

Ясно е, че без ограничение на общността могат да се предпо ложат включванията

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \cdots,$$
$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \cdots$$

От тях и от (21) следва, че множествата

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ и } C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \tag{23}$$

са сумируеми и $B \subset A \subset C$. Тъй като, от друга страна, за разликата $C \setminus B$ имаме

$$\mu(C \setminus B) \leqq \mu(C_n \setminus B_n) < \frac{1}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

съгласно (22) и (23), тя е пренебрежима. Ето защо A съвпада със сумируемото множество B с точност до пренебрежимо множество, поради което A е сумируемо. С това предложението е доказано.

Тези разглеждания показват, че *за да се опише измеримото пространство, породено от минималното лебегово разширение спрямо някакъв интеграл във* Φ, *е достатъчно да познаваме само мерките на полузатворените паралелепипеди спрямо този интеграл.* Наистина това еднозначно определя отворените сумируеми множества и мерките им, поради което и външната мярка (която се дефинира само с отворени сумируеми множества и мерките им) е напълно определена. Ако вземем компактно множество C, то се съдържа в ограничено отворено множество U, като при това множеството $U \setminus C$ също е отворено и ограничено. От адитивността на мярката не е трудно да се заключи, че е изпълнено равенството $\mu(C)=\mu(U)-\mu(U \setminus C)$ и следователно мерките на компактните множества също са напълно определени. По този начин е определена и вътрешната мярка. Сега предложение 2 описва сумируемите множества, а кое да е от предложенията 2 или 3 — мерките им. От всичко това не е трудно да се извлече, че *в* $\mathbf{R}^m$ *се получават едни и същи лебегови пространства независимо дали ще тръгваме от позитивни линейни функционали в съвкупността* Φ *на финитните функции или пък от мерки, които превръщат съвкупността* $\mathbf{S}$ *на всевъзможните крайни обединения на полузатворени паралелепипеди в адитивно пространство.*

На този именно подход се основава исторически първата схема за превръщане на $\mathbf{R}^m$ в измеримо пространство.

§ 8.9. ИНВАРИАНТНОТО ИНТЕГРИРАНЕ В $\mathbf{R}^m$

Нека $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ е функция в $\mathbf{R}^m$ и a е вектор в това пространство. С $f_a: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ ще означаваме функцията, определена от равенството $f_a(x)=f(x-a)$ за всяко $x \in \mathbf{R}^m$. За f_a ще казваме, че е получена от f, като последната е подложена на *транслация* с вектор a, или накратко, че f_a е една *транслация* на f. Разбира се, ако φ е финитна функция, всяка нейна транслация φ_a е също финитна.

В съвкупността Φ на финитните функции да разгледаме римановия интеграл (вж. пример 5.2.9). Непосредствено се съобразява, че за произволно $\varphi \in \Phi$ и за всяко $a \in \mathbf{R}^m$ е в сила равенството

$$\int_{\mathbf{R}^m} \varphi_a = \int_{\mathbf{R}^m} \varphi.$$

Оттук, като се проследят постепенно определенията, непосредствено се получава, че и всички въведени в тази книга понятия, които могат да се свържат с така полученото пространство на Даниел, са инвариантни при транслации. Така например, ако пренебрежимо множество се подложи на транслация, отново се получава пренебрежимо множество. Ето защо, ако f принадлежи на минималното лебегово разширение L на Φ, то и всяка транслация на f принадлежи на L и

$$\int_{\mathbf{R}^m} f_a = \int_{\mathbf{R}^m} f \qquad (a \in \mathbf{R}^m).$$

Също транслация на измерима функция е измерима и транслация на измеримо множество е измерима, транслация на сумируемо множество е сумируема и има същата мярка.

Поради тези причини така разгледаното интегриране в $\mathbf{R}^m$ се нарича *инвариантно*. Тъй като е свързано не само с топологията на $\mathbf{R}^m$, а и със събирането, то е най-важното интегриране в $\mathbf{R}^m$.

Обобщавайки, за позитивен линеен функционал I във Φ ще казваме, че е *инвариантен интеграл*, когато за всяко $\varphi \in \Phi$ и за всяко $a \in \mathbf{R}^m$ е в сила

$$I(\varphi_a)=I(\varphi).$$

Оттук непосредствено следва, че споменатите свойства на римановия интеграл $\int$ са присъщи и на всеки инвариантен интеграл. Следващата теорема показва, че освен римановия по същество няма други инвариантни интеграли в $\mathbf{R}^m$.

8.9.1. Теорема. *За всеки инвариантен интеграл I във Φ съществува константа c, за която е изпълнено равенството*

$$I(\varphi)=c\int \varphi \tag{1}$$

за всяко $\varphi \in \Phi$.

Доказателство. Да означим мярката, породена от I, с μ_I, а онази от $\int$ — с μ. Да изберем произволно числото $n=1, 2, \ldots$, да го фиксираме и да разгледаме кубовете Δ_n, определени от неравенствата

$$\frac{k_i}{2^n} \leq x_i < \frac{k_i+1}{2^n} \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

където $k_1, k_2, \ldots, k_m$ пробягват независимо съвкупността на целите числа. При фиксирано n всички те се получават един от друг с подходящи транслации. Ето защо от инвариантността следва, че за всеки два такива куба Δ_n и Δ_n' са изпълнени равенствата

(2)
$$\mu_I(\Delta_n)=\mu_I(\Delta_n'),$$

(3)
$$\mu(\Delta_n)=\mu(\Delta_n').$$

Да положим $c=\mu_I(\Delta_1)$. За всяко $n=1, 2, \ldots$ кой да е от кубовете Δ_1 очевидно е обединение на 2^{mn} на брой непресичащи се куба от вида Δ_n. От адитивността и от (2), (3) следва

$$c=\mu_I(\Delta_1)=2^{mn}\ \mu_I(\Delta_n),$$

$$1=\mu(\Delta_1)=2^{mn}\ \mu(\Delta_n),$$

поради което

(4)
$$\mu_I(\Delta_n)=c\ \mu(\Delta_n).$$

Ако $c=0$, от (4) следва $\mu_I\ (\Delta_n)=0$ за всеки куб Δ_n. От друга страна, читателят ще съобрази, че всяко отворено множество $U\subset \mathbf{R}^m$ е обединение на изброимо много непресичащи се кубове от вида Δ_n. Ето защо всяко такова множество ще се окаже сумируемо спрямо I и ще имаме $\mu_I(U)=0$. Оттук съгласно предишния параграф μ_I е тъждествено нула върху сумируемите множества, поради което I също е тъждествено нула. Ето защо (1) с $c=0$ очевидно е изпълнено.

Ако пък $c \neq 0$, от (4) аналогично следва, че отворените сумируеми спрямо I и спрямо $\int$ подмножества на $\mathbf{R}^m$ са едни и същи и за всяко такова множество U имаме $\mu_I(U)=c\ \mu\ (U)$. Оттук с помощта на предишния параграф следва, че сумируемите множества спрямо I и спрямо $\int$ са едни и същи, и имаме $\mu_I(A)=c\ \mu(A)$ за всяко такова множество A. От теорема 4.1 сега не е трудно да се извлече, че и сумируемите функции спрямо I и спрямо $\int$ са едни и същи и е изпълнено равенството

$$I(f)=c\int f$$

за всяка такава функция. Оттук (1) се получава директно. С това теоремата е доказана.

§ 8.10. СЪЩЕСТВУВАНЕ НА НЕИЗМЕРИМИ МНОЖЕСТВА

В § 7.7—7.9 видяхме, че всички функции, с които класическият анализ по принцип работи, са измерими. Тук ще се убедим, че за инвариантния интеграл върху правата все пак съществуват неизмерими множества. Читателят сам ще съобрази как да пренесе разглежданията за инвариантния интеграл в $\mathbf{R}^m$.

Да означим с $\mathbf{Q}$ съвкупността на рационалните числа. За две реални числа a и b ще се условим да пишем $a \sim b$, когато $a - b \in \mathbf{Q}$. Непосредствено се съобразява, че така определената двучленна релация $\sim$ е релация за еквивалентност в $\mathbf{R}$. Ето защо тя разлага $\mathbf{R}$ в класове. При това всеки такъв клас пресича интервала $[0, 1]$. С помощта на аксиомата за избора от сечението на всеки такъв клас с интервала $[0, 1]$ избираме по един елемент. Така получаваме множество $M \subset [0, 1]$.

Ще покажем, че M не е измеримо. Ако допуснем противното, от ограничеността на M би следвало, че M е сумируемо. Тогава съществуват само две възможности $\mu(M)=0$ и $\mu(M)>0$.

Да започнем със случая $\mu(M)=0$. Тъй като интегралът е инвариантен, пренебрежимостта се запазва при транслации. Ето защо за всяко реално a множеството $a+M$ е пренебрежимо. Но от определението на M непосредствено следва

$$\mathbf{R}=\bigcup_{x \in \mathbf{Q}} (x+M).$$

Излиза, че $\mathbf{R}$ е обединение на изброимо много пренебрежими множества. Следователно самото $\mathbf{R}$ би трябвало да е пренебрежимо, което не е вярно, понеже интегралът не е тъждествено нула. Така се убедихме, че случаят $\mu(M)=0$ е невъзможен.

Нека сега $\mu(M)>0$. Поради инвариантността всяка транслация $a+M$ на M е сумируема и е в сила равенството

$$\mu(a+M)=\mu(M). \tag{1}$$

Да изберем сега цялото положително n така, че да удовлетворява неравенството $n > \dfrac{2}{\mu(M)}$, и нека

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

са n на брой рационални числа от интервала $[0, 1]$. От определението на M следва

$$(x_i+M) \cap (x_j+M)=\varnothing$$

при $i \neq j$. Ето защо от (1) и от адитивността се получава

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i+M)\right)=n\,\mu(M)>2.$$

От друга страна, от $x_i \in [0, 1]$ и $M \subset [0, 1]$ следва $\bigcup_{i=1}^{n} (x_i+M) \subset [0, 2]$, поради което

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+M)\right)\leq 2.$$

Така отново получихме противоречие. С това е показано, че множеството M не е измеримо.

Задачи към осма глава

По-нататък $\langle X, L, \int\rangle$ означава произволно пространство на Лебег.

Елементарни свойства на мярката

Задача 1 (принцип за чекмеджетата). Нека $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ и A са сумируеми множества, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ и $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)>\mu(A)$. Тогава съществуват $i, j = 1, 2, \dots$ с $i\neq j$ и $\mu(A_i\cap A_j)>0$.

Задача 2. Нека $\Delta = A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ е изпъкнал петоъгълник в равнината. Да се докаже, че съществуват различни $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$, за които транслациите $\overrightarrow{A_0 A_i}+\Delta$ и $\overrightarrow{A_0 A_j}+\Delta$ имат сечение с положително лице.

Задача 3 (принцип за включването и изключването) Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са сумируеми множества. Да се докаже, че

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{1\leq i_1\leq n}\mu(A_{i_1})-\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2})$$

$$+\sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})+\dots$$

$$+(-1)^{n-1}\mu(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n).$$

Задача 4. За всяко $f\in L$ множеството $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ може да се представи като обединение на изброимо много сумируеми множества.

Задача 5. Едно подмножество на X е измеримо точно когато сечението му с всяко сумируемо множество е сумируемо.

Задача 6. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е произволна функция и D е съвкупността на точките $x\in\mathbf{R}$, в които f е диференцируема и $f'(x)=0$. Да се докаже, че $f(D)$ е пренебрежимо спрямо $L(\mathbf{R})$.

Лебегови разширения

Задача 7. Едно подмножество на X е неглективно точно когато сечението му с всяко сумируемо множество е пренебрежимо.

Задача 8. Нека $\mathbf{N}$ е съвкупност от подмножества на X. Да се докаже, че L притежава лебегово разширение, спрямо което елементите на $\mathbf{N}$ са пренебрежими, точно когато всяко сумируемо множество, което се съдържа в изброимо обединение на елементи на $\mathbf{N}$, е пренебрежимо спрямо L.

Задача 9. Нека L' е лебегово разширение на L. Тогава сумируемите спрямо L' множества са множествата от вида $(A\cup B)\setminus C$, където A е сумируемо спрямо L, а B и C са пренебрежими спрямо L'.

Теорема на Фубини

Задача 10. При означенията на § 8.6 да се докаже, че:

а) ако A и B са измерими множества съответно в X и Y, то $A \times B$ е измеримо в $X \times Y$;

б) ако $f(x)$ и $g(y)$ са измерими функции съответно в X и Y, функцията $f(x)g(y)$ е измерима в $X \times Y$;

в) нека в X и Y съществуват сумируеми функции, които са положителни навсякъде, а $H : X \times Y \to \mathbf{R}$ е измерима функция, за която функцията $H(x, y)$ на y принадлежи на L_Y за почти всички $x \in X$ и функцията $\int |H(x, y)|\, dy$ на x принадлежи на L_X. Да се докаже, че тогава H е сумируема.

Упътване. б) Разгледайте най-напред случая $g = 1$, като приложите а). в) Приложете теоремите на Фубини и Фату.

Неизмерими множества

Задача 11. Да се докаже, че (при наличието на континуумхипотезата) множеството A от зад. 6, б), гл. 6 не е измеримо.

Задача 12. Да се докаже, че:

а) ако $A \subset \mathbf{R}$ е непренебрежимо и измеримо спрямо L ($\mathbf{R}$) множество, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува неизроден и ограничен интервал Δ, за който $\mu (A \cap \Delta) > (1 - \varepsilon)\, \mu (\Delta)$;

б) ако $A \subset \mathbf{R}$ е измеримо множество и съществуват произволно малки, различни от нулата числа r с $A + r = A$, то A или $\mathbf{R} \setminus A$ е пренебрежимо.

Упътване. а) Нека $\lambda = \sup \frac{\mu(A \cap \Delta)}{\mu(\Delta)}$, където Δ пробягва съвкупността на всевъзможните неизродени ограничени интервали. Тогава $0 < \lambda \leq 1$. За произволно $\varepsilon > 0$ използвайте предложение 8.2, за да покриете $A \cap \Delta$ с редица от отворени интервали $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\sigma_n) < \mu\ (A \cap \Delta) + \varepsilon.$$

От неравенствата

$$\mu(A \cap \Delta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap \sigma_n) \leq \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\sigma_n) < \lambda\ (\mu(A \cap \Delta) + \varepsilon)$$

извлечете след граничния преход $\varepsilon \to 0$, че $1 \leq \lambda$.

б) Сведете към а).

Задача 13. Нека Φ е ултрафилтър в съвкупността $\mathbf{N}$ на целите положителни числа, съставен само от безкрайни множества. Да означим с A съвкупността на всички ирационални числа $x = n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}$, където n е цяло и за всяко $i = 1, 2, \ldots$ числото s_i е 0 или 1, за които е изпълнено условието $\{i \in \mathbf{N} : s_i = 1\} \in \Phi$. Да се докаже, че множеството A не е измеримо спрямо $L(\mathbf{R})$.

Упътване. Убедете се най-напред, че за всяко двоично рационално число r е в сила $r + A = A$, и като си послужите със зад. 4, гл. 1, установете, че $1 - A$ е допълнението на A до съвкупността I на ирационалните числа. Като забележите, че A и $1 - A$ са едновременно пренебрежими, послужете си със зад. 12, б).

Задача 14. Ако множеството $A \subset X$ се съдържа в сумируемо множество, то сред мерките на сумируемите подмножества на A има една най-голяма.

Задача 15. Нека неглективните множества в X са пренебрежими. Да се докаже, че L притежава същински лебегови разширения точно когато в X има неизмерими множества.

Упътване. Използвайте зад. 7, 8 и 14.

Аксиома на Стоун

Задача 16. Нека за тройката $\langle X, L, \int\rangle$ са изпълнени аксиомите а), в) и г) от определението на пространство на Даниел (вж. § 5.1), а също и аксиомите д) и е) от определението на пространство на Лебег (вж. § 5.8). Също както и при лебеговите пространства, въвеждаме понятията измерима функция, измеримо множество, сумируемо множество и стъпаловидна функция. Да се докаже, че следващите твърдения са еквивалентни:

а) в L е изпълнена аксиомата на Стоун;
б) за всяко $f \in L$ с $f \geq 0$ е в сила $\inf(f, 1) \in L$;
в) за всяко $f \in L$ и за всяко реално a множеството $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ е измеримо;
г) за всяко $f \in L$ функцията f^2 е измерима;
д) съвкупността на стъпаловидните функции е гъста в L;
е) множеството X е измеримо.

