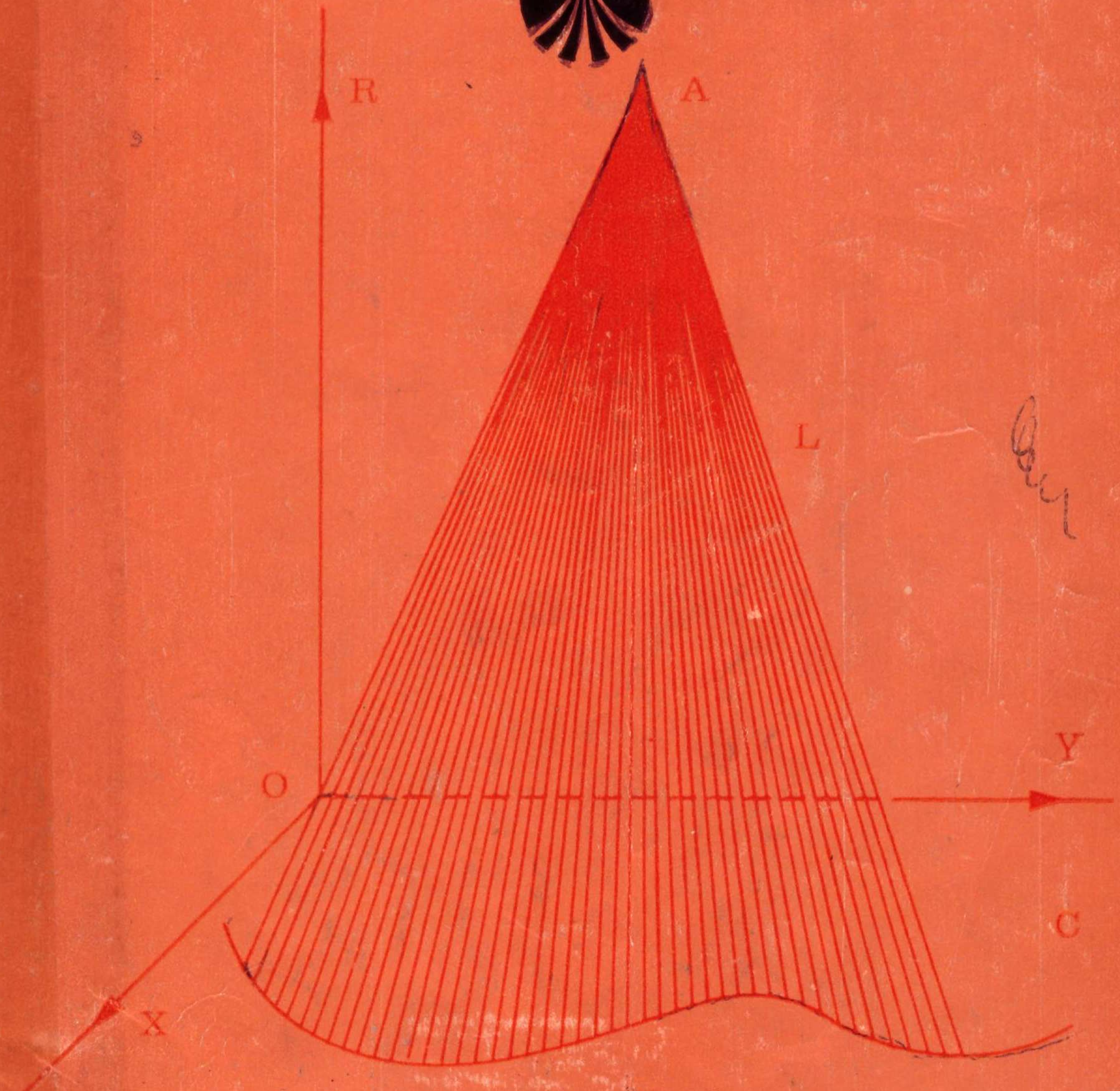
ГРОЗЬО СТАНИЛОВ

Аналитична геометрия

НАУКА И ИЗКУСТВО



ГРОЗЬО
СТАНИЛОВ

Аналитична геометрия

ИЗДАТЕЛСТВО НАУКА И ИЗКУСТВО СОФИЯ 1974

В учебника са дадени основите на аналитичната геометрия на равнината и пространството. Материалът е класически, но е изложен на векторно-алгебрична основа Широко е използван апаратът на линейната алгебра. Последователно е застъпено теоретико-груповото гледище на Ф. Клайн върху класическата геометрия. Изучават се трите основни групи: проективна, афинна, метрична, и техни инварианти.

Изложението е твърде сбито, кратко, но ясно.

Учебникът е предназначен за студенти по математика в Софийския и Пловдивския университет, а също така и за студенти по математика във ВПИ — Шумен. Несъмнено той ще бъде полезен за всеки, който желае да разшири своите познания по аналитична геометрия.

Индекс 51

Посвещава се на акад. проф. д-р Б. Петканчин

Съдържание

Глава IV

Уравнения на права и равнина в пространството

Глава V

Аналитично представяне на линии и повърхнини

Глава VI

Безкрайни елементи и хомогенни координати

Глава VII

Комплексни елементи

Глава VIII

Двойно отношение

Глава IX

Проективни координати и проективни координатни системи

Глава X

Групи от преобразувания и техните геометрии

Глава XI

Проективна класификация и проективни качонични уравнения на фигурите от втора степен

Глава XII

Афинни свойства и афинна класификация на фигурите от втора степен

Глава XIII

Метрична класификация и метрични канонични уравнения на фигурите от втора степен

Предговор

Учебникът съдържа лекциите, които се четат от 2—3 години на студентите по математика в Софийския и Пловдивския университет.

Обемът на учебника, макар и малък, включва традиционните теми по аналитична геометрия, които се излагат в обширни курсове по тази дисциплина. Възприетата от нас методика — да използваме нашироко линейната алгебра, ни даде възможност да изложим един твърде обемист класически материал на малко страници. При това последователно е проведено теоретико-груповото гледище на Ф. Клайн върху класическата геометрия. Еднотипно са въведени преобразуванията (движенията) в основните класически групи: проективна, афинна и метрична.

Старахме се изложението да бъде кратко, сбито, ясно. Във връзка с това ще отбележим две неща: 1) паралелно са правени разглежданията на едни и същи теми в равнината и в пространството или когато това е правено поотделно, в изложението втория път са пропуснати редица сходни неща; 2) разглеждането на някои частни случаи при доказване на твърдения са оставени на читателя като леки упражнения.

В линейната алгебра широко се прилага геометричният метод на Грам—Шмидт за ортонормиране на базата. Тук предлагаме експлицитни формули за системата от ортонормираните вектори, които, струва ни се, са нови.

Да отбележим някои технически неща. При цитиране на формула от параграфа, в който се водят разглежданията, се посочва номерът на формулата. Ако формулата е от друг параграф, на първо място се посочва номерът на параграфа и след това номерът на формулата. Например (9.4) означава формула (4) от параграф 9.

Надяваме се, че учебникът ще бъде полезен не само за студентите по математика. От него могат да разширят своите познания по аналитична геометрия студентите по физика и от висшите технически учебни заведения.

Авторът

Глава I

Вектори и координатни системи

§ 1. Векторното пространство на свободните вектори

Насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ наричаме наредена двойка точки A, B. A наричаме начало, B — край на насочената отсечка. Ако A съвпада с B, насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ наричаме *нулева*.

Две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ наричаме *колинеарни*, ако правите AB, CD са успоредни или съвпадат. Записваме $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Ако освен това е изпълнено следното условие: когато правите AB и CD са успоредни, точките B, D лежат от една и съща страна на правата AC, или ако правите AB, CD се сливат, посоките от A към B и от C към D съвпадат, то $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ наричаме *еднопосочно колинеарни* насочени отсечки. Аналогично се дефинира и понятието *разнопосочно колинеарни* насочени отсечки.

Сега ще въведем релацията „равенство на насочени отсечки".

Две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ наричаме *равни* (и записваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), ако са изпълнени следните условия:

а) отсечките AB, CD имат равни дължини;

б) насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочно колинеарни.

Лесно се проверява, че ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

От даденото определение следва, че релацията равенство на насочени отсечки е релация на еквивалентност, т. е. за нея са в сила следните три свойства:

1. Рефлексивност: всяка насочена отсечка е равна на себе си: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

2. Симетричност: ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

3. Транзитивност: ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Множество от всички равни помежду си насочени отсечки наричаме *свободен вектор.* Свободните вектори ще означаваме с малки получерни букви. Един свободен вектор **a** се определя с кой да е свой елемент (представител) $\overrightarrow{AB}$. Именно ако е дадена насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, то множеството от всички насочени отсечки, равни на $\overrightarrow{AB}$, е свободен вектор **a** с представител $\overrightarrow{AB}$. Ще употребяваме записването $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, което според току-що казаното в теоретико-множествен смисъл трябва да се схваща като $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$. На чертежите свободните вектори са означени с малки курсивни букви, придружени със стрелка отгоре.

Ако O е произволна точка, намирането на онзи представител на свободния вектор **a**, който има за начало точката O, се нарича *пренасяне* на свободния вектор **a** в точката O.

Два свободни вектора **a**, **b** наричаме *колинеарни*, когато произволни техни представители са колинеарни. Записваме $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Ако освен това представителите им са еднопосочни (разнопосочни), то векторите наричаме еднопосочно (разнопосочно) колинеарни.

Под дължина на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ ще разбираме дължината на отсечката AB. Под *дължина* $|\mathbf{a}|$ на един свободен вектор **a** ще разбираме дължината на кой да е негов представител.

Въвежда се понятието *нулев свободен вектор* **o**, който се определя с коя да е нулева насочена отсечка $\overrightarrow{AA}$. По определение го считаме колинеарен с всеки свободен вектор.

Нека $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ са ненулеви насочени отсечки с общо начало. Ъгълът, определен между лъчите с начало A и съдържащи точките B и C, се нарича *ъгъл* между насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Под ъгъл между два свободни вектора ще разбираме ъгъла между техни представители, пренесени в една точка. Той не зависи от представителите на векторите.

Най-сетне, ако **a** е свободен вектор с представител $\overrightarrow{AB}$, то насочената отсечка $\overrightarrow{BA}$ определя свободен вектор, който означаваме с $-\mathbf{a}$ и наричаме *противоположен* свободен вектор на свободния вектор **a**.

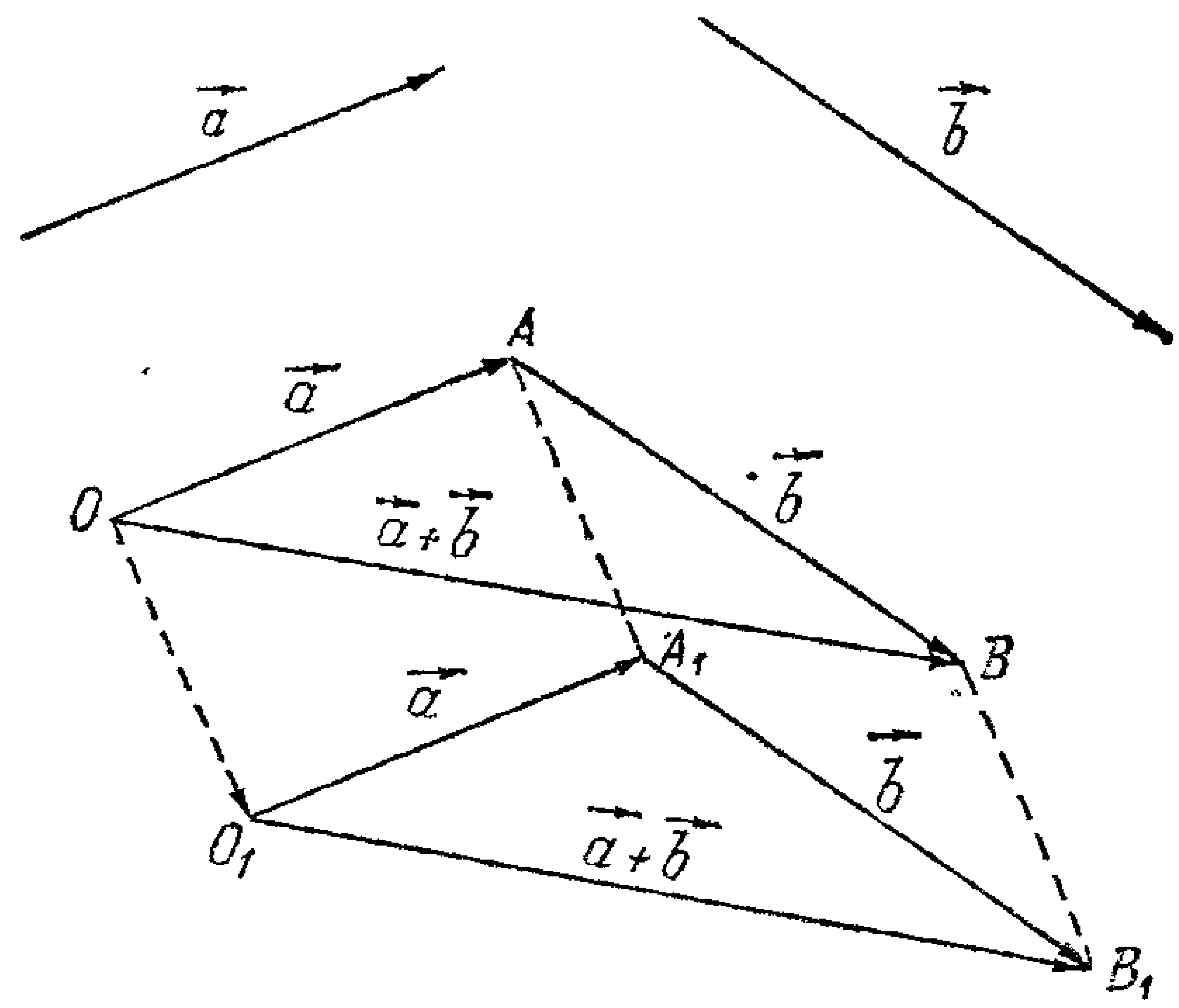
Сега да въведем две операции в множеството на свободните вектори, с което ще го превърнем във векторно пространство.

Събиране на свободни вектори. *Сума* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ на два свободни вектора **a**, **b** наричаме свободния вектор, получен по следния начин: пренасяме **a** в произволна точка O; получаваме насочената отсечка $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. В точката A пренасяме **b** и получаваме насочената отсечка $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$ (черт. 1). Насочената отсечка $\overrightarrow{OB}$ определя свободен вектор, който наричаме сума на двата свободни вектора и го означаваме с $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

За да бъде даденото определение коректно, трябва да покажем независимостта на сумата от случайния избор на точката O. За целта нека O_1 е друга точка и, както по-горе, да построим $\overrightarrow{O_1A_1}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\mathbf{b}$.

Съгласно определението насочената отсечка $\overrightarrow{O_1B_1}$ определя сумата $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Трябва да покажем, че $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O_1B_1}$, което означава, че насочените отсечки $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O_1B_1}$ определят един и същ свободен вектор.

По построение имаме $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O_1A_1}$, което дава $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{AA_1}$. Аналогично от равенството $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ следва $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$. От транзитивността



Черт. 1

на релацията равенство на насочени отсечки следва $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{BB_1}$, което от своя страна влече желаното равенство $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O_1B_1}$.

Операцията събиране на свободни вектори притежава следните свойства:

1°) асоциативен закон: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;

2°) $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$;

3°) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}$;

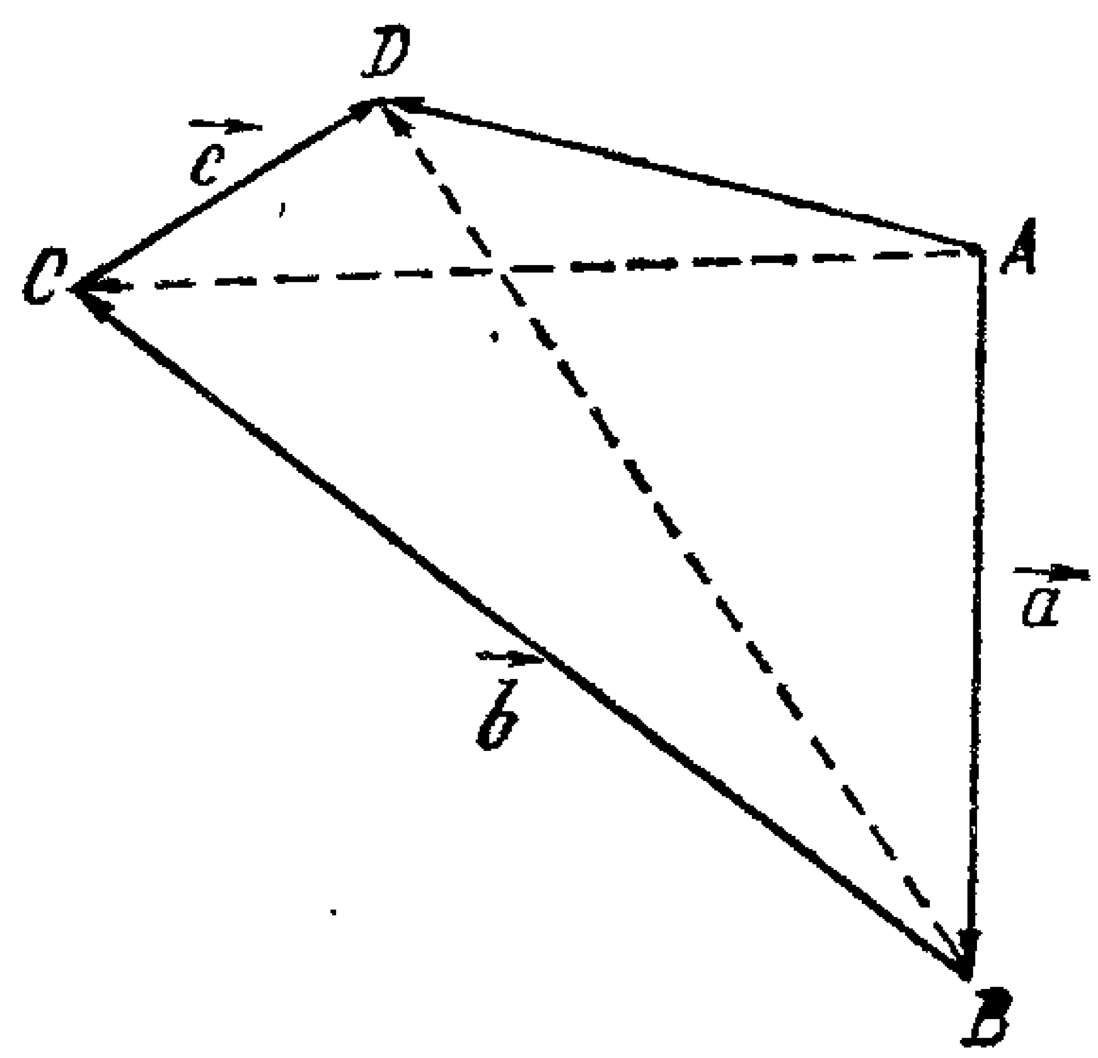
4°) комутативен закон: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

В равенствата 1°) —4°) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ са произволни свободни вектори.

Доказателство на 1°). Нека A, B, C, D са такива точки, че $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$. Понеже $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ има за представител насочената отсечка $\overrightarrow{BD}$, то свободният вектор $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ има за представител насочената отсечка $\overrightarrow{AD}$ (черт. 2). Аналогично, тъй като $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ има за представител $\overrightarrow{AC}$, свободният вектор $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ се представя с насочената отсечка $\overrightarrow{AD}$. Тъй като двата свободни вектора, стоящи в двете страни на 1°), се представят с една и съща насочена отсечка, следва, че те са едно и също множество от насочени отсечки. С това е доказан асоциативният закон.

Доказателствата на 2⁰) и 3⁰) предоставяме на читателя като леки упражнения.

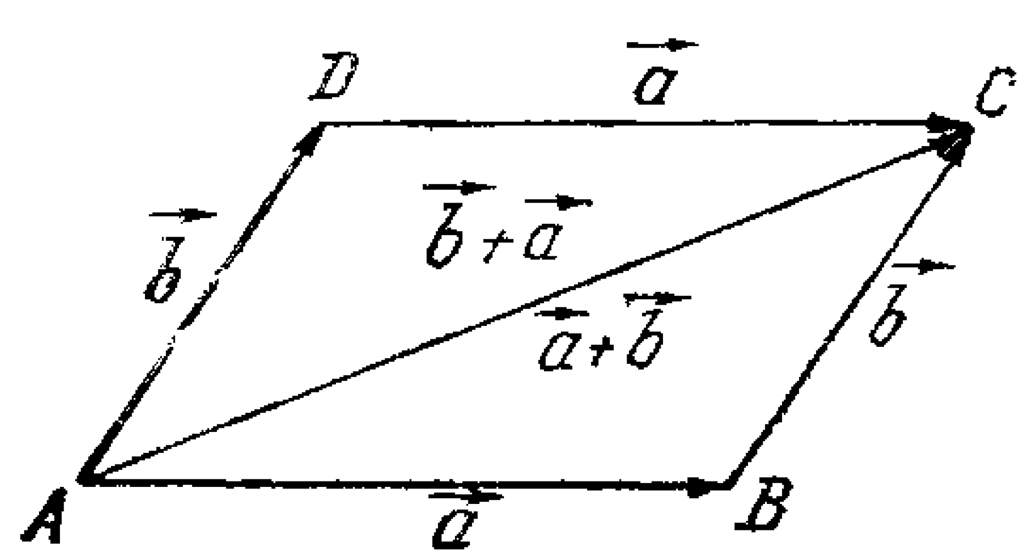
Доказателство на 4⁰). Случаят, когато **a** и **b** са колинеарни, е тривиален. Ще разгледаме случая, когато векторите **a** и **b** не са ко-



Черт. 2

линеарни. Нека сме построили успоредника $ABCD$ така, че $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\mathbf{a}$ (черт. 3). Според определението за сума на свободни вектори от триъгълника ABC следва, че $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ се представя с насочената отсечка $\overrightarrow{AC}$. Разглеждането на триъгълника ADC показва, че същата, насочена отсечка $\overrightarrow{AC}$ е представител и на вектора $\mathbf{b}+\mathbf{a}$. С това 4⁰) е доказано.

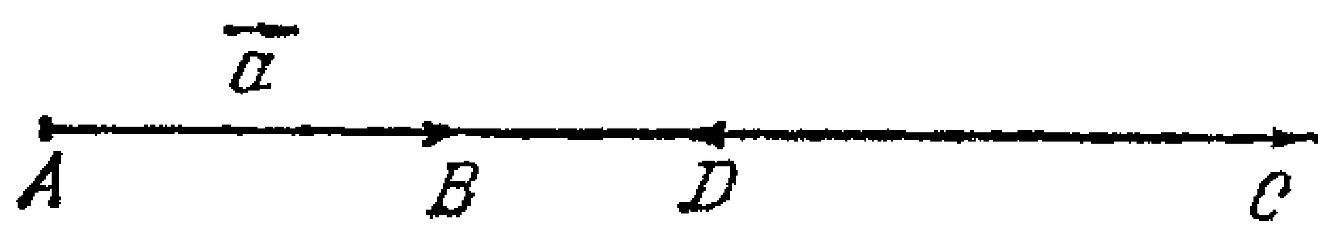
Законите 1⁰) —4⁰) показват, че множеството на свободните вектори е комутативна (абелова) група относно операцията събиране на свободни вектори. Поради това свойствата 1⁰) —4⁰) се наричат *групови свойства* на множеството на свободните вектори. Асоциативният закон ни дава възможност да пишем $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ вместо $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$. С други думи, при събиране на свободни вектори можем да изпускаме скобите.



Черт. 3

Ние дефинирахме сума на два свободни вектора, но определението лесно се пренася и за сума на произволен краен брой вектори.

Умножение на реално число със свободен вектор. Нека **a** е свободен вектор и λ е реално число. *Произведение* на свободния вектор **a** с реалното число λ наричаме свободния вектор $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{a}\lambda$, който е колинеарен с **a** и дължината му е $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\,|\mathbf{a}|$; ако $\lambda>0$, двата вектора са еднопосочно колинеарни; ако $\lambda<0$, двата вектора са разнопосочно колинеарни; ако $\lambda=0$ или $\mathbf{a}=\mathbf{o}$, или едновременно $\lambda=0$, $\mathbf{a}=\mathbf{o}$ по определение считаме $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{o}$.



Черт. 4

Операцията умножение на реално число със свободен вектор притежава следните свойства:

5^0) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$;

6^0) $(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$;

7^0) $\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$;

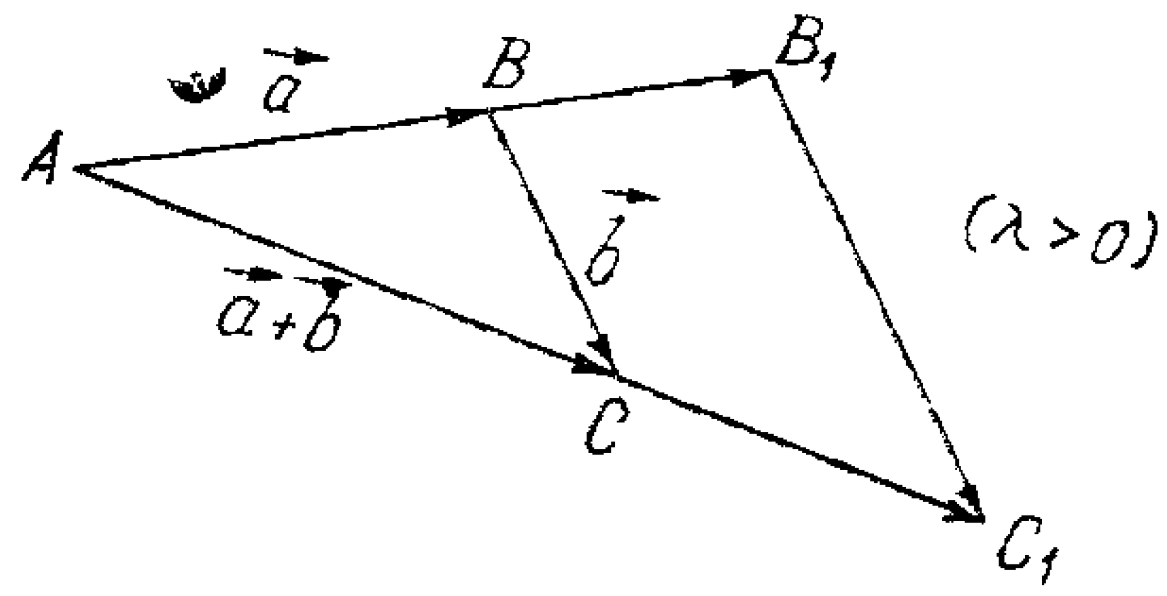
8^0) $\lambda(\mu\mathbf{a})=\lambda\mu\mathbf{a}$.

Тук **a**, **b** са произволни свободни вектори, а λ, μ — произволни реални числа. Свойствата 6^0) и 7^0) се наричат дистрибутивни закони съответно относно скаларния и векторния множител.

Свойството 5^0) е очевидно.

Доказателство на 6^0). Да предположим, че $\lambda>0$, $\mu<0$, като $\lambda+\mu>0$. Аналогично се третират и останалите случаи. Нека $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ $\overrightarrow{AC}=\lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CD}=\mu\mathbf{a}$ (черт. 4). Съгласно определението за сума на свободни вектори $\overrightarrow{AD}$ е представител на $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$. Поради $\lambda+\mu>0$ следва че точката D е между точките A и C. Тогава $\overrightarrow{AD}$ има посоката на $\overrightarrow{AB}$ и дължина $|\lambda+\mu|\,|\mathbf{a}|$, т. е. $\overrightarrow{AD}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}$. С това 6^0) е доказано.

Доказателство на 7^0). Нека $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$. Тогава $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. На черт. 5 при $\lambda>0$ са построени $\overrightarrow{AB_1}=\lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC_1}=\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Триъгълниците



Черт.5

ABC и AB_1C_1 са подобни. Тогава $\overrightarrow{B_1C_1}=\lambda\mathbf{b}$ и насочената отсечка $\overrightarrow{AC_1}$ се явява представител на сумата $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$. С това 7^0) е доказано. Случаят $\lambda<0$ се разглежда аналогично.

При доказването на 8^0) трябва да се разгледат случаите: $\lambda>0$, $\mu>0$; $\lambda>0$, $\mu<0$; $\lambda<0$, $\mu<0$; $\lambda<0$, $\mu>0$. Проверката е проста.

Да резюмираме направеното дотук. В множеството на свободните вектори дефинирахме две операции: събиране на свободни вектори и умножение на реално число със свободен вектор. Показахме валидността на законите 1^0) -8^0). С това е доказана следната

Теорема 1. *Множеството на свободните вектори е векторно пространство над полето на реалните числа.*

Отсега нататък вместо термина свободен вектор ще употребяваме само вектор.

Операцията *изваждане* на вектори се дефинира въз основа на операцията събиране на вектори; по определение имаме

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} := \mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ наричаме *линейно зависими*, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула, такива, че

$$(1) \qquad \lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{a}_k=\mathbf{o}.$$

Ако векторите не са линейно зависими, наричаме ги *линейно независими*. Ясно е, че ако векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ са линейно независими и за тях е изпълнено равенството (1), то

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0.$$

За вектор $\mathbf{p}$, за който важи представянето

$$\mathbf{p}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_m\mathbf{a}_m,$$

казваме, че е *линейна комбинация* на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Ако $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, векторът

$$(2) \qquad \mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

е единичен по посоката на вектора $\mathbf{a}$.

Теорема 2. *Два вектора са линейно зависими точно когато са колинеарни.*

Доказателство. Нека векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ са линейно зависими. Това означава, че съществува ненулева двойка реални числа (λ_1, λ_2) такава, че

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2=\mathbf{o}.$$

Ако предположим, че $\lambda_1 \neq 0$, последното равенство може да се напише във вида

$$\mathbf{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2,$$

което показва, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ са колинеарни.

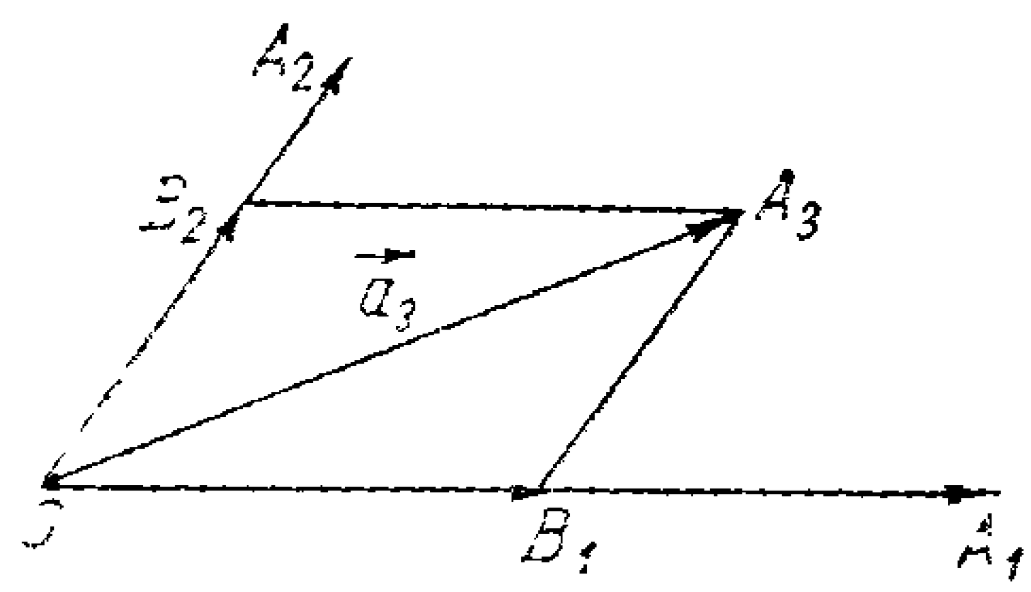
Обратно, нека векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ са колинеарни. Тогава можем да напишем равенството (при $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$)

$$(3) \qquad \mathbf{a}_2=\varepsilon\frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}\mathbf{a}_1$$

като $\varepsilon=+1$, ако векторите са еднопосочно колинеарни, и $\varepsilon=-1$ при разнопосочно колинеарни вектори. Равенството (3) се проверява непосредствено. От него получаваме

$$|\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2-\varepsilon|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1=\mathbf{o},$$

което показва, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ са линейно зависими. Ако $\mathbf{a}_1=\mathbf{o}$, равенството $1\mathbf{a}_1+0\mathbf{a}_2=\mathbf{o}$ показва, че $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ са линейно зависими. С това теоремата е доказана.



Черт. 6

Следствие. Два вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ са колинеарни точно когато единият от тях е линейна комбинация на другия: $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ или $\mathbf{b}=\mu\mathbf{a}$.

Три вектора се наричат *компланарни*, ако представителите им в една точка лежат в една равнина.

Теорема 3. *Три вектора са линейно зависими точно когато са компланарни.*

Доказателство. Нека векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ са компланарни, като $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$, $OA_3=\mathbf{a}_3$ са техни представители. Точките O, A_1, A_2, A_3 лежат в една равнина. Предполагаме най-напред, че $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ са линейно независими. Тогава те не са колинеарни. През точката A_3 прекарваме права, успоредна на правата OA_2 (OA_1) и нека тя пресича правата OA_1 (OA_2) в точката B_1 (B_2) (черт. 6). Понеже $\overrightarrow{OB_1}\parallel\overrightarrow{OA_1}$, следва $\overrightarrow{OB_1}=\lambda_1\overrightarrow{OA_1}$ съгласно (3). Тук $\lambda_1=\varepsilon\dfrac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OA_1}|}$. Аналогично $\overrightarrow{OB_2}\parallel\overrightarrow{OA_2}$ дава $\overrightarrow{OB_2}=\lambda_2\overrightarrow{OA_2}$. Понеже

$$\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1A_3}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2},$$

то

$$OA_3=\lambda_1\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\overrightarrow{OA_2},$$

т. е.

$$\mathbf{a}_3=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2.$$

Това равенство, написано във вида

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+(-1)\mathbf{a}_3=\mathbf{o},$$

показва, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ са линейно зависими.

Ако предположим, че $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ са линейно зависими, следва съществуването на ненулева двойка (λ_1, λ_2) със свойството

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2=\mathbf{o}.$$

Това равенство написваме във вида

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+0\mathbf{a}_3=\mathbf{o},$$

откъдето става ясно, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ са линейно зависими.

Обратно, да предположим сега, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ са линейно зависими. Значи съществува ненулева тройка числа λ_1, λ_2, λ_3 такава, че

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3=\mathbf{o}.$$

Ако предположим, че $\lambda_3 \neq 0$, последното равенство може да се запише във вида

$$\mathbf{a}_3=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\mathbf{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathbf{a}_2,$$

откъдето лесно се съобразява, че векторите $-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\mathbf{a}_1$, $-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, а с това и векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ са компланарни.

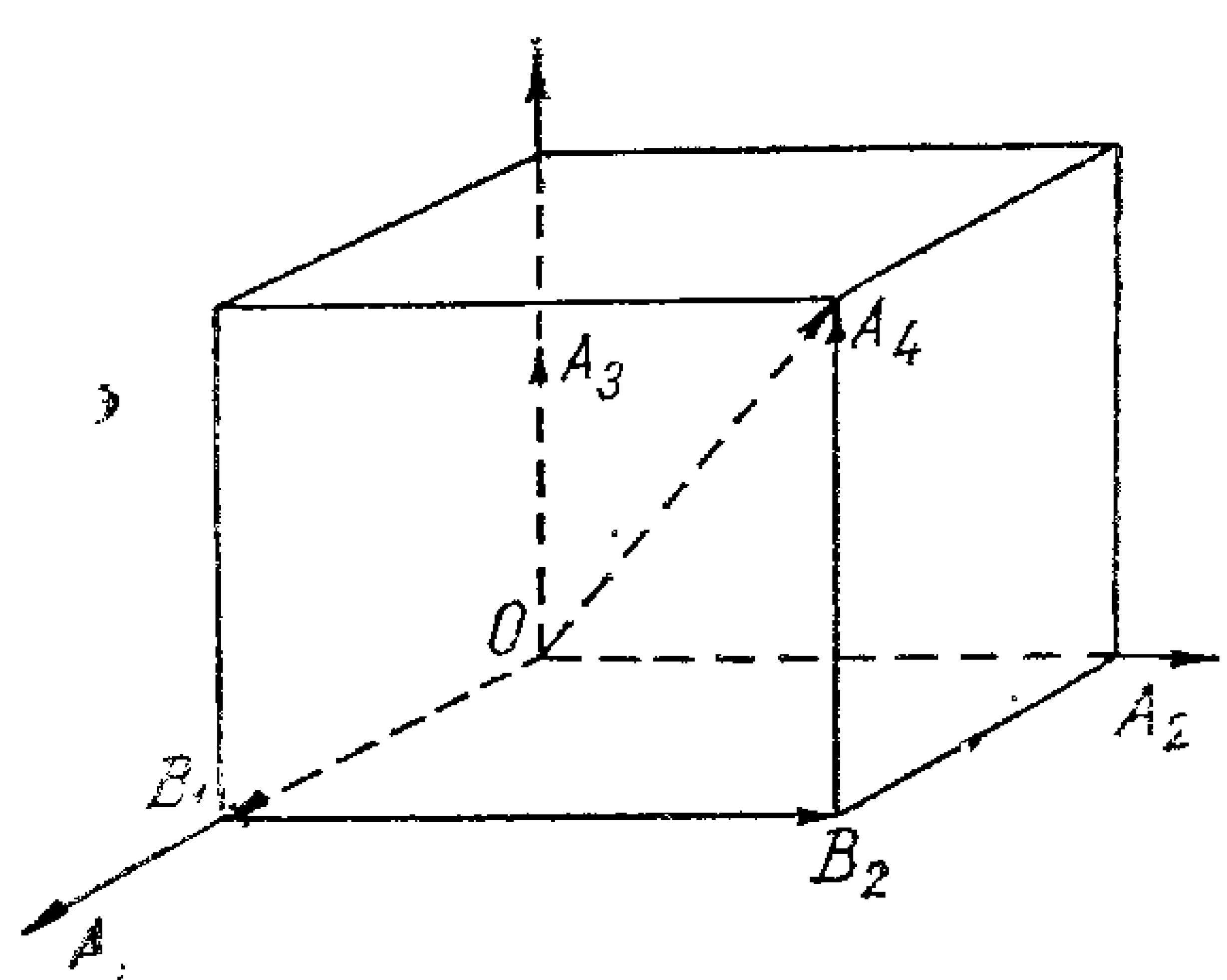
С това теоремата е доказана.

Следствие. Три вектора са компланарни точно когато единият от тях е линейна комбинация на другите два вектора.

Теорема 4. *Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.*

Доказателство. Нека $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ са дадените вектори с представители

$$\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1,\ \overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2,\ \overrightarrow{OA_3}=\mathbf{a}_3,\ \overrightarrow{OA_4}=\mathbf{a}_4.$$



Черт. 7

Ако допуснем, че $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ са линейно зависими, от равенството

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3=\mathbf{o},$$

тъй като $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, написваме

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + 0 \,.\, \mathbf{a}_4 = \mathbf{o},$$

което показва, че и четирите вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ са линейно зависими.

Ако предположим, че векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ са линейно независими, следва, че точките O, A_1, A_2, A_3 не лежат в една равнина. Нека правата през A_4, успоредна на OA_3, пробожда равнината OA_1A_2 в точката B_2, а правата през B_2, успоредна на OA_2, пресича OA_1 в точката B_1. Очевидно

$$\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2A_4}.$$

От колинеарността на двойките вектори $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{B_2A_4}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следва съществуването на реални числа λ, μ, ν такива, че

$$\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{OA_1}, \quad \overrightarrow{B_1B_2} = \mu\overrightarrow{OA_2}, \quad \overrightarrow{B_2A_4} = \nu\overrightarrow{OA_3}.$$

Тогава

$$\overrightarrow{OA_4} = \lambda\overrightarrow{OA_1} + \mu\overrightarrow{OA_2} + \nu\overrightarrow{OA_3},$$

или

$$\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2 + \nu\mathbf{a}_3 + (-1)\mathbf{a}_4 = \mathbf{o},$$

което показва компланарността на векторите. С това теоремата е доказана.

Ние въведохме векторното пространство на свободните вектори, без да се интересуваме от неговата размерност. Разглежданията, направени по-горе, важат за пространството, равнината и правата. Теоремите 2, 3, 4 ни дават възможност да формулираме следното свойство:

9^0) *свободните вектори върху една права образуват едномерно векторно пространство;*

свободните вектори в една равнина образуват двумерно векторно пространство;

свободните вектори в пространството образуват тримерно векторно пространство.

Операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число се наричат *афинни* (линейни) *операции* с векторите.

§ 2. Координатна ос и проекция на вектор върху ос

Права l с избрана върху нея посока се нарича *ос*. Тази посока отбелязваме с „+“. Избираме вектор $\mathbf{e}$ върху оста, чиято посока съвпада с посоката на оста (черт. 8).

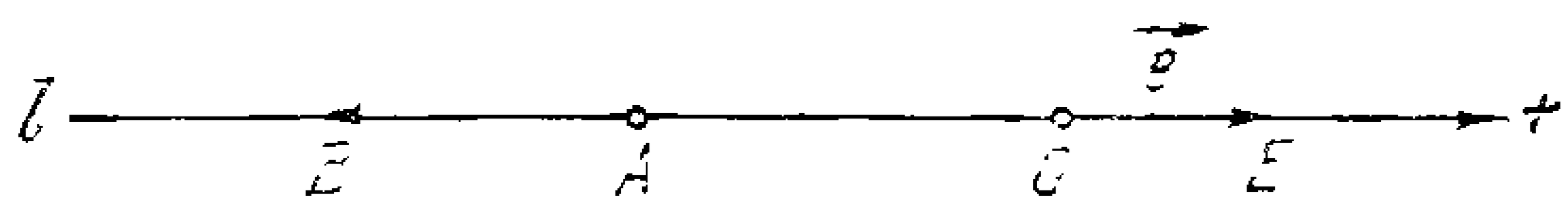
Нека $\overrightarrow{AB}$ е насочена отсечка върху оста l. Тъй като векторите $\overrightarrow{AB}$ (т. е. векторът с представител $\overrightarrow{AB}$) и $\mathbf{e}$ са колинеарни, те са линейно зависими:

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\mathbf{e} = \mathbf{o}.$$

Сигурно е, че $\lambda \neq 0$. Иначе поради $\mu \neq 0$ би следвало, че $\mathbf{e} = \mathbf{o}$, което не е вярно. Като положим $x = -\mu : \lambda$, последното равенство записваме във вида

(1) $$\overrightarrow{AB} = x\mathbf{e}.$$

Числото x се нарича *координата на насочената отсечка или на вектора* $\overrightarrow{AB}$ относно оста с вектор $\mathbf{e}$. Записваме $\overrightarrow{AB}\ (x)$ или $x_{\overrightarrow{AB}}$.



Черт. 8

Срещат се названията релативна или алгебрична мярка на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ и означението $\overline{AB}$ вместо x.

Ако $\mathbf{e}$ има дължина 1, от равенството (1) следва, че $|x| = |\overrightarrow{AB}|$ е дължината на $\overrightarrow{AB}$. От определението за произведение на вектор с число следва: $x > 0$, ако $\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}$ са еднопосочно колинеарни; $x < 0$, ако те са разнопосочно колинеарни; $x = 0$ точно когато $\overrightarrow{AB} = \mathbf{o}$.

Нека A, B, C са три произволни точки върху една ос. В сила са равенствата

$$\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AB}} \,.\, \mathbf{e} = \overline{AB}\, \mathbf{e},$$

$$\overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{BC}} \,.\, \mathbf{e} = \overline{BC}\, \mathbf{e},$$

$$\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AC}} \,.\, \mathbf{e} = \overline{AC}\, \mathbf{e}.$$

Векторното равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

влече след себе си следната релация на Шал (Chasles):

(2) $$x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{BC}} = x_{\overrightarrow{AC}},$$

или в друго записване:

(3) $$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Координатна ос наричаме ос с избрана точка върху нея. Тази точка се нарича *начало* на координатната ос и се означава обикновено с O. Координатната ос ще означаваме с $O\mathbf{e}$, където $\mathbf{e}$ е еднопосочно колинеарен вектор на оста.

Нека A е точка от координатната ос $O\mathbf{e}$. Определена е насочената отсечка $\overrightarrow{OA}$ и съгласно (1) можем да пишем

(4) $$\overrightarrow{OA} = x\mathbf{e}.$$

Числото x наричаме *координата на точката A относно координатната ос $O\mathbf{e}$.* Записваме $A(x)$. Според определението $x_A = x_{\overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{OA}$ е координата на $\overrightarrow{OA}$.

Точката $E(1)$ се нарича *единична точка* на координатната ос. Очевидно за нея имаме

$$\overrightarrow{OE} = 1 \, . \, \mathbf{e}.$$

Нека са дадени две точки

$$A(x_A), \; B(x_B)$$

относно координатната ос $O\mathbf{e}$. Като вземем пред вид релацията на Шал за точките O, A, B

$$x_{\overrightarrow{OA}} + x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{OB}},$$

получаваме

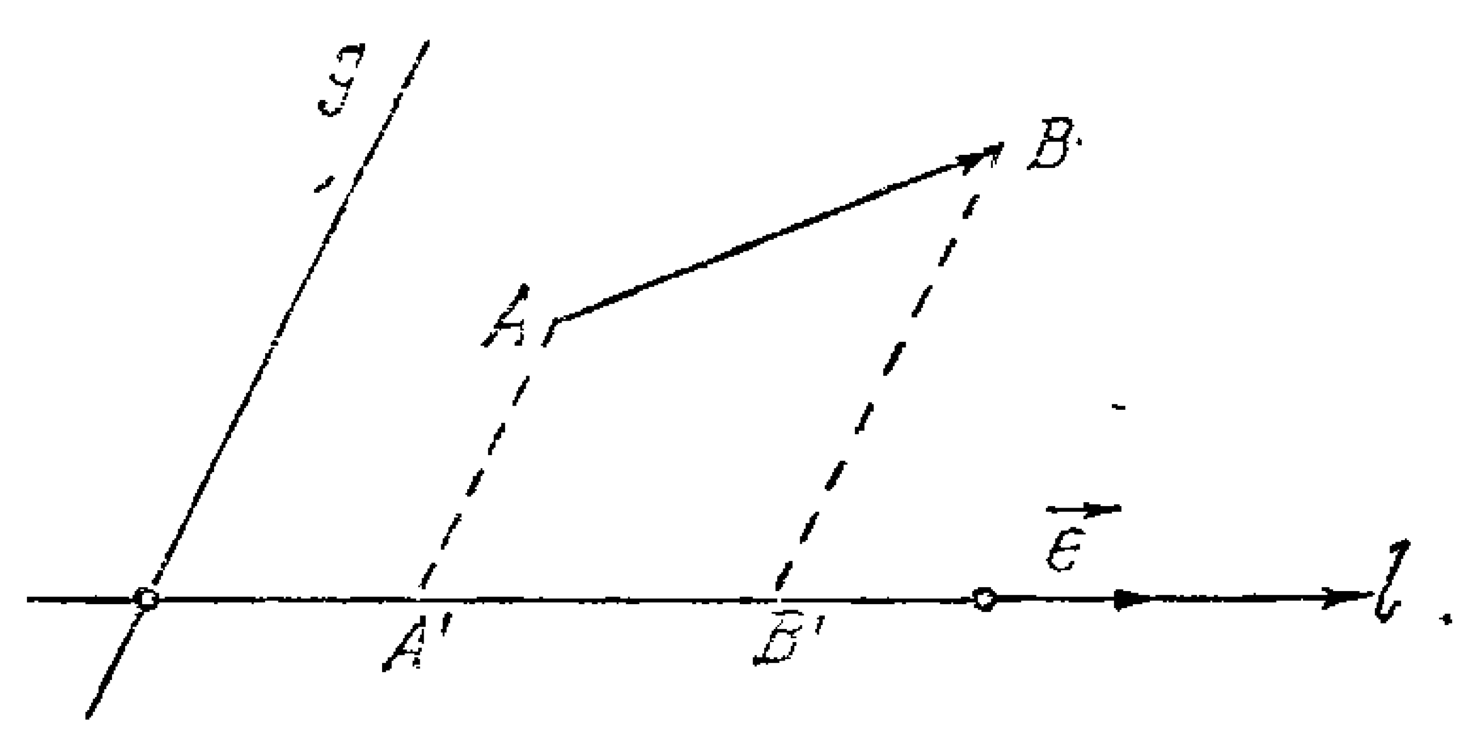
$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \, .$$

Значи можем да пишем

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A) \text{ или } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{e}.$$

Ако $\mathbf{e}$ е единичен вектор, координатната ос $O\mathbf{e}$ се нарича *нормирана*

Забележка. С помощта на една координатна ос върху права се осъществява биективно (т. е. взаимно еднозначно) изображение между множеството на всички точки върху правата и множеството на всички реални числа. При това изображение на точка от правата се съпоставя нейната координата.



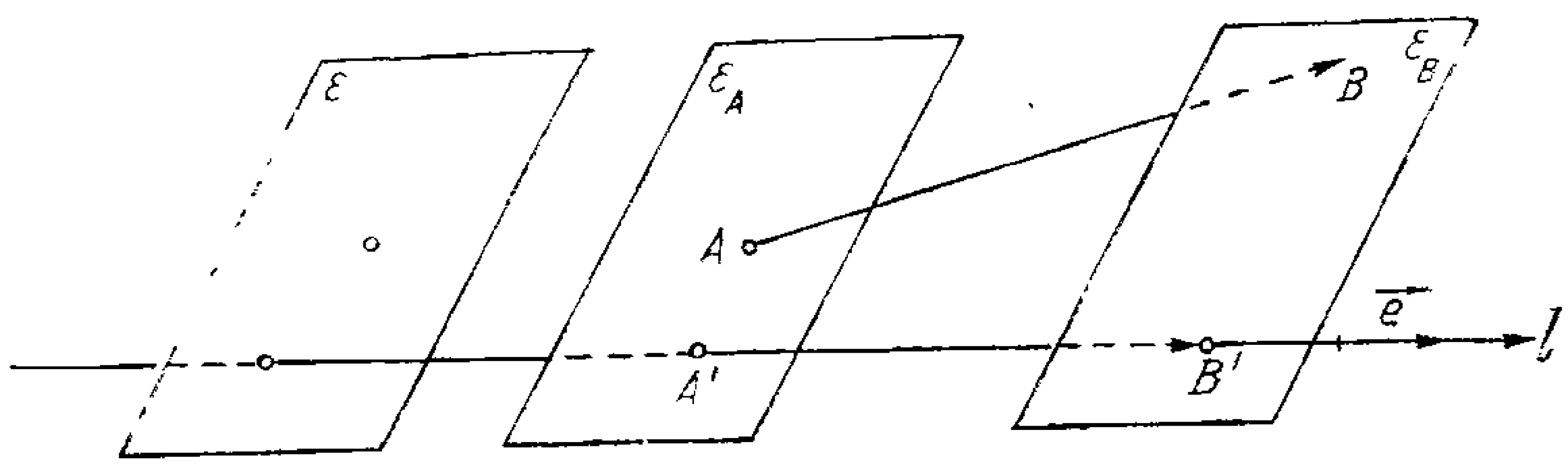
Черт. 9

Нека в една равнина са дадени ос l, насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ и права g, пресичаща l. Нека A', B' са пресечните точки на l с правите през A, B, успоредни на g (черт. 9). Съгласно (1) имаме равенството

(5) $$\overrightarrow{A'B'} = x\mathbf{e}.$$

Ако $\mathbf{e}$ е единичен вектор върху оста, то *числото x се нарича проекция на насочената отсечка AB върху оста l, получена успоредно на g.*

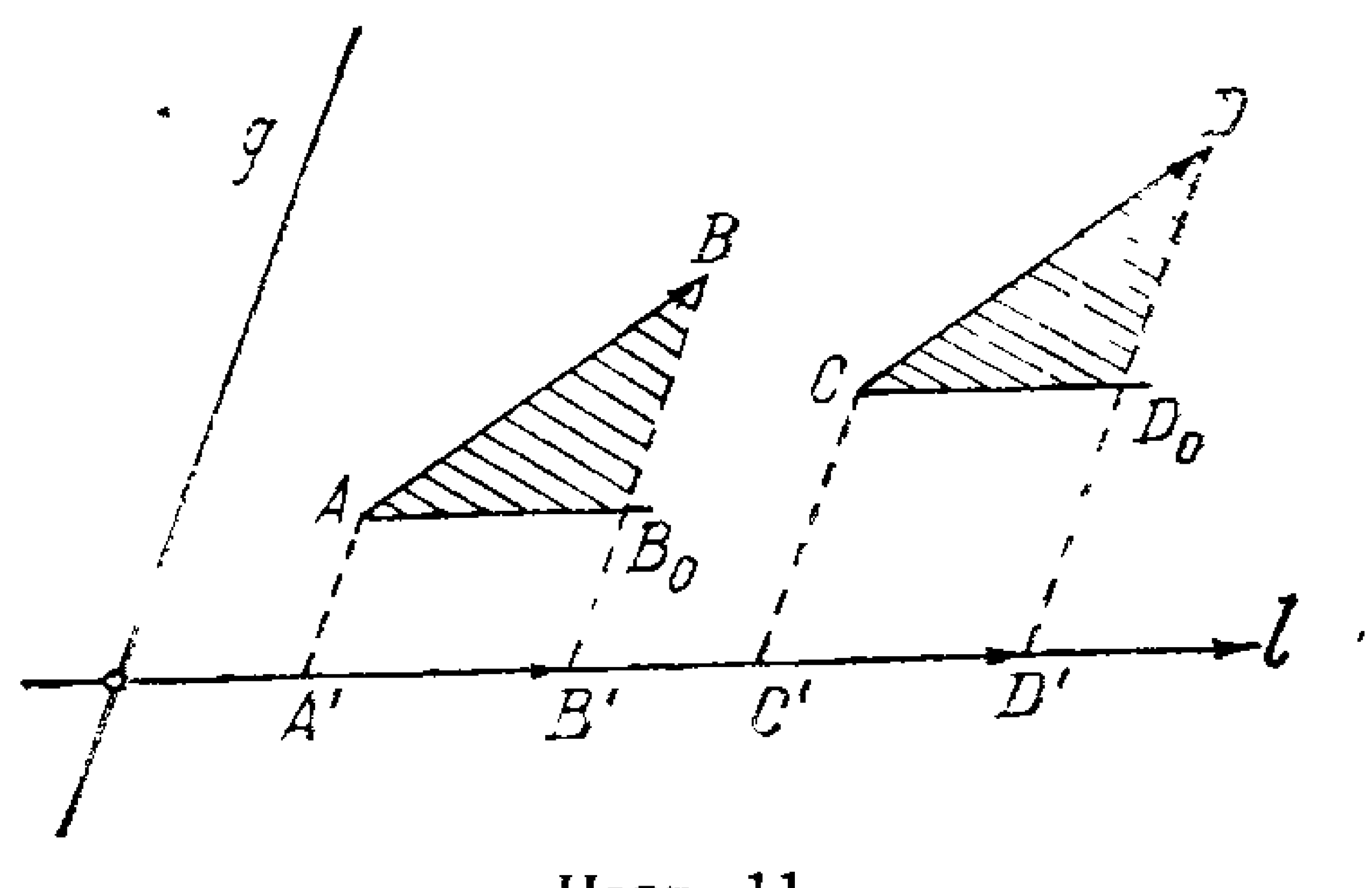
Аналогично нека в пространството са дадени оста l, насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ и равнината ε, пресичаща l. Прекарваме равнините ε_A и ε_B през A, B, успоредни на ε, и нека те пресичат l в точките A', B' (черт. 10). Отново е в сила равенството (5) и ако **e** е единичен вектор върху оста l,



Черт. 10

дефинираме: *числото x се нарича проекция на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ върху оста l, получена успоредно на равнината ε.*

От определението за проекция на насочена отсечка върху ос е ясно, че проекцията x на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ върху оста l с единичен вектор **e** е дължината на отсечката $A'B'$, взета със знак плюс или минус в зависимост от това, дали посоките на $A'B'$, **e** съвпадат или са противоположни. Съгласно означенията по-горе можем да пишем: $x = A'B'$. Употребява се и записването $x = \text{пр}_e \overrightarrow{AB} = \text{пр}_l \overrightarrow{AB}$.



Черт. 11

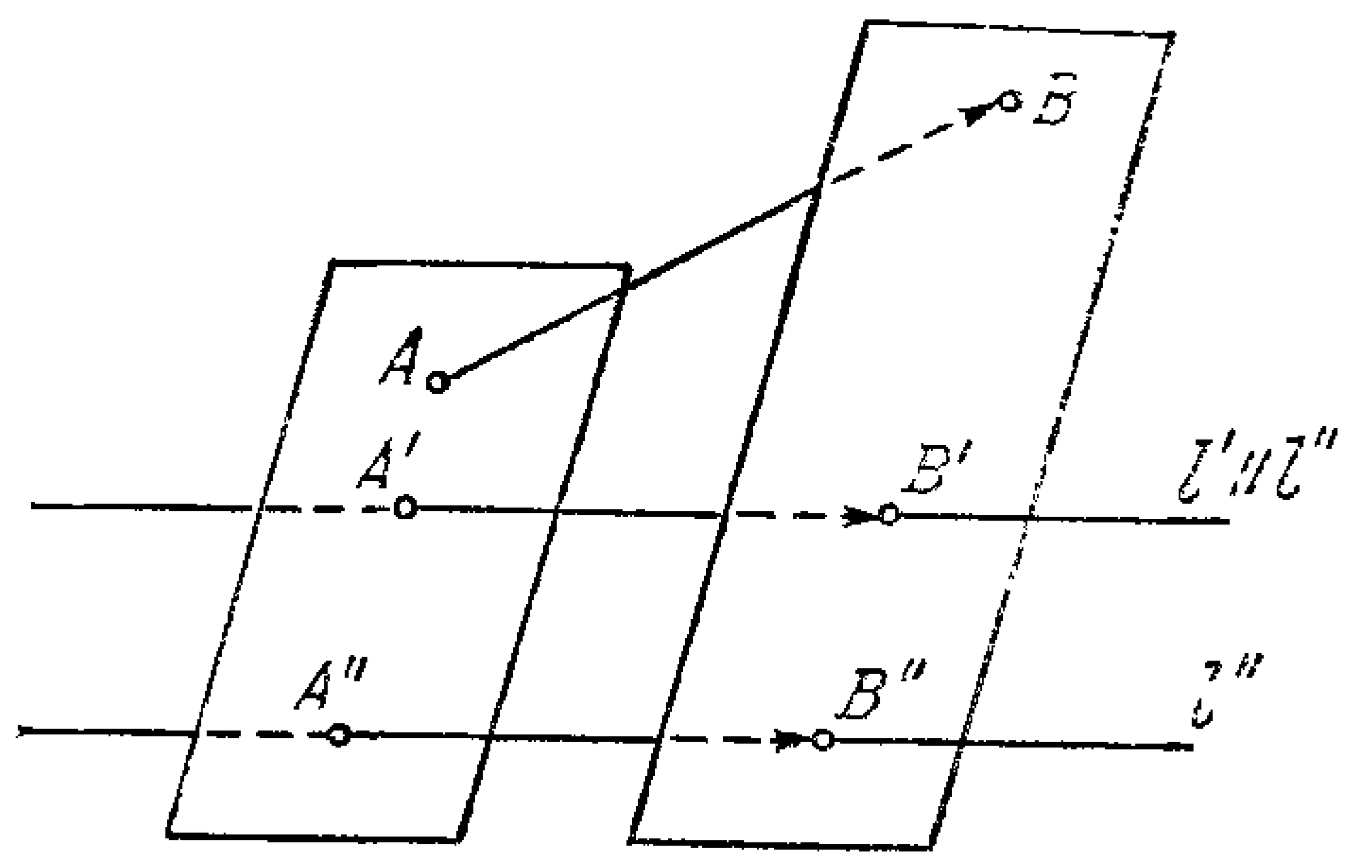
В сила е следната

Теорема 1. *Равните насочени отсечки имат равни проекции.*

Доказателство. Нека насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ са равни: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. В случай че правите AB, CD лежат в една равнина с оста, доказателството на твърдението следва от черт. 11, а именно: $|A'B'| =$

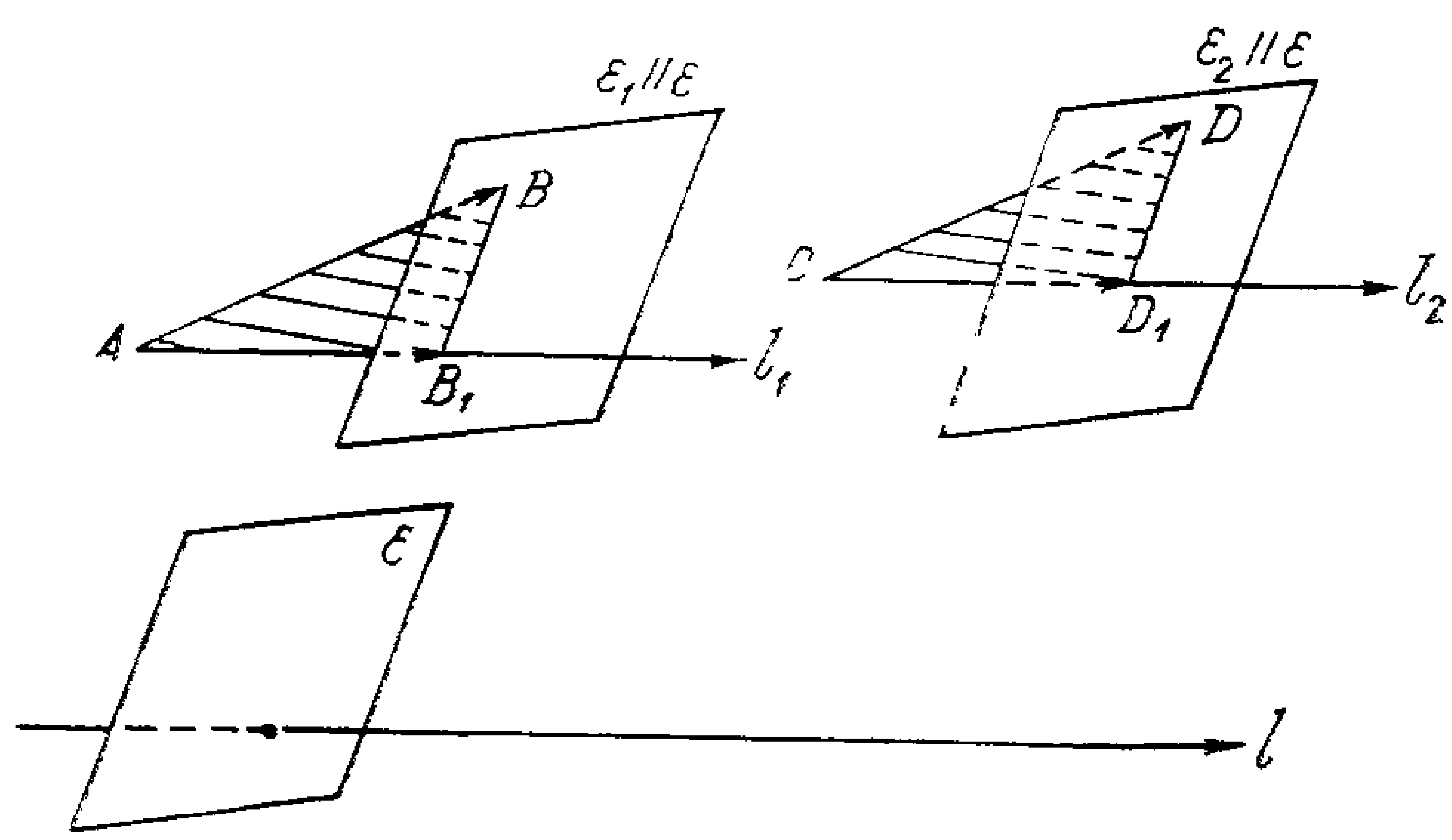
$|AB_0|=|CD_0|=|C'D'|$, тъй като триъгълниците ABB_0, CDD_0 са еднакви ($AB_0 \parallel l$, $CD_0 \parallel l$).

В случай че правите AB, CD, l не лежат в една равнина и става дума за проекция върху ос, получена успоредно на равнина, най-на-



Черт. 12

пред забелязваме, че проекциите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ върху успоредните оси l', l'' са равни. Действително (черт. 12) фигурата $A'B'B''A$ е успоредник. Въз основа на това при дадени насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}$ прекарваме осите l_1, l_2 през A, C съответно еднопосочно успоред



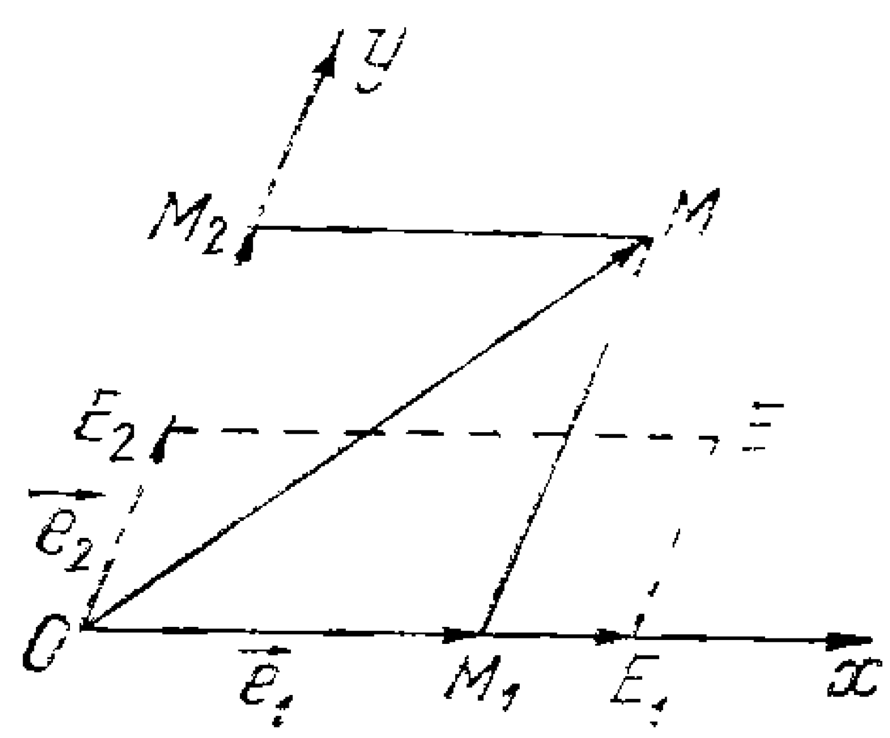
Черт. 13

ни на дадената ос l (черт. 13). Твърдението следва от еднаквостта на триъгълниците ABB_1, CDD_1.

Теорема 1 е доказана. Тя ни дава възможност да дефинираме: *проекция на вектор* **a** *върху ос* l наричаме проекцията на кой да е представител на вектора върху оста.

§ 3. Афинна координатна система в равнината

Афинна координатна система (или *афинен репер*) $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ *в равнината* наричаме наредена двойка от пресичащи се координатни оси $O\mathbf{e}_1$, $O\mathbf{e}_2$ с общо начало O (черт. 14). От определението следва, че векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ не са колинеарни; следователно са линейно независими. С



Черт. 14

E_1, E_2 означаваме единичните точки на координатните оси. От определението не следва, че дължините на $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ са равни на дължината на единичната отсечка, с която ще мерим дължините в равнината, и че въобще те са равни.

Нека M е произволна точка в равнината на координатната система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Векторите $\overrightarrow{OM}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ са компланарни, следователно са линейно зависими, т. е. съществува ненулева тройка числа λ, μ, ν такава, че е изпълнено равенството

$$\lambda\overrightarrow{OM}+\mu\mathbf{e}_1+\nu\mathbf{e}_2=\mathbf{o}.$$

Числото $\lambda\neq 0$, иначе ще излезе, че $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ са линейно зависими. Като положим

$$x=-\frac{\mu}{\lambda},\qquad y=-\frac{\nu}{\lambda},$$

от последното векторно равенство получаваме

$$\overrightarrow{OM}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2. \tag{1}$$

И тъй, ако M е произволна точка от равнината, в която е взета афинната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, в сила е разлагането (1). Ще покажем, че то е еднозначно определено, т. е. числата x, y са еднозначно определени.

Действително да допуснем, че за точката M имаме и друго разлагане:

$$\overrightarrow{OM}=x'\mathbf{e}_1+y'\mathbf{e}_2. \tag{1'}$$

Като сравним десните страни на (1) и (1'), получаваме

$$(x-x')\,\mathbf{e}_1+(y-y')\,\mathbf{e}_2=\mathbf{o}.$$

От линейната зависимост на векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ следват равенствата

$$x=x',\ y=y',$$

които показват, че разлагането (1) е еднозначно.

Поради това дефинираме: наредената двойка числа (x, y) от (1) наричаме *афинни координати* на точката M относно афинната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Записваме $M(x, y)$. Числото x наричаме *абсциса*, y — *ордината* на точката M. Насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ наричаме *радиус-вектор* на точката M и приемаме, че $\overrightarrow{OM}$ има координати (x, y), т. е. $\overrightarrow{OM}(x, y)$. Понякога координатната система ще означаваме с Oxy вместо $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

Точката E, за която е в сила разлагането

$$\overrightarrow{OE}=1\,.\,\mathbf{e}_1+1\,.\,\mathbf{e}_2,$$

се нарича *единична точка* на афинната координатна система. Очевидно имаме $E(1,\ 1)$.

Да прекараме през точката M права, успоредна на $OE_2(OE_1)$, и нека тя пресича $OE_1(OE_2)$ в точката $M_1(M_2)$ (черт. 15). Имаме

(2)
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}.$$

От колинеарността на двойките вектори $\overrightarrow{OM_1}$ и $\mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OM_2}$ и $\mathbf{e}_2$ следват равенствата

(3)
$$\overrightarrow{OM_1}=\bar{x}\mathbf{e}_1,\ \overrightarrow{OM_2}=\bar{y}\mathbf{e}_2.$$

Тук $\bar{x}$ е координатата на M_1 относно координатната ос $O\mathbf{e}_1$; $\bar{y}$ е координатата на M_2 относно $O\mathbf{e}_2$. От (2) и (3) следва

(4)
$$\overrightarrow{OM}=\bar{x}\mathbf{e}_1+\bar{y}\mathbf{e}_2.$$

Като вземем пред вид, че разлагането (1) е еднозначно, от (1) и (4) получаваме $\bar{x}=x$, $\bar{y}=y$. Тогава

(3′)
$$\overrightarrow{OM_1}=x\mathbf{e}_1,\ \overrightarrow{OM_2}=y\mathbf{e}_2.$$

Значи координатите (x, y) на точка M относно координатната система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ са координатите на точките M_1, M_2 относно координатните оси $O\mathbf{e}_1$, $O\mathbf{e}_2$.

Ако M лежи на първата ос $O\mathbf{e}_1$, можем да смятаме, че $M=M_1$ и следователно $y=0$. Аналогично точка M върху втората координатна ос има $x=0$. Началото има координати $O(0,\ 0)$.

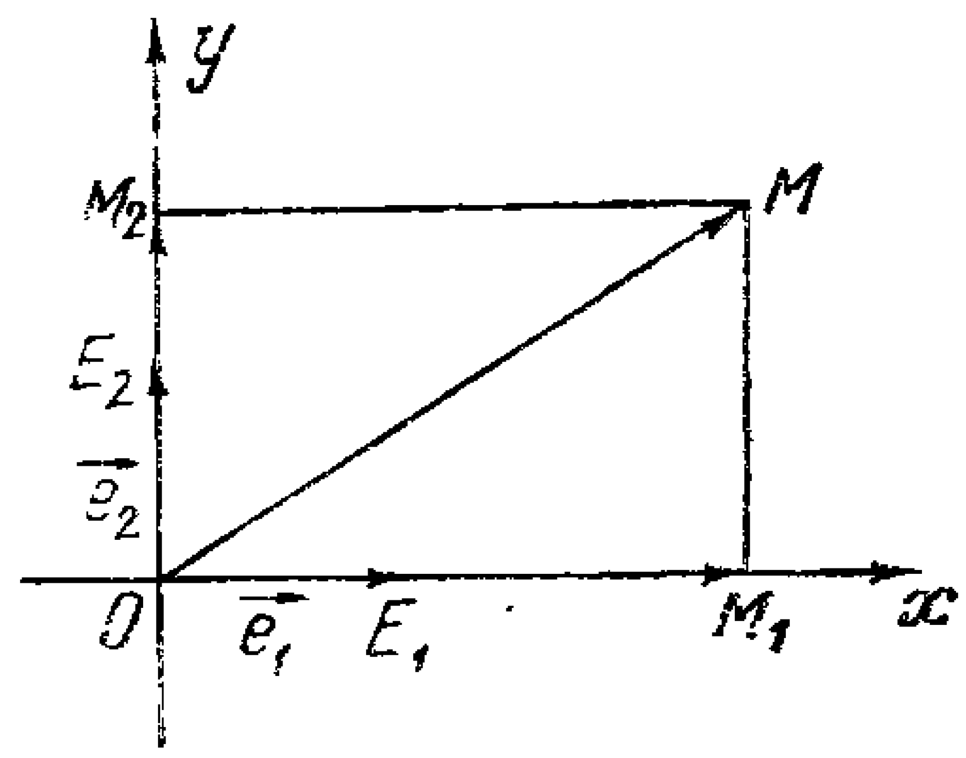
Афинна координатна система, за която

а) двете координатни оси са перпендикулярни;

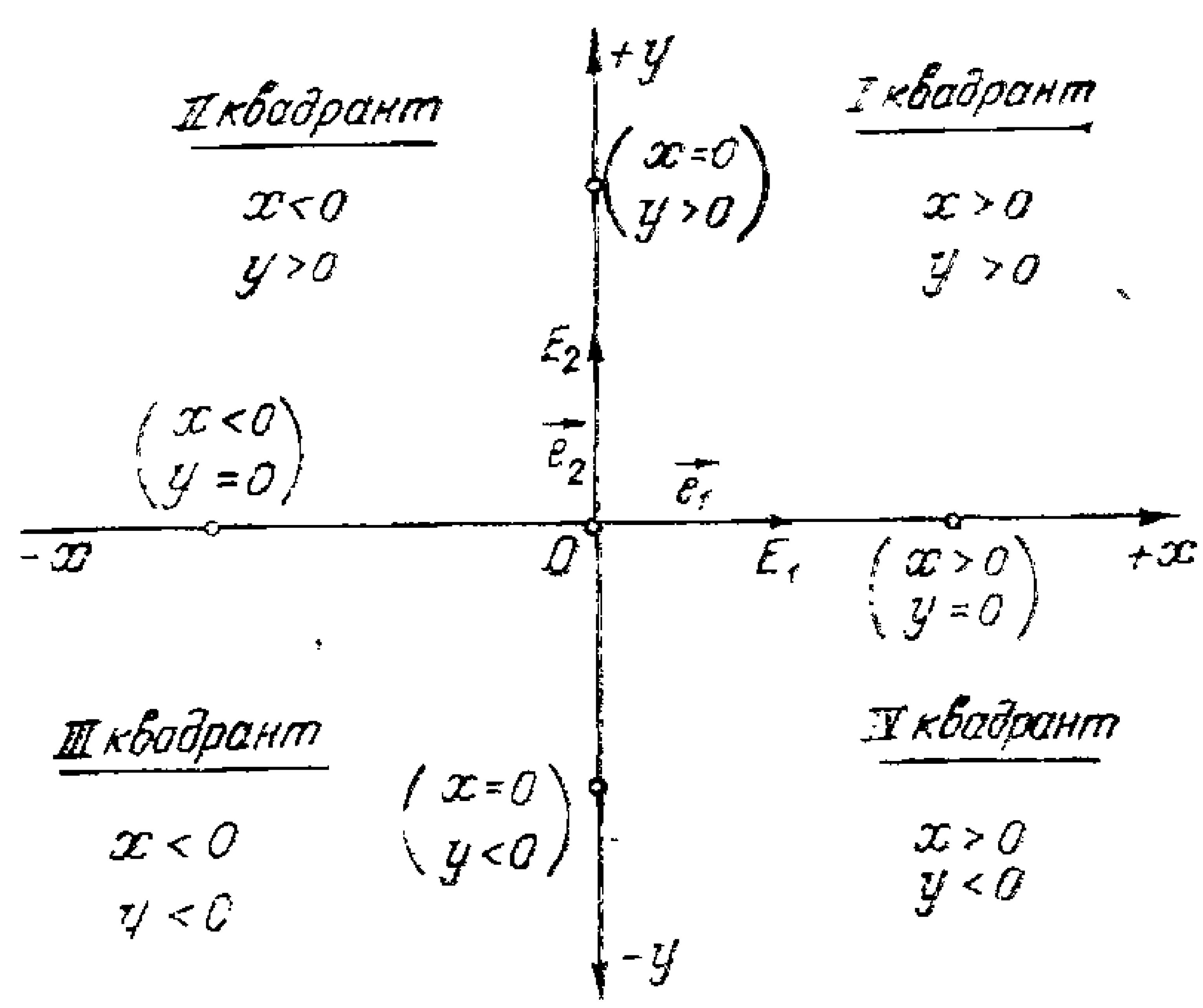
б) $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$,

ще наричаме *ортонормирана (декартова) координатна система*, съответно *ортонормиран репер* в равнината. В този случай, като вземем пред вид равенствата (3') и определението за проекция на насочена отсечка върху ос, получаваме твърдението: ако (x, y) са координатите на точката M, то те са ортогонални проекции на насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ върху координатните оси.

При афинна (а също така и при ортонормирана) координатна система двете координатни оси разделят равнината на четири ъгъла, кои-



Черт. 15



Черт. 16

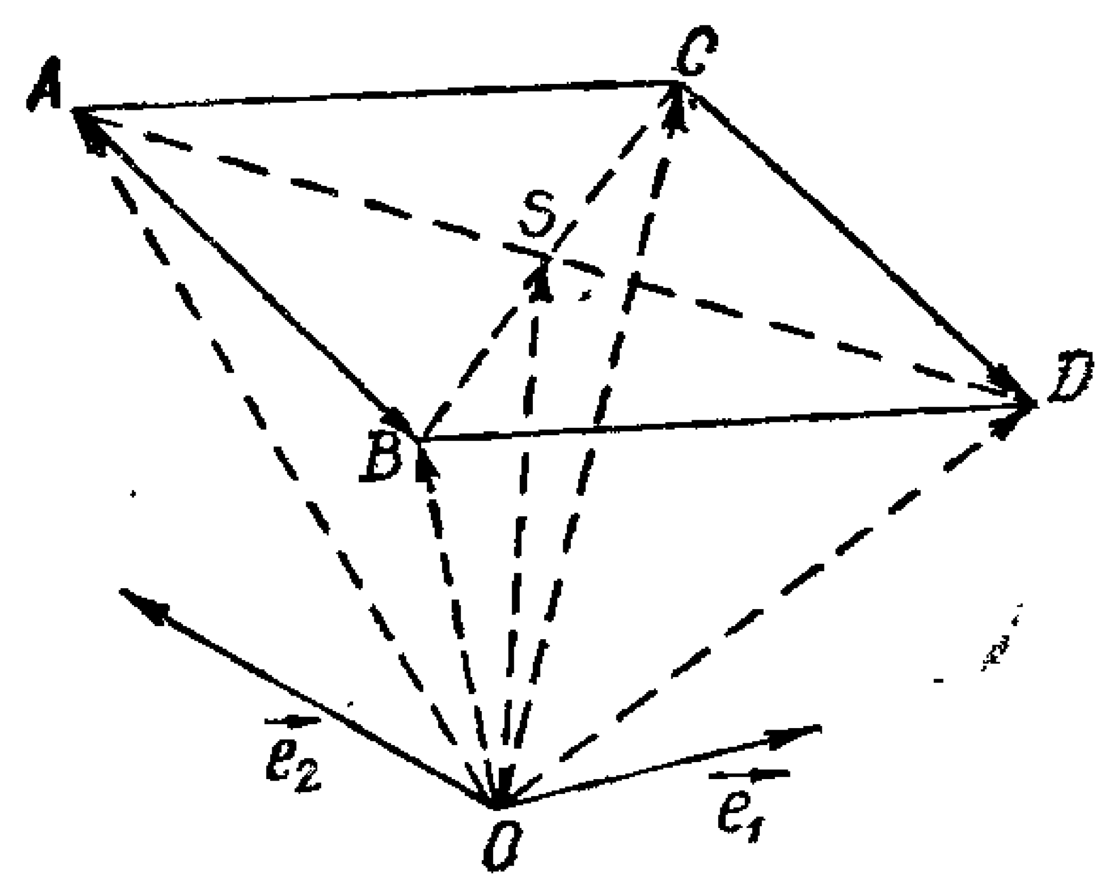
то се наричат *квадранти*. Точките от квадрантите и координатните оси при ортонормирана система имат координати със знаци, дадени схематично на черт. 16.

Дотук говорихме за координати на точки. Сега ще дефинираме координати на насочени отсечки и вектори в равнината.

Нека $\overrightarrow{AB}$ е насочена отсечка, като $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ са зададени спрямо афинната координатна система Oe_1e_2. Това означава, че

$$\overrightarrow{OA}=x_A\,e_1+y_A\,e_2,$$

$$\overrightarrow{OB}=x_B\,e_1+y_B\,e_2.$$



Черт. 17

Като извадим тези равенства и вземем пред вид векторното равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, намираме

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\,e_1+(y_B-y_A)\,e_2. \tag{5}$$

Както и по-горе, лесно се установява, че това разлагане е еднозначно. Тогава дефинираме: наредената двойка числа (x_B-x_A, y_B-y_A) наричаме *афинни координати на насочената отсечка* $\overrightarrow{AB}$. Ще пишем $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A)$.

Преди да въведем и координати на векторите, ще докажем следната

Теорема 1. *Равните насочени отсечки имат равни координати.*

Доказателство. Нека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Ще разгледаме случая, когато правите AB, CD са успоредни. Случаят, когато тези прави съвпадат, се свежда към разглеждания. Фигурата $ABCD$ е успоредник и нека S е пресечната точка на диагоналите му, а Oe_1e_2 е координатна система в равнината на успоредника. От векторните равенства

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS},$$

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DS} \quad (\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{DS}=o)$$

чрез събиране получаваме

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}). \tag{6}$$

Тази формула за средата на насочена отсечка представлява самостоятелен интерес. Като използуваме, че S е среда и на отсечката BC, можем да напишем още

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Като сравним десните страни на последните две равенства, получаваме

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\mathbf{o}. \tag{7}$$

Да предположим, че C, D имат съответно координати (x_C, y_C), (x_D, y_D), т. е.

$$\overrightarrow{OC}=x_C\mathbf{e}_1+y_C\mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{OD}=x_D\mathbf{e}_1+y_D\mathbf{e}_2.$$

Съгласно определението за координати на насочена отсечка можем да запишем

$$\overrightarrow{CD}\,(x_D-x_C,\ y_D-y_C).$$

Като заместим $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ с равните им в (7) и направим приведение, получаваме

$$(x_A+x_D-x_B-x_C)\mathbf{e}_1+(y_A+y_D-y_B-y_C)\mathbf{e}_2=\mathbf{o}.$$

От линейната зависимост на векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ следва, че коефициентите в последното векторно равенство са равни на нула, откъдето получаваме

$$x_B-x_A=x_D-x_C,$$

$$y_B-y_A=y_D-y_C.$$

С това теоремата е доказана.