Девета глава
ФУНКЦИИ СЪС СУМИРУЕМИ СТЕПЕНИ

Вече се запознахме с банаховите пространства $C(X)$, където X е компактно множество в нормирано пространство. Видяхме също, че задачата за попълване на пространствата на Даниел до банахови с помощта на първата норма води до лебеговите пространства и че това е сериозно придвижване в теорията на интеграла. Тук ще посочим други примери, които могат да се получат с аналогична процедура. Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег и Φ е съвкупността на стъпаловидните функции. Наред с първата норма във Φ за всяко $p > 1$ може да се въведе и нормата $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$. Попълвайки Φ спрямо нея, стигаме до пространствата L^p. Аналогично, ако си послужим с комплексни стъпаловидни функции, ще стигнем до пространствата L^p_{C}. Оказва се, че тези попълнения могат да се реализират и като пространствата от измеримите функции f, за които функцията $|f|^p$ е сумируема, и, както обикновено, тук това е прието за дефиниция. Така получените функционални пространства участват в различни въпроси на анализа. Особено интересни са пространствата L^2 и L^2_{C} и те са обект на специално изучаване в десета глава.

В § 1 се въвеждат L^p и L^p_{C} и е установено, че при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ тези пространства са свързани чрез неравенството на Хьолдер. В § 2 е доказана пълнотата на L^p и L^p_{C}. § 3 е посветен на естествената наредба на L^p и е посочен важен аналог на принципа за непрекъснатост от реалните числа. В § 4 започва изучаването на линейните функционали в L^p и L^p_{C}. Избраният тук път за намиране на тези функционали използва съществуването на точни мажоранти от § 3. В § 5 е показано, че спрегнатото пространство на L^p съвпада с L^q, и е установен аналогичният резултат за комплексния случай.

Задължителни при първо четене са само § 1 и 2.

§ 9.1. ПРОСТРАНСТВАТА L^p И L^p_{C}

Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег. По-нататък ще работим с едно реално число $p \geqq 1$, което ще остава фиксирано.

С L^p ще означаваме съвкупността на всички измерими функции $f: X \to \mathbf{R}$, за които $|f|^p$ е сумируема функция. Разбира се, при $p=1$ имаме $L^1=L$.

Множеството L^p е реално линейно пространство спрямо операциите събиране на функции и умножение на функции с реални числа. Да покажем например, че при $f \in L^p$, $g \in L^p$ е в сила

$$f+g \in L^p. \tag{1}$$

Функциите f и g са измерими съгласно определението на L^p. Поради това измерими са и функциите $f+g$ и $|f+g|^p$. По определение (1) ще бъде доказано, ако се убедим, че последната функция е сумируема. За тази пък цел е достатъчно да посочим нейна сумируема мажоранта. Но

$$|f+g|^p \leqq (|f|+|g|)^p \leqq (2 \sup(|f|, |g|))^p = 2^p \sup(|f|^p, |g|^p)$$

и въпросната сумируема мажоранта е построена.

Интересно е, че стъпаловидните функции

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \tag{2}$$

принадлежат на L^p. Наистина за представянето (2) на f можем да предположим, че е стандартно (вж. § 8.3). Но тогава

$$|f|^p=\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \chi_{A_i},$$

поради което $|f|^p$ е сумируема и следователно $f \in L^p$. *Стъпаловидните функции очевидно образуват подпространство Φ на L^p за всяко $p \geqq 1$.*

Както винаги в теорията на интеграла, функциите в L^p, които съвпадат почти навсякъде, се схващат като несъществено различни. При това уславяне L^p продължава, разбира се, да бъде линейно пространство. Именно то се има пред вид, когато се пише L^p. Следващото предложение посочва една норма в L^p, *наричана p-та норма.*

9.1.1. Предложение. *Ако за произволно $f \in L^p$ положим*

$$\|f\|_p=\left(\int |f|^p\right)^{1/p}, \tag{3}$$

получаваме норма в L^p.

Доказателство. От определението на L^p следва, че (3) има смисъл за всяко $f \in L^p$. Също така $\|f\|_p \geqq 0$ и от $\|f\|_p=0$ следва очевидно $f=0$ (почти навсякъде). Хомогенността също се получава директно. Ето защо остава да докажем само неравенството на триъгълника

$$\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p+\|g\|_p \qquad (f,\ g \in L^p). \tag{4}$$

Да разгледаме най-напред специалния случай на стъпаловидни f и g. Съгласно лема 8.3.1 функциите f и g имат стандартни представяния от вида

(5) $$f=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{C_i} \text{ и } g=\sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{C_i},$$

поради което (4) в този случай добива вида

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \mu(C_i)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \mu(C_i)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \mu(C_i)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Това следва от елементарното неравенство на Минко́вски

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

при $x_i=a_i(\mu(C_i))^{\frac{1}{p}}$ и $y_i=b_i(\mu(C_i))^{\frac{1}{p}}$. По този начин (4) е доказано за стъпаловидни функции.

Нека сега f и g са произволни елементи на L^p. За произволно $n=1, 2, \ldots$ да разгледаме множествата

$$A_{-k}=\left\{x \in X: -\frac{k+1}{n} \leq f(x) < -\frac{k}{n}\right\},$$

$$A_k=\left\{x \in X: \frac{k+1}{n} \geq f(x) > \frac{k}{n}\right\},$$

$$B_{-k}=\left\{x \in X: -\frac{k+1}{n} \leq g(x) < -\frac{k}{n}\right\},$$

$$B_k=\left\{x \in X: \frac{k+1}{n} \geq g(x) > \frac{k}{n}\right\}$$

за $k=1, 2, \ldots, n^2$ (срв. § 8.4). Характеристичните функции на тези множества са измерими и освен това χ_{A_k} например има за мажоранта функцията $\frac{n^p}{k^p}|f|^p$, която е сумируема. Ето защо тези множества са сумируеми. Поради това функциите

$$f_n=\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{A_k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{A_{-k}},$$

$$g_n=\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{B_k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{B_{-k}}$$

са стъпаловидни. Същевременно $|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n}$ при $|f(x)| \leq n$ и следователно

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x \in X).$$

Аналогично $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$. От определенията на f_n и g_n следват още неравенствата

$$|f_n|^p \leq |f|^p \text{ и } |g_n|^p \leq |g|^p,$$

които влекат

$$|f_n+g_n|^p \leq (|f_n|+|g_n|)^p \leq (|f|+|g|)^p.$$

Сега от теоремата на Лебег се получават равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n+g_n|^p=\int |f+g|^p,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n|^p=\int |f|^p, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int |g_n|^p=\int |g|^p.$$

Тъй като f_n и g_n са стъпаловидни, за тях е изпълнено неравенството на триъгълника. Ако в неравенството на триъгълника за f_n и g_n извършим граничния преход $n\to\infty$ с помощта на (6), ще получим (4). С това предложението е доказано.

Да отбележим изрично, че като страничен продукт от горното доказателство се получава *гъстотата на стъпаловидните функции във всяко L^p. пространството Φ на* Наистина при въведените вече означения имаме

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)-f(x)|=0 \qquad (x\in X)$$

и $|f_n(x)-f(x)|^p \leq 2^p|f(x)|^p$, което заедно с теоремата на Лебег дава

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n-f|^p=0,$$

или, което е същото, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$. Следващото предложение се доказва със същите средства.

9.1.2. Предложение (неравенство на Хьолдер). *Нека $p>1$ и $q>1$ са числа с*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогава за всяко $f\in L^p$ и за всяко $g\in L^q$ произведението fg е сумируема функция и е изпълнено неравенството

$$\left|\int fg\right| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q. \tag{7}$$

Доказателство. Отново най-напред ще се занимаем със случая $f\in\Phi$ и $g\in\Phi$. Ако тези функции имат стандартни представяния (5), неравенството (7) очевидно добива вида

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\ \mu(C_i)\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\ \mu(C_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\ \mu(C_i)\right)^{\frac{1}{q}},$$

а това неравенство следва от елементарното неравенство на Хьолдер

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

при $x_i = a_i\ (\mu\ (C_i))^{\frac{1}{p}}$ и $y_i = b_i\ (\mu\ (C_i))^{\frac{1}{q}}$.

Сега за произволни $f \in L^p$ и $g \in L^q$ ще определим f_n и g_n, както в доказателството на предишното предложение. Тогава $f_n\ g_n \in L$ и

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\ g_n(x) = f(x)\ g(x)$$

за всяко $x \in X$. Тъй като, от друга страна, f_n и g_n са стъпаловидни, ще имаме

$$\int |f_n\ g_n| \leq \left(\int |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p\ \|g\|_q$$

за всяко $n = 1, 2, \ldots$ По този начин са изпълнени условията на теоремата на Фату. Ето защо $fg \in L$ и

$$\int |fg| \leq \|f\|_p\ \|g\|_q,$$

откъдето (7) следва веднага. С това предложението е доказано.

По същия начин се въвежда и пространството $L^p_{\mathbf{C}}$ на комплексните измерими функции $f : X \to \mathbf{C}$, за които $|f|^p \in L$. То е комплексно линейно пространство, равенството (3) дефинира норма в $L^p_{\mathbf{C}}$ и предложение 2 е изпълнено за произволни комплексни функции f и g.

§ 9.2. ПЪЛНОТА НА ПРОСТРАНСТВАТА L^p И $L^p_{\mathbf{C}}$

Оказва се, че пространствата L^p и $L^p_{\mathbf{C}}$ са не само нормирани, но и пълни.

9.2.1. Теорема. *За всяко $p > 1$ пространствата L^p и $L^p_{\mathbf{C}}$ са банахови.*

Доказателство. Ще извършим подробно разсъжденията само за L^p, а читателят ще съобрази сам подробностите в доказателството за $L^p_{\mathbf{C}}$.

Нека

(1) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е фундаментална редица от елементи на L^p. Функциите $|f_n|^p$

$(n=1,2,\ldots)$ са сумируеми и са изброимо много. Ето защо по лема 5.10.1 съществува функция $h \in L$, която е неотрицателна и приема строго положителни стойности във всички точки $x \in X$, в които поне една от функциите (1) не е нула.

Нека $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ е сходящ ред с положителни членове. За всяко $k=1, 2, \ldots$ избираме ν_k по такъв начин, че при $m, n \geqq \nu_k$ да е в сила

(2) $$\|f_m - f_n\|_p < \alpha_k.$$

Да разгледаме произволна редица

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

от цели положителни числа, за която $n_k \geqq \nu_k$ за всяко $k=1, 2, \ldots$ Така получаваме подредица

(3) $$f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}, \ldots$$

на (1). Поради (2) за нея ще бъдат изпълнени неравенствата

(4) $$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \alpha_k$$

за всяко $k=1, 2, \ldots$

Тъй като $p > 1$, съществува $q > 1$, за което $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогава функцията $h^{1/q}$ принадлежи на L^q и от неравенството на Хьолдер следва

$$\int |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| h^{1/q} \leqq \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \, \|h^{1/q}\|_q \leqq \alpha_k \, \|h^{1/q}\|_q$$

съгласно (4). По този начин безкрайният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \, h^{1/q}$$

се мажорира от сходящия ред $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|h^{1/q}\|_q$ и следователно е сходящ. Сега теоремата на Бепо Леви показва, че редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| (h(x))^{1/q}$$

е сходящ за почти всички $x \in X$. Ето защо редът

(5) $$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x))$$

е сходящ в почти всички точки $x \in X$, за които $h(x) \neq 0$. Тъй като за останалите $x \in X$ всяка от функциите (1) се анулира съгласно избора на h, редът (5) се оказва сходящ почти навсякъде. Сходимостта на (5) означава, че и редицата (3) е сходяща почти навсякъде, т. е. почти за всички $x \in X$ съществува границата

(6) $$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Където границата (6) не съществува, определяме f произволно и получаваме функция $f: X \to \mathbf{R}$, която е измерима като граница на редицата (3) от измерими функции (вж. предложение 7.1.1).

Да изберем цялото положително k произволно и да го фиксираме. Ако изберем произволно m, $l \geqq \nu_k$, по (2) ще имаме

(7) $$\int |f_m - f_{n_l}|^p \leq \alpha_k^p.$$

В това неравенство фиксираме m и оставяме l да расте неограничено. Съгласно (6) ще имаме

$$\lim_{l\to\infty} |f_m(x) - f_{n_l}(x)|^p = |f_m(x) - f(x)|^p$$

почти навсякъде в X. Сега от (7) и от теоремата на Фату следва, че функцията $|f_m - f|^p$ е сумируема. Следователно $f_m - f \in L^p$ и понеже $f_m \in L^p$, то $f \in L^p$. Сега отново от теоремата на Фату намираме

$$\int |f_m - f|^p \leq \alpha_k^p,$$

или, което е същото, $\|f_m - f\|_p \leq \alpha_k$ за всички $m \geq \nu_k$. Тъй като цялото положително k бе избрано произволно, с това е показано, че редицата (1) е сходяща в L^p. С това е доказана и теоремата.

Тя установява пълнотата на L^p и L^p_{C} при $p > 1$. Вече знаем, че L^1 е пълно, и това е така по определение (вж. § 5.8). Пълнотата на $L^1_{\mathrm{C}} = L_{\mathrm{C}}$ бе установена в § 7.5.

§ 9.3. L^p КАТО НАРЕДЕНИ ПРОСТРАНСТВА

Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е някакво пространство на Лебег и p е произволно число с $p \geqq 1$. За две функции f и g от L^p ще се условим да пишем $f \leqq g$, когато неравенството

$$f(x) \leqq g(x)$$

е изпълнено почти навсякъде в X. Очевидно $\leqq$ е една наредба в L^p

Нека отново f и g са елементи на L^p. Да разгледаме функциите

(1) $$\sup(f, g): X \to \mathbf{R} \text{ и } \inf(f, g): X \to \mathbf{R},$$

определени съответно със

(2) $$(\sup(f, g))(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ и } (\inf(f, g))(x) = \min(f(x), g(x))$$

за всяко $x \in X$. Очевидно

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ и } \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f + g|)$$

и понеже при $h \in L^p$ е в сила $|h| \in L^p$, функциите (1) са от L^p. От (2) следва очевидно, че за всяка функция $r: X \to \mathbf{R}$, за която $f \leqq r$ и $g \leqq r$, е в сила

$$\sup(f, g) \leq r.$$

Също от (2) намираме $f \leq \sup(f, g)$ и $g \leq \sup(f, g)$. Ето защо $\sup(f, g)$ е най-малката мажоранта на f и g. Аналогично $\inf(f, g)$ е най-голямата миноранта на f и g. По този начин всеки две функции от L^p имат най-малка мажоранта и най-голяма миноранта. По индукция оттук следва, че същото е вярно и за произволно непразно крайно множество от функции от L^p.

Така въведената наредба в L^p се съгласува с линейните операции в L^p. По точно, ако f, g, f_1, g_1 са елементи на L^p с $f \leq f_1$ и $g \leq g_1$, то

$$f+g \leq f_1+g_1.$$

Също при неотрицателни скалари λ имаме $\lambda f \leq \lambda f_1$, а при $\lambda < 0$ е в сила $\lambda f \geq \lambda f_1$.

Тази наредба е приятно свързана и със сходимостта. Доказателството се основава на едно друго твърдение.

9.3.1. Предложение. *Ако $f \in L^p$, а*

(3) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е редица от елементи на L^p с

(4) $$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

по норма, съществува подредица $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}, \ldots$ на (3), за която е изпълнено условието

(5) $$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

почти навсякъде в X.

Доказателство. В доказателството на пълнотата на L^p се убедихме, че всяка фундаментална редица (3) от елементи на L^p клони по норма към елемент на L^p, който е граница почти навсякъде на подредица на (3). Сега предложението следва от единствеността на границата.

Нека сега $f \in L^p$ и (3) е редица от елементи на L^p с (4). Нека освен това $g \in L^p$ и

(6) $$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$$

е редица от елементи на L^p с

(7) $$g = \lim_{n\to\infty} g_n.$$

Ако при това $f_n \leq g_n$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$, то $f \leq g$.

Наистина от предложение 1 следва съществуването на редица

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

от цели положителни числа, за която са в сила (5) и $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x)$ почти навсякъде в X. Сега неравенството $f \leq g$ се получава от неравенството $f_n(x) \leq g_n(x)$ след граничен преход.