Тази теорема ни предоставя възможността да дадем една коректна дефиниция за координати на вектор. Нека $\mathbf{a}$ е вектор с представител насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$. Координати на вектора $\mathbf{a}$ наричаме координатите на неговия представител $\overrightarrow{AB}$. Независимостта на координатите на вектора от случайния представител на вектора следва от предишната теорема. Като вземем представител $\overrightarrow{OM}$ на вектора $\mathbf{a}$ с начало началото на координатната система и вземем пред вид, че координатите (x, y) на точката M са проекциите на насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ върху координатните оси, следва твърдението: координатите на един вектор относно ортонормирана координатна система са ортогоналните проекции на вектора върху координатните оси.

Теорема 2. *Координатите на вектор, който е линейна комбинация от вектори, са същите линейни комбинации от координатите на векторите.*

Доказателство. Доказателството ще проведем в случая на два вектора. Нека

$$\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},$$

като

$$\mathbf{a}(a_1, a_2) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{b}(b_1, b_2) = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2.$$

Да приемем, че

$$\mathbf{p}(p_1, p_2) = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2.$$

Равенството

$$p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 = \lambda(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + \mu(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = \\ = (\lambda a_1 + \mu b_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)\mathbf{e}_2$$

поради линейната независимост на векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ води до

$$p_1 = \lambda a_1 + \mu b_1,$$
$$p_2 = \lambda a_2 + \mu b_2,$$

което трябваше да се докаже.

От теоремата следва, че векторът $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ има координати (a_1+b_1, a_2+b_2); векторът $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ има координати (a_1-b_1, a_2-b_2); векторът $\lambda\mathbf{a}$ има координати $(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Следствие. Векторите $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2)$, зададени спрямо една и съща афинна координатна система, са колинеарни точно когато координатите им са пропорционални:

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2$$

при $\lambda \neq 0$. Това условие се записва обикновено във вида

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

и на това равенство трябва да се гледа като на пропорционалност на числата от числителите на числата от знаменателите. Тази забележка трябва да се има пред вид и по-нататък.

От предната теорема като следствие непосредствено получаваме известната

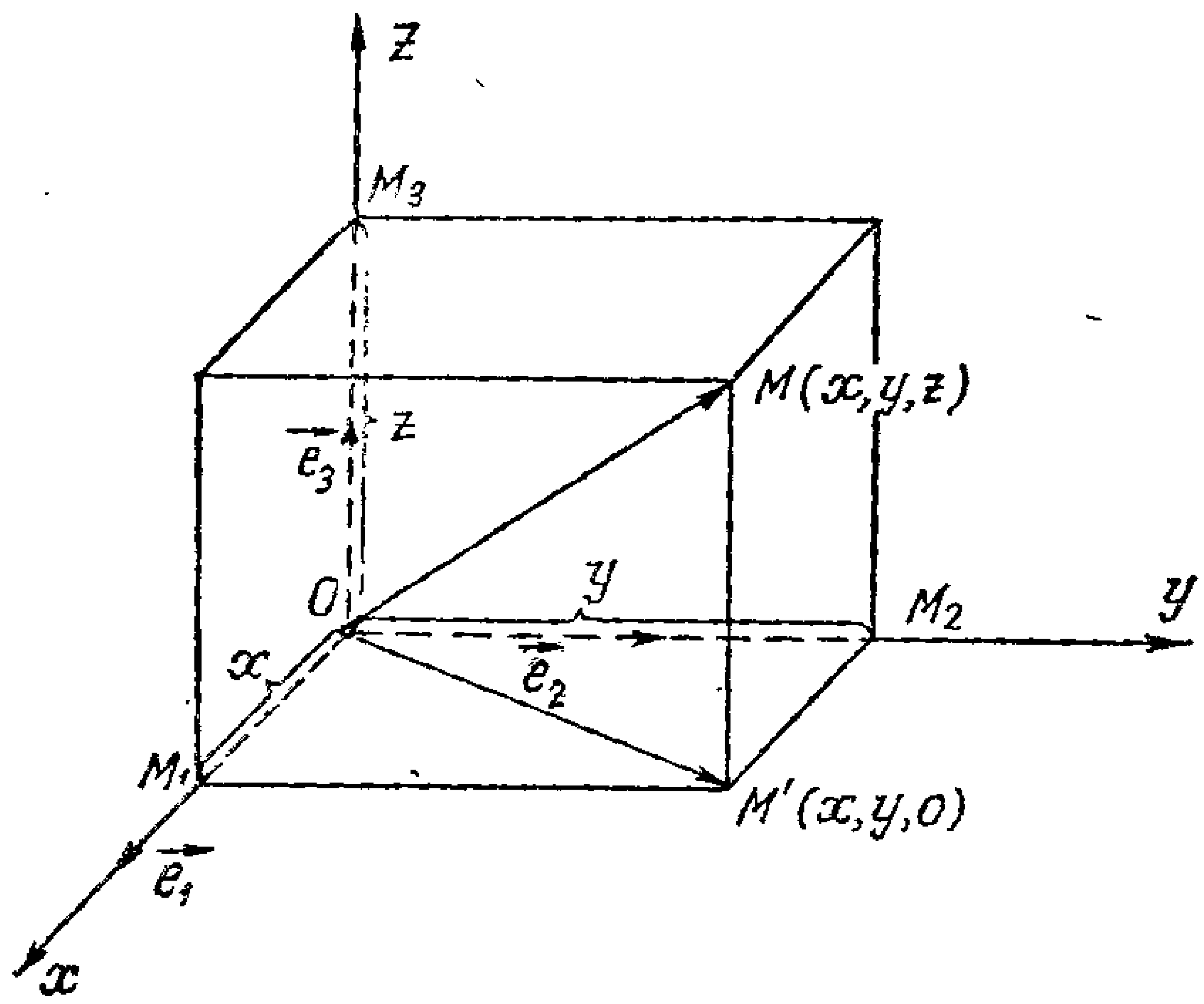
Теорема за проекциите. *Проекцията на линейна комбинация от вектори върху ос е същата линейна комбинация от проекциите на векторите върху същата ос:*

$$\text{пр}_l(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\,\text{пр}_l\mathbf{a} + \mu\,\text{пр}_l\mathbf{b}.$$

Доказателството се получава, като оста l се вземе за координатна ос $O\mathbf{e}_1$ на една ортонормирана координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Използваме, че координатите на вектор са проекциите на вектора върху координатните оси, и прилагаме последната теорема.

§ 4. Афинна координатна система в пространството

Афинна координатна система (или *афинен репер*) $Oe_1e_2e_3$ или *Oxyz в пространството* наричаме наредена тройка от нележащи в една равнина координатни оси Oe_1, Oe_2, Oe_3 с общо начало O. От определението следва, че векторите e_1, e_2, e_3 са линейно независими.



Черт. 18

Нека M е произволна точка в пространството. Векторите $\overrightarrow{OM}$, e_1, e_2, e_3 са линейно зависими (§ 1) и следователно съществува еднозначно разлагане:

$$(1) \qquad \overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2+ze_3.$$

Наредената тройка числа (x, y, z) наричаме *афинни координати* на точката M относно афинната координатна система $Oe_1e_2e_3$. Третата координата z се нарича *апликата* на точката M. Координатите допускат следната интерпретация:

x е координатата на M_1 относно Oe_1;

y е координатата на M_2 относно Oe_2;

z е координатата на M_3 относно Oe_3.

Тук M_1 е пресечната точка на оста Oe_1 с равнината през M, успоредна на равнината Oe_2e_3. Аналогично за M_2 и M_3.

Равнините $Oe_1e_2 \equiv Oxy$, $Oe_1e_3 \equiv Oxz$, $Oe_2e_3 \equiv Oyz$ се наричат *координатни равнини*. Ако $M \in Oe_1e_2$, то M има координати $(x, y, z=0)$. Ако $M \in Oe_2e_3$, то M има координати $(x=0, y, z)$. Най-сетне, ако $M \in Oe_1e_3$, то M има координати $(x, y=0, z)$. Ако $M \in Oe_1$, координатите на M са $(x, y=z=0)$; ако $M \in Oe_2$, координатите на M са $(x=0, y, z=0)$; ако $M \in Oe_3$, то координатите на M са $(x=y=0, z)$. За началото имаме $O(0, 0, 0)$.

Ако M' е успоредната проекция на $M(x, y, z)$ върху равнината Oe_1e_2 относно третата ос Oe_3, то M' има координати $(x, y, z=0)$. Твърдението следва от равенствата

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3,$$

$$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+0\,.\,\mathbf{e}_3.$$

Афинна координатна система, за която

а) трите координатни оси са перпендикулярни;

б) $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=|\mathbf{e}_3|=1$,

се нарича *ортонормирана* (*декартова*) *координатна система*, съответно ортонормиран репер в *пространството*.

Координатните равнини разделят пространството на осем *октанта*.

Ако $\overrightarrow{AB}$ е насочена отсечка в пространството и A, B имат съответно координати (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), то по определение считаме, че $\overrightarrow{AB}$ има координати $(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$, и пишем

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A).$$

Ако $\mathbf{a}$ е вектор с представител насочената отсечка AB, по определение считаме, че координатите на вектора $\mathbf{a}$ са координатите на неговия представител $\overrightarrow{AB}$. В сила са теоремите от предишния параграф.

§ 5. *Просто отношение на три точки*

Нека A, B, C $(B\neq C)$ са три колинеарни точки, т. е. точки, които лежат върху една права. Тогава векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ са колинеарни и следователно линейно зависими. Значи има число λ такова, че е изпълнено равенството

(1) $$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BC}.$$

Числото λ наричаме *просто отношение на точките* A, B, C в посочения ред и ще го означаваме с (ABC). Ще пишем

(2) $$\lambda=(ABC)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\cdot$$

Да превърнем правата AB в ос и нека $\mathbf{e}$ е единичен еднопосочно успореден вектор с оста. Като използваме равенствата

$$\overrightarrow{AC}=\overline{AC}\mathbf{e},\quad \overrightarrow{BC}=\overline{BC}\mathbf{e},$$

от (1) получаваме

(3) $$\lambda=(ABC)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\cdot$$

В случай че $A \neq B$, казваме, че точката C дели отсечката $\overrightarrow{AB}$ в отношение λ. Очевидно тогава $\lambda \neq 1$. Ще намерим изрази за координатите на точката C за този случай.

Да си мислим, че в пространството е фиксирана една афинна координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, и нека A, B, C имат съответно координати (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x, y, z). Тогава

$$\overrightarrow{AC} = (x-x_1)\mathbf{e}_1 + (y-y_1)\mathbf{e}_2 - (z-z_1)\mathbf{e}_3,$$
$$\overrightarrow{BC} = (x-x_2)\mathbf{e}_1 + (y-y_2)\mathbf{e}_2 + (z-z_2)\mathbf{e}_3,$$

които, заместени в (1), поради линейната независимост на векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ водят до формулите

(4) $$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}$$

за деление на насочена отсечка в дадено отношение λ. Ако C е средата на отсечката $\overrightarrow{AB}$, то $\lambda = -1$ и формулите (4) приемат вида

(5) $$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

В случай че третираме нещата в равнината, ще имаме формулите

(6) $$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda};$$

(7) $$x = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right),$$

съответно вместо (4) и (5). Ако разглеждаме нещата върху една права, ще имаме само

(8) $$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}.$$

(9) $$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Ще докажем следната

Теорема. *Нека са дадени точките $A \neq B$ и реалното число $\lambda \neq 1$. Съществува точно една точка C върху правата AB такава, че*

$$(ABC) = \lambda.$$

Доказателство. Превръщаме правата AB в координатна ос и нека точките A, B имат съответно координати (x_1), (x_2). Разглеждаме онази точка C върху правата, чиято координата е

(10) $$x^* := \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}.$$

Оттук намираме последователно

$$x^* - x_1 = \lambda(x^* - x_2),$$

или

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BC},$$

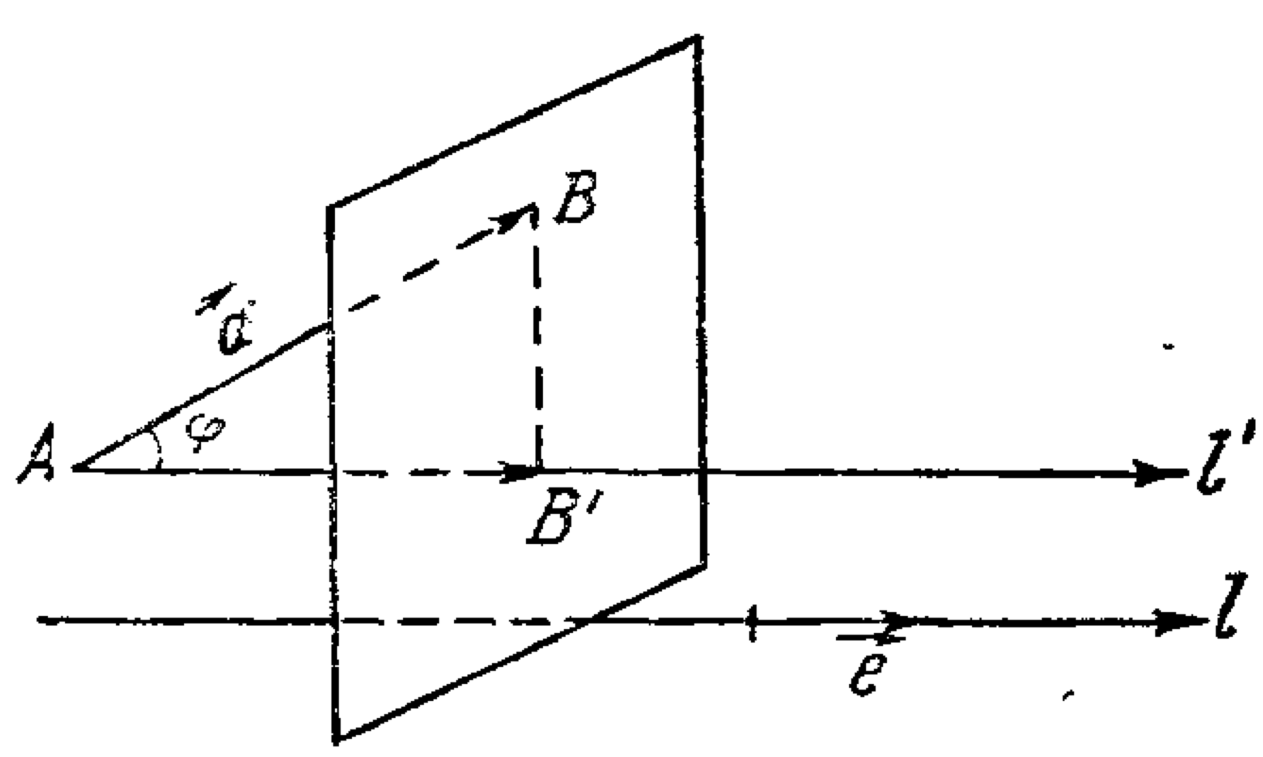
т. е. точката C дели отсечката $\overrightarrow{AB}$ в даденото отношение λ. Ако допуснем, че съществува и друга точка със същото свойство, то за нейната координата имаме (8), което, сравнено с (10), дава $x=x^*$. Значи двете точки съвпадат и с това е показана и еднозначността.

Глава II

Метрични операции с вектори

§ 6. *Скаларно произведение на два вектора*

Нека **a** е вектор и l е ос с единичен вектор **e**. Вземаме произволен представител $\overrightarrow{AB}$ на **a** и прекарваме оста l' през A, еднопосочно успоредна на l (черт. 19). Определен е ъгълът $\varphi \in [0, \pi]$ между оста l' и насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ (т. е. ъгълът между лъча с начало A, имащ



Черт. 19

посоката на оста l', и лъча с начало A, съдържащ точката B). Той не зависи от избрания представител $\overrightarrow{AB}$ на вектора **a**. Ще го наричаме ъгъл между вектора **a** и оста l. От правоъгълния триъгълник ABB' получаваме следната формула за ортогоналната проекция на вектора **a** върху оста l:

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi \tag{1}$$

$$(\text{пр}_l \mathbf{a} = \overline{AB'})$$

Нека са дадени ненулевите вектори **a**, **b**. Да означим с $\varphi \in [0, \pi]$ ъгъла между тях. *Скаларно произведение* **ab** (или **a**.**b**, или (**a**.**b**)) на ненулевите вектори **a**, **b** наричаме произведението от дължините им и косинуса на ъгъла φ, заключен между тях:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{2}$$

Скаларното произведение на нулевия вектор **o** с кой да е вектор по определение считаме числото 0.

Следователно скаларното произведение е число. Ако двата вектора са равни, скаларното произведение е равно на квадрата от дължината на вектора:

$$\mathbf{a}^2 := \mathbf{a}\,.\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2. \tag{3}$$

Величината $\mathbf{a}^2$ се нарича *скаларен квадрат* или *норма на вектора* **a**. За дължината на вектор имаме формулата

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}\,. \tag{4}$$

В сила са следните така наречени метрични ~~свойства на скаларното произведение:~~

10°). $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (комутативен закон);

11°). $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$ (дистрибутивен закон);

12°). $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}.\mathbf{b})$;

13°). $\mathbf{a}^2 \geq 0$, като равенство имаме точно когато $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Тук **a**, **b**, **c** са произволни вектори, а λ — реално число.

Доказателствата на 10°), 13°) следват непосредствено.

Д о к а з а т е л с т в о н а 11°). Прилагаме формулата (1), като проектираме вектора **b** върху **a**, т. е. върху оста, съдържаща кой да е негов представител:

$$\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{5}$$

Поради това равенство (2) приема вида

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}, \tag{6}$$

което може да служи за дефиниция на скаларното произведение.

Като вземем пред вид (6) и теоремата за проекциите, получаваме

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}+\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{c}) =$$

$$= |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} + |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{c} = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}.$$

Д о к а з а т е л с т в о на 12°). Ще разгледаме само случая $\lambda<0$. Имаме

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = |\lambda\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\pi-\varphi) = -|\lambda|\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi =$$

$$= \lambda|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi = \lambda\,.\,(\mathbf{ab}),$$

тъй като $|\lambda| = -\lambda$.

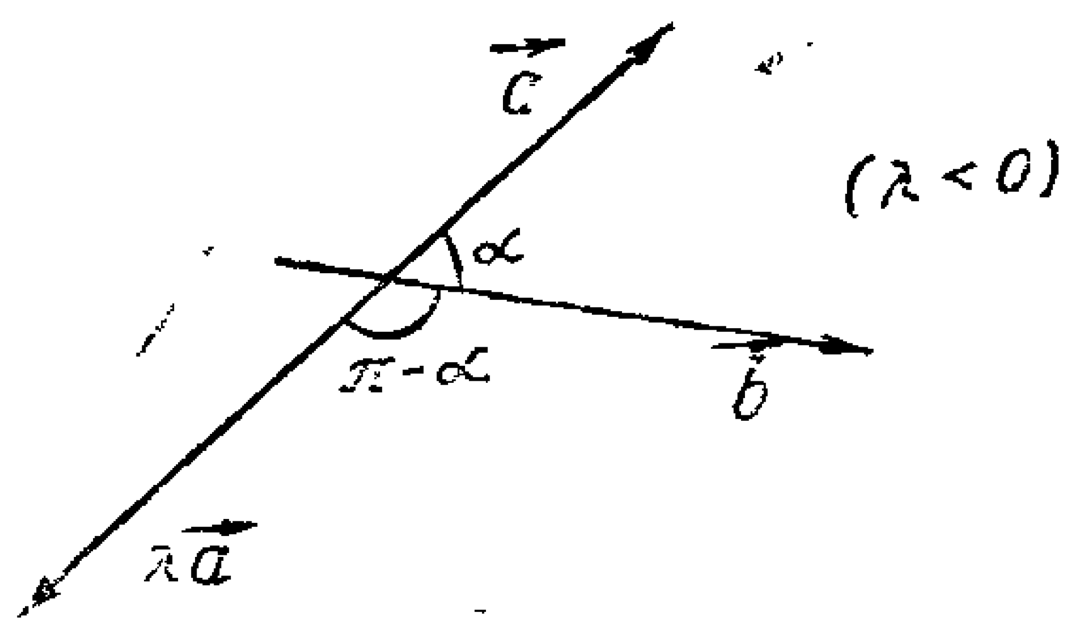
С това свойствата са доказани. Като вземем пред вид определението от линейната алгебра за евклидово векторно пространство, можем да формулираме следната

Теорема 1. *Множеството от свободните вектори е евклидово векторно пространство.*

Твърде често ще използваме следното твърдение:

Теорема 2. *Два ненулеви вектора са перпендикулярни точно когато тяхното скаларно произведение е нула.*

Доказателството следва от равенството (2).



Черт. 20

Сега ще намерим израз за скаларното произведение на два вектора, предполагайки, че те са зададени със своите координати.

Нека спрямо ортонормирана координатна система $Oe_1e_2e_3$ са дадени двата вектора

$$\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3.$$

От свойствата 10°) — 12°) и

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j, \end{cases}$$

където δ_{ij} е известният символ на Кронекер, получаваме

(7) $$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Тази формула ще наричаме *аналитично представяне на скаларното произведение*. За скаларния квадрат имаме

(8) $$\mathbf{a}^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2,$$

откъдето получаваме следната формула за дължината на вектор:

(9) $$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

За ъгъла между два ненулеви вектора от (2), (7) и (9) се получава формулата

(10) $$\cos\alpha = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}\,\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}.$$

Като вземем пред вид последната формула, можем да формулираме следната

Теорема 3. *Ненулевите вектори* $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, *зададени спрямо ортонормирана координатна система, са перпендикулярни точно когато е изпълнено условието*

(11) $$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

Скаларното произведение дава възможност да се видят в нова светлина координатите на един вектор. Именно в сила е следната

Теорема 4. *Координатите на вектор относно ортонормирана координатна система са скаларните произведения на вектора с векторите на системата.*

Доказателство. Нека $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ е ортонормирана координатна система в пространството и спрямо нея

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3.$$

Като умножим това равенство скаларно с вектора $\mathbf{e}_1$, поради

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1=1,\quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=0,\quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3=0$$

получаваме

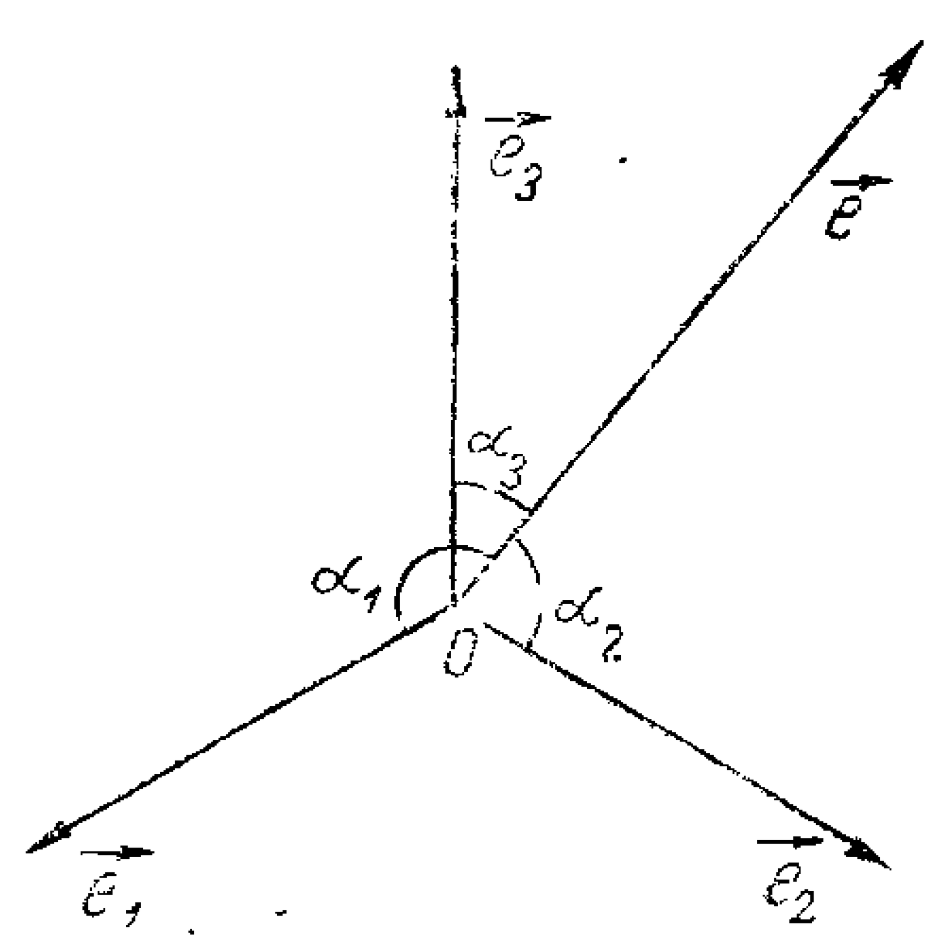
$$a_1=\mathbf{a}\mathbf{e}_1.$$

Аналогично намираме

$$a_2=\mathbf{a}\mathbf{e}_2,\ a_3=\mathbf{a}\mathbf{e}_3,$$

с което теоремата е доказана.

Нека $\mathbf{e}$ е единичен вектор в пространството, приложен в началото на ортонормирана координатна система. Да означим с α_1, α_2, α_3 ъглите,



Черт. 21

които той сключва с векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. За координатите на вектора $\mathbf{e}$ съгласно последната теорема имаме

$$a_1=\mathbf{e}\mathbf{e}_1=\cos\alpha_1,\ a_2=\mathbf{e}\mathbf{e}_2=\cos\alpha_2,\ a_3=\mathbf{e}\mathbf{e}_3=\cos\alpha_3.$$

Следователно

(12) $$\mathbf{e}=\cos\alpha_1\mathbf{e}_1+\cos\alpha_2\mathbf{e}_2+\cos\alpha_3\mathbf{e}_3$$

и чрез повдигане в квадрат получаваме

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1. \tag{13}$$

Величините $\cos\alpha_1$ $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ се наричат *директорни косинуси на посоката, определена с вектора* $\mathbf{e}$. Те удовлетворяват равенството (13).

Изведените формули за пространството важат и за равнината. Например, ако в равнината е фиксирана ортонормираната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и спрямо нея

$$\mathbf{a}(a_1,\ a_2)=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{b}(b_1,\ b_2)=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2,$$

то за скаларното произведение на тези вектори важи формулата

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Дължината на вектора $\mathbf{a}$ се дава с

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2},$$

а ъгълът между ненулевите вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ се определя с формулата

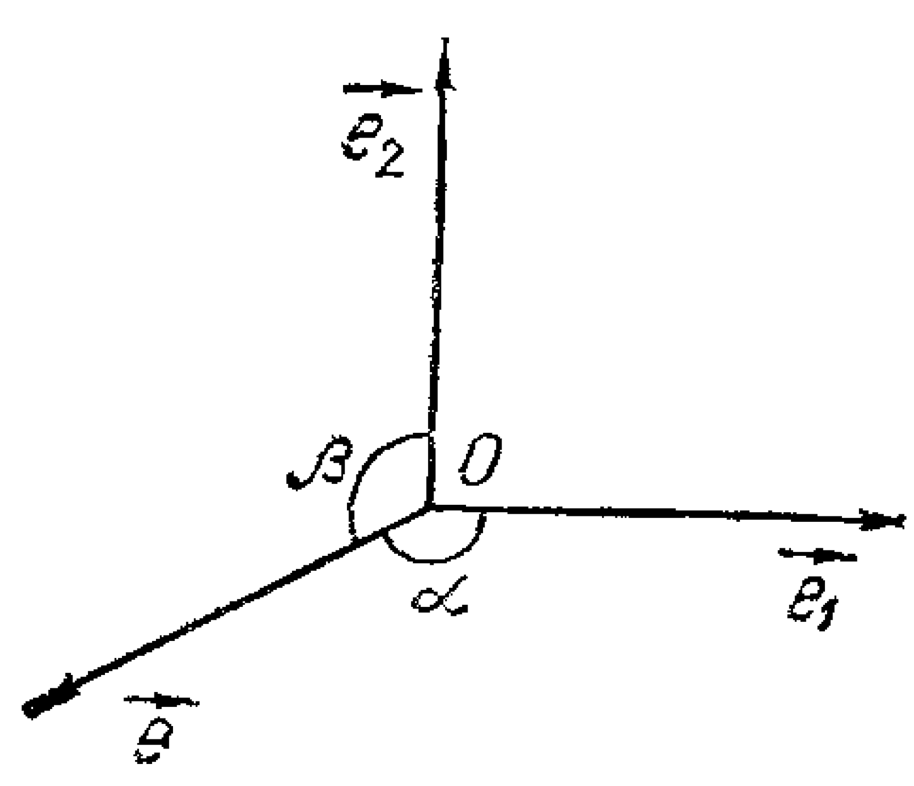
$$\cos\alpha=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}\cdot\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2}}.$$

Условието за ортогоналност на два ненулеви вектора приема вида

$$a_1b_1+a_2b_2=0.$$

Нека $\mathbf{e}$ е единичен вектор, сключващ ъгли α, β с векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. За неговите координати непосредствено намираме

$$\mathbf{e}(\cos\alpha,\ \cos\beta)=\mathbf{e}(\cos\alpha,\ \pm\sin\alpha), \tag{12'}$$



Черт. 22

като знакът плюс се взема, когато $\mathbf{e}$ е в първи или втори квадрант, и минус в останалите случаи.

Като приложение на скаларното произведение да намерим разстоянието $d(M_1,\ M_2)$ между точките $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, M_2, $(x_2\ y_2,\ z_2)$, зададени спрямо ортонормирана координатна система в пространството. Понеже

$\overrightarrow{M_1M_2}$ има координати $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, то за търсеното разстояние съгласно (9) намираме

$$d(M_2, M_1)=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{14}$$

В равнината имаме формулата

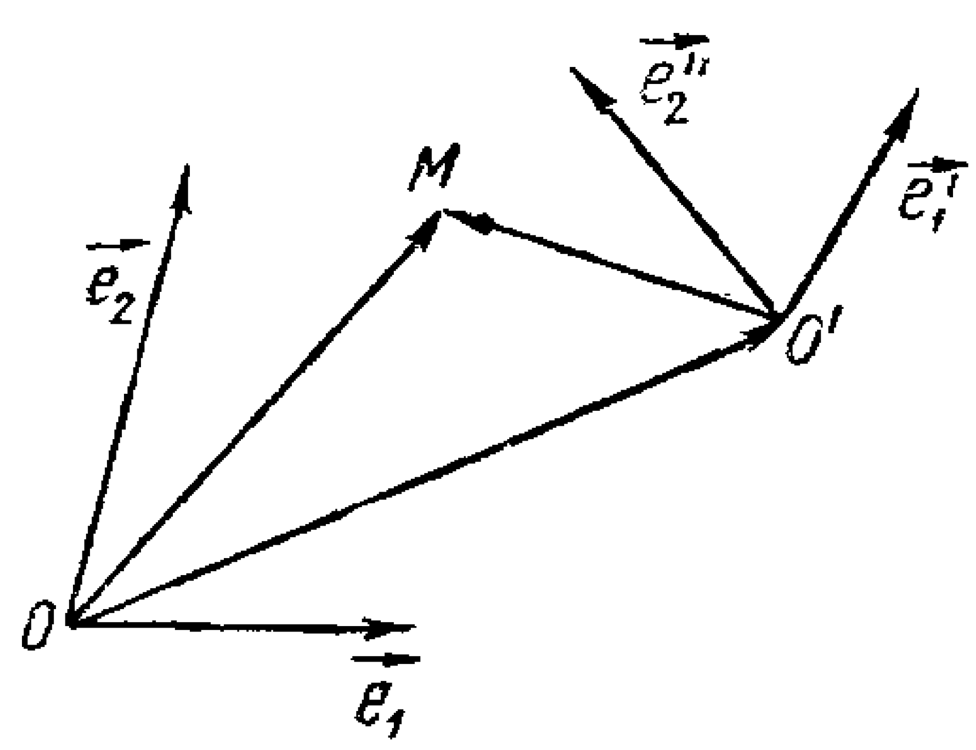
$$d(M_1, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{15}$$

като $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ са зададени спрямо ортонормираната система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

§ 7. Смяна на координатната система в равнината

Нека в равнината са дадени две афинни координатни системи $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ и нека произволна точка M има координати (x, y) спрямо първата и (x', y') спрямо втората система. Търсим връзката между едните и другите координати.

Положението на втората система е напълно определено, ако познаваме положението на началото ѝ O', т. е. на вектора $\overrightarrow{OO'}$, и на векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ относно първата координатна система. Затова нека положим



Черт. 23

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OO'}&=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}'_1&=\alpha_1^1\,\mathbf{e}_1+\alpha_2^1\,\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}'_2&=\alpha_1^2\,\mathbf{e}_1+\alpha_2^2\,\mathbf{e}_2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Следователно точката O' има координати (a, b), а векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ имат съответно координати (α_1^1, α_2^1), (α_1^2, α_2^2) спрямо $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

Нека точката M има координати (x, y) спрямо $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, т. е.

$$\overrightarrow{OM}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2. \tag{2}$$

Ако същата точка M има координати (x', y') спрямо втората система $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, можем да запишем

(3) $$\overrightarrow{O'M} = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}_2'.$$

От векторното равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

като вземем пред вид (1), (2) и (3), получаваме

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + x'(\alpha_1^1\mathbf{e}_1 + \alpha_2^1\mathbf{e}_2) + y'(\alpha_1^2\mathbf{e}_1 + \alpha_2^2\mathbf{e}_2).$$

Оттук поради линейната независимост на векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ получаваме

(4) $$\begin{aligned} x &= a + \alpha_1{}' x' + \alpha_1^2 y', \\ y &= b + \alpha_2^1 x' + \alpha_2^2 y'. \end{aligned}$$

Пак от линейната независимост на векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ следва неравенството

(5) $$\det(\alpha_i^j) \neq 0 \quad (i, j = 1, 2),$$

т. е. матрицата (α_i^j) е неособена. Действително, ако допуснем, че $\det(\alpha_i^j) = 0$ ще следва, че елементите например на втория ред са пропорционални на елементите на първия ред, което води до линейна зависимост на векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$.

Формулите (4) свързват координатите (x, y), (x', y') на една и съща точка M спрямо двете афинни координатни системи $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, връзката между които се дава с формулите (1). Наричат се *формули за смяна на афинна координатна система в равнината.* Ще отбележим, че в (4) участвува транспонираната матрица на матрицата (α_i^j) от (1).

Да приемем, че двете координатни системи са ортонормирани. Тогава са изпълнени равенствата

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j' = \delta_{ij}.$$

Чрез повдигане в квадрат на второто и третото равенство на (1) получаваме

(6) $$\begin{aligned} (\alpha_1^1)^2 + (\alpha_2^1)^2 &= 1, \\ (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Като умножим скаларно същите равенства, получаваме равенството

(7) $$\alpha_1^1\alpha_1^2 + \alpha_2^1\alpha_2^2 = 0.$$

И тъй, ако двете координатни системи са ортонормирани, елементите на матрицата (α_i^j) удовлетворяват зависимостите (6) и (7). Както е известно от линейната алгебра, такава матрица се нарича ортогонална и има стойност ± 1.

От първото равенство на (6) може да се намери число α такова, че

$$\alpha_1^1 = \cos\alpha, \quad \alpha_2^1 = \sin\alpha.$$

Аналогично от второто равенство на (6) следва съществуването на число β такова, че

$$\alpha_1^2 = \sin\beta, \quad \alpha_2^2 = \cos\beta.$$

Като държим сметка за (7), стигаме до зависимостта

$$\alpha + \beta = k\pi \quad (k \text{ — цяло}).$$

Тогава

$$\alpha_1^2 = -\varepsilon\sin\alpha, \quad \alpha_2^2 = \varepsilon\cos\alpha \; (\varepsilon = \pm 1).$$

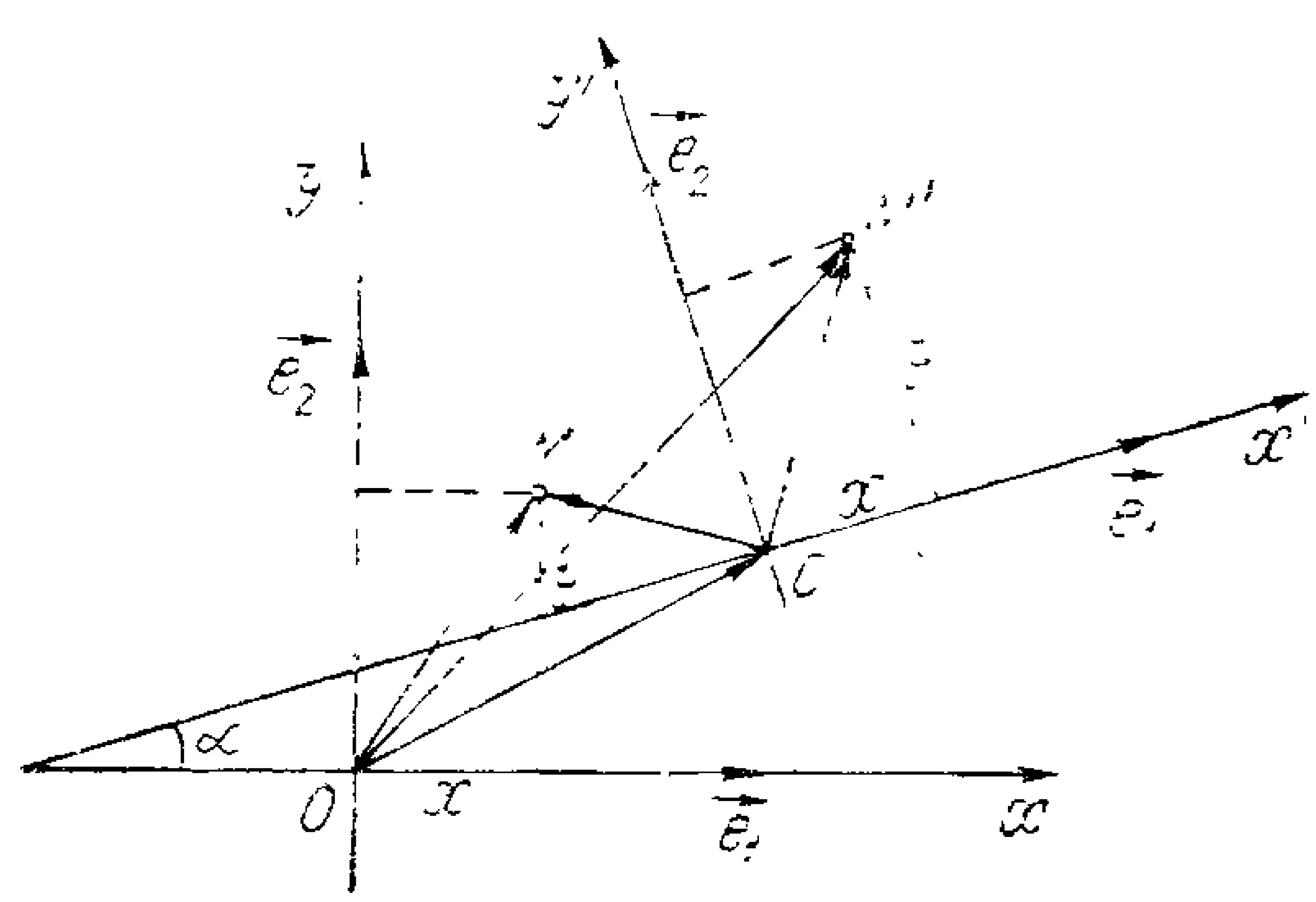
По този начин показахме, че всяка ортогонална матрица от втори ред допуска следното представяне:

$$(\alpha_i^j) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Следователно формулите (4) за смяна на ортонормирана координатна система в равнината приемат вида

$$(8) \qquad \begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha, \\ y &= b + x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha, \end{aligned} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

По-късно ще видим, че числото ε е свързано с важното понятие ориентация в равнината.



Черт. 24

От (1) следва, че $\cos\alpha = \alpha_1^1 = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1$. Следователно α е ъгълът между векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1'$, т. е. ъгълът между положителните посоки на абсцисните оси (черт. 24).