От пълнотата на L^p в съчетание със свойствата на L^p се получава важно свойство на L^p, което силно напомня пр за непрекъснатост при реалните числа.

9.3.2. Теорема. *Нека Γ е насочено надясно непразно множество от елементи на L^p и нека съвкупността от нормите на елементите на Γ е ограничена отгоре. Тогава Γ притежава точна мажоранта в L^p.*

Доказателство. Най-напред ще се запознаем със специалния случай, когато всички функции от Γ са неотрицателни. Да положим

$$\gamma=\sup_{f\in\Gamma}\|f\|_p.$$

От това определение следва съществуването на редица

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{8}$$

от елементи на Γ с

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p. \tag{9}$$

Тъй като функциите от Γ са неотрицателни, ако в (8) заместим всяка от функциите f_n с по-голяма от нея функция, която също е от Γ, равенството (9) ще запази валидността си. Наистина за всяко f от Γ е в сила $\|f\|_p\leq\gamma$, а същевременно поради неотрицателността при увеличаване на елементите на Γ нормите им се увеличават. От друга страна, Γ е насочено надясно множество. Ето защо без ограничение на общността можем да си мислим, че редицата (8) е растяща.

Тогава

$$f_1^p\leq f_2^p\leq \ldots \leq f_n^p\leq \ldots \tag{10}$$

е растяща редица от сумируеми функции и съгласно (9) за интегралите им имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n^p=\gamma^p. \tag{11}$$

Ето защо от теоремата на Бепо Леви следва съществуването на сумируема функция h с

$$\lim_{n\to\infty} f_n^p(x)=h(x) \tag{12}$$

почти навсякъде в X и

$$\int h(x)=\gamma^p. \tag{13}$$

Да положим $F=h^{1/p}$. Тогава $F\in L^p$. Ще покажем, че тази функция е точна мажоранта на Γ. От (10) и (12) следва

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F(x) \tag{14}$$

почти навсякъде в X. От (13) пък се получава

(15)
$$\int F^p = \gamma^p.$$

Сега ще покажем, че F е мажоранта за Г. Нека за тази цел g е произволен елемент на F. Тогава редицата

(16)
$$\sup(f_1, g) \leq \sup(f_2, g) \leq \ldots \leq \sup(f_n, g) \leq \ldots$$

е растяща и съгласно (14) имаме
$$\lim_{n\to\infty} (\sup(f_n, g))(x) = (\sup(F, g))(x).$$

Но Г е насочена надясно система. Ето защо за всяко $n=1, 2, \ldots$ съществува $g_n \in \Gamma$, за което
$$\sup(f_n, g) \leq g_n.$$

Тъй като елементите на Г са неотрицателни, оттук
$$\int (\sup(f_n, g))^p \leq \int g_n^p \leq \gamma^p.$$

Сега от теоремата на Бепо Леви (приложена към редицата от p-тите степени на (16)) следва
$$\int (\sup(F, g))^p \leq \gamma^p,$$
което заедно с (15) дава
$$\int [(\sup(F, g))^p - F^p] \leq 0.$$

Тъй като освен това
$$\sup(F, g) \geq F,$$
оттук следва $\sup(F, g) = F$, т. е. $g(x) \leq F(x)$ почти навсякъде. С това е показано, че F наистина е мажоранта за Г.

Не е трудно да се установи, че F е точна мажоранта за Г. Наистина нека G е някаква мажоранта за Г. Тъй като $f_n \in \Gamma$, почти навсякъде трябва да са изпълнени неравенствата
$$f_n(x) \leq G(x).$$

Ето защо от (14) следва $F(x) \leq G(x)$ почти навсякъде, т. е. $F \leq G$. С това случаят, когато всички елементи на Г са неотрицателни, е разгледан.

Нека сега Г е произволна насочена надясно система от елементи на L^p и нормите на елементите на Г са ограничени. Да изберем произволно $g_0 \in \Gamma$ и да разгледаме насоченото надясно множество
$$\Gamma' = \{g \in \Gamma : g \geq g_0\}.$$

Непосредствено се съобразява, че ако Г' има точна мажоранта F, то F е точна мажоранта и за Г. Да разгледаме сега насочената надясно система
$$\Gamma'' = \{g - g_0 : g \in \Gamma'\}.$$

Тя се състои от неотрицателни функции, а от ограничеността на нормите на Г следва, че и нормите на елементите на Г'' са ограничени. Ето защо Г'' притежава съгласно доказаното точна мажоранта G. Читателят ще съобрази, че тогава $G+g_0$ е точна мажоранта за Г', а следователно и за Г. С това теоремата е доказана.

За така построената мажоранта F на Г и за всяко $g \in$ Г е в сила $g(x) \leq F(x)$ почти навсякъде в X. Пренебрежимото множество, в което това неравенство не е изпълнено, зависи обаче от g. Неговата независимост от g може да се осигури в някои случаи, например когато Г е изброимо (защо?). Ще отбележим още, че съгласно доказателството *мажорантата F почти навсякъде в X е граница на редица от елементи на* Г.

§ 9.4. НЕПРЕКЪСНАТИ ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ В L^p И L^p_C

Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е лебегово пространство и $p > 1$. В пространствата L^p и L^p_C има достатъчно много непрекъснати линейни функционали съгласно теоремата на Хан — Банах. Тук и в § 5 ще опишем всички непрекъснати линейни функционали в тези пространства.

Да разгледаме числото q, определено от равенството

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тъй като $p > 1$, то $q > 1$. Да изберем произволна функция $g \in L^q$ и да я фиксираме. Съгласно неравенството на Хьолдер за всяко $f \in L^p$ може да се образува интегралът

$$l(f)=\int f\, g \tag{1}$$

и той очевидно е линеен функционал в L^p. От неравенството на Хьолдер следва още

$$|l(f)| \leq \|g\|_q\, \|f\|_p.$$

Ето защо функционалът l е непрекъснат и $\|l\| \leq \|g\|_q$. Следващото предложение определя нормата на този линеен функционал.

9.4.1. Предложение. *За произволна функция $g \in L^q$ нормата на линейния функционал* (1) *съвпада с* $\|g\|_q$.

Доказателство. Разбира се, при $\|g\|_q=0$ всичко е тривиално, поради което ще се занимаем само със случая $\|g\|_q>0$.

В § 1 видяхме, че пространството Ф на стъпаловидните функции е гъсто в L^q. Ето защо за всяко $n=1, 2, \ldots$ съществува стъпаловидна функция

$$g_n=\sum_{i=1}^{m} a_i\, \chi_{A_i}$$

с

(2) $$\|g_n - g\|_q < \frac{1}{n}.$$

По лема 8.3.1 може да се предполага, че разглежданото представяне на g_n е стандартно. Следователно

$$\|g_n\|_q = \left(\int |g_n|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(A_i)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Да разгледаме сега стъпаловидната функция

$$f_n = \sum_{i=1}^{m} |a_i|^{q-1} \operatorname{sgn} a_i \chi_{A_i}.$$

За нея имаме $f_n \in L^p$ и

(3) $$\|f_n\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^{(q-1)p} \mu(A_i)\right)^{\frac{1}{p}} = (\|g_n\|_q)^{\frac{q}{p}},$$

тъй като от $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ следва $p(q-1)=q$. Същевременно

(4) $$\int f_n g_n = \sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(A_i) = (\|g_n\|_q)^q$$

$$= \|f_n\|_p (\|g_n\|_q)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q} = \|f_n\|_p \|g_n\|_q.$$

съгласно (3). От друга страна, от (1) следва

(5) $$l(f_n) = \int f_n g = \int f_n g_n + \int f_n(g-g_n).$$

Но

$$\left|\int f_n(g-g_n)\right| \leq \|f_n\|_p \|g-g_n\|_q \leq \frac{1}{n} \|f_n\|_p$$

съгласно (2) и неравенството на Хьолдер. Сега от (4) и (5) се получава

(6) $$l(f_n) \geq \|f_n\|_p \|g_n\|_q - \frac{1}{n} \|f_n\|_p.$$

Тъй като от (2) следва и неравенството $\|g_n\|_q \geq \|g\|_q - \frac{1}{n}$, (6) влече

(7) $$l(f_n) \geq \left(\|g\|_q - \frac{2}{n}\right) \|f_n\|_p$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$

От друга страна, $\|g\|_q \neq 0$. Ето защо за всички достатъчно големи n е в сила $\|g_n\|_q \neq 0$. Поради това от (3) следва $\|f_n\|_p \neq 0$, което води до $f_n \neq 0$. Сега (7) показва, че е изпълнено неравенството

$$\|l\| \geq \|g\|_q - \frac{2}{n},$$

откъдето след граничния преход $n \to \infty$ се получава $\|l\| \geq \|g\|_q$.

Тъй като вече видяхме с помощта на неравенството на Хьолдер, че $\|l\| \leq \|g\|_q$, то $\|l\| = \|g\|_q$ и предложението е доказано.

§ 9.5. ОБЩ ВИД НА ЛИНЕЙНИТЕ ФУНКЦИОНАЛИ В L^p И L^p_C

В предишния параграф видяхме, че всеки елемент на L^q поражда непрекъснат линеен функционал в L^p. Тук ще се убедим, че в L^p няма други освен тези непрекъснати линейни функционали. Следващото твърдение има помощен характер.

9.5.1. Лема. *Нека $p > 1$ и $l : L^p \to \mathbf{R}$ е позитивен линеен функционал. Тогава измежду неотрицателните функции $g \in L^q$, за които е изпълнено неравенството*

(1) $$\int fg \leq l(f)$$

за всички неотрицателни $f \in L^p$, има максимални в смисъл на Цорн.

Доказателство. Да означим с M съвкупността на всички неотрицателни $g \in L^q$, за които е в сила (1) за всяко $f \in L^p$ с $f \geqq 0$. Трябва да се убедим, че M притежава максимални елементи.

За целта най-напред ще покажем, че нормите на елементите на M са ограничени отгоре. Нека $g \in M$. Тогава за всяко $f \in L^p$ е в сила

$$\left| \int fg \right| \leq \int |f| \, g \leq l(|f|) \leq \|l\| \, \|f\|_p.$$

Тъй като нормата на линейния функционал $l(f) = \int fg$ е $\|g\|_q$ съгласно предложение 4.1, от тези неравенства следва $\|g\|_q \leq \|l\|$. Ето защо нормите на елементите на M са наистина ограничени.

Нека сега Г е верига в M. От теорема 3.2 следва, че Г притежава точна мажоранта G. При това съществува редица

$$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_n \leq \ldots$$

от елементи на Г с $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = G(x)$ почти навсякъде. За произволно $f \in L^p$ с $f \geq 0$ и за всяко $n = 1, 2, \ldots$ са изпълнени неравенствата $\int fg_n \leq l(f)$. Ако извършим граничния преход $n \to \infty$ с помощта на теоремата на Бепо Леви, от тези неравенства ще получим

$$\int f\,G \leq l(f).$$

Ето защо $G \in M$, с което за M са проверени условията на лемата на Цорн. Следователно M има максимални елементи и лемата е доказана.

Следващата теорема посочва общия вид на линейните функционали в L^p.

9.5.2. Теорема. *Нека $p > 1$ и $q > 1$ са числа с*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогава за всеки непрекъснат линеен функционал l в L^p съществува функция $g \in L^q$, за която е изпълнено равенството

(2) $$l(f)=\int fg$$

за всяко $f \in L^p$.

Доказателство. От предложение 5.11.3 следва, че можем да се ограничим само със случая на позитивен линеен функционал l. По лема 1 съществува максимална функция $g \in L^q$, за която е изпълнено (1) за всяка неотрицателна функция $f \in L^p$.

Линейният функционал

$$l_1(f)=l(f)-\int fg \qquad (f \in L^p)$$

е позитивен и от максималността на g следва, че за всяка функция $h \geq 0$ от L^q, за която е в сила

$$\int fh \leq l_1(f)$$

за всяко $f \in L^p$ с $f \geq 0$, имаме $h=0$.

Теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че $l_1=0$. Да допуснем противното и да разгледаме произволно сумируемо множество A в X с $\mu(A)>0$ и произволно $n=1, 2, \ldots$ Тогава $\frac{1}{n}\chi_A \in L^q$, $\frac{1}{n}\chi_A \geq 0$ и $\frac{1}{n}\chi_A$ не е еквивалентна с нулевата функция в L^q. Ето защо трябва да съществува функция $f \geq 0$ от L^p с

(3) $$\frac{1}{n}\int f\chi_A > l_1(f).$$

Тъй като съвкупността на стъпаловидните функции е гъста в L^p, а лявата и дясната страна на (3) са непрекъснати, можем да предполагаме, че f има вида

$$f=\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i},$$

където $a_i>0$. Тогава (3) добива вида

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap A) > \sum_{i=1}^{m} a_i l_1(\chi_{A_i}).$$

От последното неравенство следва, че поне за едно $i=1, 2, \ldots, m$ е в сила

(4) $$\frac{1}{n}\mu(A_i \cap A) > l_1(\chi_{A_i}).$$

Тъй като функционалът l_1 е позитивен, изпълнено е неравенството

$$l_1(\chi_{A_i}) \geq l_1(\chi_{A_i \cap A}).$$

По този начин (4) показва, че за всяко сумируемо множество A с $\mu(A) > 0$ и за всяко $n=1, 2, \ldots$ съществува сумируемо подмножество B на A с

$$\frac{1}{n}\,\mu(B) > l_1(\chi_B). \tag{5}$$

Сега ще покажем, че за всяко сумируемо множество Y в X с $\mu(Y) > 0$ е в сила $l_1(\chi_Y)=0$. Да изберем за тази цел цялото положително n по произволен начин и да го фиксираме. Да означим с M съвкупността на характеристичните функции χ_B на онези сумируеми подмножества на Y, за които е в сила (5). Ще покажем, че M има максимални елементи. Нека за тази цел Γ е някаква насочена надясно част на M. Тъй като за всяко $\chi_B \in M$ имаме $\chi_B \leqq \chi_Y$, то $\|\chi_B\| \leqq \|\chi_Y\|$ и следователно нормите на елементите на Γ са ограничени. Ето защо по теорема 3.2 Γ има точна мажоранта. Тъй като въпросната функция е граница на функции от вида χ_B, тя почти навсякъде приема стойности 0 или 1 и следователно е еквивалентна с функция от вида χ_C, като при това C очевидно е сумируемо подмножество на Y.

Нека $\chi_C=\lim\limits_{m\to\infty} \chi_{B_m}$, където $\chi_{B_m} \in M$. Тогава

$$\frac{1}{n}\,\mu(C)=\frac{1}{n}\int \chi_C=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}\int \chi_{B_m}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}\int \chi_{B_m} \geqq \lim_{m\to\infty} l_1(\chi_{B_m})=l_1(\chi_C)$$

и следователно $\chi_C \in M$. Ето защо множеството M удовлетворява изискванията на лемата на Цорн и поради това има максимални елементи.

Да означим с χ_C максимален елемент на M. Ще покажем, че множеството $Y\setminus C$ е пренебрежимо. В противен случай бихме получили сумируемо множество $B\subset Y\setminus C$ с (5). Сега

$$\frac{1}{n}\,\mu(B\cup C)=\frac{1}{n}\,\mu(B)+\frac{1}{n}\,\mu(C) > l_1(\chi_B)+l_1(\chi_C)=l_1(\chi_{B\cup C})$$

и следователно $\chi_{B\cup C} \in M$. Ето защо би трябвало да имаме $\chi_{B\cup C} \leqq \chi_C$ почти навсякъде и следователно B би се оказало пренебрежимо в противоречие с (5). Поради това множеството $Y\setminus C$ наистина е пренебрежимо. Но тогава от $\chi_C \in M$ следва

$$\frac{1}{n}\,\mu(Y)=\frac{1}{n}\,\mu(C) > l_1(\chi_C)=l_1(\chi_Y). \tag{6}$$

Тъй като цялото положително n бе избрано произволно, от (6) следва $l_1(\chi_Y)=0$.

Тъй като последното равенство е доказано за всяко сумируемо множество Y в X с $\mu(Y) > 0$, функционалът l_1 се анулира и върху всички стъпаловидни функции в X. Но последните образуват гъсто подмножество на L^p. Ето защо от непрекъснатостта на l_1 следва че l_1 се анулира тъждествено в L^p. С това теоремата е доказана.