Формулите (4) и (8) показват как се сменят координатите на точките при смяна на координатната система. Като вземем пред вид тези формули, можем да намерим формулите, по които се сменят координатите на векторите при същата смяна. За целта нека е даден векторът $\mathbf{a}(\lambda, \mu)$ спрямо първата система и нека същият вектор има координати (λ', μ') спрямо втората система. Ако $\overrightarrow{AB}$ е представител на този вектор и $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, $(x'_B - x'_A, y'_B - y'_A)$ са координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ съответно спрямо първата и втората координатна система, то в сила са равенствата

$$\lambda = x_B - x_A, \quad \mu = y_B - y_A,$$
$$\lambda' = x'_B - x'_A, \quad \mu = y'_B - y'_A.$$

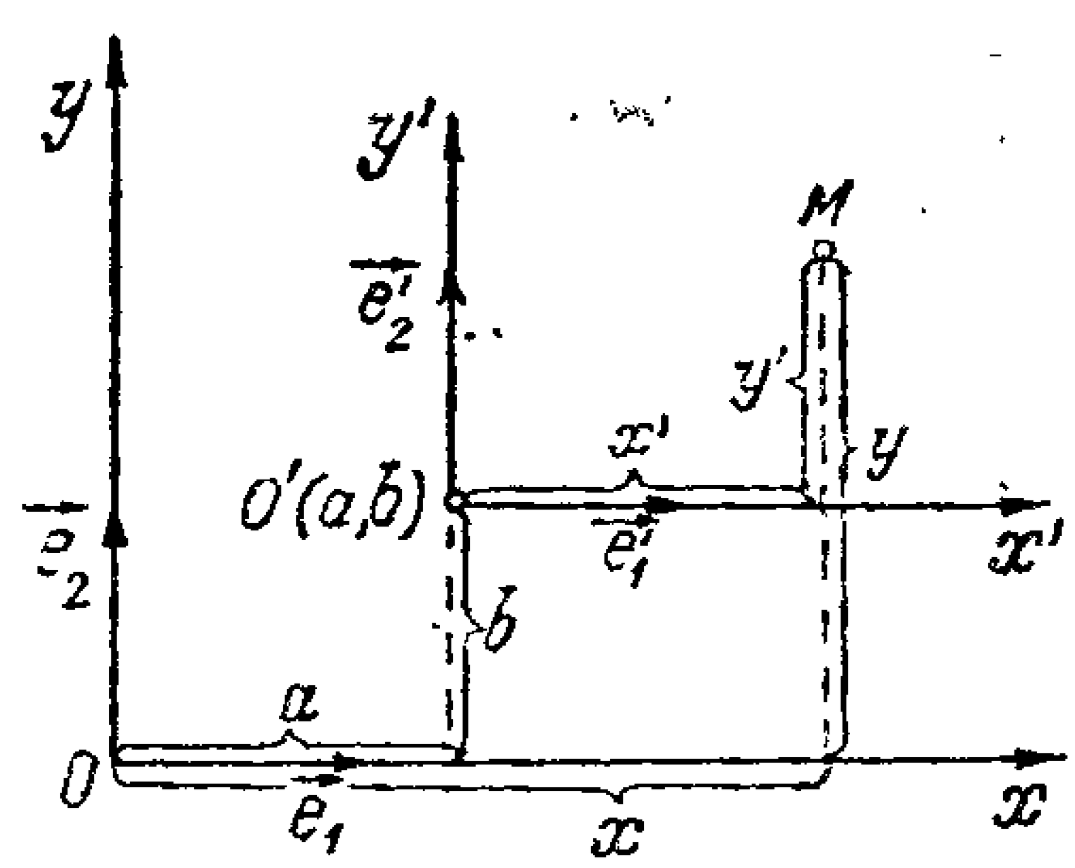
Написваме (4) за двете точки A, B:

$$x_A = a + \alpha_1^1 x'_A + \alpha_1^2 y'_A,$$
$$y_A = b + \alpha_2^1 x'_A + \alpha_2^2 y'_A,$$
$$x_B = a + \alpha_1^1 x'_B + \alpha_1^2 y'_B,$$
$$y_B = b + \alpha_2^1 x'_B + \alpha_2^2 y'_B.$$

Оттук, като извадим първото от третото и второто от четвъртото равенство и като вземем пред вид формулите за $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, получаваме

$$\lambda = \alpha_1^1 \lambda' + \alpha_1^2 \mu',$$
$$\mu = \alpha_2^1 \lambda' + \alpha_2^2 \mu'. \tag{9}$$

Това са формулите за смяна на афинна координатна система в равнината, отнасящи се за векторите. При ортонормирана система матрицата (α_i^j) е ортогонална.



Черт. 25

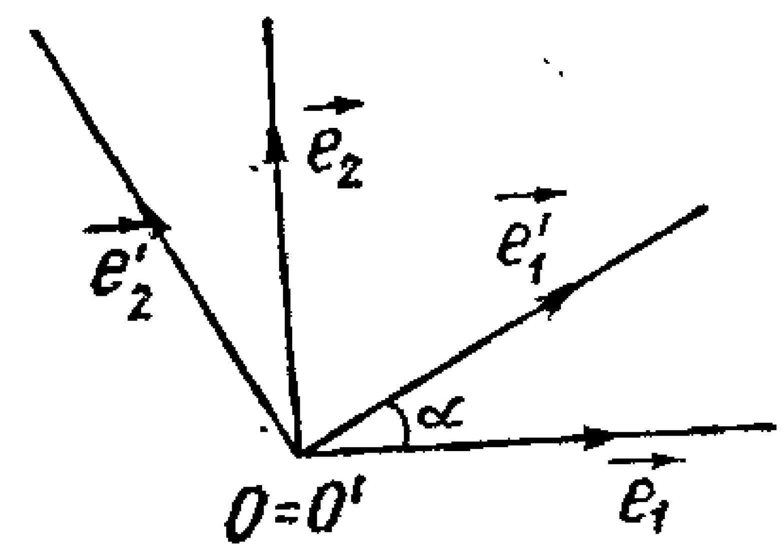
Накрая ще отбележим два специални случая на смяна на ортонормирана координатна система, които се прилагат по-често.

Транслация на координатната система. Този случай имаме, когато едноименните координатни оси са еднопосочно успоредни. От черт. 25 непосредствено отчитаме

$$x = a + x',$$
$$y = b + y', \tag{10}$$

като началото $O'(a, b)$ е отнесено спрямо системата Oee_2. Тези формули се получават от (8), като положим $\alpha=0$ и $\varepsilon=1$.

Ортогонална трансформация на координатната система. Този случай имаме, когато началата на двете координатни системи съвпа-



Черт. 26

дат, т. е. $O\equiv O'$. Като положим в (8) $a=b=0$, получаваме формулите за ортогонална трансформация на координатната система:

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-\varepsilon y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+\varepsilon y'\cos\alpha, \end{aligned}\qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

При $\varepsilon=1$ получаваме формулите (черт. 26)

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{aligned}$$

за въртене на ортонормирана система на ъгъл α.

Забележка. Понякога вместо термина смяна на координатната система се употребява трансформация на координатната система или координатна трансформация.

§ 8. *Смяна на координатната система в пространството*

Нека в пространството са дадени две афинни координатни системи $Oe_1e_2e_3$, $O'e'_1e'_2e'_3$ (черт. 27) и нека произволна точка M има координати (x, y, z) спрямо първата и (x', y', z') спрямо втората система. Следователно в сила са векторните равенства

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{OM}&=xe_1+ye_2+ze_3,\\ \overrightarrow{O'M}&=x'e'_1+y'e'_2+z'e'_3. \end{aligned}$$

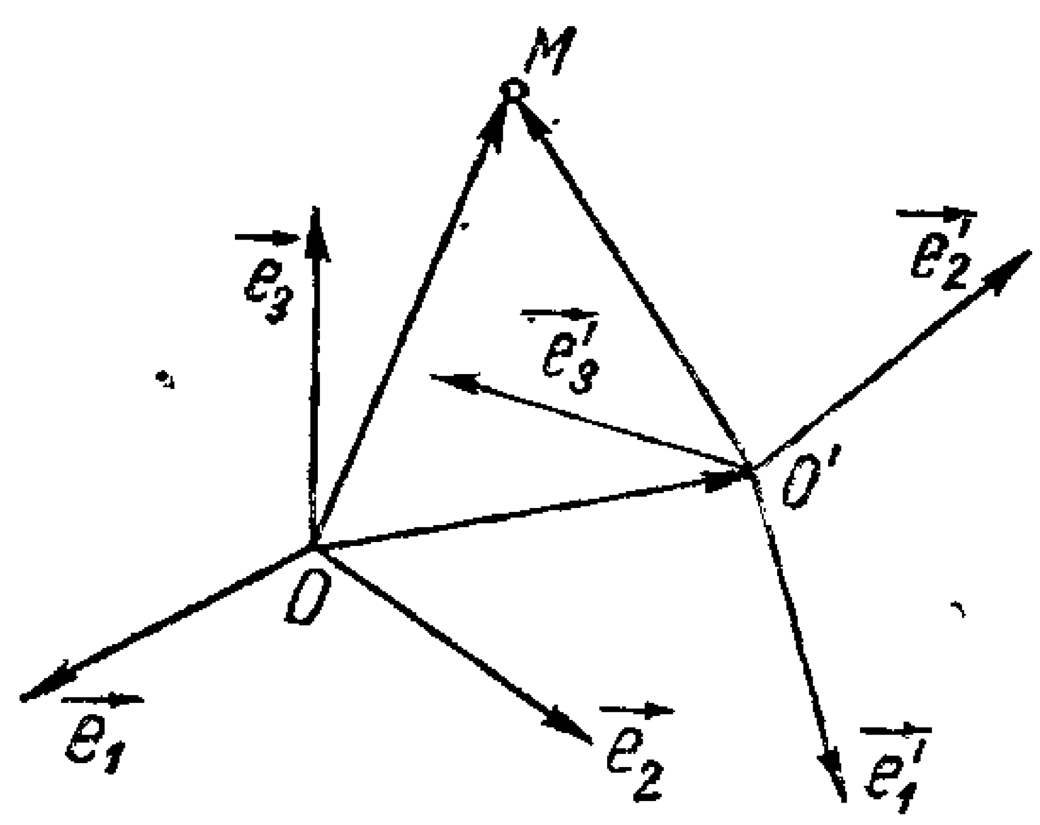
Нека положението на втората система спрямо първата се определя посредством

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{OO'}&=ae_1+be_2+ce_3;\\ e'_1&=\alpha_1^1e_1+\alpha_2^1e_2+\alpha_3^1e_3,\\ e'_2&=\alpha_1^2e_1+\alpha_2^2e_2+\alpha_3^2e_3,\\ e'_3&=\alpha_1^3e_1+\alpha_2^3e_2+\alpha_3^3e_3. \end{aligned}$$

От линейната независимост на векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ следва, че детерминантата

$$(3) \qquad \det(\alpha_i^j) \neq 0.$$

Действително, ако допуснем противното, ще следва съществуването на линейна зависимост между редовете на детерминантата, което води до линейна зависимост между векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.



Черт. 27

От векторното равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

като използваме (1) и (2), получаваме

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + x'(\alpha_1^1\mathbf{e}_1 + \alpha_2^1\mathbf{e}_2 + \alpha_3^1\mathbf{e}_3) +$$
$$+ y'(\alpha_1^2\mathbf{e}_1 + \alpha_2^2\mathbf{e}_2 + \alpha_3^2\mathbf{e}_3) + z'(\alpha_1^3\mathbf{e}_1 + \alpha_2^3\mathbf{e}_2 + \alpha_3^3\mathbf{e}_3).$$

Оттук поради линейната независимост на векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ следват равенствата

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= a + \alpha_1^1 x' + \alpha_1^2 y' + \alpha_1^3 z', \\ y &= b + \alpha_2^1 x' + \alpha_2^2 y' + \alpha_2^3 z', \\ z &= c + \alpha_3^1 x' + \alpha_3^2 y' + \alpha_3^3 z'. \end{aligned}$$

Това са формулите за *смяна на афинна координатна система в пространството*. Матрицата (α_i^j) е неособена. Ще отбележим, че матрицата (α_i^j) в (4) е транспонираната матрица на (α_i^j) в (2).

Нека двете системи са ортонормирани. Като повдигнем в квадрат последните три равенства на (2) и вземем пред вид, че

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j' = \delta_{ij},$$

получаваме връзките

$$(5) \qquad \begin{aligned} (\alpha_1^1)^2 + (\alpha_2^1)^2 + (\alpha_3^1)^2 &= 1, \\ (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 + (\alpha_3^2)^2 &= 1, \\ (\alpha_1^3)^2 + (\alpha_2^3)^2 + (\alpha_3^3)^3 &= 1. \end{aligned}$$

Скаларното умножаване на същите равенства (две по две) дава

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_1^1\alpha_1^2+\alpha_2^1\alpha_2^2+\alpha_3^1\alpha_3^2&=0,\\
\alpha_1^1\alpha_1^3+\alpha_2^1\alpha_2^3+\alpha_3^1\alpha_3^3&=0,\\
\alpha_1^2\alpha_1^3+\alpha_2^2\alpha_2^3+\alpha_3^2\alpha_3^3&=0.
\end{aligned}
$$

Равенствата (5) и (6) показват, че матрицата (α_i^j) е ортогонална. От линейната алгебра е известно, че $\det(\alpha_i^j)=\varepsilon=\pm 1$.

И тъй при смяна на ортонормирана координатна система в пространството връзката между координатите на една и съща точка спрямо двете ортонормирани системи се дава с (4), като матрицата (α_i^j) е ортогонална.

По същия начин, както в равнинита, установяваме резултата:

Ако векторът **a** има координати (λ, μ, ν) спрямо една система и (λ', μ', ν') спрямо втора система, то в сила са формулите

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\lambda&=\alpha_1^1\lambda'+\alpha_1^2\mu'+\alpha_1^3\nu',\\
\mu&=\alpha_2^1\lambda'+\alpha_2^2\mu'+\alpha_2^3\nu',\\
\nu&=\alpha_3^1\lambda'+\alpha_3^2\mu'+\alpha_3^3\nu'.
\end{aligned}
$$

Ако двете системи са ортонормирани, то матрицата (α_i^j) е ортогонална.

Транслация на координатната система. Този случай имаме, когато едноименните координатни оси на двете координатни системи са еднопосочно успоредни. Сега формулите за смяна на координатната система са

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
x&=a+x',\\
y&=b+y',\\
z&=c+z'.
\end{aligned}
$$

Те могат да се получат от (4), като изразим, че $\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3'$ които водят до $\alpha_i^j=\delta_{ij}$.

Ортогонална трансформация на координатната система. Този случай имаме, когато началата на двете ортонормирани координатни системи съвпадат. Като положим $a=b=c=0$, получаваме

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
x&=\alpha_1^1x'+\alpha_1^2y'+\alpha_1^3z',\\
y&=\alpha_2^1x'+\alpha_2^2y'+\alpha_2^3z',\\
z&=\alpha_3^1x'+\alpha_3^2y'+\alpha_3^3z',
\end{aligned}
$$

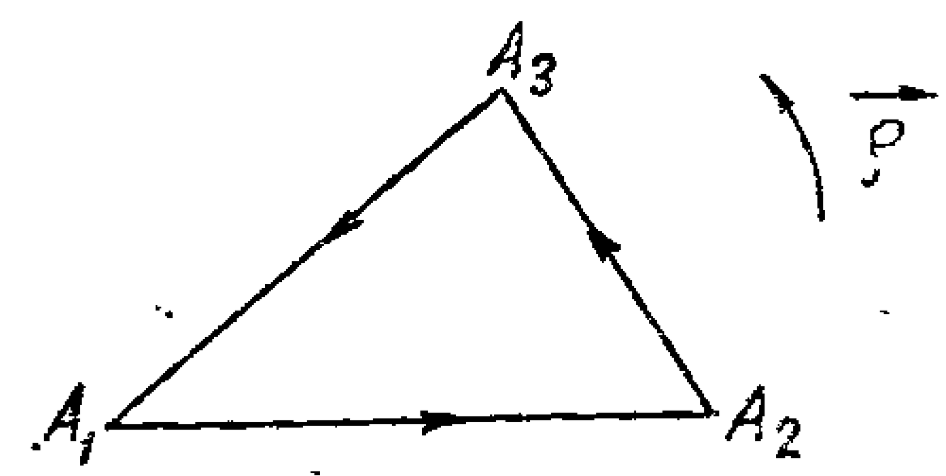
като (α_i^j) е ортогонална матрица.

§ 9. Ориентация в равнината

Триъгълник се нарича тройка точки. Ако точките са неколинеарни (колинеарни), триъгълникът е неизроден (изроден).

Ориентиран триъгълник $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ наричаме наредена тройка точка (A_1, A_2, A_3).

Ориентирана равнина наричаме равнина, в която е фиксиран неизроден ориентиран триъгълник. Да се ориентира равнината, т. е. да



Черт. 28

се зададе в нея неизроден ориентиран триъгълник $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$, означава да се избере определена посока $\vec{\rho}$ на въртене (обикаляне) в тази равнина; обикалянето става по контура на триъгълника: най-напред се върви по страната A_1A_2, после A_2A_3 и най-сетне A_3A_1.

Нека в равнината е дадена една афинна координатна система Oe_1e_2 с единични точки E_1, E_2. Равнината получава една естествена ориентация с помощта на триъгълника $\overrightarrow{E_1E_2O}$, който ще наричаме *координатен триъгълник*.

Нека спрямо афинната координатна система Oe_1e_2 са дадени два ориентирани неизродени триъгълника $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$, $\overrightarrow{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}$ със своите координати:

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2),\ A_3(x_3, y_3);$$
$$\bar{A}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1),\ \bar{A}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2),\ \bar{A}_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3).$$

Казваме, че двата триъгълника са еднакво ориентирани (или имат еднакви ориентации) точно когато детерминантите

$$(1)\qquad \triangle := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{\triangle} := \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

имат един и същ знак. Ако детерминантите имат различни знаци, триъгълниците са противоположно ориентирани.

Независимо от това, че при дефиницията на понятието еднаква ориентация на два триъгълника се използува координатна система, понятието не зависи от нея. Това показва следната

Теорема 1. *Ако два триъгълника са еднакво ориентирани при една координатна система, те са такива и при всяка друга координатна система.*

Доказателство. Нека спрямо втората координатна система $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ същите триъгълници имат координати

$$A_1(x_1', y_1'),\ A_2(x_2', y_2'),\ A_3(x_3', y_3'),$$
$$\bar{A}_1(\bar{x}_1', \bar{y}_1'),\ \bar{A}_2(\bar{x}_2', \bar{y}_2'),\ \bar{A}_3(\bar{x}_3', \bar{y}_3').$$

Като приложим формулите за смяна на афинна координатна система

$$x=a+\alpha_1^1 x'+\alpha_1^2 y',$$
$$y=b+\alpha_2^1 x'+\alpha_2^2 y',$$

за трите точки A_1, A_2, A_3 получаваме

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+\alpha_1^1 x_1'+\alpha_1^2 y_1' & b+\alpha_2^1 x_1'+\alpha_2^2 y_1' & 1\\ a+\alpha_1^1 x_2'+\alpha_1^2 y_2' & b+\alpha_2^1 x_2'+\alpha_2^2 y_2' & 1\\ a+\alpha_1^1 x_3'+\alpha_1^2 y_3' & b+\alpha_2^1 x_3'+\alpha_2^2 y_3' & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(\alpha_1^1\alpha_2^2-\alpha_1^2\alpha_2^1)\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1\\ x_2' & y_2' & 1\\ x_3' & y_3' & 1\end{vmatrix}=\alpha\Delta',$$

където $\alpha=\det(\alpha_i^j)\neq 0$. В окончателна форма получихме

(2) $$\Delta=\alpha\Delta'.$$

Аналогично за втория триъгълник

$$\bar{\Delta}=\alpha\bar{\Delta}'.$$

Чрез умножаване на последните две равенства получаваме

$$\Delta\bar{\Delta}=\alpha^2\Delta'\bar{\Delta}'.$$

Оттук се вижда, че ако при една координатна система детерминантите Δ, $\bar{\Delta}$ имат еднакви знаци, то Δ', $\bar{\Delta}'$ имат еднакви знаци при коя да е друга координатна система. С това теоремата е доказана.

Нека в ориентираната посредством координатния триъгълник $\overrightarrow{E_1E_2O}$ равнина е даден ориентираният триъгълник $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ със своите координати

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2),\ A_3(x_3, y_3)$$

спрямо афинната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ (според направената погоре уговорка E_1, E_2 са единичните точки на координатните оси). Казваме, че триъгълникът $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е положително ориентиран или има положителна ориентация, ако двата триъгълника $\overrightarrow{E_1E_2O}$, $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ са еднакво ориентирани; ако триъгълниците $\overrightarrow{E_1E_2O}$, $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ са противоположно ориентирани, казваме, че триъгълникът $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е отрицателно ориентиран или има отрицателна ориентация. Следователно, за да можем да говорим за положително или отрицателно ориентиран триъгълник, трябва той да се сравни с друг базов, в случая с координатния триъгълник. Ще докажем следната

Теорема 2. *Ориентираният триъгълник* $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ *е положително ориентиран точно когато*

$$(3) \qquad \triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

При $\triangle < 0$ *той е отрицателно ориентиран.*

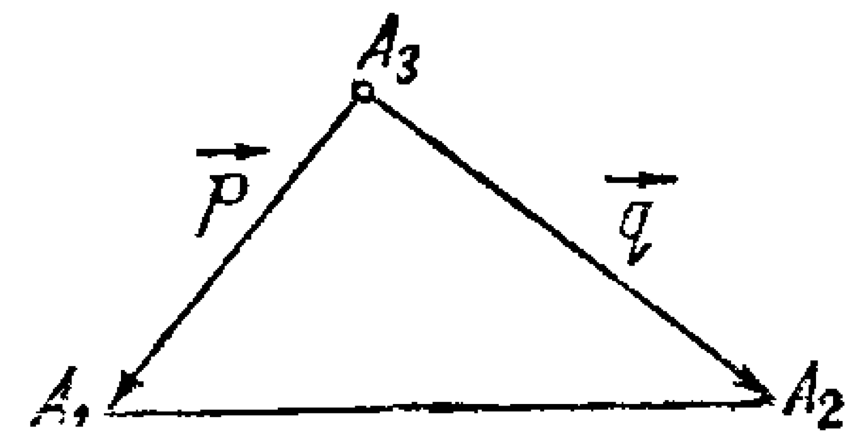
Доказателство. Пресмятаме съответната детерминанта за координатния триъгълник $\overrightarrow{E_1E_2O}$, чиито върхове имат координати $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$, $O(0, 0)$ спрямо системата $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Получаваме

$$\overline{\triangle} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

По определение $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е положително ориентиран точно когато $\triangle$ и $\overline{\triangle}$ имат еднакви знаци, т. е. когато е изпълнено (3). С това теоремата е доказана.

Ако триъгълникът $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е положително (отрицателно) ориентиран, то двойката вектори $\mathbf{p} = \overrightarrow{A_3A_1}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{A_3A_2}$ (черт. 29) наричаме положително (отрицателно) ориентирана двойка вектори (по отношение на двойката вектори $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ на координатната система). Ако $\mathbf{p}(p_1, p_2)$, $\mathbf{q}(q_1, q_2)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, то

$$p_1 = x_1 - x_3, \quad p_2 = y_1 - y_3,$$
$$q_1 = x_2 - x_3, \quad p_2 = y_2 - y_3.$$



Черт. 29

Преобразуваме детерминантата $\triangle$ за триъгълника $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ по следния начин:

$$\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}.$$

Оттук се вижда верността на следната

Теорема 3. *Векторите* $\mathbf{p}(p_1, p_2)$, $\mathbf{q}(q_1, q_2)$ *образуват положително (отрицателно) ориентирана двойка вектори точно когато детерминантата*

$$\triangle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}$$

е положителна (отрицателна).

Да се върнем към въпроса за смяна на координатната система. Нека $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ са две афинни координатни системи, като $O'(a, b)$, $\mathbf{e}'_1(\alpha_1^1, \alpha_2^1)$, $\mathbf{e}'_2(\alpha_1^2, \alpha_2^2)$ са зададени спрямо първата система. Двете координатни системи наричаме еднакво ориентирани или, с други думи, системата $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ е положително ориентирана (относно системата $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) точно когато векторите $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ образуват положително ориентирана двойка вектори. Ясно е какво ще означава терминът противоположно ориентирани координатни системи. Като имаме пред вид това определение и въведените означения, можем да формулираме следната.

Теорема 4. *Афинните координатни системи* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ *са еднакво (противоположно) ориентирани точно когато детерминантата* $\det(\alpha_i^j)$ *е положителна (отрицателна).*

Нека двете системи са ортонормирани. Сега формулите за смяна са

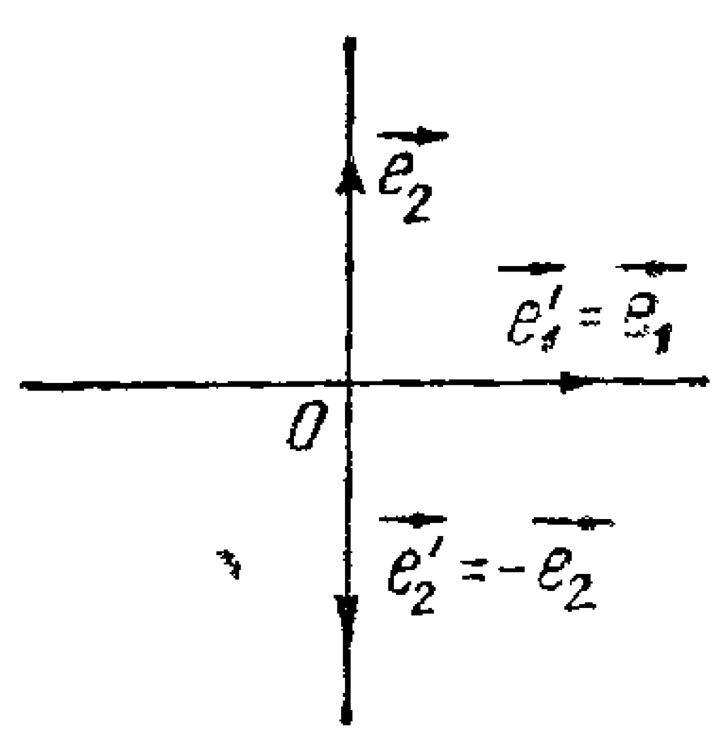
$$x = a + x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha,$$

$$y = b + x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha,$$

където $\det(\alpha_i^j) = \varepsilon = \pm 1$. Ясно е, че при $\varepsilon = +1$ двете системи са еднакво ориентирани; при $\varepsilon = -1$ системите са противоположно ориентирани. На черт. 30 ортонормираните координатни системи $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, където $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2$, са противоположно ориентирани.

Нека $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е ориентиран триъгълник, зададен със своите координати

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2),\ A_3(x_3, y_3)$$

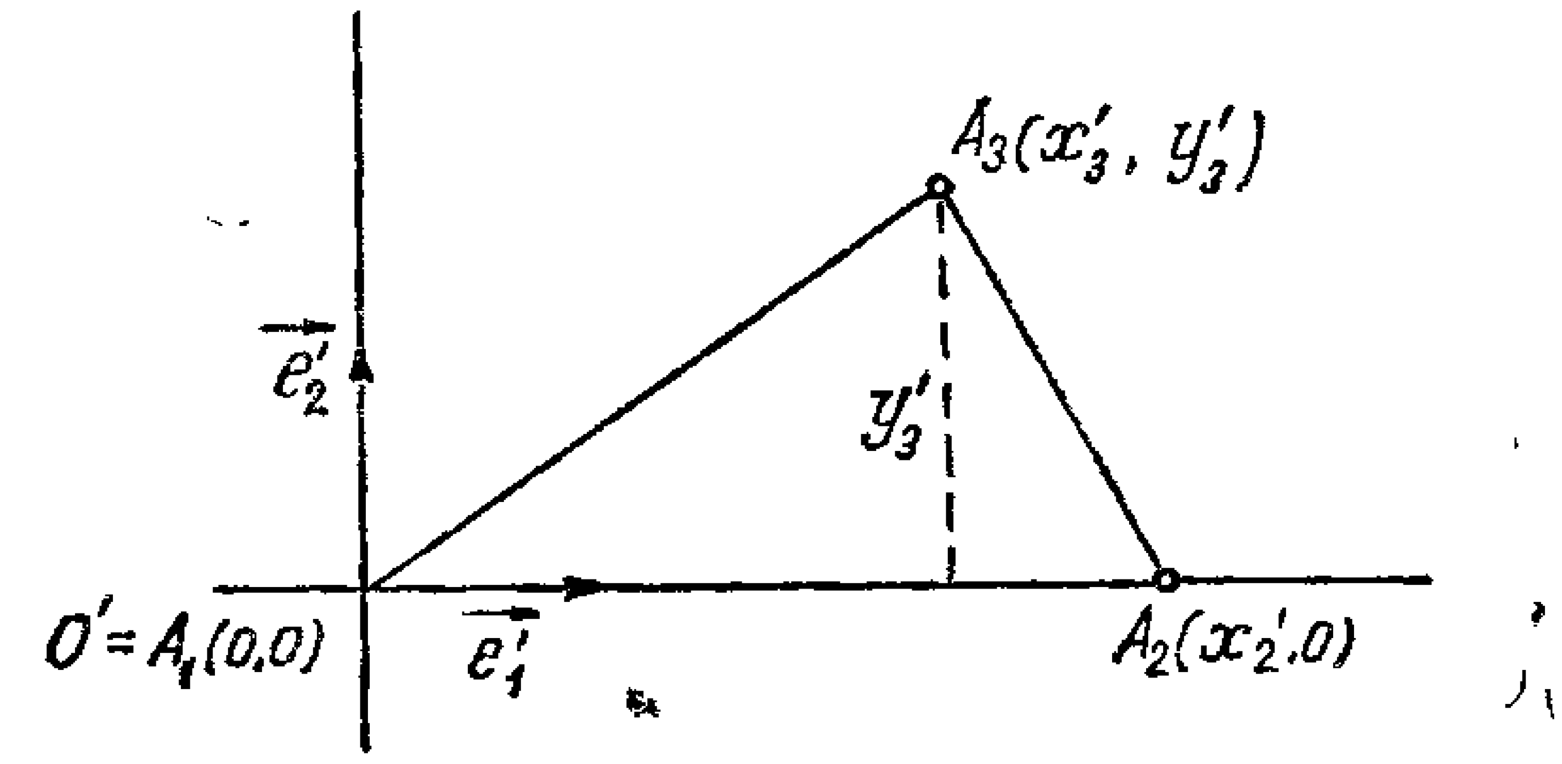


Черт. 30

спрямо ортонормирана координатна система. Реалното число

(4) $$\sigma(\overrightarrow{A_1A_2A_3}) := \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

наричаме *ориентирано лице* на ориентирания триъгълник $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$. Ясно е, че ако $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е положително ориентиран триъгълник, то ориентираното му лице е положително и обратно. Ще покажем, че $|\sigma(\overrightarrow{A_1A_2A_3})|$ представлява лицето на триъгълника $A_1A_2A_3$. Действително при смяна

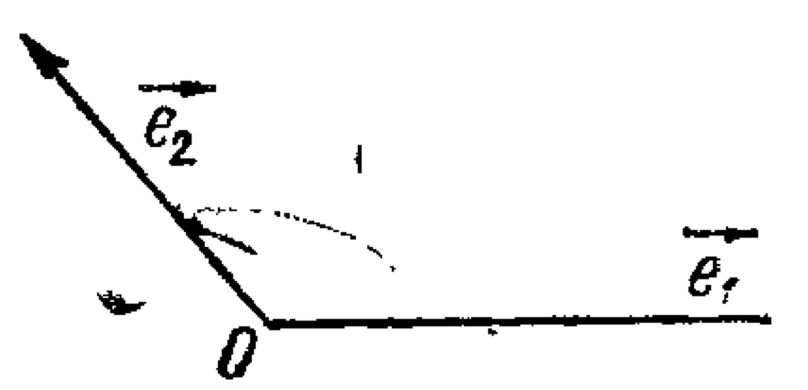


Черт. 31

на ортонормираната координатна система съгласно (2) ще имаме равенството

$$\sigma(\overrightarrow{A_1A_2A_3}) = \varepsilon\sigma'(\overrightarrow{A_1A_2A_3}).$$

Втората координатна система $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ ще подберем по следния начин $A_1(0, 0)$ да е нейното начало, правата A_1A_2 да е оста $O'\mathbf{e}_1'$. Тогава по-



Черт. 32

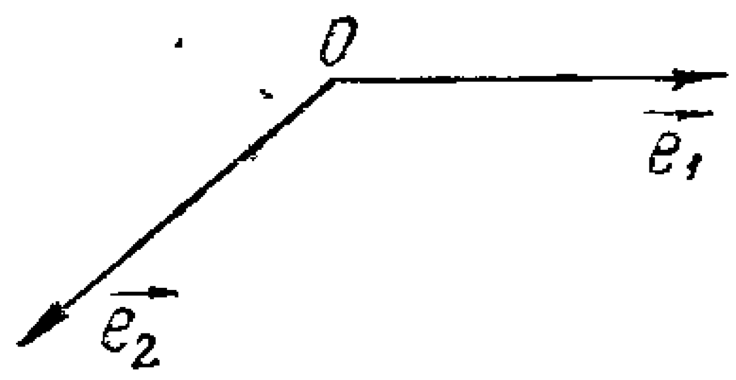
лучаваме $A_2(x_2' \neq 0, 0)$, $A_3(x_3', y_3')$. Пресмятаме $\sigma'(\overrightarrow{A_1A_2A_3}) = \frac{1}{2} x_2' y_3'$. Като държим сметка, че $|x_2'|$ е основата на триъгълника $A_1A_2A_3$, а $|y_3'|$ е неговата височина, получаваме

$$|\sigma(\overrightarrow{A_1A_2A_3})| = \frac{1}{2} |x_2'| |y_3'|,$$

с което твърдението е доказано.

От хода на доказателството е ясно, че $\sigma(\overrightarrow{A_1A_2A_3}) = 0$ точно когато триъгълникът $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ е изроден.

Забележка. Понякога се говори за десни и леви координатни системи. Една афинна координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ са нарича дясна, ако завъртането на вектора $\mathbf{e}_1$ около O в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка, докато той стане колинеарен на вектора $\mathbf{e}_2$, се извърши на ъгъл, по-малък от π; ако ъгълът на завъртането е по-голям от π, системата е лява. Например координатната система на черт. 32 е лява, а на черт. 33 е дясна. Тези понятия имат само



Черт. 33

физичен смисъл. Но все пак с оглед на традицията при работа с една ортонормирана координатна система ще избираме последната дясна.

§ 10. Ориентация в пространството

Тетраедър (триъгълна пирамида) наричаме четворка точки. Ако четирите точки не са компланарни (т. е. не лежат в една равнина), тетраедърът наричаме неизроден. В противен случай тетраедърът е изроден.

Ориентиран тетраедър $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ наричаме наредена четворка точки.

Пространство, в което е зададен неизроден ориентиран тетраедър, се нарича *ориентирано пространство*. Ако $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ е афинна координатна система в пространството и E_1, E_2, E_3 са единичните точки върху координатните ѝ оси, то координатният тетраедър $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ ориентира пространството. Нека спрямо тази система са дадени два неизродени тетраедъра $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$, $\overrightarrow{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4}$ със своите координати:

$$A_1(x_1, y_1, z_1),\ A_2(x_2, y_2, z_2),\ A_3(x_3, y_3, z_3),\ A_4(x_4, y_4, z_4);$$

$$\bar{A}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1),\ \bar{A}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2),\ \bar{A}_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3),\ \bar{A}_4(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4).$$

Двата тетраедъра наричаме еднакво ориентирани, ако детерминантите

$$\triangle := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{\triangle} := \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 & 1 \\ \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & \bar{z}_4 & 1 \end{vmatrix}$$

имат еднакъв знак. Ако $\triangle$, $\bar{\triangle}$ имат различни знаци, тетраедрите наричаме противоположно ориентирани. Както в равнината, и тук се доказва, че това понятие не зависи от координатната система. Твърдението следва, като се докаже формула, аналогична на формулата (2) от предния параграф.

Тетраедърът $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ се нарича положително (отрицателно) ориентиран, ако тетраедрите $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$, $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ се еднакво (противоположно) ориентирани. Тетраедърът $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ е положително (отрицателно) ориентиран точно когато детерминантата Δ е положителна (отрицателна).

Тройката вектори $\mathbf{p} := \overrightarrow{A_4A_1}$, $\mathbf{q} := \overrightarrow{A_4A_2}$, $\mathbf{r} := \overrightarrow{A_4A_3}$ наричаме положително (отрицателно) ориентирана точно когато тетраедърът $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ е положително (отрицателно) ориентиран. Доказва се, както в равнината, че тройката вектори

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}(p_1,\ p_2,\ p_3),\\ &\mathbf{q}(q_1,\ q_2,\ q_3),\\ &\mathbf{r}(r_1,\ r_2,\ r_3)\end{aligned}$$

е положително (отрицателно) ориентирана тройка вектори точно когато детерминантата

$$\Delta(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r}) := \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

е положителна (отрицателна).

Две координатни системи $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ наричаме еднакво (противоположно) ориентирани точно когато векторите $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ образуват положително (отрицателно) ориентирана тройка вектори. Това е налице точно когато $\det(\alpha_i^j)$ е положителна (отрицателна), като векторите $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ имат съответно координати $(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1,\ \alpha_3^1)$, $(\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\ \alpha_3^2)$, $(\alpha_1^3,\ \alpha_2^3,\ \alpha_3^3)$ спрямо системата $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Нека $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ е ориентиран тетраедър, чиито върхове са зададени спрямо ортонормирана координатна система в пространството:

$$A_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ A_2(x_2,\ y_2,\ z_2),\ A_3(x_3,\ y_3,\ z_3),\ A_4(x_4,\ y_4,\ z_4).$$

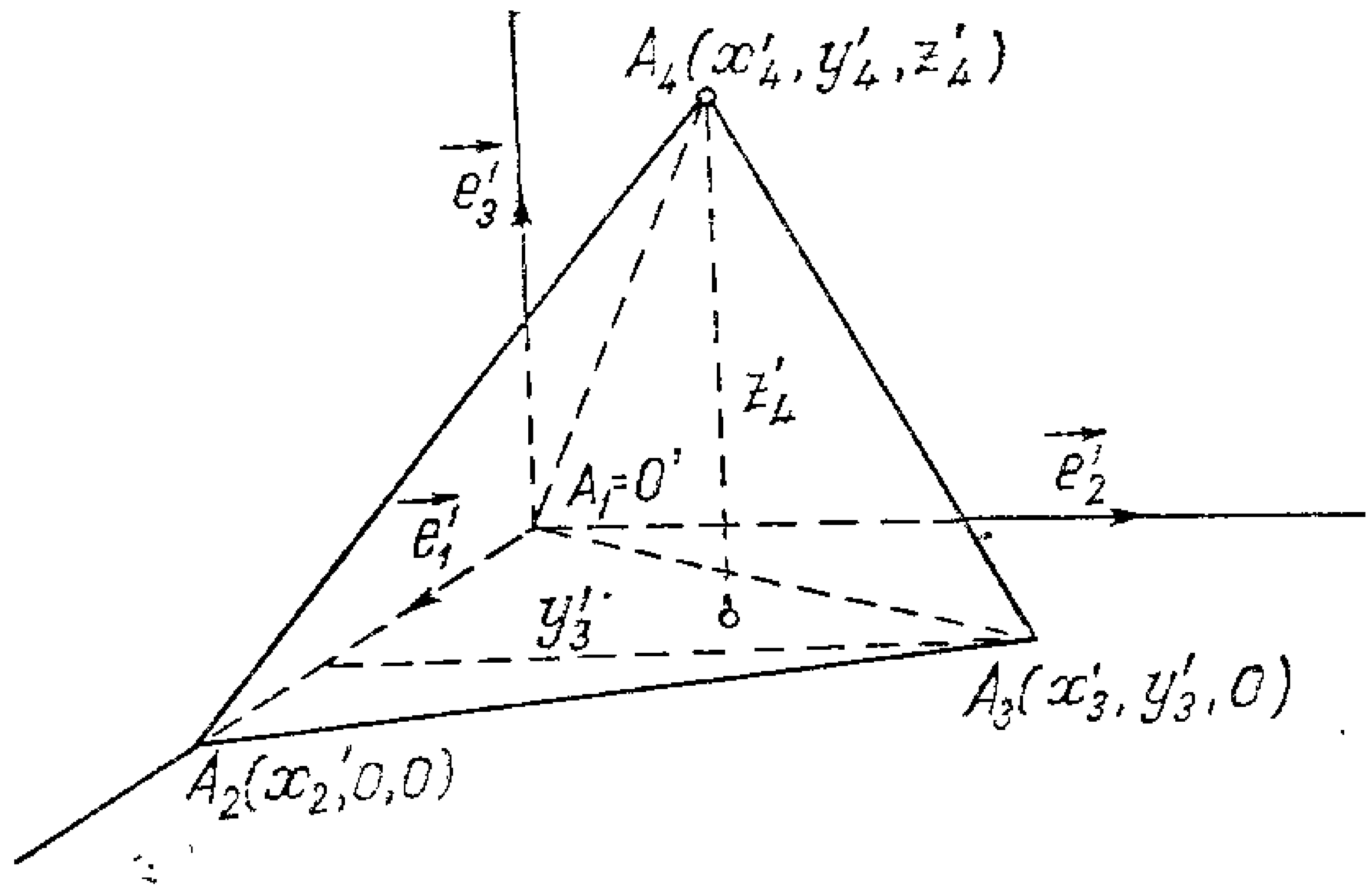
Реалното число

$$V(\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}) := \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

се нарича *ориентиран обем* на тетраедъра $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$. Ясно е, че ориентираният обем е положително число точно когато тетраедърът е положително ориентиран. Ще покажем, че $|V(\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4})|$ представлява обемът на тетраедъра $A_1A_2A_3A_4$. Действително лесно се съобразява, че при смяна на ортонормирана координатна система съществува връзката

$$V(\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4})=\varepsilon V'(\overrightarrow{A_1'A_2'A_3'A_4'}) \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

Втората координатна система избираме по следния начин: $A_1(x_1'=y_1'=z_1'=0)$ е нейното начало, правата A_1A_2 е координатната ос $O'e_1'$,



Черт. 34

равнината $A_1A_2A_3$ е координатната равнина $O'e_1'e_2'$. Тогава $A_2(x_2'\neq 0, y_2'=z_2'=0)$, $A_3(x_3', y_3', z_3'=0)$, $A_4(x_4', y_4', z_4')$. Имаме

$$V'(\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4})=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2' & 0 & 0 & 1 \\ x_3' & y_3' & 0 & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{6}x_2'y_3'z_4'.$$

Като имаме пред вид, че $\frac{1}{2}|x_2'y_3'|$ е лицето на основата $A_1A_2A_3$ на тетраедъра, а $|z_4'|$ е неговата височина, получаваме

$$V(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{6}|x_2'y_3'|\,|z_4'|,$$

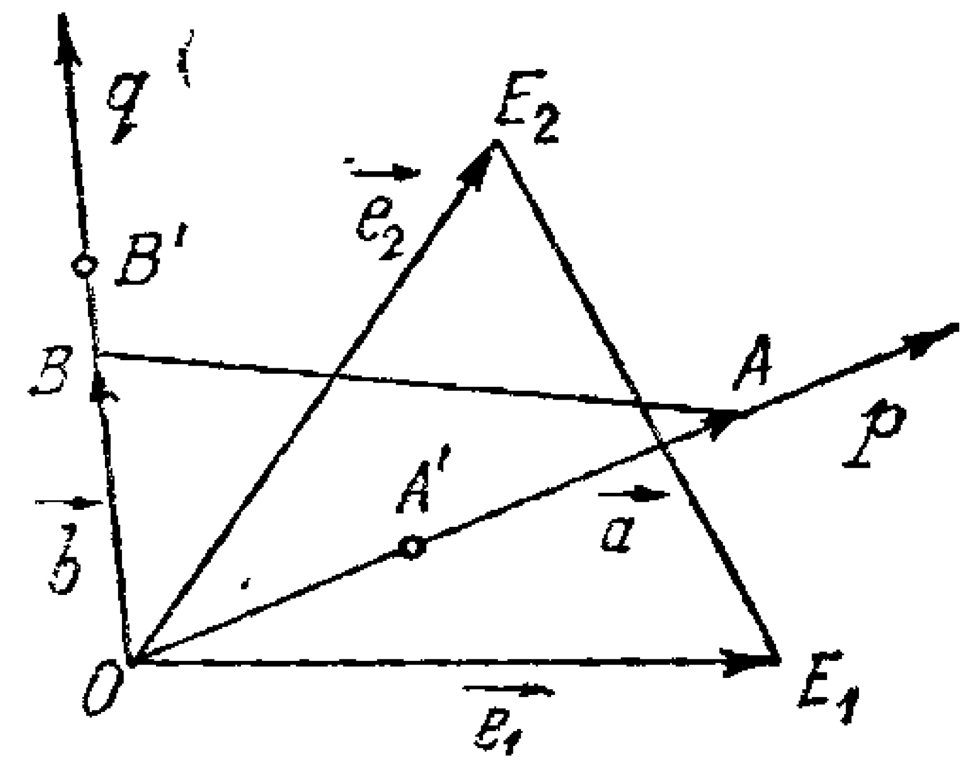
с което доказателството на твърдението е завършено.

От хода на доказателството е ясно, че $V(\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4})=0$ точно когато тетраедърът е изроден.

Забележка. И в пространството съществуват физичните понятия за дясна и лява координатна система. Ортонормираната координатна система $Oe_1e_2e_3$ в пространството наричаме дясна, ако са изпълнени следните условия: равнинната координатна система Oe_1e_2 е дясна и тялото на изправен наблюдател, стъпил в точката O и наблюдаващ положителната посока в равнината Oe_1e_2 (т. е. посоката, обратна на движението на часовниковата стрелка), се намира в полупространството, в което е и векторът e_3. При замяна на един вектор с неговия противоположен в дясна система се получава лява и обратно.

§ 11. Ориентирани ъгли

Съвкупност от два лъча p, q с общо начало наричаме ъгъл (или елементарно геометричен ъгъл) и го означаваме pq. Ако измерваме ъглите в радиани, то мярката на елементарно геометричния ъгъл φ приема стойности от 0 до π, т. е. $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.



Черт. 35

Ориентиран ъгъл $\widehat{pq}$ наричаме наредена двойка лъчи p, q с общо начало. Докато ъглите pq и qp не се различават, то ориентираните ъгли $\widehat{pq}$ и $\widehat{qp}$ са различни.

Нека в равнината, ориентирана с координатния триъгълник $\overrightarrow{E_1E_2O}$, лежи ориентираният ъгъл $\widehat{pq}$ с връх същата точка O. Вземаме върху лъчите p и q произволни точки A и B, различни от точката O (черт. 35). Казваме, че ориентираният ъгъл $\widehat{pq}$ има положителна (отрицателна) ориентация, ако триъгълникът $\overrightarrow{ABO}$ има положителна (отрицателна) ориентация.

За да бъде това определение коректно, трябва да покажем, че то не зависи от случайния избор на точките A, B.

Действително нека $A' \in p$, $B' \in q$ са други точки. Понеже векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ са колинеарни, съществува число λ такова, че $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$. И тъй като точките A и A' лежат върху един и същи лъч с начало O, следва, че $\lambda > 0$. Ако A има координати (a_1, a_2) спрямо Oe_1e_2, то A' има координати $(\lambda a_1, \lambda a_2)$. По същия начин постигаме резултата: ако B има координати (b_1, b_2), то B' има координати $(\mu b_1, \mu b_2)$ при някакво $\mu > 0$. Пресмятаме съответната детерминанта за триъгълника $\overrightarrow{ABO}$:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Аналогично за триъгълника $\overrightarrow{A'B'O}$ получаваме

$$\triangle' = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & 1 \\ \mu b_1 & \mu b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda\mu(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Понеже λ и μ имат еднакви знаци, следва, че триъгълниците $\overrightarrow{ABO}$ и $\overrightarrow{A'B'O}$ са еднакво ориентирани и значи определението за положително ориентиран ъгъл не зависи от избора на A и B.

Един ориентиран ъгъл $\widehat{pq}$ има безбройно много стойности, които се получават по формулата

$$(1) \qquad (\widehat{pq}) := \varepsilon\varphi + 2k\pi,$$

където k е произволно цяло число. При това $\varepsilon = +1$, ако ъгълът е положително ориентиран, и $\varepsilon = -1$, ако е отрицателно ориентиран. В тази формула φ е мярката на елементарно геометричния ъгъл pq.

Онази стойност на ориентирания ъгъл, за която

$$(\widehat{pq}) \in (-\pi, \pi],$$

се нарича *главна стойност* на ориентирания ъгъл.

Нека **a** и **b** са два вектора, пренесени в една точка O, и нека $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ са техните представители. Нека p е лъчът с начало O и съдържащ точката A, а q — онзи, който съдържа точката B. Под ориентиран ъгъл между векторите се разбира ориентираният ъгъл между съответните лъчи.

§ 12. *Векторно произведение*

Предполагаме, че пространството, в което разглеждаме сега векторите, е ориентирано например с помощта на координатния тетраедър $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ на една ортонормирана система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Във векторното пространство ще дефинираме една нова операция с векторите, която ще наричаме векторно или външно умножение на два вектора. Ще я означаваме с „$\wedge$“.

Нека са дадени векторите

$$\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3),$$
$$\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$$

спрямо ортонормираната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Тяхното векторно произведение е вектор, който по определение има следните координати:

$$(1) \qquad \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

Дефиницията, която даваме, е аналитична — използва координатна система. Ще покажем, че тя не зависи от координатната система. В сила е следната

Лема. *Векторното произведение не зависи от ортонормираната координатна система.*

Доказателство. Нека е дадена втора ортонормирана координатна система $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ и нека спрямо нея имаме

$$\mathbf{a}(a_1',\ a_2',\ a_3'),$$
$$\mathbf{b}(b_1',\ b_2',\ b_3');$$
$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}(a_2'b_3'-a_3'b_2',\ a_3'b_1'-a_1'b_3',\ a_1'b_2'-a_2'b_1').$$

Ако един вектор има координати $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ относно $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ относно $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, то в сила са формулите (8.7):

(2) $$x_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_i^j x_j'\ (i=1,\ 2,\ 3),$$ б – р

като матрицата

$$(\alpha_i^j)=\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3\\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3\end{pmatrix}$$

е ортогонална. Прилагаме (2) за векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

(3) $$a_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_i^j a_j'\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

(4) $$b_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_i^j b_j'\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Същата връзка (2) трябва да съществува и между координатите на вектора $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ спрямо двете системи. Това е съдържанието на лемата. Например при $i=3$ трябва да проверим равенството

(5) $$a_1b_2-a_2b_1=\alpha_3^1(a_2'b_3'-a_3'b_2')+\alpha_3^2(a_3'b_1'-a_1'b_3')+\alpha_3^3(a_1'b_2'-a_2'b_1').$$

Като заместим a_1, a_2 от (3), b_1, b_2 от (4) в последното равенство и вземем пред вид, че поради ортогоналността на матрицата (α_i^j) са изпълнени тъждествата

$$\alpha_3^1=\alpha_1^2\alpha_2^3-\alpha_1^3\alpha_2^2,$$
$$\alpha_3^2=\alpha_1^3\alpha_2^1-\alpha_1^1\alpha_2^3,$$
$$\alpha_3^3=\alpha_1^1\alpha_2^2-\alpha_1^2\alpha_2^1,$$

се убеждаваме във верността на (5). Аналогично се извършва проверката за $i=1$ и $i=2$. С това лемата е доказана.

Сега ще докажем следните свойства на векторното произведение, които в редица курсове по аналитична геометрия служат за дефиниция на векторно произведение:

1. *Ако векторите* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са колинеарни, тяхното векторно произведение* $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\mathbf{o}$.

2. *Векторът* $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ е *перпендикулярен на двата вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

3. *Векторите* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ *образуват положително ориентирана тройка вектори, ако* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *не са колинеарни.*

4. *Големината на векторното произведение* $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ *е равна на лицето на успоредника, построен върху векторите* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Доказателство на 1. Нека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са колинеарни. Тогава те са линейно зависими и без ограничение можем да пишем $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$. От последното равенство получаваме скаларните равенства

$$a_1=\lambda b_1,\quad a_2=\lambda b_2,\quad a_3=\lambda b_3,$$

откъдето лесно следва, че трите координати на вектора $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ са равни на нула. С това свойство 1 е доказано.

Доказателство на 2. Пресмятаме скаларното произведение

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,.\,\mathbf{a}=(a_2b_3-a_3b_2)a_1+(a_3b_1-a_1b_3)a_2+(a_1b_2-a_2b_1)a_3=0.$$

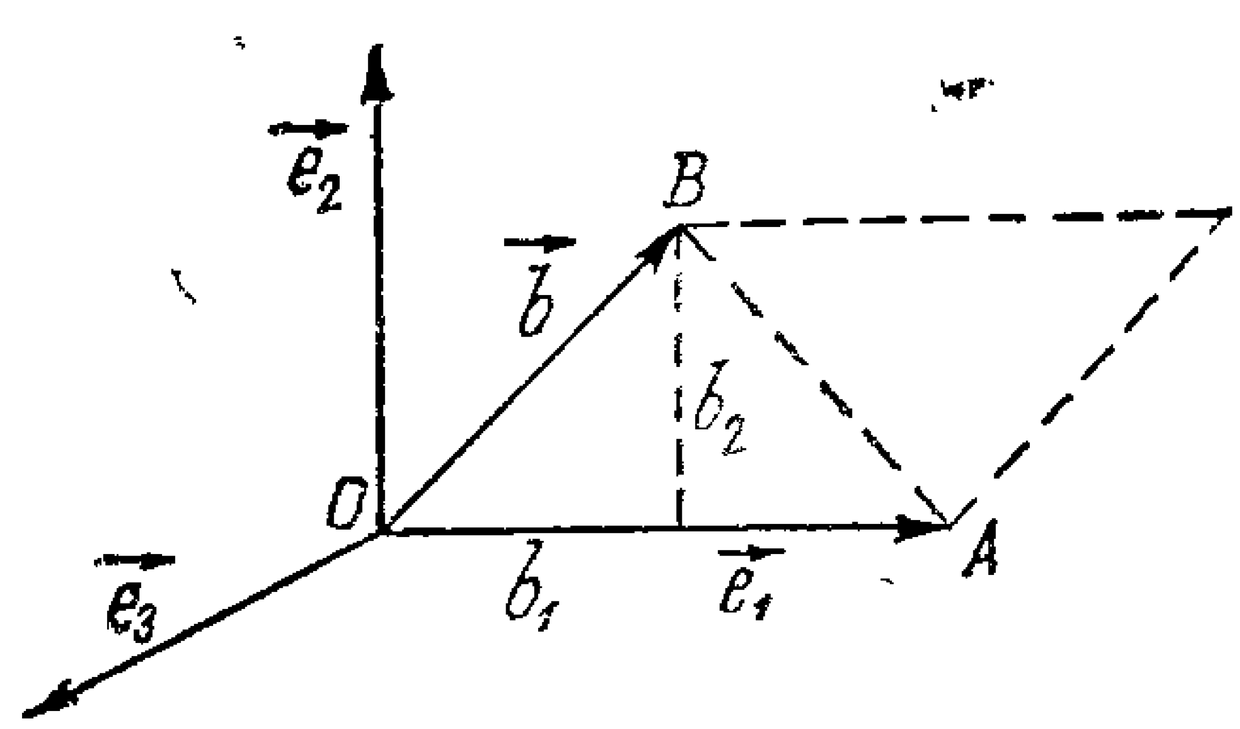
Аналогично получаваме $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,.\,\mathbf{b}=\mathbf{o}$. Тези две равенства доказват свойство 2.

Доказателство на 3. Пресмятаме детерминантата

$$\triangle(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{b})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqq 0.$$

Тъй като векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ не са колинеарни, поне една от координатите на векторното произведение $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ е различна от нула. Действително, ако допуснем, че трите координати са нула, би следвало, че коор-



Черт. 36

динатите на вектора $\mathbf{a}$ например са пропорционални на координатите на вектора $\mathbf{b}$, което означава, че тези вектори са колинеарни. Но тогава $\triangle(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{b})>0$ и с това свойство 3 е доказано.

Доказателство на 4. Тъй като векторното произведение не зависи от ортонормираната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, последната избираме по следния начин: $\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, а векторът $\mathbf{b}$ лежи в равнината $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Тогава $\mathbf{a}(|\mathbf{a}|, 0, 0)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, 0)$. Според определението имаме

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\ (0,\ 0,\ |\mathbf{a}|b_2)$$

и значи $|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\,|b_2|$.

Понеже векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ лежат в равнината $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, те имат следните координати относно системата $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$: $\mathbf{a}(|\mathbf{a}|, 0)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2)$. Тъй като ориентираното лице на триъгълника $\overrightarrow{OAB}$ е

$$\sigma(\overrightarrow{OAB})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ |\mathbf{a}| & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|\mathbf{a}|b_2,$$

то лицето на успоредника, построен върху векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, е $|\mathbf{a}|\,|b_2|$. С това свойството 4 е доказано.

Като следствие от свойство 1 и доказателството на 3 имаме следната

Теорема 1. *Два ненулеви вектора са колинеарни точно когато тяхното векторно произведение е равно на нула.*

В различни приложения се срещат *двойните векторни произведения* от вида $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$.

Ще докажем, че за тях са в сила следните представяния:

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{ac}-\mathbf{a}\,.\,\mathbf{bc}, \tag{6}$$

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{ac}-\mathbf{c}\,.\,\mathbf{ab}. \tag{7}$$

Тези две формули могат да се изкажат по следния начин:

Теорема 2. *Двойното векторно произведение на три вектора е равно на средния вектор, умножен със скаларното произведение на другите два вектора, минус другия вектор в скобата, умножен със скаларното произведение на останалите два вектора.*

Доказателство на формулата (6). Нека са дадени векторите $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ спрямо ортонормирана координатна система. По определение имаме

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

Третата координата на вектора $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ е

$$c_2(a_2b_3-a_3b_2)-c_1(a_3b_1-a_1b_3).$$

Понеже

$$\mathbf{ac}=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3,$$
$$\mathbf{bc}=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3,$$

пресмятането на третата координата на вектора, стоящ в дясната страна на формулата (6), води до същия резултат:

$$b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-a_3(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=$$
$$=c_2(a_2b_3-a_3b_2)-c_1(a_3b_1-a_1b_3).$$

Аналогично се проверява, че векторите, стоящи в двете страни на (6), имат равни първи и втори координати. Това означава, че те са равни, са което (6) е проверено. По същия начин се извършва проверката и на формулата (7).

В сила са следните свойства на векторното произведение:

14°) $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=-\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}$ (кососиметричност);

15°) $(\lambda\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$;

16°) $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}+\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}$ (дистрибутивност);

17°) $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}=\mathbf{o}$ (тъждество на Якоби).

Тук $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ са произволни вектори, а λ е реално число.

Свойствата 14°), 15°), 16°) се доказват, като се провери, че векторите, стоящи в двете страни на съответните формули, имат равни координати. За образец да проверим 16°). Координатите на вектора $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ са $(b_1+c_1,\ b_2+c_2,\ b_3+c_3)$. Тогава векторът $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ има координати

$$(a_2(b_3+c_3)-c_3(b_2+c_2),\ a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3),\ a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)).$$

От друга страна, понеже $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}$ имат съответно координати

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1),$$
$$(a_2c_3-a_3c_2,\ a_3c_1-a_1c_3,\ a_1c_2-a_2c_1),$$

то координатите на $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}+\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}$ са:

$(a_2b_3-a_3b_2+a_2c_3-a_3c_2,\quad a_3b_1-a_1b_3+a_3c_1-a_1c_3,\quad a_1b_2-a_2b_1+a_1c_2-a_2c_1)$. Значи векторите $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ и $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}+\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ имат равни координати и следователно са равни.

Доказателство на 17°). Съгласно (6) имаме

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{ac}-\mathbf{a}\,.\,\mathbf{bc},$$
$$(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge\mathbf{a}=\mathbf{c}\,.\,\mathbf{ab}-\mathbf{b}\,.\,\mathbf{ac},$$
$$(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}=\mathbf{a}\,.\,\mathbf{bc}-\mathbf{c}\,.\,\mathbf{ab}.$$

Като съберем последните три равенства, вдясно получаваме нула. С това тъждеството на Якоби е проверено.

Поради това, че във векторното пространство на свободните вектори дефинираната операция векторно умножение удовлетворява свойствата 14°)—17°), може да се твърди следното:

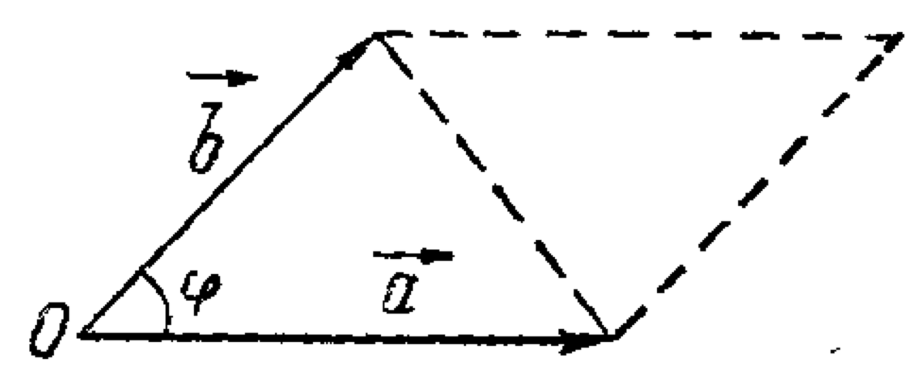
Множеството на свободните вектори в тримерното евклидово векторно пространство е алгебра на Ли.

Ще отбележим, че операцията $\wedge$ е една „привилегия“ за тримерното векторно пространство на свободните вектори. Аналогична операция за векторите в двумерното векторно пространство не съществува. Все пак понякога ще прилагаме тази операция и за свободни вектори в двумерното векторно пространство в следния смисъл: Нека са дадени векторите $\mathbf{a}(a_1,\ a_2)$, $\mathbf{b}(b_1,\ b_2)$ спрямо ортонормирана координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ в равнината α. Допълваме системата до ортонормирана координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в пространството. Очевидно векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имат съответно координати $(a_1,\ a_2,\ 0)$, $(b_1,\ b_2,\ 0)$ спрямо $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. По формулата (1) намираме вектора

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}(0,\ 0,\ a_1b_2-a_2b_1),$$

който съгласно свойство 2 е перпендикулярен на векторите **a**, **b**, т. е. на равнината ε.

Накрая ще дадем една формула за синуса на ъгъла между два вектора. Нека векторите **a**, **b**, пренесени в една точка, сключват ъгъл $\varphi \in [0, \pi]$. От елементарната геометрия е известно, че лицето на успо-



Черт. 37

редника, построен върху векторите **a**, **b**, се дава с израза $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi$. Съгласно свойството 4 това лице е равно на големината на векторното произведение на векторите **a**, **b**. Следователно в сила е равенството

$$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi,$$

откъдето получаваме формулата

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \tag{8}$$

При това се има пред вид елементарно геометричният ъгъл φ между векторите.

Да предположим, че третираме нещата в равнината и

$$\mathbf{a}(a_1, a_2), \quad \mathbf{b}(b_1, b_2)$$

са зададени спрямо ортонормирана координатна система. Искаме да намерим стойността (главната стойност) на ориентирания ъгъл между векторите **a**, **b**. Съгласно (11.1) имаме

$$(\widehat{\mathbf{ab}}) = \varepsilon\varphi + 2k\pi,$$

като $\varepsilon = +1$ при положително ориентирана двойка вектори **a**, **b** и $\varepsilon = -1$, ако тази двойка вектори е отрицателно ориентирана (защо?). Това са точно случаите, когато детерминантата

$$\triangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

е положителна или отрицателна. Значи

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

(sgn = знак). Тогава

$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) = \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|},$$

$$\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = \sin(\varepsilon\varphi) = \varepsilon\frac{|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \varepsilon\frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

И тъй за определяне на ориентирания ъгъл между два вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2)$, зададени спрямо ортонормирана система, имаме формулите

(9)
$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|},$$
$$\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{a_1b_2-a_2b_1}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Да означим с $\bar{\alpha}$ ориентирания ъгъл, който единичният вектор $\mathbf{e}$ сключва с вектора $\mathbf{e}_1$ на ортонормираната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ в равнината (черт. 22). Съгласно (11.1) имаме

$$\bar{\alpha} = \varepsilon\alpha + 2k\pi.$$

Като вземем пред вид (6.12′), за координатите на единичния вектор $\mathbf{e}$ получаваме

$$\mathbf{e}(\cos\bar{\alpha},\ \sin\bar{\alpha}).$$

Тук можем да се ограничим с главната стойност на ъгъла $\bar{\alpha}$.

§ 13. Смесено произведение на три вектора

Под *смесено произведение на три вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, взети в този ред, разбираме числото

(1)
$$\mathbf{abc} := (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Среща се и означението $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Нека векторите $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ са зададени спрямо ортонормирана координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Понеже $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ има координати

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

за смесено произведение имаме

$$\mathbf{abc} = (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) c_3,$$

или

(2)
$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Тази формула ще наричаме аналитично представяне на смесеното произведение (при ортонормирана система).

В § 10 приехме, че тройката вектори $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$ е положително ориентирана точно когато тетраедърът $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ е положително ориентиран. Последното е налице точно когато ориентираният му обем е положително число. По определение числото

(3)
$$V\left(\overrightarrow{A_4A_1},\ \overrightarrow{A_4A_2},\ \overrightarrow{A_4A_3}\right) := 6V\left(\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}\right)$$

наричаме ориентиран обем на призмата, построена върху векторите $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$. За тази величина имаме

$$V\left(\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}\right)=\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 & 0 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 & 0 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

или

$$V\left(\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}\right)=\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}.$$

Ако предположим, че векторите $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ имат за представители $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$, то последното равенство приема вида

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Като вземем пред вид и (2), получаваме

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=\mathbf{abc}. \tag{4}$$

Така доказахме следната

Теорема 1. *Смесеното произведение на три вектора е равно на ориентирания обем на призмата, построена върху тези вектори.*

От резултатите в § 10 става ясно, че $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ е положително или отрицателно число точно когато тройката вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е положително или отрицателно ориентирана тройка вектори.

Теорема 2. *Смесеното произведение на три вектора е нула точно когато векторите са компланарни. Следователно условието за компланарност (линейна зависимост) на векторите* $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ *е*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \text{ (орт. с-ма)}.$$

Доказателство на теоремата се получава, като се вземе пред вид, че при компланарност на векторите височината на съответната призма е нула и обратно.

Като се използват аналитичното представяне (2) на смесеното произведение при ортонормирана система и някои свойства на детерминантите, съвсем лесно се проверяват следните свойства:

а) При циклична замяна на векторите смесеното произведение не се променя, т. е.

$$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab};$$

б) $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{bc}=\mathbf{a}_1\mathbf{bc}+\mathbf{a}_2\mathbf{bc}$

(дистрибутивно свойство на смесеното произведение);

в) $\mathbf{abc} = -\mathbf{bac}$;

г) $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda(\mathbf{abc})$;

Тук $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ са произволни вектори, а λ е реално число.

Накрая ще намерим израз за смесеното произведение на три вектора, отнесени спрямо произволна афинна координатна система $Oe_1e_2e_3$. Нека спрямо такава система са дадени векторите със своите координати:

$$\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3) = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3.$$

Като използваме свойствата а), б), в), г) на смесеното произведение, получаваме

$$\mathbf{abc} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\ b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,\ c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3) =$$
$$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,$$

или

(5) $$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Тук сме използвали, че

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$$

и други подобни равенства. Ако системата е ортонормирана, то

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = 1$$

и формулата (5) приема вида (2).

§ 14. *Детерминанта на Грам и ортонормиране на базата*

Нека векторите

$$\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3),$$
$$\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3),$$
$$\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3),$$

са отнесени спрямо ортонормирана координатна система. Като използваме формулата

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

за квадрата на смесеното произведение намираме

$$(\mathbf{abc})^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{aa} & \mathbf{ab} & \mathbf{ac} \\ \mathbf{ba} & \mathbf{bb} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ca} & \mathbf{cb} & \mathbf{cc} \end{vmatrix}.$$

Детерминантата

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \begin{vmatrix} \mathbf{aa} & \mathbf{ab} & \mathbf{ac} \\ \mathbf{ba} & \mathbf{bb} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ca} & \mathbf{cb} & \mathbf{cc} \end{vmatrix}$$

се нарича *детерминанта на Грам* за векторите **a**, **b**, **c**. Тя е неотрицателна и нула точно когато векторите **a**, **b**, **c** са линейно зависими.

Детерминантата на Грам може да се образува и за два вектора:

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \begin{vmatrix} \mathbf{aa} & \mathbf{ab} \\ \mathbf{ba} & \mathbf{bb} \end{vmatrix}.$$

Като използваме известната формула на Лагранж, свързваща векторното и скаларното произведение на два вектора

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 + (\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2,$$

получаваме

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2.$$

Следователно $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$; нула е точно когато векторите **a**, **b** са линейно зависими.

За вектора **a** означаваме

$$D(\mathbf{a}) := \mathbf{aa}.$$

В линейната алгебра широко се прилага така нареченият метод на Грам — Шмит за ортонормиране на базата. Задачата се състои в следното.

Дадени са линейно независимите вектори $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Трябва да се построи тройка ортонормирани вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Методът на Грам—Шмит указва последователно пътя за построяване на тези вектори. При много въпроси обаче е нужно експлицитното познаване на тези вектори.

Ние даваме следните експлицитни формули:

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1)}},$$

$$\mathbf{e}_2 := \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}},$$

$$\mathbf{e}_3 := \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}}.$$

Теорема. *Векторите* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, *определени с горните формули, образуват ортонормирана тройка вектори.*

Доказателство. Очевидно $\mathbf{e}_1$ е единичен вектор. Понеже

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \end{vmatrix}}{D(\mathbf{v}_1)\sqrt{D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}} = 0$$

и

$$\mathbf{e}_2^2=\frac{(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\,.\,\mathbf{v}_1)^2}{D(\mathbf{v}_1)\,D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}=\frac{(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1)^2(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2)-2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^2+(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1)\,D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}=1,$$

следва, че векторите $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ образуват ортонормирана двойка вектори.

Равенствата

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\end{vmatrix}}{D(\mathbf{v}_1)\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}}=0,$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\end{vmatrix}\,.\,\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1}{D(\mathbf{v}_1)\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}}=0$$

показват, че $\mathbf{e}_3\perp\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Да означим с A_{ij} адюнгираното количество на елемента $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j$ в детерминантата на Грам за трите вектора. Тогава

$$\mathbf{e}_3^2=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\frac{\mathbf{v}_1A_{31}+\mathbf{v}_2A_{32}+\mathbf{v}_3A_{33}}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}}=\mathbf{e}_3\frac{\mathbf{v}_3A_{33}}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}}=$$

$$=\frac{(\mathbf{v}_1A_{31}+\mathbf{v}_2A_{32}+\mathbf{v}_3A_{33})\mathbf{v}_3A_{33}}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}}=\frac{\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1A_{31}+\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2A_{32}+\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3A_{33}}{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}=1,$$

с което доказателството на теоремата е завършено.

Забележка. Изложеното тук в тримерния случай се обобщава за произволно n. Ако са дадени n линейно независими вектора:

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n,$$

построяването на n ортонормирани вектора става, като се използва формулата

$$\mathbf{e}_k:=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_k\\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_k\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_k\\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k\end{vmatrix}}{\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_{k-1})}\sqrt{D(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k)}},\qquad(2\leq k\leq n).$$

Доказателството се извършва индуктивно без появата на нови трудности.

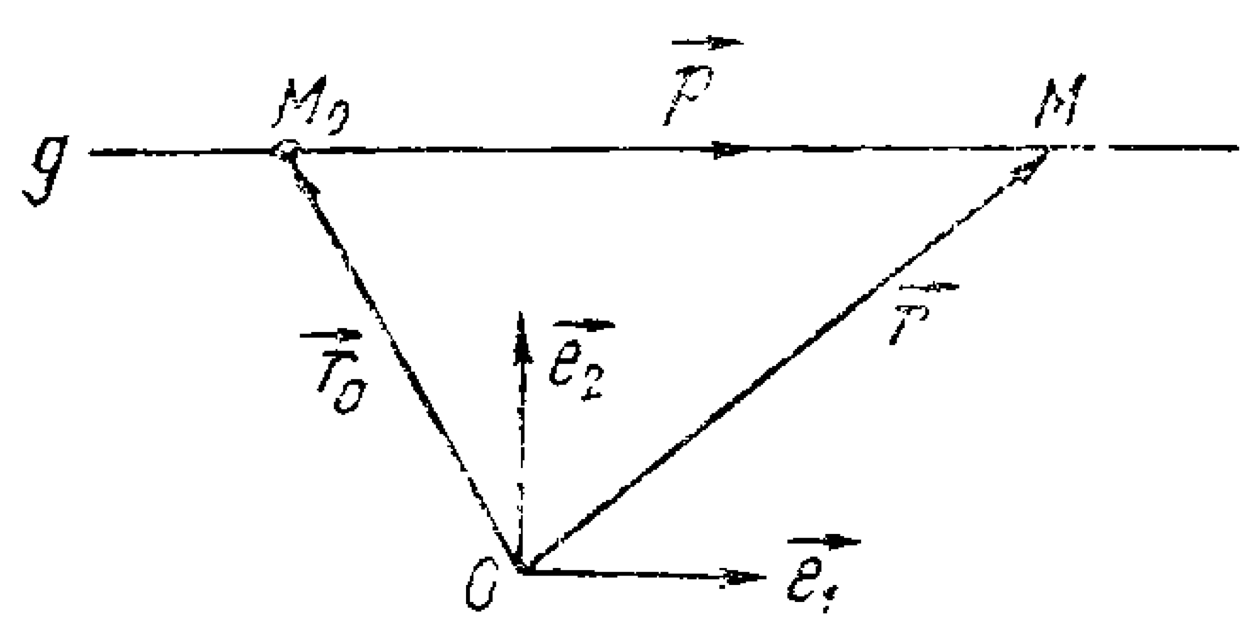
Глава III

Уравнения на права в равнината

§ 15. Параметрични уравнения на права в равнината

В този параграф предполагаме, че координатната система е афинна. Формулите, които ще изведем, ще са в сила, разбира се, и за ортонормирана система. Тази забележка се отнася за цялата книга. Ако някой резултат е в сила за ортонормирана система, но не и за афинна система, до резултата ще отбелязваме: „орт. с-ма".

Параметрични уравнения на права, минаваща през точка и колинеарна на вектор. Една права g може да се определи с точка M_0 и вектор **p**, колинеарен на g (т. е. вектор, който има представител върху g). Произволна точка M лежи на правата g точно когато векторът $\overrightarrow{M_0M}$ (т. е. векторът с представител $\overrightarrow{M_0M}$) е колинеарен на векто-



Черт. 38

ра **p**, условието за което е съществуването на число λ такова, че да бъде изпълнено векторното равенство

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda \mathbf{p}. \tag{1}$$

Когато точката M обхожда правата g в двете ѝ посоки, числото λ обхожда интервала $(-\infty, +\infty)$ и обратно. Нека спрямо афинната координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ в равнината имаме $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, p(a, b). Понеже векторът $\overrightarrow{M_0M}$ има координати $(x-x_0, y-y_0)$, от (1) написваме скаларните равенства за координатите

$$x-x_0=\lambda a, \quad y-y_0=\lambda b, \tag{2}$$

откъдето получаваме

$$x=x_0+\lambda a, \quad y=y_0+\lambda b. \tag{3}$$

Тези уравнения наричаме скаларни параметрични уравнения на правата g, определена с точката $M_0(x_0, y_0)$ и колинеарния ѝ вектор p(a, b). Числото λ наричаме параметър на правата. На всяка стойност на $\lambda\in(-\infty, +\infty)$ съответствува точно една точка върху правата и обратно.

Ако положим $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, като вземем пред вид векторното равенство

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0},$$

(1) можем да запишем във вида

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\lambda\mathbf{p},$$

или

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{p}.$$

Последното наричаме векторно параметрично уравнение на правата g. Векторът $\mathbf{r}$ се нарича текущ радиус-вектор на точката M, а M — текуща точка върху правата (има се пред вид коя да е точка от правата).

Изключването на параметъра λ от уравненията (2) води до уравнението

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}\ (=\lambda), \tag{4}$$

което трябва да се схваща като пропорционалност на двойката числа $x-x_0$, $y-y_0$ на числата a, b. Обратно, от (4) може да се премине към уравненията (2) или (3).

2) Параметрични уравнения на права, минаваща през две точки. Нека правата g е определена с точките $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Този случай можем да сведем към предния, като приемем, че $M_0=M_1$, $\mathbf{p}=\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Както при формулите (3) и (4), направо написваме

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1), \quad y=y_1+\lambda(y_2-y_1); \tag{5}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ (=\lambda). \tag{6}$$

Формулите (5) се наричат скаларни параметрични уравнения на права, определена с две точки.

§ 16. Общо уравнение на права в равнината

Най-напред ще докажем следната

Теорема 1. *Координатите* (x, y) *на произволна точка* M *от права в равнината удовлетворяват уравнение от вида*

(1)
$$Ax+By+C=0,$$

в което поне един от коефициентите A, B *на* x, y *е различен от нула, т. е.*

(2)
$$|A|+|B|\neq 0.$$

Обратно, всяко уравнение (1) *при допълнителното условие* (2) *е уравнение точно на една права в равнината.*

Доказателство. Нека правата g е определена с точка M_0 с координати (x_0, y_0) и вектор **p** с координати (a, b), колинеарен на g. Съгласно (4) от предния параграф нейното уравнение може да се запише във вида

$$bx-ay+ay_0-bx_0=0.$$

Като положим

$$A:=b;\ B:=-a,\ C:=ay_0-bx_0,$$

последното уравнение приема желания вид (1). При това

$$|A|+|B|=|a|+|b|\neq 0,$$

тъй като векторът $\mathbf{p}(a, b)$ е ненулев (иначе той не може да служи за вектор, определящ направлението на правата).

Обратно, нека е дадено уравнението (1), като е изпълнено (2). Избираме произволно решение x_0, y_0 на това уравнение, т. е.

(3)
$$Ax_0+By_0+C=0.$$

Разглеждаме права g, определена с точката $M_0(x_0, y_0)$ и колинеарна на вектора $\mathbf{p}(-B, A)$. Съгласно (15.4) тя има уравнение

$$\frac{x-x_0}{-B}=\frac{y-y_0}{A},$$

откъдето получаваме

$$Ax-Ax_0+By-By_0=0.$$

Като вземем пред вид (3), последното уравнение добива желания вид (1). По този начин намерихме една права, която има даденото уравнение (1). Ще отбележим, че съгласно извода на това уравнение, както и на уравнението (15.4) е ясно следното: една точка $M(x, y)$ лежи на правата g точно когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението на същата права. Оттук следва, че не съществува друга права освен g със същото уравнение.

Уравнението (1) се нарича общо уравнение на права в равнината.

От хода на доказателството става ясно, че векторът $\mathbf{p}(-B, A)$ е колинеарен на правата с уравнение

$$Ax+By+C=0.$$

Теорема 2. *Векторът* $\mathbf{p}(\lambda, \mu)$ *е колинеарен на правата с уравнение*

$$Ax+By+C=0$$

точно когато е изпълнено условието

(4) $$A\lambda+B\mu=0.$$

Доказателството се получава, като се вземе пред вид, че векторите $(-B, A)$, (λ, μ) са колинеарни точно когато координатите им са пропорционални:

$$\frac{-B}{\lambda}=\frac{A}{\mu},$$

което е равносилно на (4).

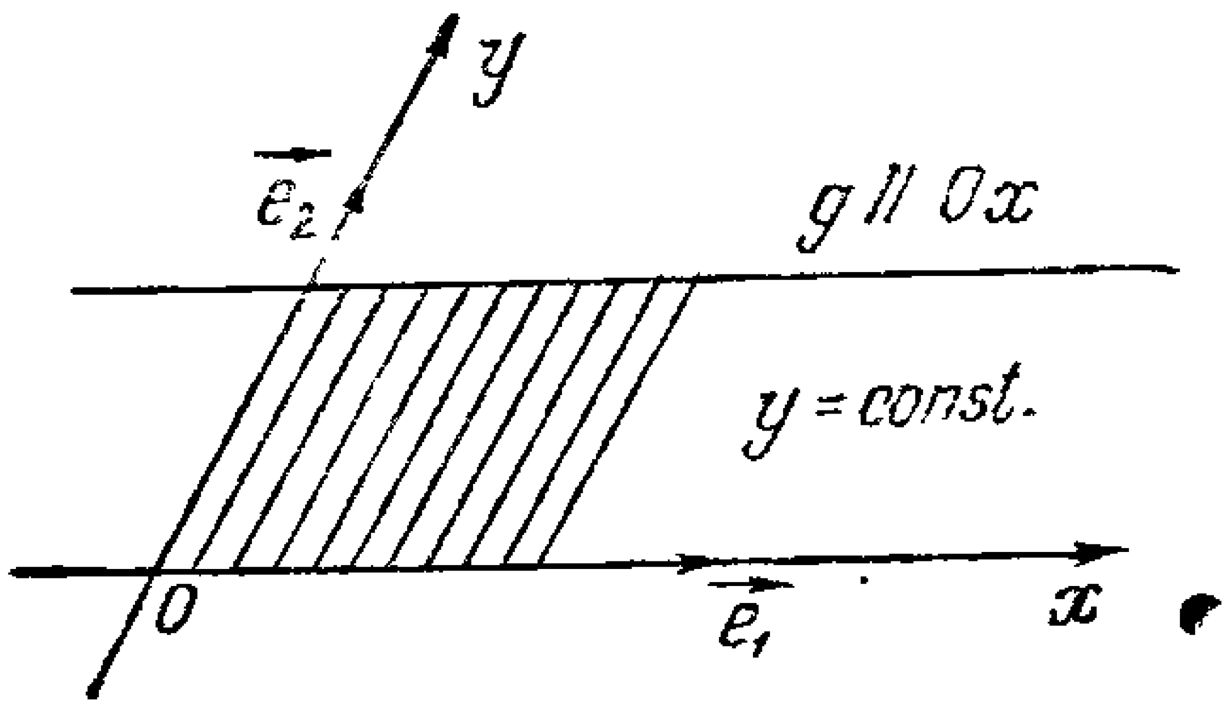
Следствие (орт. с-ма). Векторът $\overrightarrow{N}(A, B)$ е перпендикулярен на правата g с уравнение

$$Ax+By+C=0.$$

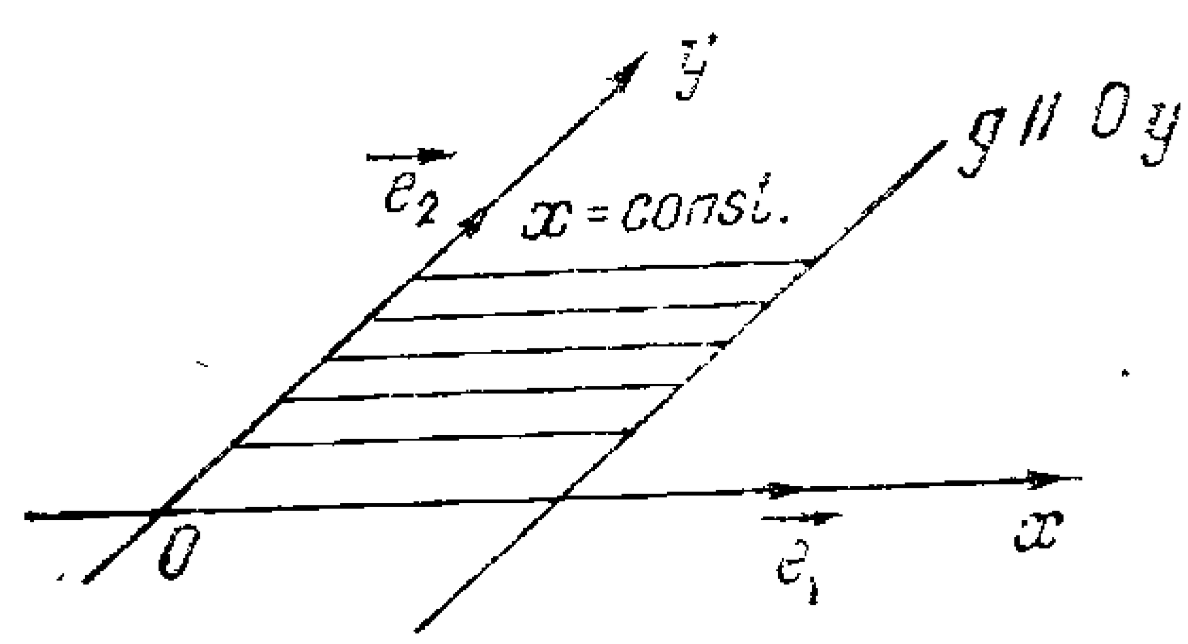
Доказателство. Знаем, че $\mathbf{p}(-B, A) \parallel g$. От

$$\mathbf{p}\,.\,\overrightarrow{N}=-BA+AB=0.$$

следва, че $\overrightarrow{N}\perp\mathbf{p}$, т. е. $\overrightarrow{N}\perp g$.