Пространството L^p_{C} се състои от функциите f, които са от вида

(7) $$f=f_1+\mathrm{i}\, f_2,$$

където f_1 и f_2 са от L^p. Нека сега $l: L^p_{\mathrm{C}} \to \mathrm{C}$ е непрекъснат линеен функционал. Съгласно предложение 3.3.5 l има вида

(8) $$l\,(f)=l_1\,(f)-\mathrm{i}\; l_1\,(\mathrm{i}\, f),$$

където $l_1: L^p_{\mathrm{C}} \to \mathrm{R}$ е непрекъснат реален линеен функционал. При $h \in L^p$ съгласно горната теорема ще имаме

$$l_1\,(h)=\int h\, g_1,$$

$$l_1\,(\mathrm{i}\, h)=\int h\, g_2,$$

където g_1 и g_2 са функции от L^q. Сега от (8) следва

$$l\,(f_1)=\int f_1\, g_1-\mathrm{i}\int f_1\, g_2,$$

$$l\,(\mathrm{i}\, f_2)=\int f_2\, g_2+\mathrm{i}\int f_2\, g_1.$$

От тези равенства и от (7) се получава

$$l\,(f)=\int (f_1+\mathrm{i}\, f_2)\,(g_1-\mathrm{i}\, g_2)=\int f\,(g_1-\mathrm{i}\, g_2),$$

където $g_1-\mathrm{i}g_2 \in L^q_{\mathrm{C}}$. С това е показано, че *за всеки непрекъснат линеен функционал* $l: L^p_{\mathrm{C}} \to \mathrm{C}$ *съществува функция* $g \in L^q_{\mathrm{C}}$ *с*

$$l\,(f)=\int f\,\bar{g}$$

за всяко $f \in L^p_{\mathrm{C}}$. Така виждаме, че теорема 2 се пренася и в комплексния случай.

Задачи към девета глава

Навсякъде по-нататък $\langle X,\, L,\, \int\rangle$ означава пространство на Лебег, в което множеството X не е пренебрежимо.

Пространствата L^∞

С L^∞ се означава съвкупността на всички ограничени измерими функции $f: X \to \mathrm{R}$. Както и във всички подобни случаи, на два елемента на L^∞ се гледа като на несъществено различни, когато съвпадат почти навсякъде. В съответствие с това в L^∞ се въвежда следната модификация на равномерната норма

(1) $$\|f\|_\infty=\inf_{A}\ \sup_{x\in X\setminus A} |f\,(x)|,$$

където A пробягва съвкупността на всички пренебрежими подмножества на X. Читателят ще провери, че (1) действително определя полунорма в L^∞ и че два елемента на L^∞ са еквивалентни спрямо тази полунорма точно когато съвпадат почти навсякъде. Той ще се убеди също, че така полученото пространство L^∞ е банахово. Аналогично се въвежда и комплексното банахово пространство $L^\infty_{\mathbb{C}}$.

Задача 1. Да се докаже, че:

а) ако X е сумируемо, всяка ограничена по норма насочена надясно непразна част Γ на L^∞ притежава точна мажоранта в L^∞.

б) същото е вярно и когато X е обединение на такава фамилия $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от непресичащи се две по две сумируеми подмножества на X, че едно подмножество A на X да е пренебрежимо точно когато всяко от сеченията $X_\alpha \cap A$ е пренебрежимо.

Задача 2. Ако X е сумируемо и $1 \leq s \leq p \leq \infty$, то $L^s \supset L^p$, L^p е гъсто в L^s и за всяко $f \in L^p$ е в сила $\|f\|_s \leq \|f\|_p \, \mu(X)^{\frac{p-s}{p}}$.

Непрекъснати линейни функционали в L

Задача 3. Да се докаже, че за всяко $g \in L^\infty$ равенството

$$l(f) = \int fg \qquad (f \in L) \tag{2}$$

определя непрекъснат линеен функционал в L. Ако неглективните множества в X са пренебрежими, изпълнено е и условието $\|l\| = \|g\|_\infty$.

Задача 4. Нека X е обединение на такава фамилия $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от непресичащи се две по две сумируеми подмножества на X, че подмножество A на X да е пренебрежимо точно когато всяко от сеченията $X_\alpha \cap A$ е пренебрежимо. Да се докаже, че тогава всеки непрекъснат линеен функционал l в L е от вида (2) за подходящо $g \in L^\infty$.

Упътване. Приложете зад. 1, б), като имитирате доказателството на теорема 5.2.

Задача 5. Нека L е съвкупността на функциите $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, за които за всяко $t \in \mathbb{R}$ функциите $F(z, t)$ и $F(t, z)$ на z са от $L(\mathbb{R})$, най-много изброимо много от интегралите $\int |F(z, t)|\, dz$ и $\int |F(t, z)|\, dz$ са различни от нула и безкрайните редове $\sum_{t \in \mathbb{R}} \int |F(z, t)|\, dz$, $\sum_{t \in \mathbb{R}} \int |F(t, z)|\, dz$ са сходящи. За произволно $F \in L$ да положим

$$\int F = \sum_{t \in \mathbb{R}} \int F(x, t)\, dx + \sum_{t \in \mathbb{R}} \int F(t, y)\, dy.$$

Да се докаже, че така получената тройка $\langle \mathbb{R}^2, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег, в което неглективните множества са пренебрежими. Линейният функционал l в L, определен с $l(F) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \int F(x, t)\, dx$, е непрекъснат, но няма представяне от вида (2).

Теорема на Радон — Никодим

Задача 6. За всяко $f \in L$ равенството

$$l(g) = \int fg \qquad (g \in L^\infty) \tag{3}$$

определя непрекъснат линеен функционал l в L^∞ с $\|l\| = \|f\|_1$. Всеки от тези линейни функционали е *тотално адитивен*, т. е. ако $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ е редица от неотрицателни елементи на L^∞, за която при $i \neq j$ са в сила $g_i\, g_j = 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} g_i \in L^\infty$, то редът $\sum_{i=1}^{\infty} l\,(g_i)$ е сходящ и $l\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} l\,(g_i)$. Представяне от вида (3) имат всички тотално адитивни непрекъснати линейни функционали в L^∞.

Упътване. Имитирайте отново доказателството на теорема 5.2. За целта установете, че положителната част на тотално адитивен непрекъснат функционал е тотално адитивна.

Задача 7 (Радон — Никодим). Нека M е съвкупността на всички измерими множества в X. Да се докаже, че функция $\rho : M \to \mathbb{R}$ е *тотално адитивна*, т. е. за всяка редица $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ от елементи на M, за която всяко от сеченията $A_i \cap A_j$ е пренебрежимо при $i \neq j$, е в сила $\rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho\,(A_i)$ точно когато съществува $f \in L$, за което е изпълнено равенството $\rho\,(A) = \int_A f$ за всяко $A \in M$.

Упътване. Сведете към зад. 6.

Десета глава

ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТРАНСТВА

От пространствата L^p и $L^p_{\mathbb{C}}$ особено интересни са L^2 и $L^2_{\mathbb{C}}$ — пространствата на функциите със сумируем квадрат. Ако f и g са такива функции, произведението $f\,g$ е сумируемо и интегралът $\int f\,\overline{g}$ има смисъл. Той се разглежда като функция, чиито аргументи f и g пробягват съответно по пространство, и притежава свойствата на добре познатото от крайномерния случай скаларно произведение. Така стигаме до модели на по-общи образувания — хилбертовите пространства. Те се появяват естествено и подпомагат изучаването на важни математически и приложни въпроси. Комплексните хилбертови пространства са в определен смисъл по-важни от реалните.

В § 1 са разгледани пространствата L^2 и $L^2_{\mathbb{C}}$. Те насочват към въведените в § 2 линейни пространства със скаларно произведение. Всяко от тях има естествена норма и така получените нормирани пространства са изучени в § 3. Скаларното произведение дава възможност и в безкрайномерния случай да се борави с ортогоналността и това е започнато в § 4. В § 5 е поставено началото на изучаването на пълните пространства със скаларно произведение, които именно са хилбертовите пространства. Обичайното ортогонално проектиране в равнина е пренесено в безкрайномерния случай в § 6. Така получената теорема е използувана в § 7 за намиране на линейните функционали в хилбертовите пространства. Параграф 8 е посветен на едно важно обобщение на класическата теорема на Питагор. В § 9 се разглеждат ортогонални системи от единични вектори, а в § 10 — максимални системи с това свойство, които поемат ролята на базите от крайномерния случай. В § 11 са посочени класическите бази на пространствата $L^2\,([-\pi,\pi])$ и $L^2_{\mathbb{C}}\,([-\pi,\pi])$.

Пропускането на части от тази глава при първо четене не се препоръчва.

§ 10.1. ПРОСТРАНСТВАТА L^2 И $L^2_{\mathbb{C}}$

Нека $\langle X, L, \int\rangle$ е пространство на Лебег. В предишната глава видяхме, че съвкупността на всички измерими функции $f: X \to \mathbb{R}$, за които функцията f^2 е сумируема, е реално линейно пространство, което е пълно спрямо втората норма

$$\|f\|_2=\left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и следователно е банахово.

Но тук са налице някои специфични моменти, които са твърде важни. В девета глава видяхме, че при изучаването на пространство L^p $(p>1)$ съществена роля играе пространство L^q, където $q>1$ е числото, определено от равенството

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1}$$

Така например за всеки две функции $f\in L^p$ и $g\in L^q$ произведението fg е сумируема функция, а непрекъснатите линейни функционали в L^p се описват чрез L^q. При $p=2$ от (1) получаваме $q=2$. Ето защо сега L^p и L^q съвпадат. Оттук например следва, че произведението на всеки две функции от L^2 е сумируема функция.

Да докажем това твърдение директно. Нека $f\in L^2$ и $g\in L^2$. Тогава $f+g\in L^2$ и $f-g\in L^2$. Следователно функцията в дясната страна на равенството

$$fg=\frac{1}{4}(f+g)^2-\frac{1}{4}(f-g)^2$$

е сумируема. Ето защо и произведението fg е сумируемо.

Така за всеки две функции $f,\ g\in L^2$ можем да образуваме числото

$$(f,\ g)=\int fg$$

и следователно получаваме изображение $(\ ,\ ):L^2\times L^2\to \mathbf{R}$. То притежава добре известните на читателя свойства на скаларното произведение от крайномерния случай и позволява в тази по-сложна обстановка да се прилагат познати методи.

Аналогични неща могат да се кажат и за комплексното пространство $L^2_{\mathbf{C}}$. Там е целесъобразно за произволни $f,\ g\in L^2_{\mathbf{C}}$ скаларното произведение да се определи с равенството

$$(f,\ g)=\int f\overline{g},$$

където $\overline{g}$ е комплексно спрегнатата функция на g.

В следващите параграфи ще въведем общите понятия реално и комплексно хилбертово пространство. Разгледаните тук пространства ще се окажат техни частни случаи.

§ 10.2. ПРЕДХИЛБЕРТОВИ ПРОСТРАНСТВА

Нека L е реално линейно пространство. Под ***скаларно произведение*** в L се разбира всяко изображение

$$(\,,\,) : L \times L \to \mathbf{R}$$

(функция на две променливи), за което са изпълнени следните условия:

а) за всеки три елемента f, g, h на L и за произволни скалари λ и μ е налице равенството

$$(\lambda f+\mu g,\ h)=\lambda\ (f,\ h)+\mu\ (g,\ h)$$

(линейност спрямо първия аргумент);

б) за всеки два елемента f, g на L е изпълнено равенството $(f,\ g)=(g,\ f)$ (комутативност);

в) за всяко $f\in L$ е изпълнено неравенството $(f,\ f)\geqq 0$ (неотрицателност);

г) при $(f,\ f)=0$ имаме $f=0$ (неизроденост).

От а) и б) очевидно следва равенството

$$(f,\ \lambda g+\mu h)=\lambda\ (f,\ g)+\mu\ (f,\ h) \tag{1}$$

за произволни f, g, h от L и за всеки два скалара λ и μ (линейност спрямо втория аргумент). По този начин скаларно произведение в реално линейно пространство е всяка симетрична билинейна форма, за която са изпълнени условията в) и г).

Едно реално линейно пространство се нарича *предхилбертово*, когато в L е зададено скаларно произведение.

10.2.1. Пример. Нека $\langle X,\ L,\ \int\rangle$ е пространство на Лебег. Ако пространството L^2 се снабди със скаларното произведение, определено с

$$(f,\ g)=\int fg \tag{2}$$

за произволни $f,\ g\in L^2$, получава се реално предхилбертово пространство.

10.2.2. Пример. В $\mathbf{R}^n$ обикновено се разглежда скаларното произведение, определено с

$$(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

за произволни

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \text{ и } y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

от $\mathbf{R}^n$. Това в същност е частен случай от предишния пример (защо?).

10.2.3. Пример. Да означим с l^2 съвкупността на всички безкрайни редици

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots) \tag{3}$$

от реални числа, за които редът $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ е сходящ. Тогава l^2 е линейно пространство спрямо покоординатното събиране и умножение със скалари. От неравенството $|ab|\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ се вижда, че за всеки два елемента (3) и

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

на l^2 безкрайният ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ е сходящ. Ето защо може да се положи

(4) $$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Така в l^2 се получава скаларно произведение.

Представеният пример е класически. И той е частен случай на пример 1. Читателят ще съобрази, че l^2 и скаларното произведение (4) съвпадат с L^2 и скаларното произведение в него за лебеговото пространство от пример 5.2.2. Трябва само вместо X от този пример да се постави съвкупността на всички цели положителни числа.

10. 2. 4. Пример. Тук ще обобщим предишните два примера. Нека X е произволно непразно множество и $l^2(X)$ е съвкупността на функциите $f: X \to \mathbf{R}$, всяка от които се анулира тъждествено вън от някакво (зависещо от f) изброимо множество и безкрайният ред

$$\sum_{x \in X} (f(x))^2$$

е сходящ. Така построеното $l^2(X)$ е пространството L^2 за лебеговото пространство от пример 5.2.2. Ето защо от пример 1 се вижда, че ако за $f, g \in L^2(X)$ положим

$$(f, g)=\sum_{x \in X} f(x)\, g(x),$$

получаваме скаларно произведение в $l^2(X)$.

10. 2. 5. Пример. В $C([a, b])$ може да се разглежда скаларното произведение

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad (f, g \in C([a, b])).$$

Така получаваме предхилбертово пространство, което не е частен случай на пример 1.

От свойствата на реалните предхилбертови пространства тук ще отбележим само следното общо правило за смятане със скаларни произведения:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i, \sum_{j=1}^{l} \mu_j g_j\right)=\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \mu_j (f_i, g_j),$$

където f_i, g_j са вектори, а λ_i, μ_j — скалари. То се получава непосредствено от аксиома а) и от (1).

Разглежданията, приведени по-горе, се пренасят с несъществени изменения и в комплексния случай. Нека L е комплексно линейно пространство. Под *скаларно произведение* в L се разбира всяко изображение

$$(\, , \,) : L \times L \to \mathbf{C},$$

за което са изпълнени условията а), в) и г) от определението на скаларно произведение в реалния случай, а вместо б) е изпълнено следното условие:

б′) за всеки два елемента f и g на L е изпълнено равенството

$$(g, f) = \overline{(f, g)},$$

където чертата вдясно означава, че се взема комплексно спрегнатото число.

От а) и б′) се получава и свойството

$$(f, \lambda g + \mu h) = \bar{\lambda} \, (f, g) + \bar{\mu} \, (f, h).$$

От него и от а) се получава и следното общо правило за смятане със скаларни произведения в този случай:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i, \sum_{j=1}^{l} \mu_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \bar{\mu}_j (f_i, g_j).$$

И тук f_i, g_j са вектори, а λ_i, μ_j — скалари.

Въпреки че всеки от двата случая има своя специфика, реалните и комплексните предхилбертови пространства се изучават аналогично. Ето защо ще разглеждаме (доколкото е възможно) едновременно и двете възможности, като тогава ще говорим за предхилбертово пространство, а полето на скаларите ще означаваме с $\mathbf{H}$.

10.2.6. Пример. Ако $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег и пространството $L^2_{\mathbf{C}}$ се снабди със скаларното произведение

$$(f, g) = \int f \bar{g} \qquad (f, g \in L^2),$$

получава се комплексно предхилбертово пространство.