Черт. 39



Черт. 40

Изследване общото уравнение на права. Нека е дадена правата

$$g: Ax+By+C=0 \quad (A+B\neq 0).$$

В сила е следната

Теорема 3. а) $g \parallel Ox$ *точно когато* $A=0$ *(т. е. в уравнението на правата липсва* x*)*;

б) $g \parallel Oy$ *точно когато* $B=0$ *(т. е. в уравнението на правата липсва* y*)*;

в) $O \in g$ *точно когато* $C=0$ (*т. е. в уравнението на правата липсва свободният член*).

Доказателство на а). Съгласно предната теорема правата g е успоредна на оста Ox точно когато колинеарният ѝ вектор $\mathbf{p}(-B, A)$ е колинеарен на вектора $\mathbf{e}_1$ (1, 0). Условието за това е $A=0$.

Доказателството на б) се извършва по същия начин.

Доказателството на в) се получава, като се вземе пред вид, че началото $O(0, 0)$ на координатната система Oxy лежи на правата точно когато $C=0$.

§ 17. Уравнение на права през две точки. Отрезово уравнение на права

Нека правата е определена с точките $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, зададени спрямо афинна координатна система. Съгласно (15.4) тя има уравнение

(1) $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

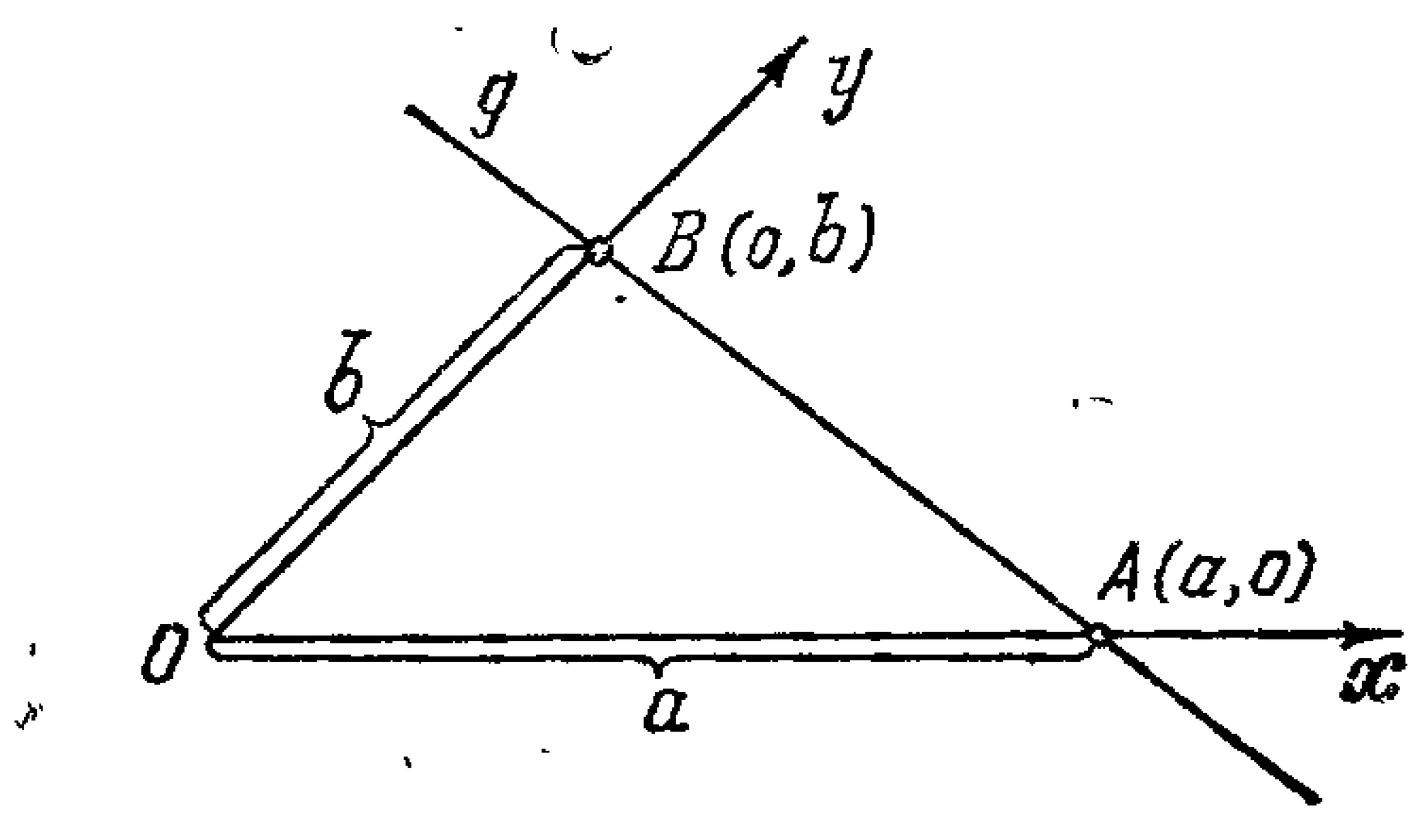
или при $x_1 \neq x_2$

(2) $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Уравнението (1) може да се напише още в следните еквивалентни форми:

(3) $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0;$$

(4) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$



Черт. 41

Да предположим, че правата g не минава през началото на координатната система и пресича координатните оси (черт. 41). Нека $A(a, 0)$ е пресечната точка на g с оста Ox, а $B(0, b)$ е пресечната точка с оста Oy. От направените предположения $a \neq 0$, $b \neq 0$ и според (1) правата има уравнение

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b},$$

което е еквивалентно на следното уравнение:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{5}$$

Последното наричаме отрезово уравнение на права. Числата a, b се наричат отрези на правата от координатните оси. Ще отбележим, че не всяка права притежава отрезово уравнение.

§ 18. Декартово уравнение на права

Нека е даден векторът $\mathfrak{p}(a, b)$ спрямо афинна координатна система, колинеарен на правата g. Правата g е успоредна на оста Oy точно когато $a=0$. В случай че правата g не е успоредна на оста Oy (т. е. $a \neq 0$), числото

$$k_g := \frac{b}{a} \tag{1}$$

наричаме *ъглов коефициент на правата*. Той не зависи от случайно избрания вектор $\mathfrak{p}(a, b)$. Действително нека $\mathfrak{p}_1(a_1, b_1)$ е друг вектор, колинеарен на правата. Понеже $\mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}_1$, то координатите им са пропорционални, т. е.

$$a=\lambda a_1, \quad b=\lambda b_1$$

при някакво число $\lambda \neq 0$. Тогава

$$k_g=\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1},$$

което показва независимостта на ъгловия коефициент от избора на вектора $\mathfrak{p}(a, b)$.

Ако правата g е зададена с двете различни точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то ъгловият ѝ коефициент се дава с формулата

$$k_g=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_1 \neq x_2). \tag{2}$$

Оттук и от формулата (2) на предния параграф следва, че уравнението на права през точка $M_1(x_1, y_1)$, която има ъглов коефициент k, се дава с формулата

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{3}$$

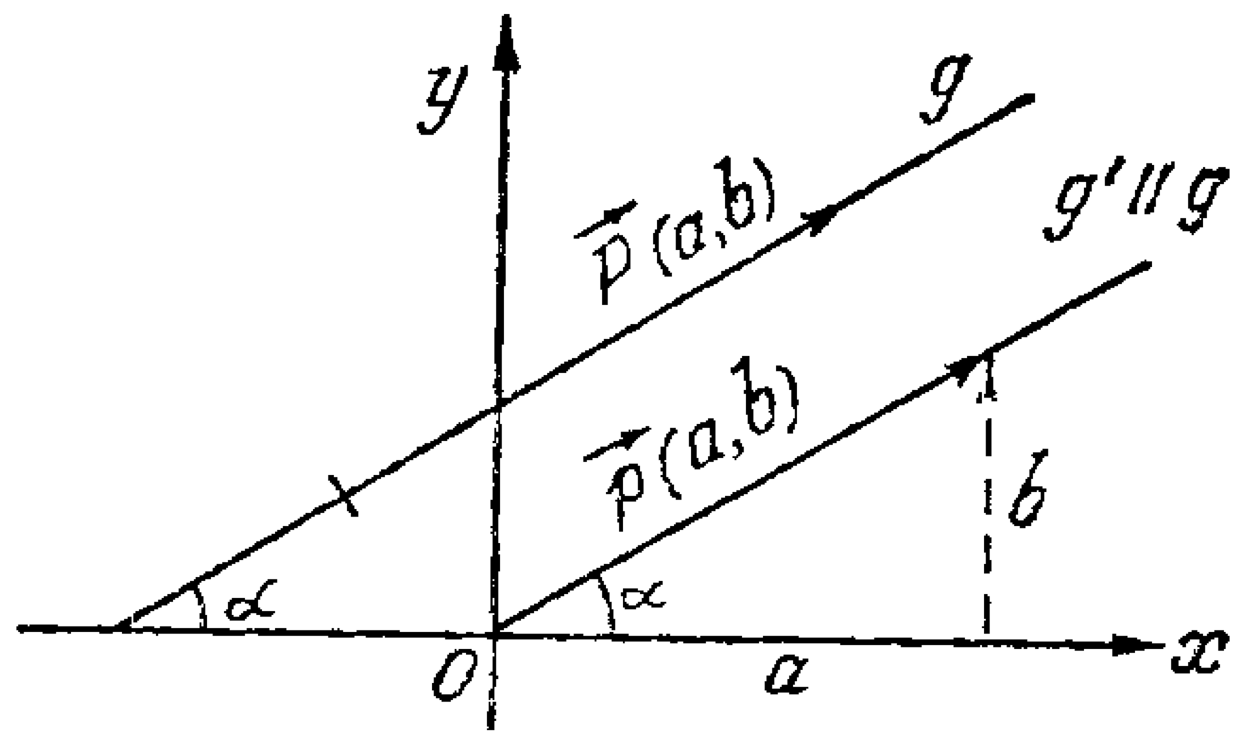
Да предположим, че координатната система е ортонормирана. Разбира се, изведените формули и сега са в сила, но в този случай може да се даде една геометрична интерпретация на ъгловия коефициент. Именно

$$k_g=\operatorname{tg} \alpha, \tag{4}$$

където α е ъгълът, който правата сключва с положителната посока на оста Ox (черт. 42).

Ако положим $b := y_1 - kx_1$, уравнението (3) можем да напишем в следния вид:

$$(5) \qquad g : y = kx + b.$$



Черт. 42

Уравнение от този вид (при ортонормирана система) наричаме декартово уравнение на правата по името на френския математик Р. Декарт (R. Descartes, 1596—1650), когото считат за създател на аналитичната геометрия.

§ 19. Взаимно положение на две прави

Нека са дадени две прави в равнината със своите общи уравнения:

$$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

В сила е следната

Теорема 1. *Правите* g_1, g_2

а) *се пресичат точно когато* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

б) *са успоредни точно когато* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

в) *съвпадат точно когато* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Доказателство. От § 16 е известно, че

$$\vec{p}_1(-B_1, A_1) \parallel g_1,$$
$$\vec{p}_2(-B_2, A_2) \parallel g_2.$$

Правите g_1 и g_2 са успоредни или съвпадат точно когато тези вектори са колинеарни, условието за което е (§ 3)

$$(1) \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \ (= \rho \neq 0).$$

Оттук следва твърдението а), като се вземе пред вид, че правите g_1, g_2 се пресичат точно когато векторите $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ не са колинеарни, т. е. не е в сила равенството (1).

Нека двата вектора са колинеарни, т. е. важи (1). Тогава правите са успоредни или съвпадат. От (1) имаме

$$A_1 = \rho A_2,\quad B_1 = \rho B_2,$$

където ρ е коефициентът на пропорционалност. Като вземем пред вид последните две равенства, уравнението на първата права приема вида

$$g_1\colon\ \rho(A_2 x + B_2 y) + C_1 = 0.$$

Ако правите се сливат, възможно е да се елиминира изразът $A_2 x + B_2 y$ от уравненията на g_1 и g_2. Това води до $C_1 = \rho C_2$. С това доказахме, че ако двете прави се сливат, изпълнени са равенствата в точка в) на теоремата.

Обратно, нека са изпълнени тези равенства, т. е.

$$A_1 = \rho A_2,\quad B_1 = \rho B_2,\quad C_1 = \rho C_2 \quad (\rho \neq 0).$$

Поради $\rho \neq 0$ двете прави притежават еквивалентни уравнения и значи съвпадат. С това в) е доказано. Тогава б) следва чрез допускане на противното.

В случай че системата е ортонормирана, ъгълът φ между две прави може да се намери, като се използват векторите $\mathbf{p}_1(-B_1, A_1) \parallel g_1$, $\mathbf{p}_2(-B_2, A_2) \parallel g_2$ и се приложат формулите от § 6 и § 12:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_2|},$$

$$\sin\varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_2|}.$$

Две прави сключват два ъгъла, които се допълват до π. Като вземем пред вид, че ъгловите коефициенти на двете прави са съответно (при $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$)

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},\quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

можем да формулираме следната

Теорема 2 (орт. с-ма). *Две прави g_1, g_2 (неуспоредни на оста Oy) с ъглови коефициенти k_1, k_2 са:*

а) *успоредни (или съвпадат) точно когато $k_1 = k_2$;*

б) *перпендикулярни (при условие, че никоя не е успоредна на координатните оси) точно когато $1 + k_1 . k_2 = 0$.*

Доказателство на а). Правите са успоредни точно когато $\mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{p}_2$, условието за което е

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Като се вземат пред вид предишните означения, последното равенство приема вида $k_1 = k_2$.

Доказателство на б). Правите са перпендикулярни точно когато $\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$, условието за което е

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Като разделим това равенство на $A_1A_2 \neq 0$ и вземем пред вид ъгловите коефициенти, получаваме $1+k_1k_2=0$, което трябваше да се докаже.

§ 20. Сноп прави в равнината

Множеството от всички прави в равнината, които минават през една и съща точка, се нарича *сноп прави*. Общата точка на всички прави се нарича *център на снопа*.

Да разгледаме снопа прави, определен с двете пресекателни прави $g_1 \cap g_2 = S$, зададени със своите общи уравнения спрямо афинна координатна система:

$$g_1 : l_1(x, y) := A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$g_2 : l_2(x, y) := A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Ще докажем следната

Теорема 1. а) *Ако поне едно от числата λ_1, λ_2 е различно от нула, т. е.*

$$|\lambda_1|+|\lambda_2| \neq 0,$$

уравнението

$$\lambda_1 l_1(x, y)+\lambda_2 l_2(x, y)=0 \qquad (1)$$

представя някаква права от снопа прави с център S;

б) *за всяка права от снопа прави съществува ненулева двойка числа λ_1, λ_2 такава, че уравнението (1) е нейното уравнение.*

Доказателство а) Написваме (1) подробно:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=$$
$$=(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)x+(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)y+\lambda_1C_1+\lambda_2C_2=0.$$

Това е уравнение на някаква права, ако поне един от коефициентите пред x, y е различен от нула. От условието за пресичане на две прави следва, че това изискване е изпълнено. Действително да допуснем, че едновременно са изпълнени равенствата

$$\lambda_1A_1+\lambda_2A_2=0,$$
$$\lambda_1B_1+\lambda_2B_2=0.$$

Тъй като поне едно от числата λ_1, λ_2 е различно от нула, следва, че последната линейна хомогенна система има ненулево решение за λ_1, λ_2. Но това е възможно точно когато

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}=0,$$

което води до успоредност или сливане на правите g_1, g_2, противно на условието, че те се пресичат.

И тъй (1) е уравнение на някаква права. Нека пресечната точка S на правите g_1 и g_2 има координати (x_0, y_0). Значи изпълнени са едновременно равенствата

$$l_1(x_0, y_0)=0, \; l_2(x_0, y_0)=0.$$

Тогава

$$\lambda_1 l_1(x_0, y_0)+\lambda_2 l_2(x_0, y_0)=\lambda_1 . 0+\lambda_2 . 0=0,$$

което показва, че правата с уравнение (1) минава през точката S, т. е тя е права от снопа.

б) Нека g е произволна права през S, т. е. права от снопа. Да означим с $\bar{M}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ една фиксирана точка от нея, различна от S. Нека числата λ_1, λ_2 са такива, че

$$\lambda_1=l_2(\bar{x}_0, \bar{y}_0), \quad \lambda_2=-l_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0).$$

Сигурно е, че поне едно от тези числа е различно от нула. Иначе ще излезе, че $\bar{M}_0=S$. Според доказаното вече в а) уравнението

$$\lambda_1 l_1(x, y)+\lambda_2 l_2(x, y)=l_2(\bar{x}_0, \bar{y}_0)l_1(x, y)-l_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0)l_2(x, y)=0$$

е уравнение на някаква права през точката S. Тъй като координатите $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ на точката $\bar{M}_0$ го удовлетворяват, следва, че тази права минава през $\bar{M}_0$, т. е. това е правата g. С това и втората част на теоремата е доказана.

Формулата (1) ще наричаме аналитично представяне на сноп прави в равнината.

Правата g_1 се получава при $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, а правата g_2 — при $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

§ 21. *Нормално уравнение на права*

В този параграф предполагаме, че координатната система е ортонормирана. Нека g е права, която не минава през началото ѝ O. Означаваме с P петата на перпендикуляра, спуснат от началото O към правата g, и нека $p=|\overrightarrow{OP}|$ е дължината му (черт. 43). Единичният вектор $\mathbf{n}$ по направлението на вектора $\overrightarrow{OP}$ е

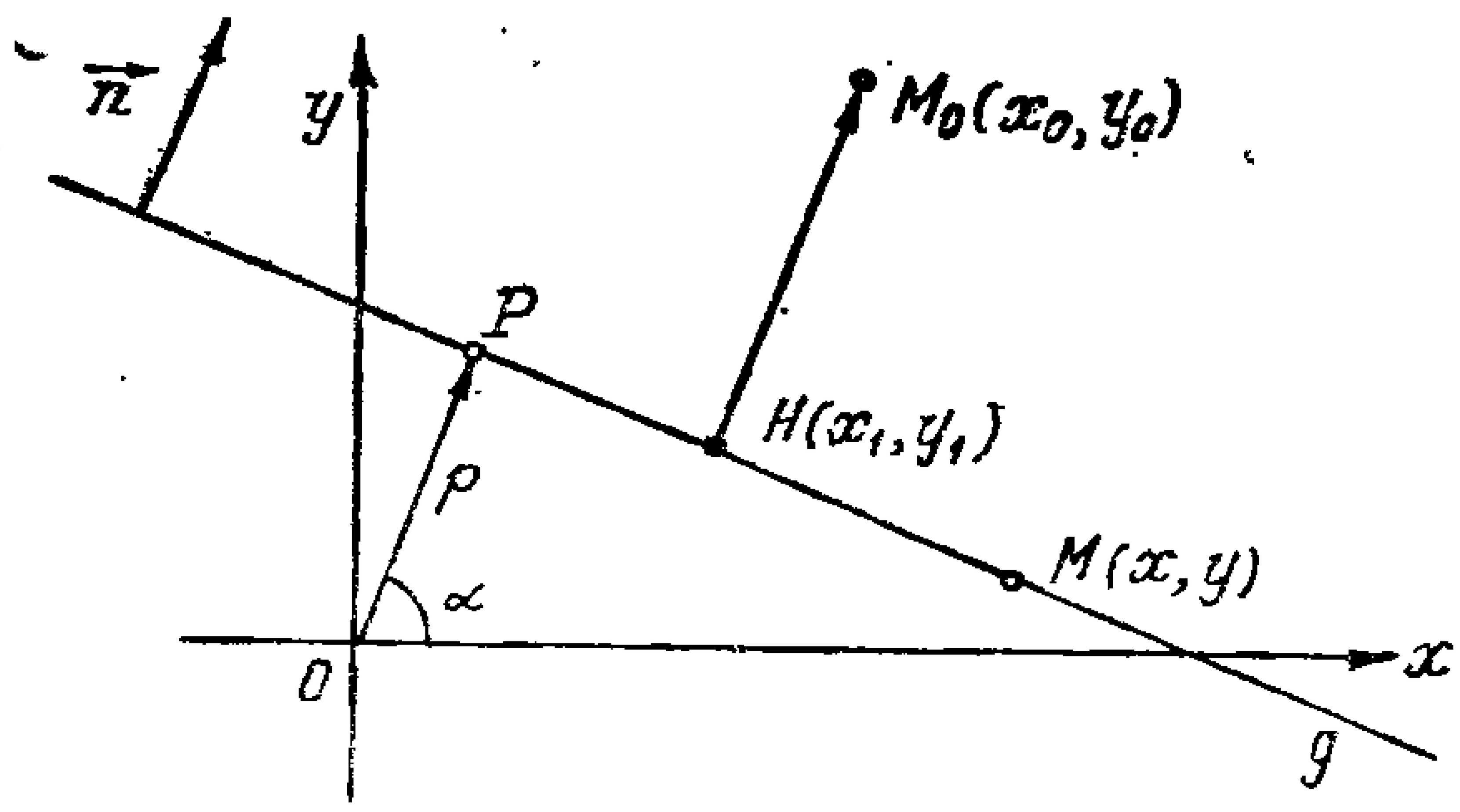
$$\mathbf{n}=\frac{\overrightarrow{OP}}{p},$$

т. е. в сила е векторното равенство

$$(1) \qquad \overrightarrow{OP}=p\mathbf{n}.$$

Ако векторът $\overrightarrow{OP}$ сключва ъгъл $\alpha \in [-\pi, \pi]$ с оста Ox, то векторът $\mathbf{n}$ има координати $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а точката $P-(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Една точка $M(x, y)$ лежи на правата g точно когато векторът $\overrightarrow{PM}$ е перпендикулярен на вектора $\mathbf{n}$ или

$$\overrightarrow{PM}\,.\,\overline{\mathbf{n}}=0.$$



Черт. 43

Понеже $\overrightarrow{PM}$ има координати $(x-p\cos\alpha,\ y-p\sin\alpha)$, последното равенство след лека преработка приема вида

$$(2) \qquad g: x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

Това уравнение се нарича нормално уравнение на правата, тъй като в него коефициентите на x, y са координати на единичен вектор, перпендикулярен на правата, и координатната система е ортонормирана. Ще отбележим, че $p>0$.

Ако $M_0(x_0, y_0)$ е произволна точка от равнината, да означим с $H(x_1, y_1)$ петата на перпендикуляра, спуснат от точката M_0 към правата g. Разглеждаме вектора

$$\overrightarrow{HM_0}(x_0-x_1,\ y_0-y_1),$$

който е колинеарен на вектора $\mathbf{n}$. Поради това съществува число δ такова, че е изпълнено векторното равенство

$$(3) \qquad \overrightarrow{HM_0}=\delta\mathbf{n}.$$

Числото δ наричаме ориентирано разстояние от точката M_0 до правата g. Очевидно

$$|\delta|=|\overrightarrow{HM_0}|$$

е разстоянието от M_0 до g. Векторното равенство (3) влече след себе си следните равенства между координатите на векторите:

$$x_0-x_1=\delta\cos\alpha,$$
$$y_0-y_1=\delta\sin\alpha.$$

Оттук намираме координатите на точката H:

$$x_1 = x_0 - \delta \cos \alpha,\ y_1 = y_0 - \delta \sin \alpha.$$

Изразяваме условието, че $H \in g$. За целта заместваме координатите на H в уравнението (2) и след прости пресмятания получаваме

$$(4) \qquad \delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Тази формула показва, че ориентираното разстояние $\delta = \delta(M_0, g)$ на точката M_0 до правата g е равно на израза, който се получава, като заместим координатите (x_0, y_0) на точката M_0 в нормалното уравнение на правата.

От определението за δ чрез равенството (3) и от операцията умножение на вектор с число непосредствено следва резултатът: $\delta > 0$ точно когато точката M_0 (нележаща на g) се намира в онази полуравнина относно правата g, в която сочи единичният нормален вектор **n**. Поради това полуравнината, в която сочи **n**, се нарича положителна полуравнина относно правата g.

За ориентираното разстояние от началото O до правата g имаме

$$\delta(O, g) = -p < 0,$$

както трябваше да се очаква.

Нека умножим уравнението (2) с (-1):

$$(4') \qquad x_0(-\cos \alpha) + y_0(-\sin \alpha) + p = 0.$$

Като вземем пред вид, че $(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ са координатите на вектора $-\mathbf{n}$, получаваме резултата:

Всяка права, неминаваща през началото на ортонормирана координатна система, притежава точно две нормални уравнения (2) и (4'), образувани с векторите **n** и $-\mathbf{n}$. В (2) свободният член $-p$ е отрицателно число, а в (4') — положително число. Векторът **n**, с който образувахме (2), избрахме да сочи от началото към правата.

Нека правата g е зададена с общото си уравнение

$$(5) \qquad Ax + By + C = 0$$

спрямо ортонормирана система. Това уравнение и нормалното уравнение (2) представят една и съща права точно когато (съгласно теорема 1, § 19) съществува число $\rho \neq 0$ такова, че са изпълнени равенствата:

$$\cos \alpha = \rho A,$$
$$\sin \alpha = \rho B,$$
$$-p = \rho C.$$

Оттук следва

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Изискването $p > 0$ води до $\varepsilon = -\operatorname{sgn} C$.

И тъй, ако (5) е общото уравнение на права, неминаваща през началото на ортонормираната координатна система, то нормалното ѝ уравнение е

(6) $$\frac{Ax+By+C}{-\operatorname{sgn} C\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

§ 22. Изследване знака на линейния тричлен

Линеен тричлен наричаме израза

(1) $$l(x, y):=Ax+By+C,$$

като $|A|+|B|\neq 0$. Да разгледаме правата g с уравнение

(2) $$g: l(x, y)=Ax+By+C=0,$$

като на x, y гледаме като на афинни координати. Ако $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2)$ са две точки спрямо афинна координатна система, означаваме

$$l(M_i):=l(x_i, y_i)=Ax_i+By_i+C.$$

Ще докажем следната

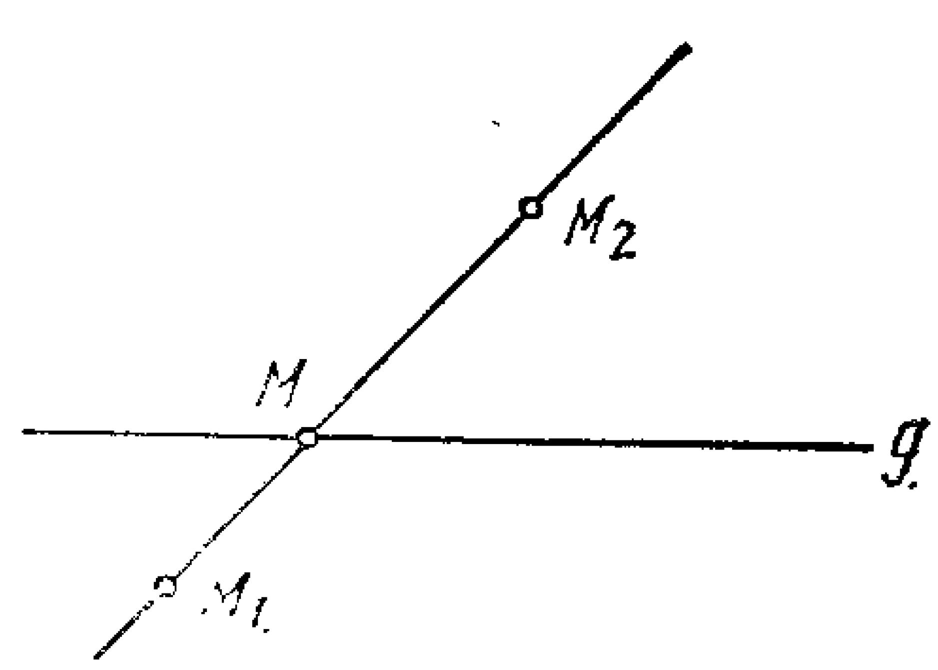
Теорема 1. Точките $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ са от различни страни на правата g точно когато числата $l(M_1)$, $l(M_2)$ имат различни знаци.

Доказателство. Да разгледаме простото отношение

(3) $$\lambda=(M_1M_2M)=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_2M}},$$

където $M(x, y)$ е пресечната точка на правата M_1M_2 с g (черт. 44) За координатите на M съгласно § 5 имаме

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}.$$



Черт. 44

Тъй като $M\in g$, нейните координати удовлетворят уравнението на g. Следователно изпълнено е равенството

$$A(x_1-\lambda x_2)+B(y_1-\lambda y_2)+C(1-\lambda)=0,$$

откъдето получаваме

$$\lambda=\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}=\frac{l(M_1)}{l(M_2)}.$$

Оттук следва, че

числото $\lambda<0$ точно когато $l(M_1)$, $l(M_2)$ имат различни знаци.

От друга страна, определението за просто отношение (§ 5) ни дава резултата:

числото $\lambda<0$ точно когато точките M_1, M_2 се намират в различни полуравнини относно правата g.

Съпоставянето на последните две твърдения доказва теоремата в случая, когато правата M_1M_2 пресича g.

Нека правата M_1M_2 не пресича g, значи двете прави са успоредни. Избираме точката M_3 в онази полуравнина относно g, в която лежат точките M_1, M_2, и то така, че правата M_1M_3 да пресича g. Тогава M_2M_3 също пресича g. Според вече доказаното $l(M_1)$, $l(M_3)$ имат еднакви знаци; $l(M_2)$, $l(M_3)$ също имат еднакви знаци. Оттук следва, че $l(M_1)$, $l(M_2)$ имат също еднакви знаци, с което теоремата е доказана.

Глава IV

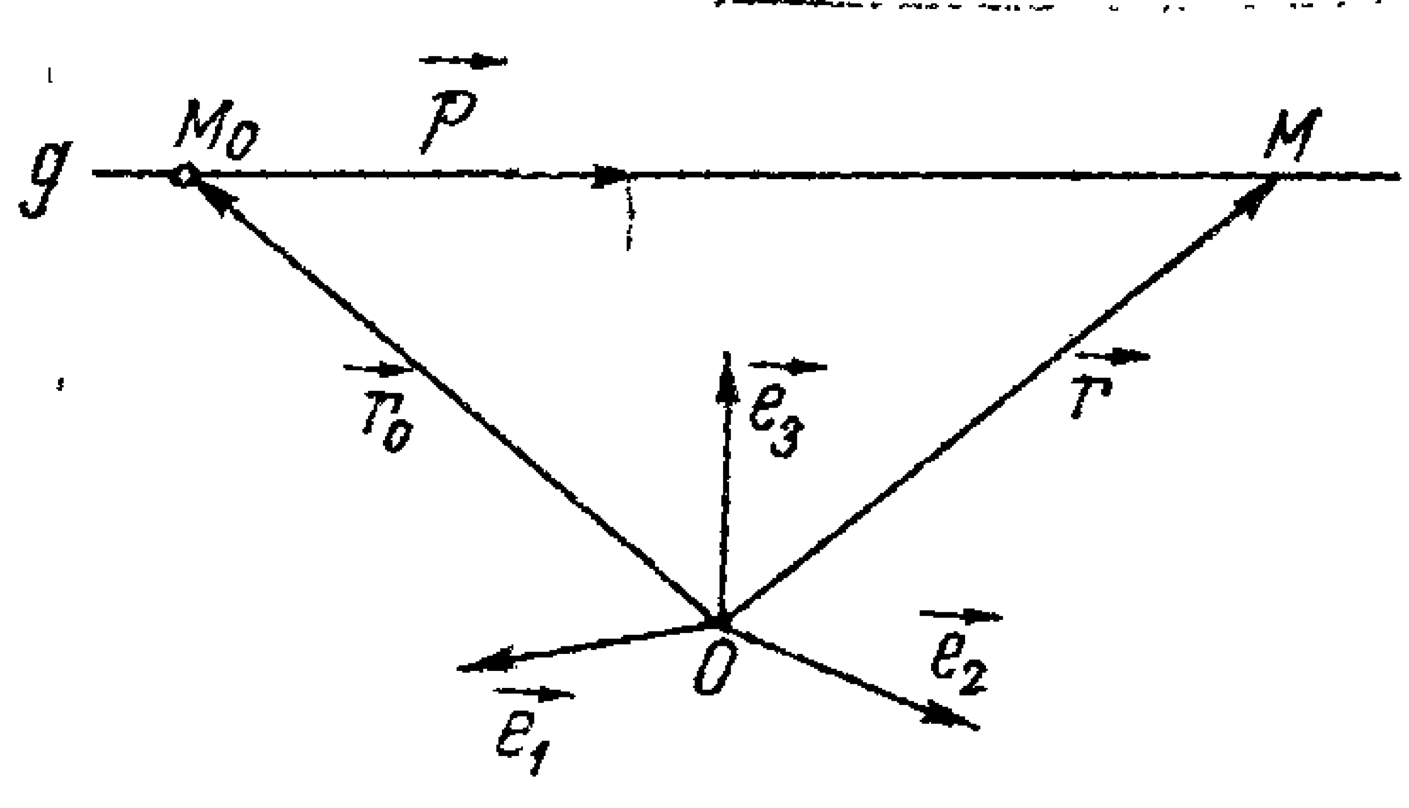
Уравнения на права и равнина в пространството

§ 23. Параметрични уравнения на права в пространството

Една права в пространството може да се определи с точка M_0 и вектор $\mathbf{p}$, колинеарен на правата g. Една точка M лежи на правата точно когато векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е колинеарен на вектора $\mathbf{p}$ (черт. 45), условието за което е съществуването на число λ със свойството

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \mathbf{p}. \tag{1}$$

Когато M обхожда правата g в двете посоки, числото λ обхожда интервала $(-\infty, +\infty)$ и обратно. Нека спрямо афинната координатна



Черт. 45

система $Oe_1e_2e_3$ са дадени $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, $\mathbf{p}(a, b, c)$. Понеже векторът $\overrightarrow{M_0M}$ има координати $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, от (1) написваме скаларните равенства за координатите

$$\begin{aligned} x-x_0&=\lambda a,\\ y-y_0&=\lambda b,\\ z-z_0&=\lambda c, \end{aligned} \tag{2}$$

откъдето получаваме

$$x=x_0+\lambda a,$$

(3)
$$y=y_0+\lambda b,$$

$$z=z_0+\lambda c.$$

Тези уравнения наричаме скаларни параметрични уравнения на правата g, определена с точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и колинеарния ѝ вектор $\mathbf{p}(a, b, c)$. Числото λ наричаме параметър на правата.

Ако положим $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, като вземем пред вид векторното равенство

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0},$$

(1) можем да запишем във вида

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\lambda\mathbf{p},$$

или

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{p}.$$

Последното наричаме векторно параметрично уравнение на правата g. Векторът $\mathbf{r}$ се нарича текущ радиус-вектор на точката M, а M — текуща точка върху правата.

Изключването на параметъра λ от уравненията (2) води до равенствата

(4)
$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\,(=\lambda),$$

от които по обратен път може да се премине към уравненията (2) или (3).

Нека правата g е определена с двете различни точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Избираме $\mathbf{p}=\overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ и прилагаме формулите (3) и (4), като считаме, че M_0 съвпада с M_1:

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1),$$

(5)
$$y=y_1+\lambda(y_2-y_1),$$

$$z=z_1+\lambda(z_2-z_1),$$

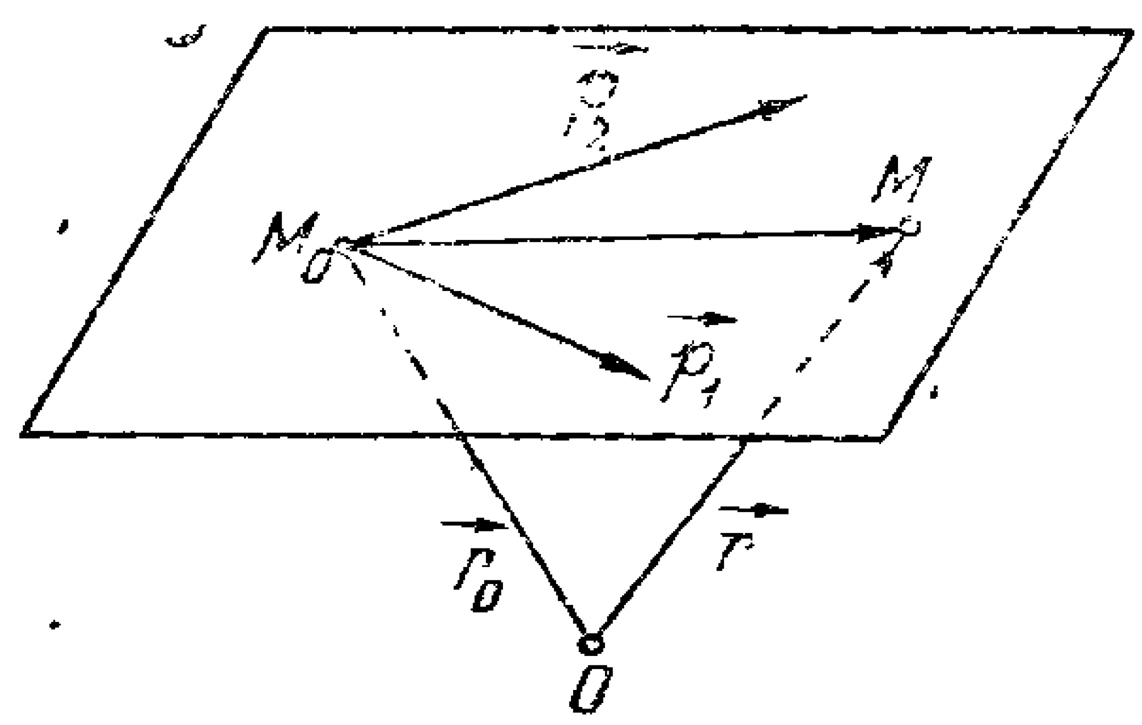
(6)
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\,(=\lambda).$$

Уравненията (5) или (6) се наричат параметрични уравнения на права в пространството, определена с две точки.

З а б е л е ж к а. На равенствата (4) и (6) трябва да се гледа като на пропорционалност на числата в числителя на числата в знаменателя.

§ 24. Параметрични уравнения на равнина в пространството

Една равнина ε в пространството може да се определи с точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколинеарни вектора $\mathbf{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{p}_2(a_2, b_2, c_2)$, пренесени в M_0, зададени спрямо някаква афинна координатна система. Точка $M(x, y, z)$ лежи в равнината точно когато векторите $\overrightarrow{M_0M}$,



Черт. 46

$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ са компланарни. От § 3 е известно, че това е налице точно когато съществуват числа λ, μ такива, че е изпълнено равенството

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\mathbf{p}_1 + \mu\mathbf{p}_2. \tag{1}$$

Числата λ, μ са координати на M относно афинната координатна система $M_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Понеже векторът $\overrightarrow{M_0M}$ има координати $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$, то последното векторно равенство е еквивалентно на следните три скаларни равенства за координатите:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2, \\ y &= y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2, \\ z &= z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Тези уравнения наричаме скаларни параметрични уравнения на равнината, определена с точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и неколинеарните вектори $\mathbf{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{p}_2(a_2, b_2, c_2)$. Ако положим $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и вземем пред вид, че $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, уравнението (1) приема вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{p}_1 + \mu\mathbf{p}_2. \tag{3}$$

Последното наричаме векторно параметрично уравнение на равнината.

В параметричните уравнения на равнината (2) и (3) параметрите λ, μ са произволни, т. е. $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, $\mu \in (-\infty, +\infty)$. От извода на (2) е ясно, че за всяка точка $M(x, y, z)$ съществуват еднозначно (защо?) определени стойности на параметрите λ, μ такива, че са в сила (2) и, обратно, ако λ, μ са произволни, то точката, чиито координати се изчисляват по формулите (2), лежи в равнината ε.

Една равнина може да се определи с три неколинеарни точки:

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3).$$

Този случай свеждаме към предишния, като положим $\mathbf{p}_1=\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\mathbf{p}_2=\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$. Сега формулите (2) приемат вида

$$\begin{aligned} x&=x_1+\lambda(x_2-x_1)+\mu(x_3-x_1),\\ y&=y_1+\lambda(y_2-y_1)+\mu(y_3-y_1),\\ z&=z_1+\lambda(z_2-z_1)+\mu(z_3-z_1), \end{aligned} \tag{4}$$

които се наричат параметрични уравнения на равнина, определена с три точки.

§ 25. Уравнение на равнина, минаваща през точка и компланарна на два неколинеарни вектора. Уравнение на равнина през три точки

10

Един вектор се нарича компланарен на равнина, ако негов представител лежи в равнината.

Една равнина може да се определи с точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколинеарни вектора $\mathbf{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{p}_2(a_2, b_2, c_2)$. Произволна точка $M(x, y, z)$ лежи в равнината точно когато векторите $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ са компланарни. Това изискване е еквивалентно на условието тяхното смесено произведение да е нула. Съгласно теорема 2 от § 13 това е налице точно когато е в сила

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Това равенство изразява условието една точка $M(x, y, z)$ да лежи в равнината, минаваща през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и компланарна на неколинеарните вектори $\mathbf{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{p}_2(a_2, b_2, c_2)$.