10.2.7. Пример. Ако в $\mathbf{C}^n$ се разгледа скаларното произведение, определено с

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

за произволни $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ от $\mathbf{C}^n$, получава се предхилбертово пространство.

10.2.8. Пример. Съвкупността $l^2_{\mathbf{C}}$ на всички безкрайни редици

$$(5) \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

от комплексни числа, за които редът $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ е сходящ, също е комплексно предхилбертово пространство. Ако x, дефинирано с (5), и

$$y=(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

са елементи на l^2_{C}, скаларното им произведение се определя с

$$xy=\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Аналогично се модифицират за комплексния случай и примерите 4 и 5.

§ 10.3. НОРМА В ПРЕДХИЛБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Следващото елементарно предложение играе важна роля при изучаването на хилбертовите пространства.

10.3.1. Предложение. *За всеки два елемента f и g на предхилбертово пространство L е изпълнено*

$$|(f, g)|^2 \leqq (f, f)\ (g, g) \tag{1}$$

(неравенство на Коши — Шварц).

Доказателство. Ще разгледаме най-напред реалния случай. Да фиксираме f и g. Тогава за произволно реално t ще имаме

$$(f+tg,\ f+tg) \geqq 0, \tag{2}$$

или, което е същото,

$$(f, f)+2\ t\ (f, g)+t^2\ (g, g) \geqq 0. \tag{3}$$

По този начин квадратният тричлен (3) на t приема само неотрицателни стойности. Оттук, както знаем, следва, че дискриминантата на (3) е неположителна, т. е.

$$(f, g)^2-(f, f)\ (g, g) \leqq 0,$$

което е и неравенството (1). С това реалният случай е разгледан.

В комплексния случай (2) ще бъде налице за произволен комплексен скалар t, но този път вместо (3) ще имаме неравенството

$$(f, f)+t\ \overline{(f, g)}+\overline{t}\ (f, g)+|t|^2\ (g, g) \geqq 0. \tag{4}$$

Тъй като изразът вляво на (4) сега не е квадратен тричлен на t, на пръв поглед разглежданията от реалния случай са неприложими. Такава възможност обаче е налице.

Нека σ е такова комплексно число с $|\sigma|=1$, че числото $\sigma\ \overline{(f, g)}$ да е реално. Ако в (4) положим $t=\sigma x$, където x приема произволни реални стойности, поради очевидното равенство

$$\sigma\ \overline{(f, g)}=\overline{\sigma}\ (f, g)$$

ще получим

$$(f, f)+2\,x\ \sigma\ \overline{(f, g)}+x^2\ (g, g) \geqq 0. \tag{5}$$

Вляво вече имаме квадратен тричлен на реалната променлива x и коефициентите на този квадратен тричлен са реални. Тъй като, от друга страна, (5) е изпълнено за всяко реално x, дискриминантата отново трябва да е неотрицателна, т. е.

$$(\sigma\,\overline{(f,\,g)})^2-(f,\,f)\,(g,\,g)\leq 0. \tag{6}$$

Но числото $\sigma\,\overline{(f,\,g)}$ е реално. Ето защо

$$(\sigma\,\overline{(f,\,g)})^2=|\sigma\,\overline{(f,\,g)}|^2=|(f,\,g)|^2$$

и (1) следва от (6). С това предложението е доказано.

При по-внимателно боравене с квадратните тричлени може да се установи, че *в* (1) *има равенство точно когато* f *и* g *са колинеарни*. Предоставяме това на читателя като упражнение.

Неравенството на Коши — Шварц позволява във всяко предхилбертово пространство да се въведе по една норма.

10.3.2. Предложение. *За всяко предхилбертово пространство* L *изображението*

$$\|\ \|: L\to[0,\,\infty),$$

дефинирано с

$$\|f\|=\sqrt{(f,\,f)}, \tag{7}$$

е норма в L.

Д о к а з а т е л с т в о. Според дефиницията на норма трябва да докажем свойствата:

а) $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$;

б) $\|\lambda f\|=\lambda\,\|f\|$;

в) при $\|f\|=0$ е в сила $f=0$.

Тъй като проверката на б) и в) е непосредствена, ще се занимаем само с а). От определението (7) и от свойствата на скаларното произведение следва

$$\|f+g\|^2=(f+g,\,f+g)=\|f\|^2+\|g\|^2+(f,\,g)+(g,\,f).$$

От друга страна, неравенството на Коши — Шварц дава

$$|(f,\,g)|\leq\sqrt{(f,\,f)\,(g,\,g)}=\|f\|\,\|g\|,$$

$$|(g,\,f)|\leq\sqrt{(g,\,g)\,(f,\,f)}=\|f\|\,\|g\|.$$

Ето защо

$$\|f+g\|^2\leq\|f\|^2+\|g\|^2+2\,\|f\|\,\|g\|=(\|f\|+\|g\|)^2,$$

откъдето а) следва незабавно. С това предложението е доказано.

Нормата (7) в предхилбертово пространство L се нарича *хилбертова норма* в L. По-нататък винаги ще снабдяваме предхилбертовите пространства с техните хилбертови норми.

Така виждаме, че всяко предхилбертово пространство притежава естествена структура на нормирано пространство. Ето защо всичко казано дотук за нормираните пространства може да се пренесе и в предхилбертовите.

Да отбележим изрично, че при означението (7) неравенството на Коши — Шварц добива вида

$$|(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\|.$$

Геометричният смисъл на това неравенство в тримерния случай е добре известен: *скаларното произведение на два вектора не надминава произведението от дължините им.*

Следващото предложение изтъква едно свойство на скаларното произведение.

10.3.3. Предложение. *Скаларното произведение в предхилбертово пространство е непрекъсната функция на двете си променливи.*

Доказателство. Нека L е предхилбертово пространство и $\varphi, \psi \in L$. Тогава за произволни $f, g \in L$ е в сила

$$|(f, g)-(\varphi, \psi)|=|(f, g)-(f, \psi)+(f, \psi)-(\varphi, \psi)|$$

$$\leq |(f, g-\psi)|+|(f-\varphi, \psi)| \leq \|f\| \, \|g-\psi\|+\|f-\varphi\| \, \|\psi\|$$

съгласно неравенството на Коши — Шварц. От друга страна,

$$\|f\|=\|f-\varphi+\varphi\| \leq \|f-\varphi\|+\|\varphi\|.$$

Ето защо

$$|(f, g)-(\varphi, \psi)| \leq \|f-\varphi\| \, \|g-\psi\|+\|\varphi\| \, \|g-\psi\|+\|f-\varphi\| \, \|\psi\|,$$

откъдето непрекъснатостта на скаларното произведение в точката (φ, ψ) се получава веднага. С това предложението е доказано.

Нормата в предхилбертово пространство въведохме с помощта на скаларното произведение. Оказва се, че тя от своя страна съдържа цялата информация за скаларното произведение, т. е. последното може да се възстанови еднозначно, ако е зададена нормата. Читателят ще се убеди, като използува определението (7), че в реалния случай е изпълнено равенството

$$(f, g)=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$$

за произволни f и g от L. Като си послужим с равенствата

$$(8) \qquad \begin{cases} \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2+(f, g)+(g, f), \\ \|f+\mathrm{i}\, g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2-\mathrm{i}\,(f, g)+\mathrm{i}\,(g, f), \end{cases}$$

за комплексния случай получаваме

$$(f, g)=\frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2+\mathrm{i}\,\|f+\mathrm{i}g\|^2-\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)(1+\mathrm{i})\right).$$

Ако желаем по-симетрична формула, наред с (8) можем да привлечем и

$$(9) \qquad \begin{cases} \|f-g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2-(f, g)-(g, f), \\ \|f-\mathrm{i}g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2+\mathrm{i}\,(f, g)-\mathrm{i}\,(g, f). \end{cases}$$

Така намираме

$$(f, g)=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+\mathrm{i}\,\|f+\mathrm{i}\, g\|^2-\mathrm{i}\,\|f-\mathrm{i}\, g\|^2\right).$$

От първото от равенствата (8) и от първото от равенствата (9) след събиране се получава *тъждеството на паралелограма*

(10) $$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2),$$
което е типично за специалните нормирани пространства, които разглеждаме тук.

§ 10.4. ОРТОГОНАЛНИ ВЕКТОРИ

Предхилбертовите пространства позволяват да се пренесат в безкрайномерния случай повече геометрични разглеждания, отколкото нормираните. Това, разбира се, се дължи на наличието на скаларно произведение.

За два елемента f и g на предхилбертово пространство L ще казваме, че са *ортогонални*, и ще пишем $f\perp g$, когато

$$(f,\ g)=0.$$

За две множества A и B в L се казва, че са *ортогонални*, когато за всяко $f\in A$ и за всяко $g\in B$ имаме $(f,\ g)=0$.

Разбира се, нулевият вектор е ортогонален на всеки вектор от L. Един вектор е ортогонален на себе си точно когато е нулев. От свойствата на скаларното произведение следва също така, че ако един вектор е ортогонален с няколко вектора, той е ортогонален и на всяка тяхна линейна комбинация.

Предстои да покажем, че в предхилбертовите пространства има достатъчно големи системи от ненулеви вектори, всеки два от които са ортогонални. Всяка такава система е линейно независима. Наистина нека $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n$ са ненулеви вектори с $(f_i,\ f_j)=0$ при $i\neq j$. Нека освен това $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$ са скалари, за които

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ \dots\ +\lambda_n f_n=0.$$

Ако умножим двете страни на това равенство скаларно с f_1, ще намерим $\lambda_1(f_1,\ f_1)=0$ и тъй като $f_1\neq 0$, то $\lambda_1=0$. Аналогично се вижда, че и останалите λ_i са нули и независимостта на системата е доказана. Следователно в крайномерния случай не можем да очакваме наличие на ненулеви ортогонални системи с брой на елементите, по-голям от размерността на пространството. Класически метод за получаване на ортогонални системи е ортогонализацията по Грам и Шмит. Тя се основава на следното предложение, което изразява линейната независимост чрез скаларното произведение:

10.4.1. Предложение. *Нека L е предхилбертово пространство и*

(1) $$f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n$$

са краен брой вектори от L. Те са независими точно когато

(2) $$\begin{vmatrix} (f_1,\ f_1) & (f_1,\ f_2) & \dots & (f_1,\ f_n)\\ (f_2,\ f_1) & (f_2,\ f_2) & \dots & (f_2,\ f_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (f_n,\ f_1) & (f_n,\ f_2) & \dots & (f_n,\ f_n)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Доказателство. Нека най-напред системата (1) е линейно независима. Да допуснем, че (2) е нула. Но тогава системата уравнения

(3) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i, f_j)=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

ще има ненулево решение $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Да положим

(4) $$x=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+ \ldots +\lambda_n f_n.$$

Тогава x е ортогонален с всеки от векторите f_j съгласно (3). Ето защо x е ортогонален и на всяка тяхна линейна комбинация. От (4) сега се получава $x \perp x$ и следователно $x=0$. По този начин (4) става нетривиална линейна зависимост между f_j, а това е противоречие.

Нека сега е изпълнено (2). Да допуснем, че системата (1) е линейно зависима. Тогава ще съществуват скалари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не всички равни на нула, с

(5) $$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+ \ldots +\lambda_n f_n=0.$$

Ако умножим това равенство скаларно с всеки от векторите f_j $(j=1, 2, \ldots, n)$, ще получим системата уравнения (3) за λ_i. Тъй като детерминантата (2) на тази система е различна от нула, (3) няма други решения освен нулевото, което е противоречие. С това предложението е доказано.

Следващото предложение позволява да се извърши една стъпка от ортогонализационния процес на Грам и Шмит.

10.4.2. Предложение. *Нека L е предхилбертово пространство и*

(1) $$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

е линейно независима система от елементи на L. Тогава за произволно $f \in L$ съществуват единствени скалари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, за които векторът

(6) $$f'=f+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+ \ldots +\lambda_n f_n$$

е ортогонален с всеки от векторите (1). *Ако*

(7) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, f, f_{n+2}, \ldots, f_{n+k}$$

е някаква линейно независима система в L, системата

(8) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, f', f_{n+2}, \ldots, f_{n+k}$$

също е линейно независима и има същата линейна обвивка, както (7).

Доказателство. Изискванията за λ_i се изразяват със системата уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i, f_j) = -(f, f_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Тъй като векторите (1) са линейно независими, детерминантата (2) на тази система е различна от нула. Оттук първата част на предложението следва веднага. Втората му част е очевидна.

С помощта на това предложение всяка крайна линейно независима система от вектори $g_1, g_2, \ldots, g_n$ след $n-1$ стъпки може да се ортогонализира, т. е. да се посочи система $g_1', g_2', \ldots, g_n'$ от два по два ортогонални вектори със същата линейна обвивка, както изходната система. Аналогично могат да се ортогонализират и изброими системи от вектори в L.

10.4.3. Предложение (теорема на Питагор). *Нека L е предхилбертово пространство и*

(1) $$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

са краен брой два по два ортогонални вектори от L. Тогава за сумата

$$f = f_1 + f_2 + f \ldots + f_n$$

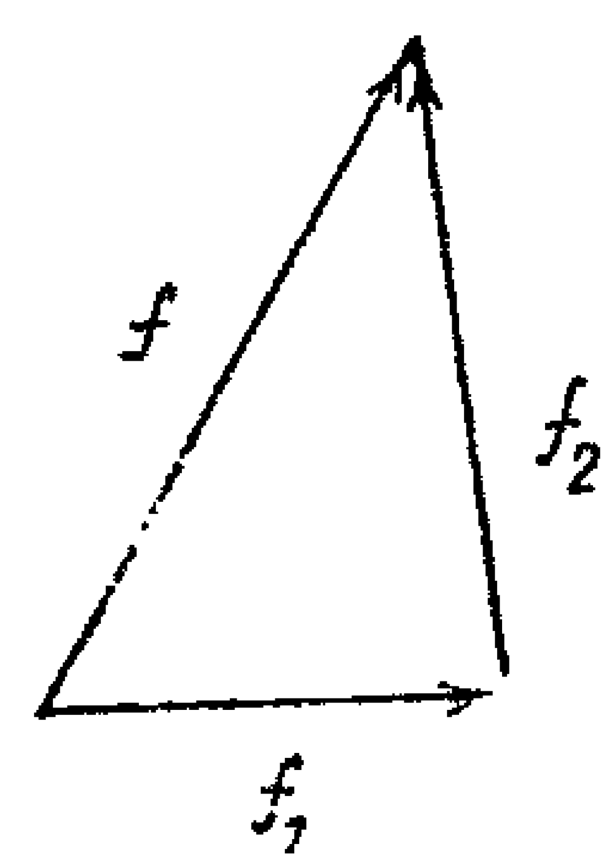
е изпълнено равенството

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \ldots + \|f_n\|^2.$$

Доказателство. От свойствата на скаларното произведение следва

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f_i, f_j) = \sum_{i=1}^{n} (f_i, f_i) = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2,$$

тъй като векторите (1) са ортогонални два по два. С това предложението е доказано.



Да въведем още едно понятие. Нека A е подмножество на L. Под *ортогонално допълнение* $A^\perp$ на A ще разбираме съвкупността на всички вектори $f \in L$, които са ортогонални с всеки вектор от A.

10.4.4. Предложение. *За всяко подмножество A на L ортогоналното допълнение $A^\perp$ е затворено линейно подпространство на L.*

Доказателство. Нека f и g са елементи на $A^\perp$. Тогава f и g са ортогонални на всеки вектор от A. Следователно същото е вярно и за произволна тяхна линейна комбинация $\lambda f + \mu g$. С това е показано, че $A^\perp$ е линейно пространство.

За да установим затвореността на $A^\perp$, нека

(9) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

е редица от елементи на $A^\perp$ с $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, където f е някакъв елемент на L. Тъй като $f_n \in A^\perp$, за всяко $a \in A$ ще имаме $(f_n, a) = 0$. Сега от непрекъснатостта на скаларното произведение (вж. предложение 3.3) следва $(f, a)=0$, т. е. векторът f е ортогонален с всеки вектор от A. Ето защо $f \in A^{\perp}$ и предложението е доказано.

§ 10.5. ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТРАНСТВА

В четвърта глава видяхме колко интересни следствия могат да се получат от пълнотата на едно нормирано пространство. Ето защо желателно е да се отдели оня клас от предхилбертови пространства, които са пълни спрямо хилбертовата норма

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}.$$

Те се наричат *хилбертови пространства.*

Пространството L^2 от пример 2.1 е хилбертово, при това реално, докато L^2_C е комплексно хилбертово пространство. Наистина пълнотата на тези пространства е установена в теорема 9.2.1. Тъй като пространствата от примери 2.2, 2.3, 2.4, 2.7 и 2.8 са частни случаи на току-що посочените хилбертови пространства, те също са хилбертови. Пространството $C([a, b])$ от пример 2.5 не е хилбертово.

Така виждаме, че хилбертовите пространства са нещо разпространено. Следващата теорема, която показва, че предхилбертовите пространства могат да се допълват до хилбертови, посочва още една конструкция за хилбертови пространства.

10.5.1. Теорема. *Нека L е предхилбертово пространство и $\widehat{L}$ е попълнението на L спрямо хилбертовата норма. Тогава нормата на $\widehat{L}$ съвпада с хилбертовата норма спрямо подходящо продължение на скаларното произведение на L до $\widehat{L}$. Така описаното продължение на скаларното произведение е единствено.*

Доказателство. Единствеността на продължението на скаларното продължение на L до скаларно произведение в $\widehat{L}$, което поражда точно нормата на $\widehat{L}$, е очевидна, тъй като нормата еднозначно определя скаларното произведение (вж. § 3).

За да извършим самото продължение, да изберем произволно ξ, $\eta \in \widehat{L}$ и да разгледаме две редици

(1) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots,$$

(2) $$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$$

от елементи на L с

(3) $$\xi=\lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{и} \quad \eta=\lim_{n\to\infty} g_n.$$

От (3) следва съществуването на константа C с

(4) $$\|f_n\| \leq C \quad \text{и} \quad \|g_n\| \leq C$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$ От друга страна, също както и в доказателството на непрекъснатостта на скаларното произведение (вж. предложение 3.3), се доказва неравенството

$$+\|f_m-f_n\|\,\|g_n\|.$$

Ето защо от (4) следва

$$|(f_m,\ g_m)-(f_n,\ g_n)|\le\|f_m-f_n\|\,\|g_m-g_n\|+C\,\|g_m-g_n\|$$
$$+C\,\|f_m-f_n\|.$$

Тъй като редиците (1) и (2) са фундаментални поради (3), от това неравенство следва, че и редицата

$$(f_1,\ g_1),\ (f_2,\ g_2),\ \ldots,\ (f_n,\ g_n),\ \ldots$$

е фундаментална. Ето защо тя е сходяща.

Скаларното произведение на ξ и η ще определим с равенството

(5) $$(\xi,\ \eta)=\lim_{n\to\infty}(f_n,\ g_n).$$

Независимостта на (5) от специалния избор на редиците (1) и (2) с (3) се установява аналогично. Тъй като твърдят наличието на равенства и нестроги неравенства при прости условия, аксиомите за скаларното произведение а), б) (в комплексния случай б')) и в) следват директно от (5). По-сложна е проверката на г), тъй като при нея има равенство и в условието.

Тази аксиома гласи: при $(\xi,\ \xi)=0$ имаме $\xi=0$. Проверката ще извършим по околен път. Въпреки че в $\widehat{L}$ все още нямаме скаларно произведение, там е налице норма, която е продължение на нормата в L. При това, както вече знаем, нормата в нормирано пространство е непрекъсната. Да изберем $\xi\in\widehat{L}$ и редица (1) от елементи на L с първото от равенствата (3). Тогава от (5) и от непрекъснатостта на нормата следва

$$(\xi,\ \xi)=\lim_{n\to\infty}(f_n,\ f_n)=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|^2=\|\xi\|^2,$$

т. е.

(6) $$\|\xi\|=\sqrt{(\xi,\ \xi)}.$$

Нека сега ξ е елемент на $\widehat{L}$ с $(\xi,\ \xi)=0$. Тогава от (6) следва $\|\xi\|=0$ и понеже $\|\ \|$ е норма в $\widehat{L}$, то $\xi=0$. По този начин е проверена и аксиомата г). Ето защо (5) наистина задава скаларно произведение в $\widehat{L}$. При това също от (5) се получава, че това скаларно произведение е продължение на скаларното произведение в L.

Остава да покажем, че пространството $\widehat{L}$ е хилбертово. От съответната дефиниция от § 4.2 знаем, че пространството $\widehat{L}$ е пълно спрямо нормата $\|\ \|$. От (6) обаче следва, че нормата на $\widehat{L}$ съвпада с хилбертовата. Ето защо $\widehat{L}$ е хилбертово пространство. С това теоремата е доказана.

Хилбертовото пространство $\widehat{L}$ от горната теорема се нарича *попълнение* на L.

§ 10.6. ТЕОРЕМА ЗА ПРОЕКЦИИТЕ

Следващата теорема показва, че ортогоналността пренася в хилбертовите пространства едно съществено свойство на крайномерните пространства.

10.6.1. Теорема. *Нека L е хилбертово пространство, L_1 е затворено подпространство на L и f е елемент на L. Тогава съществува единствена двойка вектори $f_1 \in L_1$ и $g \perp L_1$, за които е изпълнено равенството*

$$f=f_1+g. \tag{1}$$

Доказателство. Ще започнем с въпроса за единственост. Нека наред с (1) е изпълнено и равенството

$$f=f_1'+g',$$

където $f_1' \in L_1$ и $g' \perp L_1$. Тогава

$$f_1-f_1'=g'-g. \tag{2}$$

Но $g \perp L_1$ и $g' \perp L_1$ и следователно $g'-g \perp L_1$. От друга страна, $f_1 \in L_1$, $f_1' \in L_1$ и тъй като L_1 е подпространство на L, то $f_1-f_1' \in L_1$. Ето защо $g'-g \perp f_1-f_1'$. Сега (2) показва, че $f_1-f_1' \perp f_1-f_1'$, поради което $f_1'-f_1=0$, т. е. $f_1'=f_1$. От последното равенство и от (2) следва $g'=g$ и единствеността е доказана.

За да установим съществуването, да положим

$$d=\inf_{\varphi \in L_1} \| f-\varphi \|. \tag{3}$$

Очевидно съществува редица

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{4}$$

от елементи на L_1, за която

$$\lim_{n\to\infty} \| f-\varphi_n \|=d. \tag{5}$$

От тъждеството на паралелограма (вж. равенство (10) от § 3), приложено за векторите $f-\varphi_m$ и $f-\varphi_n$, следва

$$\| 2f-\varphi_m-\varphi_n \|^2+\| \varphi_m-\varphi_n \|^2=2\| f-\varphi_m \|^2+2\| f-\varphi_n \|^2,$$

или, което е същото,

$$4\left\| f-\frac{\varphi_m+\varphi_n}{2}\right\|^2+\| \varphi_m-\varphi_n \|^2=2\| f-\varphi_m \|^2+2\| f-\varphi_n \|^2. \tag{6}$$

Но $\varphi_m \in L_1$, $\varphi_n \in L_1$ и тъй като L_1 е подпространство на L, то $\frac{1}{2}(\varphi_m+\varphi_n) \in L_1$. Ето защо от (3) следва

$$\left\| f-\frac{1}{2}(\varphi_m+\varphi_n) \right\|^2 \geqq d^2,$$

което заедно с (6) дава

$$4\,d^2+\|\varphi_m-\varphi_n\|^2 \leq 2\,\|f-\varphi_m\|^2+2\,\|f-\varphi_n\|^2,$$

т. е.

(7) $$\|\varphi_m-\varphi_n\|^2 \leq 2\,\|f-\varphi_m\|^2+2\,\|f-\varphi_n\|^2-4\,d^2.$$

От (5) и (7) следва, че при неограниченото нарастване на m и n числото $\|\varphi_m-\varphi_n\|$ клони към нула. Ето защо редицата (4) е фундаментална.

Тъй като пространството L е хилбертово, тази редица е сходяща. Нека

(8) $$f_1=\lim_{n\to\infty} \varphi_n.$$

По условие L_1 е затворено подпространство на L и същевременно $\varphi_n \in L_1$. Ето защо от (8) следва $f_1 \in L_1$. От друга страна, от (5) и (8) се получава $\|f-f_1\|=d$. С това показахме, че инфимумът в (3) се достига, т. е. съществува такова $f_1 \in L_1$, че за всяко $\varphi \in L_1$ да е в сила

(9) $$\|f-\varphi\| \geq \|f-f_1\|.$$

Ако положим $g=f-f_1$, равенството (1) очевидно ще бъде изпълнено. Ето защо теоремата ще бъде доказана, ако се убедим, че

(10) $$f-f_1 \perp L_1.$$

Да докажем най-напред (10) в реалния случай. За произволно $\varphi \in L_1$ и за произволен скалар λ от (9) следва

(11) $$(f-f_1-\lambda\varphi,\ f-f_1-\lambda\varphi) \geq (f-f_1,\ f-f_1),$$

което заедно с правилата за смятане със скаларни произведения дава

$$(f-f_1,\ f-f_1)-2\lambda\ (f-f_1,\ \varphi)+\lambda^2\ (\varphi,\ \varphi) \geq (f-f_1,\ f-f_1),$$

т. е.

(12) $$-2\lambda\ (f-f_1,\ \varphi)+\lambda^2\ (\varphi,\ \varphi) \geq 0.$$

От (12) при $\lambda>0$ се получава

$$-2\ (f-f_1,\ \varphi)+\lambda\ (\varphi,\ \varphi) \geq 0,$$

откъдето след граничния преход $\lambda\to 0$ намираме $(f-f_1,\ \varphi) \leq 0$. Аналогично от (12) при $\lambda<0$ добиваме

$$-2\ (f-f_1,\ \varphi)+\lambda\ (\varphi,\ \varphi) \leq 0,$$

което при $\lambda\to 0$ дава $(f-f_1,\ \varphi) \geq 0$. Следователно $(f-f_1,\ \varphi)=0$ и тъй като φ е произволен елемент на L_1, релацията (10) е доказана. С това реалният случай е приключен.

В комплексния случай от (11) следва

(13) $$-\bar{\lambda}\ (f-f_1,\ \varphi)-\lambda\ \overline{(f-f_1,\ \varphi)}+|\lambda|^2\ (\varphi,\ \varphi) \geq 0.$$

Да изберем комплексното число σ по такъв начин, че да са изпълнени условията $|\sigma|=1$ и $\sigma\ (f-f_1,\ \varphi) \geq 0$. След това в (13) да положим $\lambda=t\,\sigma$, където на t ще даваме само реални стойности. Тогава ще получим

$$-2t\,\overline{\sigma}\,(f-f_1,\ \varphi)+t^2\,(\varphi,\ \varphi)\geqq 0$$

и разсъжденията приключват, както и в реалния случай. С това теоремата е доказана.

Ето едно нейно просто приложение.

10.6.2. Предложение. *Нека L е хилбертово пространство и $A\subset L$. Тогава $A^{\perp\perp}$ съвпада със сечението на всички затворени подпространства на L, които съдържат A.*

Доказателство. Нека L_1 е сечението на всички затворени подпространства на L, които съдържат A. Тогава L_1 е затворено подпространство на L, което съдържа A и същевременно L_1 се съдържа във всяко такова подпространство на L.

Тъй като $A^{\perp\perp}\supset A$ съгласно определението на ортогоналното допълнение (вж. § 4) и $A^{\perp\perp}$ е затворено подпространство на L съгласно предложение 4.4, то

(14) $$A^{\perp\perp}\supset L_1.$$

Нека сега $f\in A^{\perp\perp}$. Съгласно теорема 1 елементът f има представяне $f=f_1+g$, където $f_1\in L_1$ и $g\perp L_1$. Тъй като $L_1\supset A$, то $g\perp A$ и следователно $g\in A^{\perp}$. Но от $f_1\in L_1$ и (14) следва $f_1\in A^{\perp\perp}$. Ето защо от равенството $g=f-f_1$ получаваме $g\in A^{\perp\perp}$. Тъй като, от друга страна, $g\in A^{\perp}$, то $g\perp g$ и следователно $g=0$. Ето защо $f=f_1\in L_1$. С това доказахме включването $A^{\perp\perp}\subset L_1$, което заедно с (14) дава предложението.

Теоремата за проекциите може да се формулира и така. Ако L_1 е затворено подпространство на L, всеки вектор f от L може по единствен начин да се представи във вида $f=f_1+g$, където $f_1\in L_1$ и $g\in L_1^{\perp}$. С други думи, L е *директна сума* на L_1 и на ортогоналното му допълнение $L_1^{\perp}$.

В следващия параграф ще посочим по-сериозно приложение на теоремата за проекциите.

§ 10.7. НЕПРЕКЪСНАТИ ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛИ В ХИЛБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

В § 9.5 се убедихме, че линейните функционали в L^p $(p>1)$ имат интегрално представяне с помощта на функции от L^q. При $p=2$ виждаме, че линейните функционали в L^2 и L^2_C се представят чрез скаларното произведение. Оказва се, че това е така във всяко хилбертово пространство. Приведеното по-нататък доказателство напомня познати разглеждания от аналитичната геометрия на тримерното пространство.

10.7.1. Теорема. *Нека L е хилбертово пространство и $l: L\to \mathbf{H}$ е непрекъснат линеен функционал. Тогава съществува единствен вектор $g\in L$, за който е изпълнено равенството*

(1) $$l\,(f)=(f,\ g)$$

за всяко $f\in L$. Освен това

$$\|l\| = \|g\|. \tag{2}$$

Доказателство. Ще започнем с въпроса за единственост. Нека наред с (1) е изпълнено и равенството

$$l\,(f) = (f,\ g_1) \quad (g_1 \in L)$$

за всяко $f \in L$. Тогава за всяко $f \in L$ ще бъде в сила $(f,\ g - g_1) = 0$ и поради това

$$(g - g_1,\ g - g_1) = 0,$$

което влече $g - g_1 = 0$, или все едно $g_1 = g$. С това единствеността на g е доказана.

Сега ще покажем, че при (1) е в сила (2). Наистина от неравенството на Коши — Шварц и (1) следва

$$|l\,(f)| \leq \|g\|\ \|f\|$$

за всяко $f \in L$. Ето защо $\|l\| \leq \|g\|$. От друга страна,

$$|l\,(g)| = (g,\ g) = \|g\|\ \|g\|$$

и следователно $\|l\| \geq \|g\|$. С това (2) е доказано.

За да докажем съществуването на g при $l \neq 0$, да разгледаме хиперравнината

$$H = \{f \in L : l\,(f) = 0\}. \tag{3}$$

Тъй като по предположение функционалът l е непрекъснат, хиперравнината H е затворена (вж. предложение 3.8.1).

Нека $a \in L \setminus H$. От теоремата за проекциите следва, че съществуват $a_1 \in H$ и $h \perp H$ с $a = a_1 + h$. Тъй като $a \notin H$, от последното равенство следва $h \neq 0$. И така съществува вектор $h \neq 0$, който е ортогонален на H. Тъй като векторът $\frac{h}{\|h\|}$ също е ортогонален с H и има норма 1, без ограничение на общността може да се предполага, че $\|h\| = 1$.

Тъй като H е хиперравнина (вж. теорема 3.4.1), за всяко $f \in L$ съществуват $f_1 \in H$ и $\lambda \in \mathbf{H}$ с

$$f = f_1 + \lambda\ h.$$

От това равенство и от (3) следва $l\,(f) = \lambda\, l\,(h)$, а от ортогоналността на h и H се получава

$$\begin{aligned}(f,\ \overline{l\,(h)}\ h) &= (f_1,\ \overline{l\,(h)}\ h) + \lambda\ (h,\ \overline{l\,(h)}\ h)\\ &= \lambda\ l\,(h)\ (h,\ h) = \lambda\ l\,(h).\end{aligned}$$

Вече е ясно, че

$$l\,(f) = (f,\ \overline{l\,(h)}\ h)$$

за всяко $f \in L$, и теоремата е доказана при $l \neq 0$. Случаят $l = 0$ е тривиален.