Нека равнината е определена с три (неколинеарни) точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Този случай свеждаме към предишния, като положим $M_0:=M_1$, $\mathbf{p}_1:=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{p}_2:=\overrightarrow{M_1M_3}$. Съгласно (1) уравнението на равнината през трите точки е

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Ще отбележим, че уравненията (1) и (2) важат при афинна и при ортонормирана система.

§ 26. Общо уравнение на равнина

Уравнението (1) от предишния параграф след развиване на детерминантата и въвеждане на означенията

$$A:=a_2b_3-a_3b_2,\quad B:=a_3b_1-a_1b_3,$$
$$C:=a_1b_2-a_2b_1,\ D:=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

приема вида

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Това уравнение се нарича общо уравнение на равнина. В сила е

Теорема 1. *Координатите x, y, z на произволна точка от една равнина удовлетворяват уравнение от вида*

$$(1)\qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

като е изпълнено условието

$$(2)\qquad |A|+|B|+|C|\neq 0.$$

Обратно, всяко уравнение от вида (1) при условието (2) е уравнение на точно една равнина.

Доказателство. За да докажем първата част, трябва да покажем, че поне едно от числата A, B, C е различно от нула. Ако допуснем противното, следва, че координатите на векторите $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ са пропорционални, което означава, че векторите са колинеарни противно на допускането.

За да докажем обратното твърдение, да приемем, че тройката x_0, y_0, z_0 е решение на (1), т. е.

$$(3)\qquad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Приемайки, че $A\neq 0$, да разгледаме равнината ε_0, минаваща през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и компланарна на двата неколинеарни вектора $\mathbf{p}_1^0(-B, A, 0), \mathbf{p}_2^0\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$. Съгласно (25.1) тя има уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ -B & A & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

което, като се развие и се използва (3), се превръща в (1). С това намерихме поне една равнина (равнината ε_0) с отнапред даденото уравнение (1). Лесно се съобразява, че тя е единствена.

В бъдеще ще използваме следното условие за компланарност на вектор и равнина:

Теорема 2. *Векторът* $\mathbf{p}(\lambda, \mu, \nu)$ *е компланарен на равнината*

$$\varepsilon: Ax+By+Cz+D=0$$

точно когато е изпълнено равенството

$$(4)\qquad A\lambda+B\mu+C\nu=0.$$

Доказателство. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежи в равнината, т. е.

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{5}$$

Пренасяме вектора **p** в точката M_0 и нека вторият му край е точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Понеже $\overrightarrow{M_0M_1}$ има координати $(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$, то в сила са равенствата

$$x_1-x_0=\lambda, \; y_1-y_0=\mu, \; z_1-z_0=\nu.$$

Векторът **p** е компланарен на равнината ε точно когато точката M_1 лежи в същата равнина, което е налице точно когато

$$A(x_0+\lambda)+B(y_0+\mu)+C(z_0+\nu)+D=0.$$

Доказателството на теоремата се завършва, като се вземе пред вид, че поради (5) последното равенство е еквивалентно на (4).

Като приложение на последната теорема ще докажем следната

Теорема 3. *Равнината ε с уравнение*

$$Ax+By+Cz+D=0$$

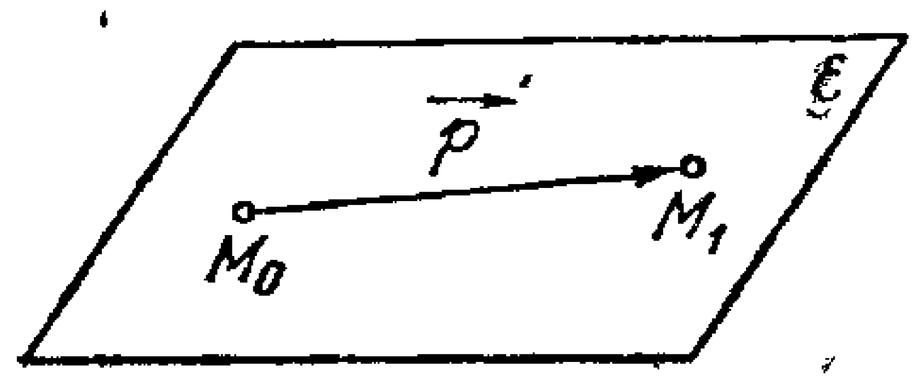
а) е успоредна на оста Ox точно когато $A=0$, т. е. в уравнението на равнината липсва x;

б) е успоредна на оста Oy точно когато $B=0$, т. е. в уравнението на равнината липсва y;

в) е успоредна на оста Oz точно когато $C=0$, т. е. в уравнението на равнината липсва z;

г) минава през началото O на координатната система, точно когато $D=0$, т. е. в уравнението на равнината липсва свободният член.

д) е успоредна на координатната равнина Oxy точно когато $A=B=0$, т. е. уравнението на равнината е $z=\mathrm{const}\neq 0$;



Черт. 47

е) е успоредна на координатната равнина Oxz точно когато $A=C=0$, т. е. уравнението на равнината е $y=\mathrm{const}\neq 0$;

ж) е успоредна на координатната равнина Oyz точно когато $B=C=0$, т. е. уравнението на равнината е $x=\mathrm{const}\neq 0$;

з) съвпада с равнината Oxy точно когато има уравнение $z=0$;

и) съвпада с равнината Oxz точно когато има уравнение $y=0$;

к) съвпада с уравнението Oyz точно когато има уравнение $x=0$.

Д о к а з а т е л с т в о на а). Равнината ε е успоредна на оста Ox точно когато тя е успоредна на вектора $e_1(1, 0, 0)$. Съгласно предишната теорема това е налице точно когато $A=0$. По същия начин се доказват и твърденията б) и в).

Д о к а з а т е л с т в о н а г). Равнината минава през началото точно когато координатите му удовлетворяват уравнението и: това е точно случаят, когато $D=0$.

Д о к а з а т е л с т в о н а д). Равнината ε е успоредна на Oxy точно когато тя е успоредна на осите Ox и Oy, т. е. съгласно а) и б) $A=0$, $B=0$. От (2), следва, че $C\neq 0$. Като разделим уравнението на равнината $Cz+D=0$ на C, получаваме $z=-\frac{D}{C}=\text{const}\neq 0$, тъй като равнината не минава през началото.

Аналогично се доказват твърденията е) и ж). Останалите твърдения предоставяме на читателя като леки упражнения.

§ 27. Взаимно положение на две равнини

В този параграф ще изследваме взаимното положение на две равнини в пространството, зададени с общите си уравнения спрямо афинна координатна система.

Теорема 1 (критерий за идентичност на две равнини). *Равнините с уравнения*

$$\varepsilon_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\varepsilon_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

съвпадат точно когато коефициентите в уравненията на двете равнини са пропорционални:

(1) $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека двете равнини съвпадат, т. е. всяка точка от едната равнина е точка и от другата равнина. В уравнението на първата равнина поне един от коефициентите A_1, B_1, C_1 е различен от нула. Нека приемем, че $A_1\neq 0$. При произволни y, z точката

$$M\left(x=\frac{-(B_1y+C_1z+D_1)}{A_1},\ y,\ z\right)$$

лежи в равнината ε_1. Тъй като M е точка и от втората равнина, нейните координати удовлетворяват уравнението и на ε_2. Следователно

$$-A_2\frac{B_1y+C_1z+D_1}{A_1}+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

което написваме във вида

$$\left(B_2-B_1\frac{A_2}{A_1}\right)y+\left(C_2-C_1\frac{A_2}{A_1}\right)z+D_2-D_1\frac{A_2}{A_1}=0.$$

Според казаното по-горе, това равенство е изпълнено за произволни y, z. Като положим $y=z=0$, получаваме $D_2=D_1\frac{A_2}{A_1}$ Полагането $y=0, z=1$ дава $C_2=C_1\frac{A_2}{A_1}$. Най-сетне $y=1$, $z=0$ водят до $B_2=B_1\frac{A_2}{A_2}$. Ако $\rho=\frac{A_1}{A_2}$, то

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}(=\rho),$$

с което доказателството на първата част е завършено.

Обратно, нека са дадени двете равнини, като са изпълнени равенствата (1). Като използваме (1), уравнението на втората равнина можем да напишем във вида

$$\rho(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0.$$

Тъй като $\rho\neq0$, това уравнение е равносилно на уравнението на първата равнина. Значи двете равнини се представят с едно и също уравнение и според теорема 1 на § 26 двете равнини съвпадат.

Теорема 2 (критерий за успоредност на две равнини). *Равнините с уравнения*

$$\begin{aligned}\varepsilon_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \varepsilon_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}$$

са успоредни точно когато съществува число $\rho\neq0$ такова, че са изпълнени равенствата

(2) $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\rho\neq\frac{D_1}{D_2},$$

т. е. пропорционални са само коефициентите пред x, y, z в уравненията на двете равнини.

Доказателство. Нека двете равнини са успоредни и векторите $\mathbf{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{p}_2(a_2, b_2, c_2)$ са компланарни на тях. От означенията

$$A:=b_1c_2-b_2c_1,\quad B:=c_1a_2-c_2a_1,\quad C:=a_1b_2-a_2b_1$$

и извода на общото уравнение в § 26 следва, че двете равнини имат уравнения от вида

$$\begin{aligned}\varepsilon_1: Ax+By+Cz+D'=0,\\ \varepsilon_2: Ax+By+Cz+D''=0.\end{aligned}$$

Значи равнината ε_1 има две уравнения: даденото и току-що полученото. Според критерия за идентичност на две равнини съществува число $\rho_1\neq0$ такова, че

(3) $$\frac{A_1}{A}=\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C}=\frac{D_1}{D}=\rho_1.$$

Същият критерий, приложен за равнината ε_2, ни дава

(4) $$\frac{A_2}{A}=\frac{B_2}{B}=\frac{C_2}{C}=\frac{D_2}{D''}=\rho_2.$$

Като разделим почленно (3) на (4), получаваме

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Ако допуснем още, че и

$$(5)\qquad \frac{D_1}{D_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2},$$

от критерия за идентичност на две равнини следва, че двете равнини съвпадат, което е невъзможно. Значи допускането (5) води до противоречие. С това първата част на теоремата е доказана.

Обратно, да допуснем, че са изпълнени равенствата (2). Тогава уравненията на двете равнини са

$$\varepsilon_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\varepsilon_2: \rho(A_1x+B_1y+C_1z)+D_2=0.$$

Да допуснем, че двете равнини имат обща точка $M(x, y, z)$. Тогава, като елиминираме израза $A_1x+B_1y+C_1z$ от двете уравнения, получаваме $D_2=\rho D_1$, което противоречи на условието (2). И тъй двете равнини нямат обща точка, следователно са успоредни.

§ 28. Сноп равнини. Канонични уравнения на права в пространството

Нека спрямо афинна координатна система в пространството са дадени две пресекателни равнини със своите уравнения:

$$\varepsilon_1: l_1(x, y, z):=A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\varepsilon_2: l_2(x, y, z):=A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Да означим с

$$g:=\varepsilon_1\cap\varepsilon_2$$

тяхната пресечница. Множеството от всички равнини в пространството, които минават през правата g, се нарича *сноп равнини с ос правата* g. Снопът равнини е определен, ако познаваме оста му. В сила е следната

Теорема 1.

а) *Ако поне едно от числата* λ_1, λ_2 *е различно от нула, т. е.*

$$(1)\qquad |\lambda_1|+|\lambda_2|\neq 0,$$

уравнението

$$(2)\qquad \lambda_1 l_1(x, y, z)+\lambda_2 l_2(x, y, z)=0$$

представя някаква равнина от снопа равнини с ос g;

б) *за всяка равнина от снопа съществува ненулева двойка* λ_1, λ_2 *такава, че уравнението* (2) *представя тази равнина.*

Доказателството на теоремата е същото, както доказателството на съответната теорема за сноп прави в равнината (§ 20).

Формулата (2) ще наричаме аналитично представяне на сноп равнини в пространството.

Да се върнем към уравненията на двете пресекателни равнини ε_1 и ε_2. Сигурно е, че не са изпълнени едновременно равенствата

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

защото в противен случай ще следва, че равнините са успоредни или съвпадат. Да предположим, че

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

т. е.

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0.$$

Тогава системата от уравненията на двете равнини може да се реши спрямо x и y. Получават се уравнения от вида

$$\begin{aligned}x&=az+p,\\ y&=bz+q.\end{aligned} \tag{3}$$

Тези две уравнения, които също представят пресечницата g, се наричат канонични уравнения на правата. В тях величините a, b и p, q допускат просто геометрично тълкуване. Да положим $z=\lambda$. Уравненията (3) се написват във вида

$$\begin{aligned}x&=p+\lambda a,\\ y&=q+\lambda b,\\ z&=0+\lambda\,.\,1.\end{aligned}$$

Оттук се вижда, че $(p, q, 0)$ са координатите на пресечната точка на правата g с координатната равнина Oxy, а $(a, b, 1)$ са координатите на вектор $\mathbf{p}$, колинеарен на правата g. Значи права, която има канонични уравнения от вида (3), не е успоредна на равнината Oxy.

Ако за една права се предположи, че

$$A_1C_2-A_2C_2\neq 0,$$

то за нея могат да се напишат канонични уравнения от вида

$$\begin{aligned}x&=ay+p,\\ z&=by+q,\end{aligned}$$

като сега a, b и p, q имат съответното геометрично значение.

Накрая ще отбележим, че векторът

$$\mathbf{p}(B_1C_2-B_2C_1,\quad C_1A_2-C_2A_1,\quad A_1B_2-A_2B_1)$$

е компланарен на равнините ε_1, ε_2 и значи е колинеарен на тяхната пресечница g. Това се проверява, като се приложи теорема 2 от § 26. Координатите на точка M_0 от g могат да се намерят, като се реши системата от уравненията на двете равнини. Удобно е да се положи една от координатите x, y, z равна на нула. Намирането на точка $M_0 \in g$ и ненулев вектор p, колинеарен на тази права, позволява да се напишат параметричните уравнения на правата (§ 23).

§ 29. Равнина през точка и перпендикулярна на даден вектор

Да разгледаме равнина, минаваща през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Ако допуснем, че тя има уравнение

(1) $$Ax+By+Cz+D=0,$$

условието точката M_0 да лежи в нея се изразява с равенството

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Чрез изваждане на двете равенства получаваме уравнението

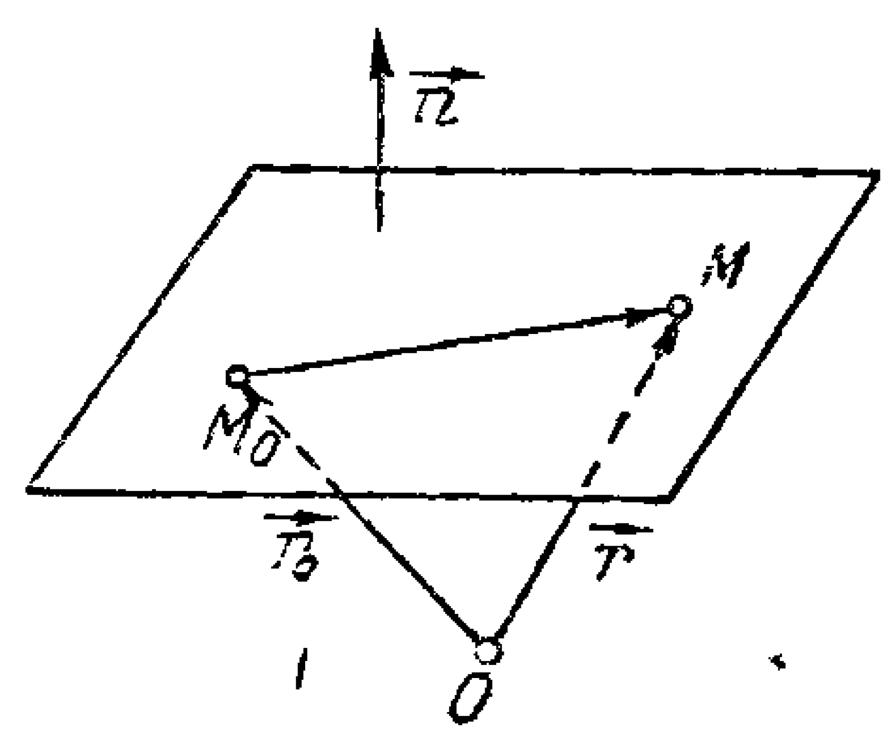
(2) $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

което изразява условието, че M_0 лежи в равнината.

Ако системата е ортонормирана, векторът

$$\mathbf{n}(A, B, C)$$

е перпендикулярен на равнината. Действително, ако $M(x, y, z)$ е точка от равнината, равенството (2) изразява условието за ортогоналност на векторите $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Равенството (2) се нарича уравнение на равнина през точка и перпендикулярна на даден вектор (орт. с-ма).



Черт. 48

Като положим $\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}$, $\overrightarrow{OM_0}=\mathbf{r}_0$, (2) може да се запише във векторна форма:

(3) $$\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0.$$

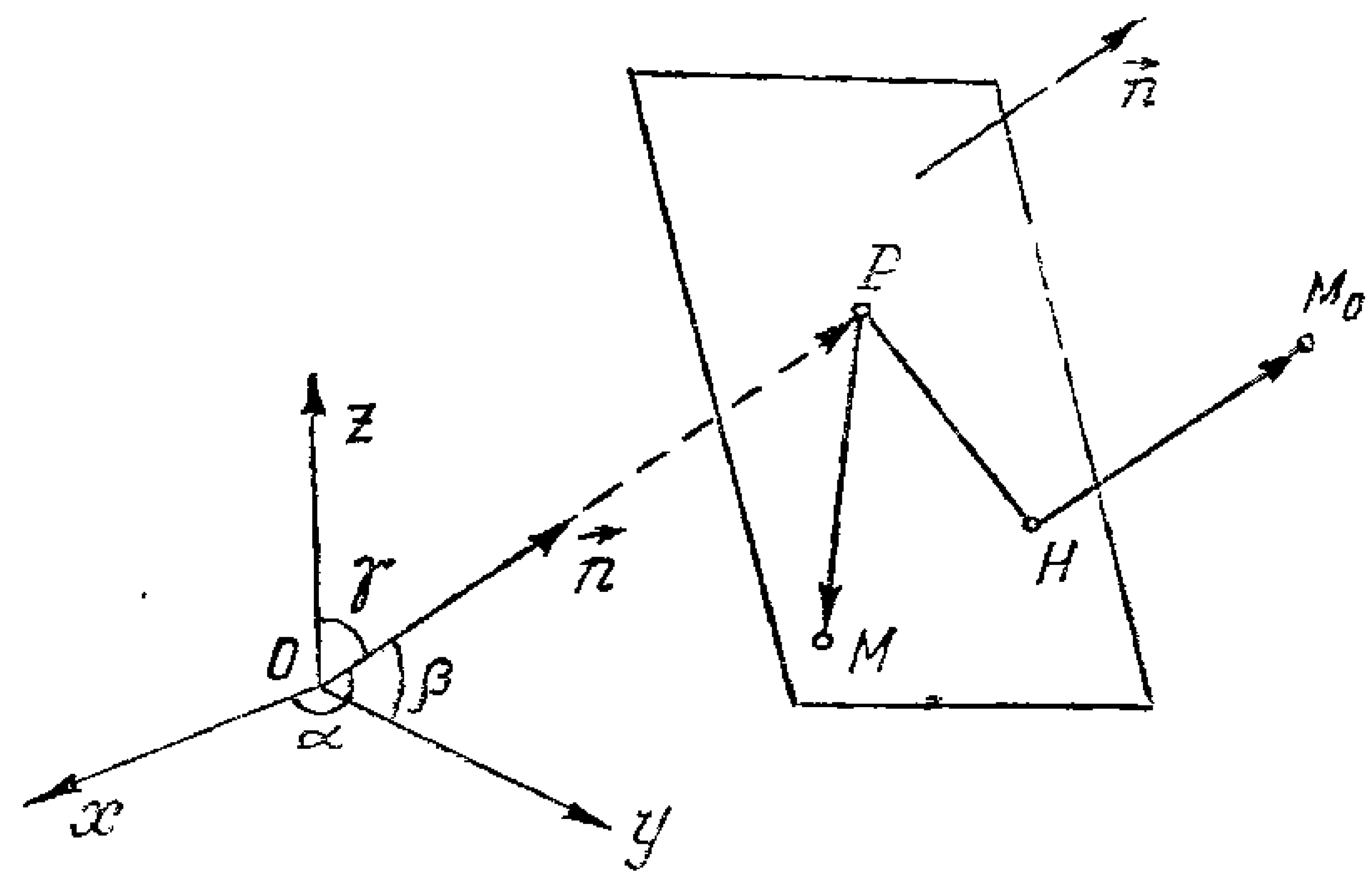
Като означим $\delta:=\mathbf{n}\,\mathbf{r}_0$, (3) приема вида

(4) $$\mathbf{n}\mathbf{r}=\delta.$$

Уравнението (3) или (4) се нарича векторно уравнение на равнина (орт. с-ма).

14 § 30. Нормално уравнение на равнина

Нека ε е равнина, която не минава през началото на ортонормираната система $Oxyz$. Да означим с P петата на перпендикуляра, спуснат от началото O към равнината ε, и нека α, β, γ са ъглите, които векторът $\overrightarrow{OP}$ сключва с координатните оси Ox, Oy, Oz (черт. 49). Единичният вектор по направлението на вектора $\overrightarrow{OP}$ е $\mathbf{n}=\overrightarrow{OP}:p$, където сме положили $p=|\overrightarrow{OP}|>0$. Тогава



Черт. 49

$$\mathbf{n}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),$$

$$P(p\cos\alpha,\ p\cos\beta,\ p\cos\gamma),$$

като

(1) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Една точка $M(x, y, z)$ лежи в равнината точно когато векторите $\mathbf{n}$, $\overrightarrow{PM}$ са перпендикулярни, т. е.

$$\mathbf{n}\,\overrightarrow{PM}=0.$$

Понеже $\overrightarrow{PM}$ има координати $(x-p\cos\alpha,\ y-p\cos\beta,\ z-p\cos\gamma)$, като се вземе пред вид (1), се получава, че последното равенство е еквивалентно на

(2) $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Това уравнение се нарича нормално уравнение на равнината ε. В него коефициентите на x, y, z са координати на единичен нормален вектор на равнината, насочен от началото към равнината, и координатната система е ортонормирана. Свободният член $-p$ е отрицателно число. Ако умножим това уравнение с -1, получаваме уравнение, в което свободният член е положително число:

$$x(-\cos\alpha)+y(-\cos\beta)+z(-\cos\gamma)+p=0.$$

Тук коефициентите на x, y, z са координатите на вектора $-\mathbf{n}$, който е насочен от равнината към началото.

Ако равнината е зададена с общото си уравнение спрямо ортонормирана координатна система:

$$\varepsilon: Ax+By+Cz+D=0,$$

то нормалното ѝ уравнение се дава чрез

(3) $$\varepsilon: \frac{Ax+By+Cz+D}{-\operatorname{sgn} D\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка от ε и $H(x_1, y_1, z_1)$ е петата на перпендикуляра, спуснат от M_0 към ε. Векторите $\overrightarrow{HM_0}$, $\mathbf{n}$ са колинеарни, следователно съществува число δ такова, че е изпълнено векторното равенство

(4) $$\overrightarrow{HM_0}=\delta\mathbf{n}.$$

Числото δ наричаме *ориентирано разстояние* от точката M_0 до равнината ε и ще го означаваме понякога с $\delta(M_0, \varepsilon)$. Очевидно $|\delta|=|\overrightarrow{HM_0}|$ е разстоянието от M_0 до ε. Лесно се съобразява, че ориентираното разстояние $\delta(M_0, \varepsilon)$ е положително (отрицателно) точно когато точката M_0 се намира в онова полупространство относно равнината ε, в което сочи (не сочи) векторът $\mathbf{n}$.

Понеже $\overrightarrow{HM_0}$ има координати $(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$, от (4) следва

$$x_0-x_1=\delta\cos\alpha,\quad y_0-y_1=\delta\cos\beta,\quad z_0-z_1=\delta\cos\gamma.$$

Като изразим условието, че H лежи в ε, и държим сметка за (1), получаваме

(5) $$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p,$$

откъдето намираме ориентираното разстояние $\delta(M_0, \varepsilon)$. стр. 12

§ 31. Изследване знака на линейния четиричлен и приложение в линейното програмиране

Линеен четиричлен наричаме израза

$$l(x, y, z):=Ax+By+Cz+D$$

при условие, че $|A|+|B|+|C|\neq 0$.

Полагаме

$$l(M_i)=l(x_i, y_i, z_i)\quad (i=1, 2)$$

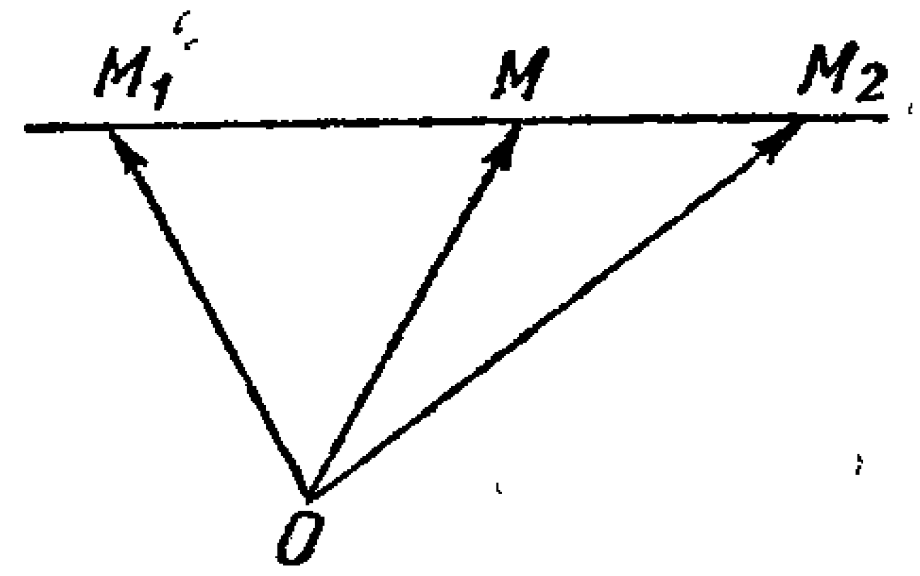
и разглеждаме равнината с уравнение

$$\varepsilon: Ax+By+Cz+D=0,$$

като на x, y, z гледаме като на афинни координати. В сила е следната

Теорема 1. *Точките M_1, M_2 лежат в различни полупространства относно равнината ε точно когато числата $l(M_1)$, $l(M_2)$ имат* *различни знаци; M_1, M_2 лежат в едно и също полупространство относно ε точно когато $l(M_1)$, $l(M_2)$ имат еднакви знаци.*

Доказателството се извършва по същия начин, както при линеен тричлен (§ 22).



Черт. 50

Едно множество A от точки в пространството се нарича *изпъкнало* (конвексно), ако от M_1, $M_2 \in A$ следва, че то съдържа и цялата отсечка M_1M_2.

Лема. *Една точка M върху права M_1M_2 е вътрешна за отсечката M_1M_2 точно когато съществуват числата $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, подчинени на условието*

$$\alpha_1+\alpha_2=1,$$

така че е изпълнено векторното равенство

$$\overrightarrow{OM}=\alpha_1\overrightarrow{OM_1}+\alpha_2\overrightarrow{OM_2}. \tag{2}$$

(Тук O е някаква фиксирана точка.)

Доказателство. Ако M лежи на правата M_1M_2, то

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}. \tag{3}$$

Очевидно числото $\lambda>0$ точно когато точката M лежи върху отсечката M_1M_2. Равенството (3) може да се напише във вида

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}),$$

или

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}.$$

Означаваме

$$\alpha_1:=\frac{1}{1+\lambda}, \qquad \alpha_2:=\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Очевидно $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, щом $\lambda>0$, и $\alpha_1+\alpha_2=1$. Освен това в сила е (2).

Обратно, да допуснем, че са дадени две положителни числа α_1, α_2, подчинени на (1), за които е в сила (2). Ще покажем, че M е вътрешна точка за отсечката M_1M_2. Полагаме

$$\alpha_1=\frac{1}{1+\lambda}, \quad \text{т. е.} \quad \lambda=\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}.$$

Тогава

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

От $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ следва, че $\lambda > 0$. От (2) следва (3), което показва, че M лежи вътре в отсечката M_1M_2.

В линейното програмиране намира приложение следната

Теорема 2. *Ако системата от n линейни неравенства*

$$\begin{gathered} l_1(x, y, z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \geqq 0, \\ l_2(x, y, z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \geqq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n(x, y, z) = A_nx + B_ny + C_nz + D_n \geqq 0, \end{gathered}$$

има нееднинствено решение, то множеството от решенията на тази система е изпъкнало.

Доказателство. От условието на теоремата следва, че има поне две точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2)$, за които

$$l_i(M_1) \geqq 0, \ l_i(M_2) \geqq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

За произволна точка M от отсечката M_1M_2 имаме (съгласно лемата)

$$l_i(M) = l_i(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 l_i(M_1) + \alpha_2 l_i(M_2) \geqq 0,$$

тъй като $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Теоремата е доказана.

Следствие. Ако системата от n линейни уравнения

$$\begin{gathered} l_1(x, y, z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ l_2(x, y, z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n(x, y, z) = A_nx + B_ny + C_nz + D_n = 0 \end{gathered}$$

има нееднинствено решение, то множеството от решенията е изпъкнало.

Доказателство. Горната система линейни уравнения е еквивалентна на следната система линейни неравенства:

$$\begin{gathered} l_1(x, y, z) \geqq 0, \quad l_1(x, y, z) \leqq 0 \\ l_2(x, y, z) \geqq 0, \quad l_2(x, y, z) \leqq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n(x, y, z) \geqq 0, \quad l_n(x, y, z) \leqq 0. \end{gathered}$$

Остава да се приложи предишната теорема.

Преди да завършим тази глава, ще направим няколко забележки. От параметричните уравнения на права в равнината и в пространството—(15.3), (23.3), се вижда, че правата е еднопараметрична съвкупност от точки, т. е. положението на точка върху дадена права се определя със стойността на един параметър λ. От (24.2) се вижда, че равнината е двупараметрична съвкупност от точки, т. е. положението на една точка в дадена равнина се определя с две числа λ, μ. От друга страна, декартовото, нормалното и отрезовото уравнение на права в равнината показват, че една права в равнината зависи от два параметъра, т. е.

за да напишем уравнението на правата, е нужно да знаем две числа. Например при нормалното уравнение на права тези величини са α, p. Значи съвкупността на всички прави в равнината е двупараметрична. Каноничните уравнения (28.3) показват, че права в пространството зависи от четири параметъра, т. е. съвкупността на правите в пространството е четирипараметрична. Най-сетне отрезовото и нормалното уравнение на равнина показват, че една равнина в пространството зависи от три параметъра, т. е. съвкупността на всички равнини в пространството е трипараметрична.

Задача 1. Да се намери точка M', ортогонално симетрична на точката $M(1, 1, 2)$ относно равнината ε, определена с точките $M_1(5, 10, 0)$, $M_2(4, 0, -7)$, $M_3(2, 4, -5)$. Да се определят и директорните косинуси на посоката от M към M' (орт. с-ма).

Решение. Съгласно (25.2) уравнението на равнината ε е

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-10 & z \\ -1 & -10 & -7 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

което след лека преработка приема вида

$$\varepsilon : x+2y-3z-25=0.$$

Векторът $\overrightarrow{N_\varepsilon}(1, 2, -3)$ е перпендикулярен на равнината (§ 25). Уравнението на правата g, минаваща през точката M и перпендикулярна на равнината ε (т. е. колинеарна на вектора $\overrightarrow{N_\varepsilon}$), има параметрични уравнения (23.3):

$$\begin{aligned} x&=1+\lambda, \\ g: y&=1+2\lambda, \\ z&=2-3\lambda. \end{aligned}$$

Координатите на прободната точка M_0 на правата g с равнината ε се получават от параметричните уравнения на правата при определена стойност на параметъра λ. За да намерим тази стойност, решаваме съвместно уравненията на g и ε. Като заместим x, y, z с равните им от параметричните уравнения на g в уравнението на ε, получаваме уравнението

$$1+\lambda+2(1+2\lambda)-3(2-3\lambda)-25=0,$$

откъдето определяме $\lambda=2$. С тази стойност на параметъра λ от параметричните уравнения на g изчисляваме координатите на M_0. Получаваме $x=3$, $y=5$, $z=-4$.

От формулите за среда на отсечка (5.5), приложени за отсечката MM' със среда M_0, намираме координатите на търсената точка M'. Получаваме $x=5$, $y=9$, $z=-10$.

Векторът $\overrightarrow{MM'}$ има координати $(4, 8, -12)$. Координатите на единичен вектор, който е еднопосочно колинеарен на вектора $\overrightarrow{MM'}$, са $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$. Съгласно определението в § 6 това са директорните косинуси на посоката от M към M'.

Задача 2. Да се намери точка M', ортогонално симетрична на точката $M(-1, 1, 2)$ относно правата

$$g: \begin{array}{l} x-y+1=0, \\ x-z-2=0. \end{array}$$

Да се намери и разстоянието от M до g (орт. с-ма).

Решение. Вектор, колинеарен на правата g, има координати (§ 28) (1, 1, 1). Равнината ε, минаваща през M и перпендикулярна на g, има уравнение (§ 29)

$$1(x+1)+1(y-1)+1(z-2)=0,$$

т. е.

$$\varepsilon: x+y+z-2=0.$$

Като решим системата от уравненията на правата g и равнината ε, получаваме координатите на прободната точка M_0 на g с ε: $(1, 2, -1)$. По формулите за среда на отсечка намираме координатите $(3, 3, -7)$ на търсената точка M'. Разстоянието $d(M, g)$ на точката M до правата g е разстоянието между точките M, M_0. Като приложим формулата за разстояние между две точки (6.14), намираме $d(M, g)=d(M, M_0)=\sqrt{14}$.

Задача 3. Да се намери трансверзалата на правите

$$g_1: \begin{array}{l} x=3+\lambda, \\ y=-1+2\lambda, \\ z=4\lambda, \end{array} \qquad g_2: \begin{array}{l} x=-2+3\mu, \\ y=-1, \\ z=4-5\mu, \end{array}$$

която минава през точката $A(1, 1, 1)$ (аф. с-ма).

Определение. Една права t се нарича *трансверзала* на две или повече прави, ако пресича всяка една от тях.

Решение. Ако такава трансверзала съществува, тя трябва да лежи в равнината ε, определена с точката A и правата g_1. Равнината ε има уравнение

$$\varepsilon: 2x+3y-2z-3=0.$$

Търсим общи точки на ε и g_2. Получаваме единствената точка P с координати $\left(\frac{11}{8}, -1, -\frac{13}{8}\right)$. Вектор, колинеарен на правата AP, има координати $(3, -16, -21)$. Правата AP има параметрични уравнения

$$AP: \begin{array}{l} x=1+3\mu, \\ y=1-16\mu, \\ z=1-21\mu. \end{array}$$

Правите AP и g_1 имат единствена обща точка — точката с координати $\left(\frac{20}{11}, -\frac{37}{11}, -\frac{52}{11}\right)$. Следователно съществува единствена трансверзала AP на правите g_1 и g_2.

Задача 4. Да се намери уравнението на оста и дължината на оста-отсечка на кръстосаните прави

$$g_1:\ \begin{aligned} x&=7+\lambda,\\ y&=3+2\lambda,\\ z&=9-\lambda, \end{aligned} \qquad g_2:\ \begin{aligned} x&=3-7\mu,\\ y&=1+2\mu,\\ z&=1+2\mu \end{aligned}$$

(орт. с-ма).

Определение. Ос на две кръстосани прави се нарича онази тяхна трансверзала, която ги пресича под прав ъгъл. *Ос-отсечка* се нарича отсечката върху оста, чиито краища са пресечните точки на оста с кръстосаните прави.

Решение. Произволна точка P_1 от g_1 има координати $(7+\lambda,\ 3+2\lambda,\ 9-\lambda)$, а произволна точка P_2 от g_2 — $(3-7\mu,\ 1+2\mu,\ 1+3\mu)$. Векторът $\overrightarrow{P_1P_2}$ има координати

$$(-4-\lambda-7\mu,\ -2-2\lambda+2\mu,\ -8+\lambda+3\mu).$$

Векторите $\mathbf{p}_1(1, 2, -1)$, $\mathbf{p}_2(-7, 2, 3)$ са колинеарни съответно на правите g_1, g_2. Правата P_1P_2 е ос на правите g_1, g_2 точно когато са изпълнени условията

$$\mathbf{p}_1 . \overrightarrow{P_1P_2}=0, \quad \mathbf{p}_2 . \overrightarrow{P_1P_2}=0,$$

които водят до следните координатни равенства:

$$\begin{aligned} &1(-4-\lambda-7\mu)+2(-2-2\lambda+2\mu)-1(-8+\lambda+3\mu)=0,\\ &-7(-4-\lambda-7\mu)+2(-2-2\lambda+2\mu)+3(-8+\lambda+3\mu)=0. \end{aligned}$$

Като опростим уравненията, получаваме системата

$$\begin{aligned} \lambda+\mu&=0,\\ 3\lambda+31\mu&=0, \end{aligned}$$

чието единствено решение е $\lambda=0$, $\mu=0$. С тези стойности от парамет ричните уравнения на дадените прави намираме $P_1(7, 3, 9)$, $P_2(3, 1, 1)$ Тогава оста P_1P_2 има параметрични уравнения

$$\begin{aligned} x&=3+2s,\\ y&=1+s,\\ z&=1+4s, \end{aligned}$$

а дължината на оста-отсечка е $d(P_1, P_2)=2\sqrt{21}$.

Забележка. Тази задача може да се реши и по следния начин. Векторното произведение $\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2$ е вектор, който е перпендикулярен на двете прави g_1, g_2, следователно той е колинеарен на оста. Прекарваме равнината ε през g_1 и компланарна на вектора $\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2$. Прободната точка на ε с g_2 е точка от оста. По-нататък решението е ясно.

Глава V

Аналитично представяне на линии и повърхнини

§ 32. *Общи понятия за линия и повърхнина*

Нека Oxy е афинна координатна система в равнината и $F(x, y)$ е функция на променливите x, y, дефинирана върху някакво множество D. Подмножество $c \subset D$ от точки (x, y), за които

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

се нарича *равнинна крива линия* (или само линия) в равнината, а (1) се нарича *уравнение на линията.*

Съществуват и други дефиниции за крива линия. Например:

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана за всяко x от някакъв интервал (a, b). Множеството от точки (x, y), за които

$$y = f(x), \tag{2}$$

се нарича равнинна крива линия, а (2) се нарича уравнение на линията.

Най-после нека са дадени две функции $\varphi(s)$, $\psi(s)$ с една и съща дефиниционна област (s_1, s_2). Множеството от точки (x, y), чиито координати се получават по формулите

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s), \\ y &= \psi(s), \end{aligned} \tag{3}$$

когато s обхожда интервала (s_1, s_2), се нарича равнинна крива линия, а (3) се нарича параметрично представяне на линията.

Трите дефиниции не са еквивалентни. Ние няма да се спираме тук на този въпрос. Ще поясним само бегло как може да се преминава от един вид уравнение в друг.

Преход от (1) към (2): при известни общи условия (които са предмет на разглеждане в анализа) уравнението (1) може да се реши за y относно x; получава се представяне на линията от вида

(2). Това не винаги е възможно да се направи за цялата линия, а евентуално за част от нея.

Преход от (2) към (1): прехвърляме $f(x)$ от лявата страна и означаваме $F(x, y)=y-f(x)$. Получаваме представяне от вида (1) за цялата линия.

Преход от (2) към (3): полагаме $x=\varphi(s)$ (или просто $x=s$); тогава $y=\psi(s)$, като сме означили $\psi(s)=f(\varphi(s))$.

Преход от (3) към (2): при известни общи условия определяме s от уравнението $x=\varphi(s)$ като функция на x, т. е. $s=s(x)$, което заместваме във второто уравнение на (3). Получаваме представяне за линията от вида (2), което евентуално може да се отнася за част от линията.

Нека $Oxyz$ е афинна координатна система в пространството и $F(x, y, z)$ е функция на трите променливи x, y, z, дефинирана в някаква област D. Множеството S от всички точки (x, y, z), за които

$$F(x, y, z)=0, \tag{4}$$

се нарича *повърхнина в пространството*. Уравнението (4) се нарича *уравнение на повърхнината*.

Ще приведем още две дефиниции за повърхнина. Нека $f(x, y)$ е функция на двете независими променливи x, y, като $(x, y)\in D$. Множеството от всички точки (x, y, z), за които

$$z=f(x, y), \tag{5}$$

се нарича повърхнина с уравнение (5).

Най-после нека са дадени три функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\theta(u, v)$ с една и съща дефиниционна област D на променливите u, v. Множеството от всички точки (x, y, z), чиито координати се получават по формулите

$$\begin{aligned} x&=\varphi(u, v),\\ y&=\psi(u, v),\\ z&=\theta(u, v) \end{aligned} \tag{6}$$

за $(u, v)\in D$, се нарича повърхнина, а (6) се нарича параметрично представяне на повърхнината.

При известни общи условия от (4) можем да определим z като функция на x, y; получаваме уравнение за повърхнината (или част от нея) от вида (5). Обратно, като прехвърлим $f(x, y)$ в лявата страна на (5), повърхнината се представя с уравнение от вида (4).