Ако на произволен линеен функционал $l \in L^*$ съпоставим единствения вектор $g \in L$ с (1), поради непрекъснатостта на скаларното произведение получаваме в реалния случай изоморфизъм между спрегнатото пространство L^* на L и самото L. В комплексния случай нещата са малко по-комплицирани: така описаното изображение запазва и сега сборовете и нормата, но правилото за умножение със скалари се видоизменя; ако на $l \in L^*$ съответствува чрез (1) елемент g на L, то на λl съответствува $\bar{\lambda} g$. В този случай се казва, че между L^* и L е налице *антиизоморфизъм*.

§ 10.8. ОБЩА ТЕОРЕМА НА ПИТАГОР

Нека L е нормирано пространство и $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ е безкраен ред от елементи на L. За произволно $n=1, 2, \ldots$ сумата

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$$

се нарича *n-та парциална сума* на този ред. Разбира се, s_n е елемент на L. По този начин на всеки безкраен ред от елементи на L съответствува редицата

(1) $$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

от парциалните му суми, които също са елементи на L.

Редът $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ се нарича *сходящ*, когато редицата (1) е сходяща. В този случай границата на (1) се нарича *сума на реда* и се пише

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

По този начин равенството $s=\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ е еквивалентно с изискването за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова ν, че винаги когато $n>\nu$, да е в сила

$$\left\| s-\sum_{k=1}^{n} f_k \right\| < \varepsilon.$$

Ако пространство L е банахово и по-специално хилбертово, условието на Коши е достатъчно за сходимостта на един безкраен ред. По-точно безкрайният ред $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ от елементи на банахово пространство е сходящ точно когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова ν, че при $n>m\geqq\nu$ да е изпълнено

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} f_k\right\| < \varepsilon.$$

10.8.1. Теорема. *Един безкраен ред*

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

от ортогонални два по два елементи на хилбертово пространство е сходящ точно когато е сходящ числовият ред

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2.$$

Когато редът (2) *е сходящ, неговата сума не зависи от подреждането на членовете му и е изпълнено равенството*

(4) $$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2.$$

Доказателство. Нека $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ е n-тата парциална сума на (2). Тъй като членовете на (2) са ортогонални два по два, от теоремата на Питагор (вж. предложение 4.3) следва, че

(5) $$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2$$

е n-тата парциална сума на реда (3).

Да предположим сега, че редът (2) е сходящ. Това означава, че редицата (1) е сходяща. Тъй като нормата е непрекъсната, от (5) добиваме

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2.$$

Следователно редът (3) е сходящ и е изпълнено (4).

Обратно, нека е сходящ редът (3). Ще покажем, че редът (2) удовлетворява условието на Коши. Нека ε е произволно положително число. Тъй като (3) е сходящ, съществува такова ν, че при $n > m \geqq \nu$ да е в сила

$$\sum_{k=m}^{n} \|f_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Но тогава

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} f_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|f_k\|^2 < \varepsilon^2$$

съгласно теоремата на Питагор. Ето защо $\left\|\sum_{k=m}^{n} f_k\right\| < \varepsilon$, с което е показано, че (2) наистина удовлетворява условието на Коши. Тъй като пространството L е хилбертово, (2) е сходящ.

Остана да се убедим, че когато редът (2) е сходящ, неговата сума не зависи от начина на подреждане на членовете му. Нека

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{t_k} \tag{6}$$

е ред, получен от (2) след разместване на членовете му. Да изберем числото ε произволно и да му съпоставим такова $N = 1, 2, \ldots$, че да е изпълнено неравенството

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\|^2 \leqq \varepsilon.$$

Да изберем сега ν по такъв начин, че сред векторите

$$f_{t_1}, f_{t_2}, \ldots, f_{t_\nu}$$

да се съдържат всички вектори

$$f_1, f_2, \ldots, f_N.$$

Читателят ще съобрази, че при $n > \nu$ е изпълнено неравенството

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_{t_k} - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|^2 \leqq 2\varepsilon^2,$$

откъдето твърдението следва веднага. С това теоремата е доказана

§ 10.9. ОРТОНОРМИРАНИ СИСТЕМИ В ХИЛБЕРТОВИТЕ ПРОСТРАНСТВА

Нека L е хилбертово пространство. Множество B от ненулеви вектори в L се нарича *ортогонална система* в L, ако всеки два различни елемента на L са ортогонални.

Разбира се, всяка система, съставена само от един ненулев вектор, е ортогонална. Ако разполагаме със система от n линейно независими вектора в L, ортогонализационният процес на Грам и Шмит позволява да построим ортогонална система от n вектора със същата линейна обвивка (вж. § 4). Също, ако в L е зададена изброима система от вектори, всяка крайна подсистема на която е линейно независима, ортогонализацията по Грам и Шмит позволява да се построи изброима ортогонална система.

Ортогонална система B в L се нарича *ортонормирана*, когато всеки от векторите ѝ има дължина 1. Разбира се, ако разполагаме с ортогонална система B, лесно е да построим и ортонормирана:

делим всеки от векторите на B с дължината му. Тук ще изучаваме всякакви ортонормирани системи в L, като особен интерес ще представят за нас безкрайните.

10.9.1. Теорема. *Нека L е хилбертово пространство, B е ортонормирана система в L и $f \in L$. Тогава:*

а) *най-много изброимо много от скаларните произведения (f, b), където b пробягва B, са различни от нула;*

б) *редът*

$$\sum_{b \in B} (f, b)\ b$$

е сходящ;

в) *изпълнено е*

$$\sum_{b \in B} |(f, b)|^2 \leqq \|f\|^2$$

(неравенство на Бесел).

Преди да пристъпим към доказателството, да отбележим най-напред, че ако системата B е крайна, а) е очевидно изпълнено, а редът в б) се изражда до крайна сума. При безкрайно B свойството а) осигурява, че в сумите на б) и в) най-много изброимо много от събираемите са различни от нула, поради което тези суми фактически са безкрайни редове. Липсва подреждането на членовете в безкрайна редица, но то не е необходимо, тъй като по общата теорема на Питагор, ако редът в б) е сходящ при *някакво* подреждане на членовете, той е сходящ при *всяко* тяхно подреждане и има същата сума.

Доказателство на теорема 1. Най-напред ще установим, че ако $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е крайна ортонормирана система, за всяко $f \in L$ е в сила

$$\sum_{i=1}^{n} |(f, b_i)|^2 \leqq \|f\|^2. \tag{1}$$

Наистина, тъй като векторите b_i са ортогонални и единични, то

$$\left(f - \sum_{i=1}^{n} (f, b_i)\ b_i,\ b_j\right) = (f, b_j) - \sum_{i=1}^{n} (f, b_i)\ (b_i, b_j)$$

$$= (f, b_j) - (f, b_j)\ (b_j, b_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. векторът

$$f - \sum_{i=1}^{n} (f, b_i)\ b_i$$

е ортогонален на всеки от векторите b_j. Но тогава към представянето

$$f = \sum_{i=1}^{n} (f, b_i)\ b_i + \left(f - \sum_{i=1}^{n} (f, b_i)\ b_i\right)$$

е приложима теоремата на Питагор. Ето защо

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{n} |(f, b_i)|^2+\|f-\sum_{i=1}^{n} (f, b_i)\, b_i\|^2.$$

Тук използувахме равенствата $\|b_i\|=1$. Сега (1) е очевидно.

Преминаваме към доказателството на а). Да фиксираме f, да изберем по произволен начин числото $k=1, 2, \ldots$ и да положим

$$B_f=\{b \in B : |(f, b)|>0\},$$

(2) $$B_k=\left\{b \in B : |(f, b)|>\frac{1}{k}\right\}.$$

Трябва да покажем, че множеството B_f е най-много изброимо. Тъй като $B_f=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, това твърдение ще бъде установено, ако се убедим, че всяко от множествата (2) е крайно. Да допуснем, че за някое $k=1, 2, \ldots$ съответното B_k е безкрайно. Тогава ще съществуват различни елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на B_k, броят на които удовлетворява неравенството $n \geqq k^2 \|f\|^2$. Тъй като тези вектори са от B_k, от (2) следва

$$\sum_{i=1}^{n} |(f, b_i)|^2>\frac{n}{k^2},$$

което заедно с (1) дава $n<k^2 \|f\|^2$, а това е противоречие. С това е установено, че всяко от множествата B_k е крайно, и а) е доказано.

Сега ще покажем, че редът $\sum_{b \in B} |(f, b)|^2$ е сходящ, и ще се убедим във валидността на неравенството от в). Съгласно а) елементите на B_f могат да се подредят в безкрайна редица

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

При това за всяко $n=1, 2, \ldots$ ще бъде изпълнено (1). Следователно редицата от парциалните суми на разглеждания ред е ограничена отгоре от числото $\|f\|^2$. Тъй като членовете му са неотрицателни, той е сходящ и е изпълнено неравенството във в).

Сега б) следва от общата теорема на Питагор. С това теоремата е доказана.

Да изясним геометричния смисъл на сумата на реда от б). Нека L_1 е сечението на всички затворени подпространства на L, които съдържат B. Тъй като $L_1 \supset B$ и L_1 е затворено подпространство на L, векторът

(3) $$f_1=\sum_{b \in B} (f, b)\, b$$

принадлежи очевидно на L_1. Освен това векторът $f-f_1$ е ортогонален с всеки вектор от B. Наистина нека $b_0 \in B$. Тъй като скаларното произведение е непрекъсната функция, произведението (f_1, b_0) може да се получи с почленно умножение. Ето защо

$$(f-f_1, b_0)=(f, b_0)-\sum_{b\in B}(f, b)\ (b, b_0)$$

$$=(f, b_0)-(f, b_0)\ (b_0, b_0)=0.$$

Така показахме, че $(f-f_1)\in B^{\perp}$.

Тъй като по предложение 6.2 $B^{\perp\perp}$ съвпада с L_1, векторът $f-f_1$ се оказва ортогонален на L_1. Ето защо равенството

$$f=f_1+(f-f_1)$$

е точно представянето на f съгласно теоремата за проекциите. С други думи, *f_1 е проекцията на f върху подпространството L_1 на L.* Очевидно L_1 съвпада със затворената обвивка на линейната обвивка на B. Ето защо L_1 се състои от границите на всевъзможните сходящи редици с членове от вида

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ b_i,$$

където b_i са елементи на B, а λ_i — скалари.

§ 10.10. БАЗИ В ХИЛБЕРТОВИТЕ ПРОСТРАНСТВА

Максималните в смисъл на Цорн ортонормирани системи от елементи на хилбертово пространство L се наричат *бази* на L.

Очевидно *една ортонормирана система B в L е база на L точно когато освен нулата няма други вектори от L, които са ортогонални с всеки елемент на B.* Все едно *B е база точно когато $B^{\perp}=\{0\}$.* Ще покажем още, че *ортонормирана система B в L е база на L точно когато всяко затворено подпространство L_1 на L с $L_1\supset B$ съвпада с L.* Нека най-напред B е база и L_1 е затворено подпространство с $L_1\supset B$. Ако допуснем, че $L_1\neq L$, по теоремата за проекциите ще съществува ненулев вектор, ортогонален с L_1, а следователно и с B, и това очевидно позволява да се разшири B. Ако пък B не е база, тогава съществува ненулев вектор c, ортогонален на всеки от векторите на B. Ето защо подпространството $L_1=\{c\}^{\perp}$ на L е затворено, различно е от L_1 и съдържа B. Все едно *B е база точно когато затворената линейна обвивка на B* (сечението на всички затворени подпространства на L, които съдържат B) *съвпада с цялото L.*

10.10.1. Теорема. *Нека L е хилбертово пространство. Тогава всяка ортонормирана система в L се съдържа в някаква база на L.*

Доказателство. Извършва се чрез стандартно използуване на лемата на Цорн.

От теорема 1 следва, че всяко хилбертово пространство притежава бази. Следващата теорема показва, че и в общия случай те продължават да играят онази роля, която имат в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

10.10.2. Теорема. *Нека L е хилбертово пространство и B е база на L. Тогава за всеки вектор $f \in L$ най-много изброимо много от скаларните произведения (f, b), където b пробягва B, са различни от нула, редът $\sum'_{b \in B} (f, b)\, b$ е сходящ и са изпълнени равенствата*

$$f = \sum_{b \in B}' (f, b)\, b, \tag{1}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{b \in B}' |(f, b)|^2. \tag{2}$$

Доказателство. Сходимостта на реда вдясно на (1) е установена в теорема 9.1. От друга страна, за произволно $b_0 \in B$ имаме

$$\Big(f - \sum_{b \in B}' (f, b)\, b,\ b_0\Big) = (f, b_0) - \sum_{b \in B}' (f, b)\, (b, b_0)$$
$$= (f, b_0) - (f, b_0)\, (b_0, b_0) = 0,$$

тъй като скаларното произведение е непрекъснато и системата B е ортонормирана. Тези равенства показват, че векторът

$$f - \sum_{b \in B}' (f, b)\, b$$

е ортогонален на всеки вектор от B. Тъй като B е база на I оттук следва

$$f - \sum_{b \in B}' (f, b)\, b = 0$$

и (1) е доказано.

Сега (2) следва от общата теорема на Питагор (вж. теорема 8.1). С това теоремата е доказана.

Равенството (2) може да бъде обобщено. Ако g е вектор от L, за него ще имаме

$$g = \sum_{b \in B}' (f, b)\, b.$$

Ето защо от непрекъснатостта на скаларното произведение се получава

$$(f, g) = \sum_{b \in B}' \sum_{b_1 \in B}' \big((f, b)\, b,\ (g, b_1)\, b_1\big)$$
$$= \sum_{b \in B}' (f, b)\, \overline{(g, b)}\, (b, b).$$

Следователно

(3) $$(f, g) = \sum_{b \in B} (f, b)\, \overline{(g, b)}.$$

В реалния случай (3) се записва по-просто:

(4) $$(f, g) = \sum_{b \in B} (f, b)\,(g, b).$$

От тази теорема следва, че ако B е база на L, пространството L е изоморфно с $l^2(B)$, когато L е реално, и с $l^2_C(B)$, когато L е комплексно. Ще установим по-подробно това в реалния случай. На всяко $f \in L$ трябва да съпоставим функция $\tilde{f}: B \to \mathbb{R}$, която се анулира тъждествено вън от някакво изброимо подмножество на B (вж. пример 2.4). Съгласно теорема 2 такава е функцията, определена с

$$\tilde{f}(b) = (f, b)$$

за произволно $b \in B$. За нея редът (2) е сходящ, а съгласно (4) това изображение запазва и скаларното произведение. Линейните операции също се запазват. Ето защо остава само да установим сюрективността. Нека $g \in l^2(B)$. Тогава редът $\sum_{b \in B} (g(b))^2$ е сходящ и съгласно общата теорема на Питагор сходящ е и редът

$$f = \sum_{b \in B} g(b)\, b.$$

За така получения елемент f на L очевидно имаме $\tilde{f} = g$.

Така виждаме, че всяко хилбертово пространство е от вида l^2 (или L^2_C в комплексния случай) за специално пространство на Лебег $\langle X, L, \int \rangle$. С това получаваме ново доказателство на теоремата за линейните функционали от § 7. Наистина сега тя следва от теорема 9.5.2

10.10.3. Теорема. *Нека L е хилбертово пространство, а B и C са бази на L. Тогава множествата B и C са равномощни, т. е. съществува биекция $\beta: B \to C$.*

Доказателство. Нека най-напред базата B е крайна. Тъй като тя е линейно независима система (вж. § 4), от (1) следва, че L е крайномерно линейно пространство и B е негова база. Нека n е броят на елементите на B. Тогава в L не може да има линейно независима система с повече от n елемента. Ето защо и C е крайно. Но тогава и C е база на крайномерното пространство L. Броят на елементите на C също е n съгласно една добре известна теорема от крайномерната линейна алгебра. С това случаят, когато някое от множествата B или C е крайно, е разгледан.

Нека сега някое от тези множества — например B, е изброимо. Да означим с C_1 съвкупността на всички $c \in C$, за които съще ствува $b \in B$ с $(b, c) \neq 0$. Тъй като за всяко $b \in B$ множеството

$$C_b = \{c \in C : (b, c) \neq 0\}$$

е най-много изброимо съгласно теорема 2, от равенството $C_1 = \bigcup\limits_{b \in B} C_b$ следва, че C_1 е най-много изброимо. Да означим с L_1 затворената линейна обвивка на C_1. Тъй като за всяко $b \in B$ имаме

$$b = \sum_{c \in C_1} (b, c)\, c$$

съгласно (1), то $b \in L_1$. Ето защо $B \subset L_1$. От друга страна, B е база на L. Ето защо $L_1 = L$. Това вече показва, че C_1 е база на L, т. е. максимална ортонормирана система. Тъй като $C \supset C_1$, то $C = C_1$. Ето защо множеството C е най-много изброимо. Същевременно C не може да бъде крайно съгласно предишния абзац. Поради това C е изброимо. С това и този случай е разгледан.

Общият случай на произволно безкрайно B може да се разгледа аналогично, като се използува добре известната теорема, че ако B е безкрайно множество и на всяко $b \in B$ е съпоставено по едно най-много изброимо множество C_b, обединението $C_1 = \bigcup\limits_{b \in B} C_b$ има мощност, която не надминава мощността на B. Този метод изисква определени елементарни познания от теорията на множествата. Ако читателят не желае да следва този път, би могъл да опита да докаже твърдението директно с лемата на Цорн. За целта може да се използува съвкупността на всички тройки (X, Y, f), където X и Y са подмножества съответно на B и на C с една и съща затворена линейна обвивка, а $f : X \to Y$ е биекция.

§ 10.11. БАЗИ НА ПРОСТРАНСТВАТА $L^2([-\pi, \pi])$ И $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$

В интервала $[-\pi, \pi]$ да разгледаме съвкупността на непрекъснатите функции $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Ако снабдим $C([-\pi, \pi])$ с римановия интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

получаваме пространство на Даниел. С $L([-\pi, \pi])$ ще означаваме минималното му лебегово разширение. Така получаваме пространство на Лебег $\langle [-\pi, \pi], L, \int \rangle$. Съгласно пример 7.6.4 същото пространство се получава, като се разгледат рестрикциите на сумируемите в $\mathbb{R}$ функции до интервала $[-\pi, \pi]$. След като разполагаме с това лебегово пространство, можем да образуваме съответните му реално и комплексно хилбертово пространство $L^2([-\pi, \pi])$ и $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$.

В този случай константата 1 е сумируема и следователно $1 \in L^2([-\pi, \pi])$. Оттук за всяко $f \in L^2([-\pi, \pi])$ получаваме

$$f=f\cdot 1\in L\ ([-\pi,\pi]),$$

т. е. $L^2([-\pi,\pi])\subset L([-\pi,\pi])$. Аналогично $L^2_C([-\pi,\pi])\subset L_C$. Читателят ще провери също така, че са изпълнени и включванията

$$C([-\pi,\pi])\subset L^2([-\pi,\pi]),\quad C_C([-\pi,\pi])\subset L^2_C([-\pi,\pi]).$$

Да разгледаме функциите

(1) $$\begin{cases} 1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ldots,\ \cos nx,\ldots \\ \quad \sin x,\ \sin 2x,\ldots,\ \sin nx,\ldots \end{cases}$$

Тъй като са непрекъснати в $[-\pi,\pi]$, те са елементи на $L^2([-\pi,\pi])$. Ще покажем, че образуват ортогонална система в $L^2([-\pi,\pi])$. Съгласно дефиницията на скаларното произведение трябва да проверим равенствата

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\qquad (m\neq n;\ m,n=0,1,2,\ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\qquad (m\neq n;\ m,n=1,2,3,\ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0\qquad (m=0,1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots),$$

а това става директно.

За нормите на функциите (1) имаме

$$\|1\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx\right)^{\frac12}=\sqrt{2\pi},$$

$$\|\cos nx\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx\right)^{\frac12}=\sqrt{\pi},$$

$$\|\sin nx\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx\right)^{\frac12}=\sqrt{\pi}.$$

Ето защо функциите

(2) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ldots,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ldots \\ \qquad\quad \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ldots,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ldots \end{cases}$$

образуват ортонормирана система в L^2 ([—π, π]).

10.11.1. Теорема. *Функциите* (2) *образуват база на* L^2 ([—π, π]).

Доказателство. Трябва да покажем, че всяка функция

$$f \in L^2 \ ([-\pi, \pi]),$$

която е ортогонална с всяка от функциите (2), е нула почти навсякъде. Това ще установим на няколко стъпки, при всяка от които ще построяваме все по-големи подпространства на L^2 ([—π, π]), на които функцията f е ортогонална. През цялото време тази функция ще бъде фиксирана.

Функциите от вида

$$h\ (x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} (a_k \ \cos kx+b_k \ \sin kx) \qquad (a_k, \ \ b_k \in \mathrm{R})$$

се наричат *тригонометрични полиноми*. Тъй като те са линейни комбинации на функции (2), то f е ортогонална с всеки тригонометричен полином.

Нека сега $g \in C$ ([—π, π]) и $g\ (-\pi)=g\ (\pi)$. Съгласно теоремата на Вайерщрас — Стоун за всяко $\varepsilon>0$ съществува тригонометричен полином h, за който е изпълнено неравенството

$$|g\ (x)-h\ (x)|<\varepsilon \tag{3}$$

за всяко $x \in [-\pi, \pi]$. От равенството

$$\int_{-\pi}^{\pi} f g=\int_{-\pi}^{\pi} f h+\int_{-\pi}^{\pi} f\ (g-h) \tag{4}$$

получаваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} f g=\int_{-\pi}^{\pi} f\ (g-h), \tag{5}$$

тъй като f е ортогонална с h. От (3) и (5) следва

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} fg\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|\,|g-h| \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f|.$$

Тъй като положителното число ε е произволно, оттук следва $\int_{-\pi}^{\pi} f g=0$, поради което f е ортогонална с всяка функция $g \in C$ ([—π, π]) с $g\ (-\pi)=g\ (\pi)$. Това бе най-съществената стъпка в доказателството.

Нека сега g е произволна функция от C ([—π, π]). Ще покажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват функции $h \in C$ ([—π, π]) с $h\ (-\pi)=h\ (\pi)$ и $\|g-h\|_2<\varepsilon$. За целта за произволно $n=1, 2, \ldots$ да образуваме непрекъснатата функция h_n, която съвпада с g в интервала

$\left[-\pi+\frac{1}{n},\ \pi\right]$, удовлетворява условието $h_n(-\pi)=g(\pi)$ и е линейна в интервала $\left[-\pi, -\pi+\frac{1}{n}\right]$. Ако M е константа с $|g(x)|\leqq M$ за всяко $x\in[-\pi, \pi]$, очевидно

$$\|g-h_n\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}(g-h_n)^2=\int_{-\pi}^{-\pi+\frac{1}{n}}(g-h_n)^2$$

$$\leqq\int_{-\pi}^{-\pi+\frac{1}{n}}4\ M^2=\frac{4\ M^2}{n}.$$

Тъй като $\frac{4\ M^2}{n}$ клони към нула с неограниченото нарастване на n, съществуването на функция h с желаните свойства е установено.

Сега от (4) отново следва (5), а съгласно неравенството на Коши — Шварц от (5) се получава

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f\,g\right|\leqq\|f\|_2\ \|g-h\|_2\leqq\varepsilon\ \|f\|_2. \tag{6}$$

Оттук, както и в предишната стъпка, заключаваме, че функцията е ортогонална на всяка функция от $C([-\pi, \pi])$.

Нека този път g е ограничена функция от $L^2([-\pi, \pi])$. Тогава съществува константа M, за която е изпълнено неравенството $|g(x)|\leqq M$ за всяко $x\in[-\pi, \pi]$. Тъй като $g\in L([-\pi, \pi])$, по определение (вж. § 6.2) съществува фундаментална редица

$$h_1,\ h_2, \ldots,\ h_n, \ldots \tag{7}$$

от функции от $C([-\pi, \pi])$, която почти навсякъде клони към g. Изрязвайки отдолу и отгоре с M (т. е. като си послужим с функциите $\sup(-M, \inf(h_n, M))$), можем да си осигурим и неравенствата $|h_n(x)|\leqq M$ за всяко $x\in[-\pi, \pi]$ и за всяко $n=1, 2, \ldots$ Сега от теоремата на Лебег се получава

$$\|g-h_n\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}(g-h_n)^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{8}$$

Ето защо за всяко $\varepsilon>0$ съществува $h\in C([-\pi, \pi])$ с $\|g-h\|_2<\varepsilon$. По-нататък разсъждението приключва, както в предишната стъпка. С това показахме, че функцията f е ортогонална на всички ограничени функции от $L^2([-\pi, \pi])$.

Накрая нека g е произволна функция от $L^2([-\pi, \pi])$. За произволно $n=1, 2, \ldots$ да разгледаме функцията

$$h_n=\sup\left(-n,\ \inf(g,\ n)\right).$$

Така получаваме редица (7) от ограничени функции от $L^2([-\pi, \pi])$. При това за всяко $x \in [-\pi, \pi]$ имаме очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)=g(x)$. Същевременно

$$|g-h_n|^2 \leq (|g|+|h_n|)^2 \leq 4|g|^2.$$

Ето защо отново от теоремата на Лебег намираме (8). Така виждаме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ограничена функция h от $L^2([-\pi,\pi])$ с $\|g-h\|_2<\varepsilon$. Тъй като в предишната стъпка видяхме, че f е ортогонална с всяка такава функция h, от (4) следва (5). От друга страна, от (5) и неравенството на Коши — Шварц се получава (6), което поради произволността на ε показва, че f е ортогонална с g.

Така виждаме, че функцията f е ортогонална на всяка функция от $L^2([-\pi, \pi])$. Тъй като $f \in L^2([-\pi, \pi])$, то $f \perp f$. Ето защо $f=0$ и теоремата е доказана.

Тъй като $L^2_{\mathrm{C}}([-\pi, \pi])$ е комплексната линейна обвивка на $L^2([-\pi, \pi])$, от тази теорема следва, че (2) е база и на $L^2_{\mathrm{C}}([-\pi, \pi])$. Това пространство притежава обаче и по-удобна база. Да разгледаме функциите

$$e^{\mathrm{i}nx},$$

където n пробягва съвкупността на всички *цели* числа. Те са ортогонални две по две. Наистина при $m \neq n$ имаме

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}mx}\, \overline{e^{\mathrm{i}nx}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(m-n)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}(m-n)}\, e^{\mathrm{i}(m-n)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

От друга страна,

$$\|e^{\mathrm{i}mx}\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\mathrm{i}mx}|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Ето защо функциите

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\mathrm{i}nx}$$

образуват ортонормирана система в $L^2_{\mathrm{C}}([-\pi, \pi])$.

10.11.2. Предложение. *Функциите* (9) *образуват база на пространството* $L^2_{\mathrm{C}}([-\pi, \pi])$.

Доказателство. Нека L_1 е затворената линейна обвивка на тези функции. От формулите на Ойлер

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}nx} + e^{-\mathrm{i}nx}\right),$$

$$\sin\, nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

($n=0, 1, 2, \ldots$) следва, че всяка от функциите (2) принадлежи на L_1. Тъй като (2) образуват база на $L^2_{\mathbf{C}}$ ($[-\pi, \pi]$), то $L_1 = L^2_{\mathbf{C}}$ ($[-\pi, \pi]$). Ето защо и (9) е база на $L^2_{\mathbf{C}}$ ($[-\pi, \pi]$). С това предложението е доказано.

Задачи към десета глава

Елементарни свойства на хилбертовите пространства

Задача 1. Да се докаже, че реално нормирано пространство е предхилбертово точно когато в него е изпълнено тъждеството

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\, \| x \|^2 + 2\, \| y \|^2.$$

Задача 2. Предхилбертово пространство е хилбертово точно когато в него е изпълнена общата теорема на Питагор.

Задача 3. Нека L е хилбертово пространство, а $u, v : L \to L$ са линейни изображения, за които

$$(u(x), y) = (x, v(y))$$

за всички $x, y \in L$. Да се докаже, че u и v са непрекъснати.

Упътване. Приложете теоремата за затворената графика.

Задача 4. Ако L е реално хилбертово пространство, A е компактно изпъкнало множество в L с $0 \in A$ и a е точка от L с $a \notin A$, съществува непрекъснат линеен функционал l в L с $l(x) \leq 1$ за всяко $x \in A$ и $l(a) > 1$.

Упътване. Убедете се, че в A съществува елемент ξ с $\| \xi - a \| \leq \| x - a \|$ за всяко $x \in A$, и постройте l във вида $l(x) = \lambda\,(x, a - \xi)$, където λ е подходящ скалар.

Сепарабелни пространства

Едно нормирано пространство се нарича *сепарабелно*, когато притежава изброимо гъсто подмножество.

Задача 5. Да се докаже, че пространствата $L^p\,(\mathbf{R}^n)$ ($p \geq 1$) са сепарабелни.

Задача 6. Нека $\langle X, L, \int \rangle$ е пространство на Лебег и $p \geq 1$. Да се докаже, че L^p е сепарабелно пространство точно когато съществува такава изброима фамилия Σ от сумируеми множества в X, че за всяко сумируемо множество A в X да съществуват пренебрежими множества B и C, за които $(A \setminus B) \cup C$ е обединение на елементи на Σ.

Задача 7. Да се докаже, че пространството L^{∞} ($[a, b]$) не е сепарабелно, а неговото подпространство C ($[a, b]$) е сепарабелно.

Задача 8. Да се докаже, че едно хилбертово пространство е сепарабелно точно когато притежава изброима база.

Задача 9. Да се посочи пример на сепарабелно хилбертово пространство L и на негово гъсто подпространство L_1, такива че не всяка максимална ортонормирана система в L_1 е база на L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у р б а к и, Н. Интегрирование, Москва, „Наука", 1967.
2. Д и й о д о н е, Ж., Основи на съвременния анализ, София, Наука и изкуство, 1972.
3. Д а н ф о р д, Н., Ж. Ш в а р ц, Линейные операторы, т. I, Москва, ИЛ, 1962.
4. Й о с и д а, К., Функциональный анализ, Москва, „Мир", 1967.
5. К и р и л о в, А. А., А. Д. Г в и ш и а н и, Теоремы и задачи функционального анализа, Москва, „Наука", 1979.
6. Н а т а н с о н, И. П., Увод в теория на реалните функции, София, Наука и изкуство, 1971.
7. Н е в ё, Ж., Математические основы теории вероятностей, Москва, „Мир", 1969.
8. Р и с с, Ф., Б. С е к е ф а л ь в и-Н а д ь, Лекции по функциональному анализу, Москва, ИЛ, 1954.
9. Р у д и н, У., Функциональный анализ, Москва, „Мир", 1975.
10. Т и т ч м а р ш, Е., Теория функций, Москва, ГИТТЛ, 1951.
11. Т а г а м л и ц к и, Я., Интегрално смятане, София, Наука и изкуство, 1967.
12. Х а л м о ш, П., Теория меры, Москва, „Мир", 1953.
13. Х а л м о ш, П., Гилбертово пространство в задачах, Москва, „Мир", 1970.
14. Ш и л о в, Г. Е., Математический анализ, 2-й специальный курс, Москва, „Наука", 1965.
15. Э д в а р д с, Э., Функциональный анализ, Москва, „Мир", 1969.

УКАЗАТЕЛ НА ТЕРМИНИТЕ

редица
релац =

УКАЗАТЕЛ НА ОЗНАЧЕНИЯТА

* Цифрите означават номерата на страниците, където са въведени съответните означения.

СЪДЪРЖАНИЕ

Четвърта глава. БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА

Пета глава. АБСТРАКТНО ИНТЕГРИРАНЕ

Шеста глава. ЛЕБЕГОВИ РАЗШИРЕНИЯ

Седма глава. ИЗМЕРИМИ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА

Иван Рачев Проданов

УВОД ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНИЯ АНАЛИЗ

I част

Рецензенти

Ярослав Александров Тагамлицки,

Петър Кирилов Русев

Редактор

Грозданка Благоева

Художник

Мария Кънчева

Художествен редактор

Таня Николова

Технически редактор

Теменужка Хаджииванова

Коректор

Теменужка Балабанова

Дадена за набор на 30. III. 1982 г. Подписана за печат на 20. XI. 1982 г.
Излязла от печат през месец декември 1982 г. Печатни коли 17.75.
Издателски коли 17,75. Условно издателски коли 18,10.
Литературна група III-4. Издателски № 25 547.
Формат 60/90/16. Тираж 1601 Цена 2,97 лв.

КОД 02 $\frac{9532272411}{2212\text{-}14\text{-}82}$

ДИ «Наука и изкуство» — София

ДП «Стоян Добрев—Странджата» — Варна