Ако заместим в (5) x и y съответно с функциите $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, като $(u, v)\in D$, получаваме уравнение на повърхнината от вида (6): $z=\theta(u, v):=f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Обратно, от първите две уравнения на (6) при известни общи условия можем да определим u, v като функции на x, y и ако получените изрази за u и v заместим в третото уравнение на (6), повърхнината се представя с уравнение от вида (5).

Нека са дадени три функции $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\theta(s)$ с една и съща дефиниционна област (a, b). Множеството от всички точки в пространството, чиито координати (x, y, z) се получават по формулите

$$(7)\qquad \begin{aligned} x&=\varphi(s),\\ y&=\psi(s),\\ z&=\theta(s) \quad (s\in(a, b)), \end{aligned}$$

се нарича линия (или крива линия) в пространството, а (7) се нарича параметрично представяне на линията.

Една линия в пространството може да се представи и като сечение на две повърхнини:

$$(8)\qquad k: \begin{aligned} F(x, y, z)&=0,\\ G(x, y, z)&=0. \end{aligned}$$

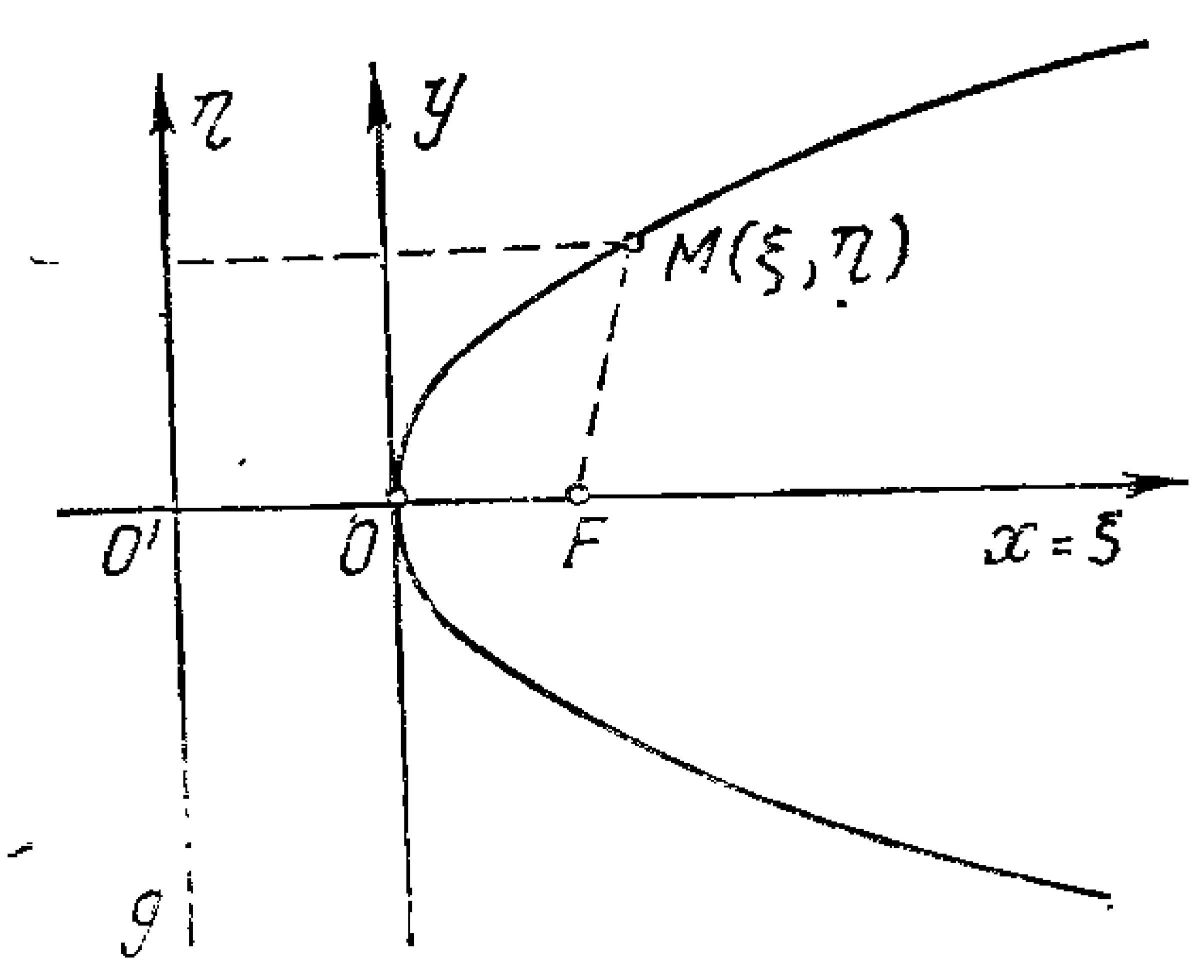
По-точно множеството от общите точки на две повърхнини при условие, че то не е повърхнина, се нарича линия в пространството.

Като примери за линии в равнината и в пространството служат правите линии — те са еднопараметрични множества от точки. Равнината (в пространство) е двупараметрично множество от точки и е пример за повърхнина.

§ 33. Конусни сечения: елипса, хипербола, парабола

Нека в равнината са дадени неинцидентни права g и точка F, разстоянието между които е $p>0$. Ще изследваме множеството от точки M в равнината, за които отношението на разстоянията до F и g е постоянно и равно на положителното число e:

$$(1)\qquad \frac{d(M, F)}{d(M, g)}=e.$$



Черт. 51

За да намерим уравнение на търсеното множество от точки, избираме ортонормирана координатна система $O'\xi\eta$ по следния начин: оста $O'\eta$ съвпада с правата g, оста $O'\xi$ минава през F и е насочена от O' към

F (черт. 51). Спрямо така избраната координатна система правата g има уравнение $\xi=0$, а точката F — координати $(p, 0)$. Нека произволна точка M от множеството има координати (ξ, η). В координатна форма дефиниционното равенство (1) изглежда така:

$$\sqrt{(\xi-p)^2+\eta^2}=e\ \xi. \tag{2}$$

Това равенство е еквивалентно на

$$(\xi-p)^2+\eta^2=e^2\xi^2, \tag{3}$$

което след малка преработка приема вида

$$(1-e^2)\xi^2+\eta^2-2p\xi+p^2=0. \tag{4}$$

Ще разгледаме два основни случая:

A) Нека $e\neq 1$.

Извършваме транслация на координатната система посредством формулите (§ 7)

$$\xi=x+\alpha,\ \eta=y. \tag{5}$$

Като заместим (5) в (4), след елементарни преобразувания получаваме

$$(1-e^2)x^2+[2\alpha(1-e^2)-2p]x+y^2+(1-e^2)\alpha^2-2p\alpha+p^2=0. \tag{6}$$

Неизвестната величина α в (5) определяме така, че в уравнението (6) коефициентът пред x да е нула:

$$2\alpha(1-e^2)-2p=0,$$

т. е.

$$\alpha=\frac{p}{1-e^2}.$$

С тази стойност за α (6) става

$$(1-e^2)x^2+y^2=\frac{p^2e^2}{1-e^2}. \tag{7}$$

По-нататък ще разгледаме два подслучая:

а) Нека $e<1$. Тогава $1-e^2>0$ и като разделим (7) на $\frac{p^2e^2}{1-e^2}$, получаваме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{8}$$

като сме извършили полагането

$$a=\frac{pe}{1-e^2},\qquad b=\frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{9}$$

В този случай ($e<1$) разглежданото множество от точки се нарича *елипса*, а (8) — *канонично уравнение на елипсата.*

Да разгледаме втория подслучай

б) Нека $e>1$. Тогава $\frac{p^2 e^2}{e^2-1}>0$ и като разделим отново (7) на $\frac{p^2 e^2}{e^2-1}$ и положим

(10) $$a=\frac{pe}{-1+e^2},\qquad b=\frac{pe}{\sqrt{-1+e^2}},$$

получаваме

(11) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

В този случай ($e>1$) разглежданото множество от точки се нарича *хипербола*, а (11) — *канонично уравнение на хиперболата.*

Да разгледаме втория случай

Б) Нека $e=1$. Сега (4) има вида

(12) $$\eta^2-2p\xi+p^2=0.$$

Извършваме транслация на координатната система посредством формулите

(13) $$\xi=x+\lambda,\quad \eta=y.$$

Като заместим (13) в (12), достигаме до уравнението

(14) $$y^2-2p(x+\lambda)+p^2=0.$$

Неизвестната величина λ ще определим така, че в последното уравнение свободният член да е 0. Получаваме

(15) $$y^2=2px,$$

като

(16) $$\lambda=\frac{p}{2}.$$

В този случай ($e=1$) разглежданото множество се нарича *парабола*, а (16) — *канонично уравнение на параболата.*

За елипсата, хиперболата и параболата се среща общото наименование *конусни* сечения, тъй като те могат да се получат от ротационния конус чрез пресичане с подходящи равнини (§ 66).

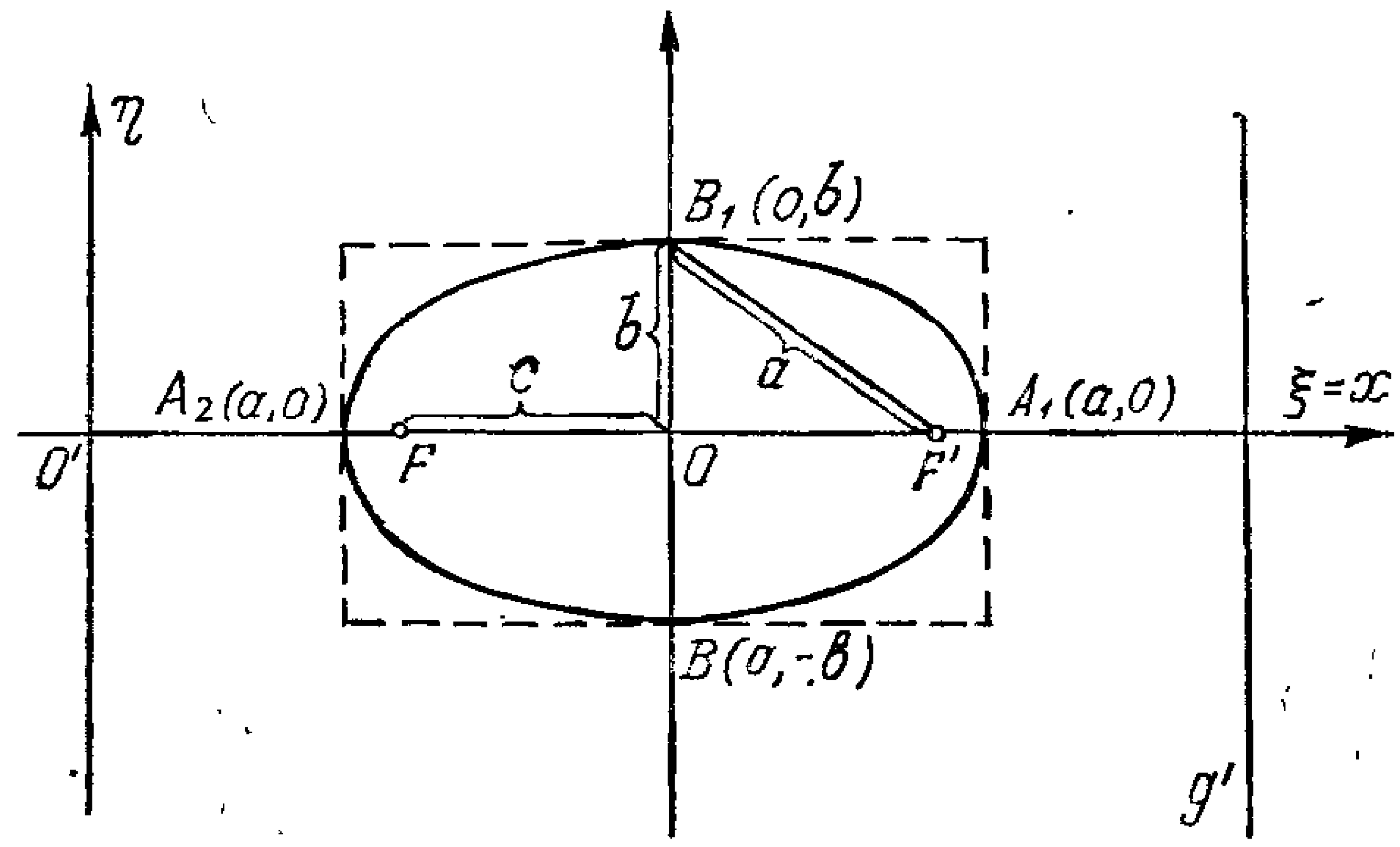
Сега ще изследваме формата на конусните сечения.

Елипса. От каноничното уравнение (8) на елипсата се вижда, че ако точката (x, y) лежи на елипсата, то същото се отнася и за точките $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$. Това означава, че елипсата е симетрично разположена спрямо координатните оси Ox, Oy и началото O. Следователно достатъчно е да изследваме кривата само в един квадрант, например в първи. От (8) следва

$$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Оттук се вижда (ограничавайки се само в първи квадрант), че когато y намалява от b до 0, то x расте от 0 до a. От уравнението на елипсата се съобразява лесно, че $|x|\leq a$, $|y|\leq b$, т. е. елипсата е разположена вътре в правоъгълник, чиито страни са успоредни на осите Ox, Oy, страните му имат дължини $2a$, $2b$ и началото O е пресечна точка на диагоналите му. На черт. 52 е начертана елипса, предполагайки, че $a>b$.

Елипсата пресича координатните оси в точките $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, които се наричат *върхове* на елипсата. Отсечката A_1A_2 с дължина $2a$ се нарича *голяма ос* на елипсата, а отсечката B_1B_2 с дължина $2b$ — *малка ос*. O се нарича *център на елипсата*.



Черт. 52

Ако се положи $c=\sqrt{a^2-b^2}$, лесно се намира, че координатите на точката F спрямо системата Oxy са $(-c, 0)$. Правата g има уравнение $x=-\frac{p}{1-e^2}$. Точките $F(x=-c,\ y=0)$, $F'(x=c,\ y=0)$ се наричат *фокуси* на елипсата, а правите с уравнения

$$g: x=-\frac{p}{1-e^2},$$

$$g': x=\frac{p}{1-e^2}$$

— *директриси* на елипсата. Като вземем пред вид, че $c=\frac{pe^2}{1-e^2}$, следва че директрисите имат уравнения $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

Понеже

$$\xi_{O'}=0,$$

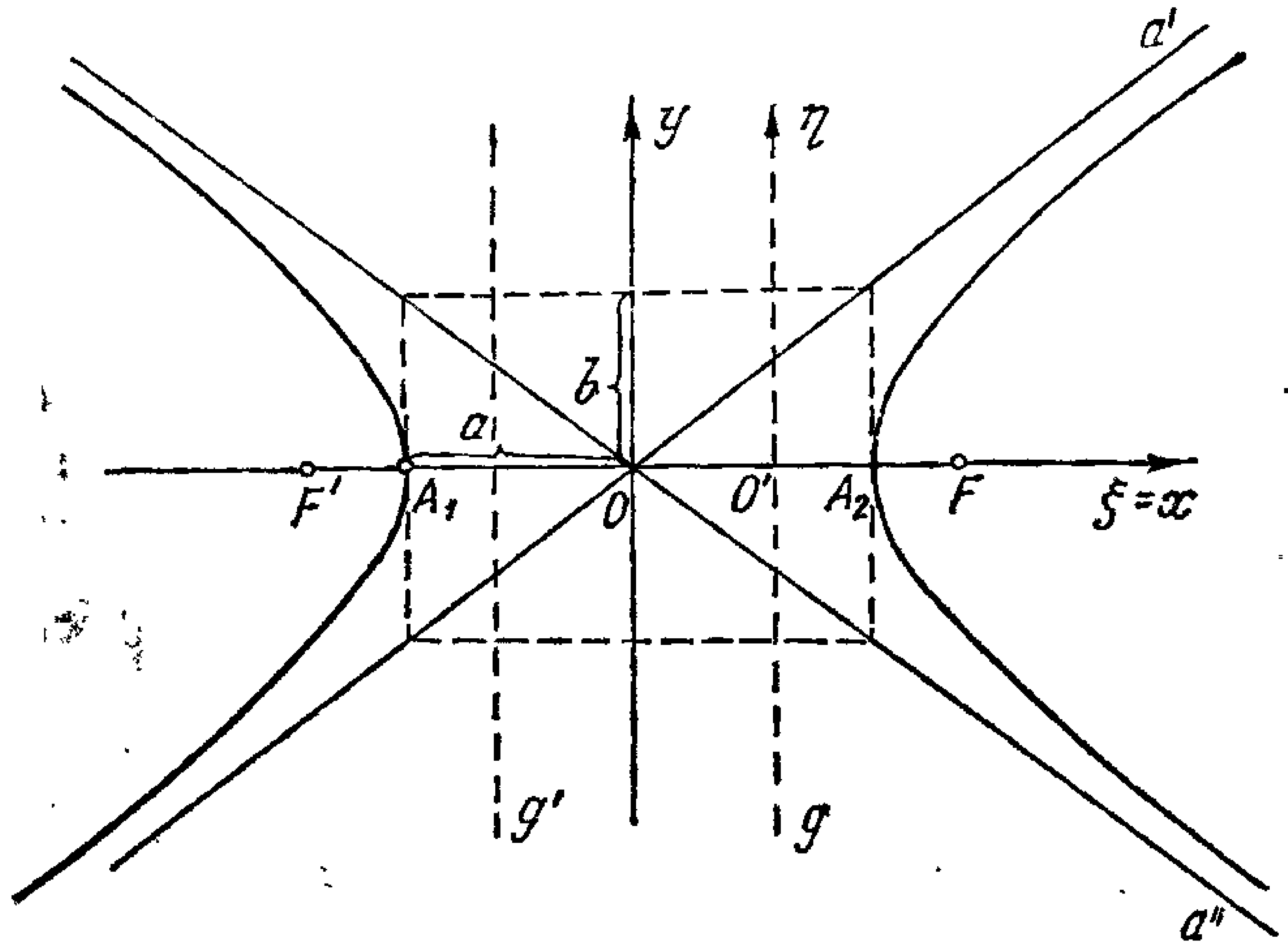
$$\xi_{A_2}=-a+\frac{p}{1-e^2}=\frac{p}{1+e^2}>0,$$

$$\xi_F=p>\xi_{A_2}, \tag{17}$$

$$\xi_O=\frac{p}{1-e^2},$$

следва разположението на точките O', A_2, F, O в указания на черт. 52 ред.

Хипербола. От каноничното уравнение (11) на хиперболата се вижда, че тя е симетрично разположена в четирите квадранта. Освен това $|x| \geq a$. Хиперболата с уравнение (11) пресича само оста Ox, която се нарича *реална ос*, а оста Oy се нарича *имагинерна ос*. Пресечните точ-



Черт. 53

ки на хиперболата с оста Ox имат координати $A_2(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$ и се наричат *върхове* на хиперболата.

От (11) получаваме

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

което показва, че когато x расте от a до ∞, то y расте от 0 до ∞ (ограничавайки се в първи квадрант). Формата на хиперболата е показана на черт. 53. Началото O се нарича *център* на хиперболата, а правите с уравнения

$$a' : y = \frac{b}{a}x, \qquad a'' : y = -\frac{b}{a}x$$

— *асимптоти* на хиперболата (§ 62). Тук се въвежда величината $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Точките $F(x=c,\ y=0)$, $F'(x=-c,\ y=0)$ се наричат *фокуси* на хиперболата. При $a=b$ хиперболата се нарича *равнораменна*. Очевидно при равнораменната хипербола и само при нея асимптотите са перпендикулярни, поради което равнораменната хипербола се нарича понякога правоъгълна.

При елипсата и хиперболата величината c се нарича *линеен ексцентрицитет*, а e—*числен ексцентрицитет*. Като се вземат пред вид формулите (17) и че при хиперболата $e > 1$, следва разположението на точките O, O', A_2, F в указания на черт. 53 ред. На същия чертеж е начертана хипербола с реална ос Ox.

И тук, както при елипсата, правите с уравнения

$$g: x = -\frac{p}{1-e^2}, \quad g': x = \frac{p}{1-e^2}$$

се наричат *директриси* на хиперболата. При хиперболата $c = \frac{pe^2}{e^2-1}$ и уравненията на двете директриси се записват още във вида $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

Парабола. Каноничното уравнение (16) на параболата показва, че тя е симетрично разположена спрямо оста Ox, която се нарича *ос* на параболата. От $p>0$ следва, че параболата е разположена само в първи и четвърти квадрант. Ограничавайки се в първи квадрант, можем да пишем

$$y = \sqrt{2px},$$

което показва, че когато x расте от 0 до ∞, то y има същото поведение. На черт. 51 е начертана парабола. Точката $F(x=\frac{p}{2}, y=0)$ се нарича *фокус* на параболата, правата $g: x = -\frac{p}{2}$ — *директриса*. Точката $O(x=y=0)$ се нарича *връх* на параболата, Oy — *върхова тангента* на параболата.

§ 34. *Уравнение на окръжност*

Окръжността е множество от точки в една равнина, равноотдалечени от дадена точка в същата равнина, наречена *център* на окръжността. Дължината на разстоянието, на което отстои всяка точка от окръжността до центъра ѝ, се нарича *радиус* на окръжността.

Нека R е радиусът на окръжността и спрямо ортонормирана координатна система Oxy е даден центърът ѝ $C(a, b)$. Ако $M(x, y)$ е произволна точка от окръжността, то дефиниционното равенство на окръжността

$$\overrightarrow{CM} = R$$

е еквивалентно на следното координатно равенство:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Това уравнение се нарича нормално уравнение на окръжността. Очевидно една точка лежи на окръжността точно когато координатите ѝ (x, y) удовлетворяват уравнението (1). Като развием степените в (1), получаваме

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0, \tag{2}$$

което е от вида

$$x^2+y^2+lx+my+n=0. \tag{3}$$

Сравняването на коефициентите на (2) и (3) дава

$$l=-2a, \; m=-2b, \; n=a^2+b^2-R^2. \tag{4}$$

Ще докажем следната

Теорема. *Уравнението* (3) *е уравнение на окръжност тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството*

$$l^2+m^2-4n>0, \tag{5}$$

Доказателство. Нека (3) е уравнение на някаква окръжност с център $C(a, b)$ и радиус R. Сравняването на (2) и (3) даде (4), откъдето получаваме

$$l^2+m^2-4n=4R^2>0.$$

с което (5) е проверено.

Обратно, нека е изпълнено (5). Тогава окръжността с център $C\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ и радиус $R=\frac{1}{2}\sqrt{l^2+m^2-4n}$ има за уравнение тъкмо даденото уравнение (3). Друга окръжност с уравнение (3) не съществува.

С това теоремата е доказана.

Ако центърът на окръжността е в началото на координатната система, то $a=b=0$ и (1) приема вида

$$x^2+y^2=R^2.$$

Това уравнение се нарича централно уравнение на окръжност. Ако освен това радиусът е единица, окръжността се нарича единична. Тя има уравнение

$$x^2+y^2=1.$$

Окръжността (3) минава през началото точно когато $n=0$.

§ 35. *Инверсия спрямо окръжност*

Нека S^1 е окръжност с център O и радиус R. Ако $M\neq O$ е произволна точка от равнината на окръжността, ще казваме, че точката M' е *инверсен образ* на M спрямо S^1 точно когато правата MM' минава през центъра на окръжността и е изпълнено равенството

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=R^2. \tag{1}$$

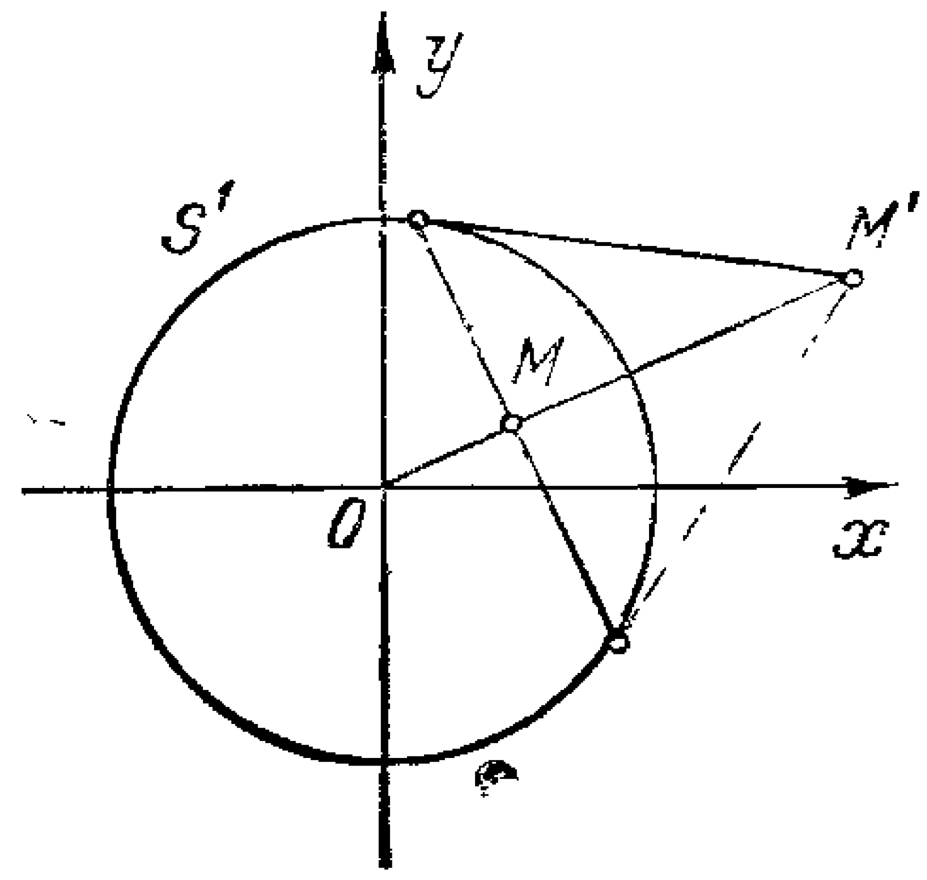
Очевидно инверсният образ M' на точката M е определен еднозначно и инверсният образ на M' е точката M. Точките от окръжността S^1 са двойни, т. е. ако $M\in S^1$, то $M'=M$. Точка, която е вътрешна, се преобразува във външна и обратно. S^1 се нарича *окръжност на инверсията*, а O—*полюс на инверсията*.

Ще приложим координатния метод за изучаване свойствата на инверсията. Да предположим, че полюсът на инверсията съвпада с началото на ортонормираната координатна система (черт. 54). Окръжността има уравнение

$$x^2+y^2=R^2.$$

Нека M, M' имат съответно координати (x, y), (x', y'). Понеже векторите $\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{OM}$ са колинеарни и еднопосочни, то в сила е равенството

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda\, \overrightarrow{OM}$$



Черт. 54

при някакво $\lambda > 0$. Оттук следват равенствата

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y,$$

откъдето чрез повдигане на квадрат и събиране получаваме

$$x'^2 + y'^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2).$$

Оттук намираме

$$\lambda = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|\overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{R^2}{|\overrightarrow{OM}|^2} = \frac{R^2}{x^2 + y^2}$$

и следователно

$$(2) \qquad x' = R^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = R^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Понеже инверсният образ на M' е M, получаваме, обратно,

$$(2') \qquad x = R^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = R^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Формулите (2) представят аналитично преобразуванието *инверсия.*

Теорема. *При инверсията права през полюса на инверсията се запазва, а права, неминаваща през полюса, се преобразува в окръжност през полюса; окръжност през полюса се преобразува в права, неминаваща през полюса, и окръжност, неминаваща през полюса, се преобразува в окръжност, също неминаваща през полюса.*

Доказателство. Нека

$$g: Ax+By+C=0$$

е права. Като използваме формулите (2′), получаваме

$$AR^2\frac{x'}{x'^2+y'^2}+BR^2\frac{y'}{x'^2+y'^2}+C=0,$$

или

$$C(x'^2+y'^2)+R(Ax'+By')=0. \tag{3}$$

Ако $C=0$, т. е. g е права през началото на координатната система (значи g минава през полюса на инверсията), от (3) се вижда, че g се преобразува в себе си. Ако $C\neq 0$, т. е. g не минава през полюса на инверсията, от (3) се вижда, че тя се преобразува в окръжност през полюса на инверсията.

С това доказахме, че права се преобразува в права (в себе си) или в окръжност през полюса на инверсията.

Нека сега

$$\bar{S}^1: x^2+y^2+lx+my+n=0 \tag{4}$$

е уравнение на окръжност. Като използваме (2′), за нейния инверсен образ получаваме

$$n^2(x'^2+y'^2)+R^2(lx'+my')+R^4=0. \tag{5}$$

Ако $n=0$, т. е. $\bar{S}^1$ е окръжност през началото, от (5) се вижда че тя се преобразува в права, която не минава през полюса на инверсията. Ако $n\neq 0$, т. е. $\bar{S}^1$ е окръжност, която не минава през полюса на инверсията, то нейният образ (5) е окръжност, неминаваща през полюса на инверсията.

С това теоремата е доказана.

§ 36. *Цилиндрични, конусни и ротационни повърхнини*

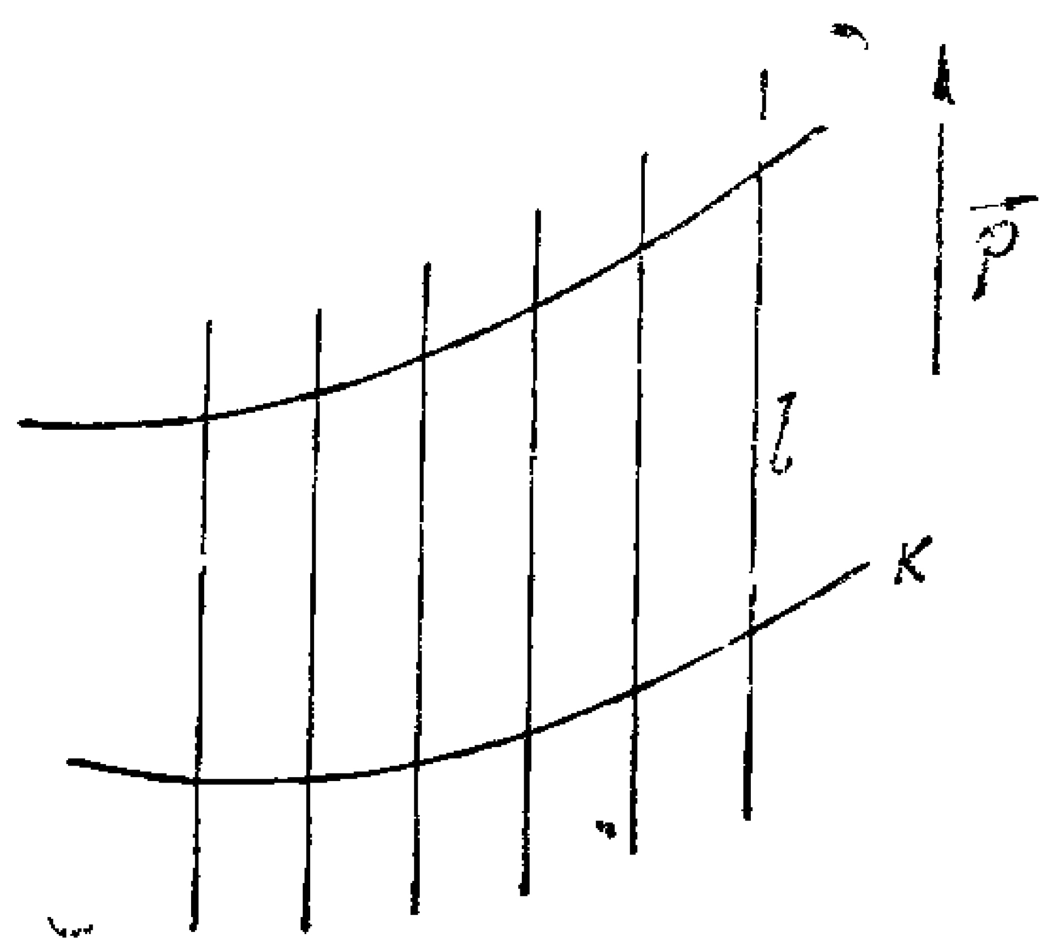
Цилиндрични повърхнини. *Цилиндрична повърхнина* (цилиндър) наричаме множеството от всички точки върху всички прави, които минават през точките на дадена крива k и са успоредни на дадено направление **p**. Линията k наричаме *управителна крива*, а правите от повърхнината, успоредни на вектора **p**—*образуващи* (образувателни) на повърхнината (черт. 55).

Нека $Oxyz$ е афинна координатна система и векторът **p** не е успореден на равнината Oxy. Тогава всяка образуваща l на повърхнината има канонични уравнения (§ 28) от вида

$$\begin{aligned} x&=az+p, \\ y&=bz+q, \end{aligned} \tag{1}$$

като векторът **p** има координати $(a, b, 1)$. Величините p, q се изменят от образуваща на образуваща, докато a, b са постоянни. Нека управителната крива k има уравнения

(2) $$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0.$$



Черт. 55

Всяка обща точка на образуващата l и управителната крива k удовлетворява уравненията (1) и (2). Елиминирането на x, y от тези уравнения води до връзките

$$F(az+p,\ bz+q,\ z)=0, \qquad G(az+p,\ bz+q,\ z)=0.$$

Ако от тези две уравнения изключим z, ще получим връзка между p, q

(3) $$\varphi(p, q)=0.$$

Определяме от (1) променливите $p=x-az$, $q=y-bz$, които заместваме в (3). Получаваме

(4) $$\varphi(x-az,\ y-bz)=0.$$

В това уравнение (x, y, z) са координати на произволна точка от цилиндричната повърхнина. Следователно те удовлетворяват уравнение от вида (4).

Обратно, всяко уравнение от вида (4) е уравнение на някаква цилиндрична повърхнина. Действително да разгледаме цилиндричната повърхнина, която е определена с направлението $\mathrm{p}(a, b, 1)$ и управителната крива

$$c: \varphi(x, y)=0, \quad z=0,$$

лѐжаща в равнината Oxy. Като следваме горния път, се убеждаваме, че уравнението на тази повърхнина е точно (4).

С това показахме, че точно уравненията от вида (4) са уравнения на цилиндричните повърхнини.

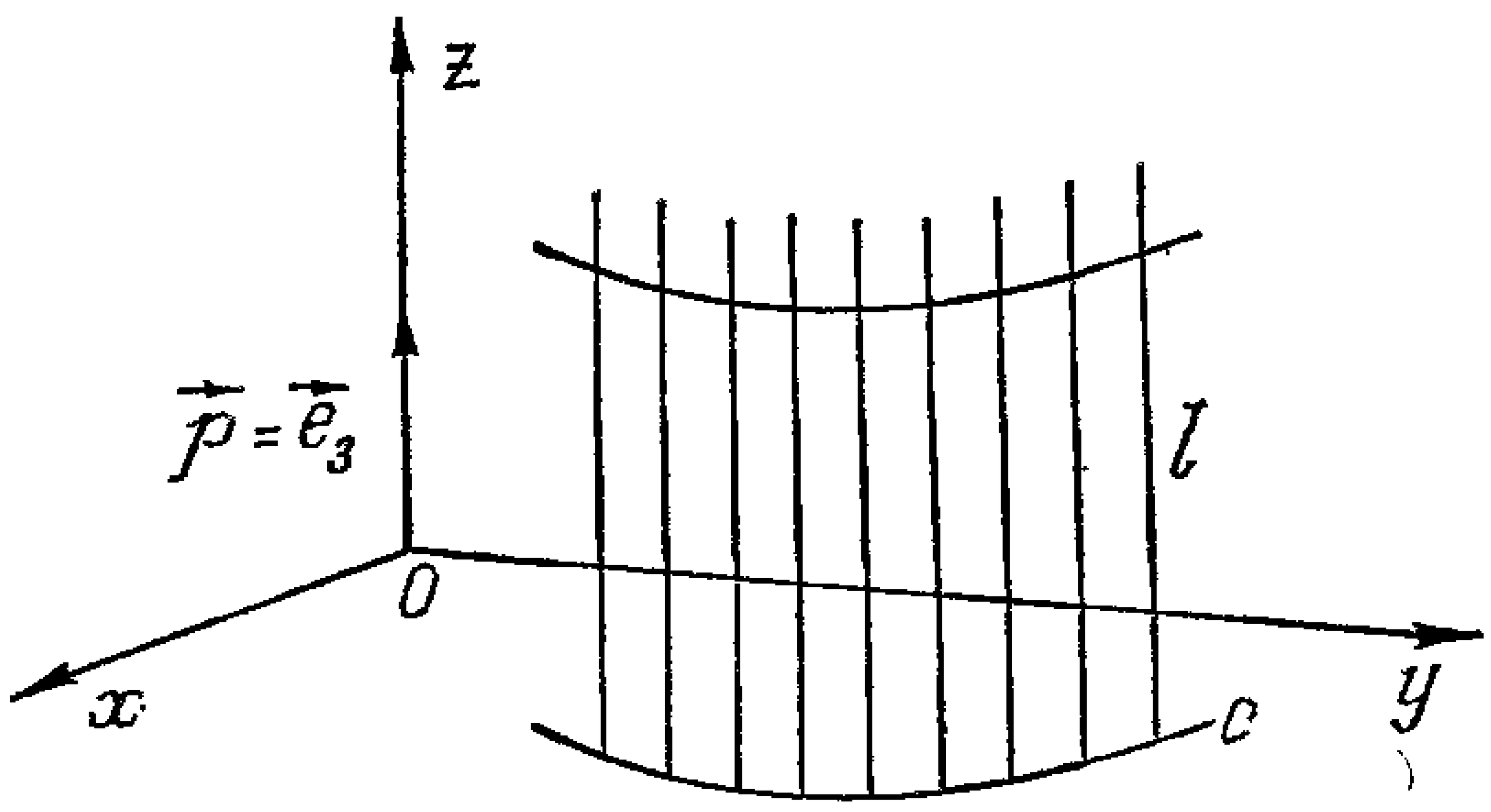
Да разгледаме специално уравнението от вида

(5) $$F(x, y)=0.$$

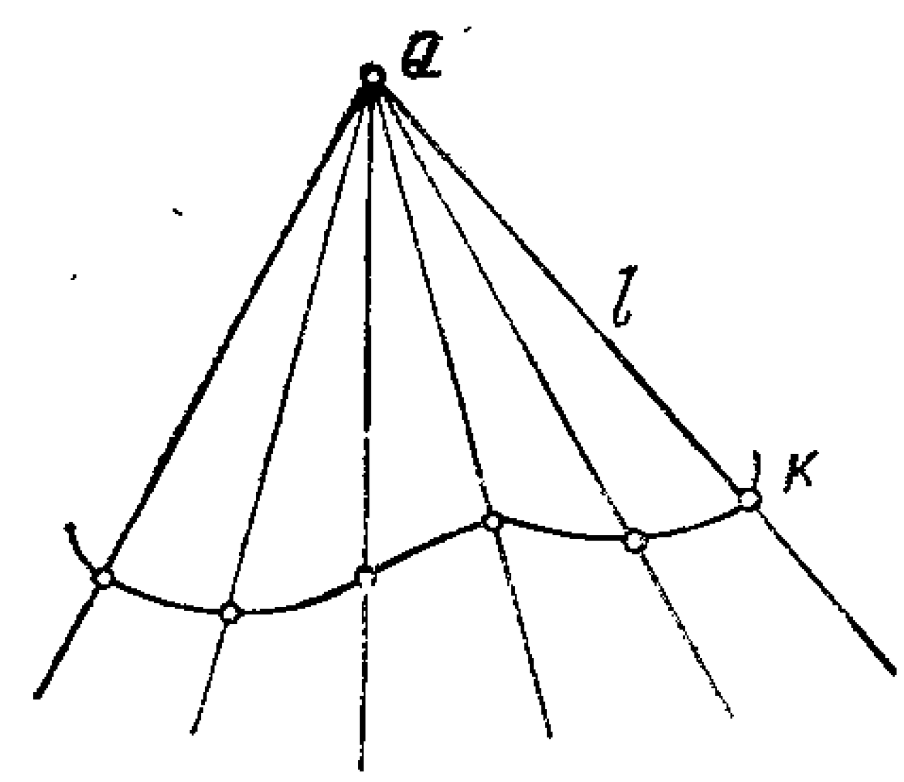
Тоже от типа (4), като $a=b=0$ (черт. 56). Следователно (5) е уравнение на цилиндричната повърхнина, която има образуващи, успоредни на оста Oz (т. е. на вектора $\mathbf{p}(0, 0, 1)$), и управителна крива

$$c: F(x, y)=0, \quad z=0$$

в координатната равнина Oxy.



Черт. 56



Черт. 57

Конусна повърхнина. *Конусна повърхнина* (конус) наричаме множеството от всички точки върху всички прави, съединяващи една (постоянна) точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ с точките на една крива k. Точката Q наричаме *връх* на конуса, k—*управителна крива*, а всички съединителни прави на Q с точки от k—*образуващи* (образувателни) на конусната повърхнина (черт. 57).

Нека спрямо афинната координатна система $Oxyz$ управителната крива k се представя с уравненията

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0.$$

Нека вектор, колинеарен на произволна образуваща l, има координати $(a, b, 1)$ (за простота предполагаме, че l не е успоредна на Oxy), като a, b се изменят от образуваща на образуваща. Всяка образуваща има параметрични уравнения

$$(6) \qquad \begin{aligned} &x=x_0+as,\\ l:\ &y=y_0+bs,\\ &z=z_0+1\,.\,s. \end{aligned}$$

Като изключим параметъра s, получаваме

$$(7) \qquad l: \begin{aligned} x&=x_0+a(z-z_0),\\ y&=y_0+b(z-z_0). \end{aligned}$$

Както и в случая на цилиндрична повърхнина, елиминирането на x, y и след това на z от (2) и (7) води до зависимост от вида

$$(3') \qquad \varphi(a, b)=0.$$

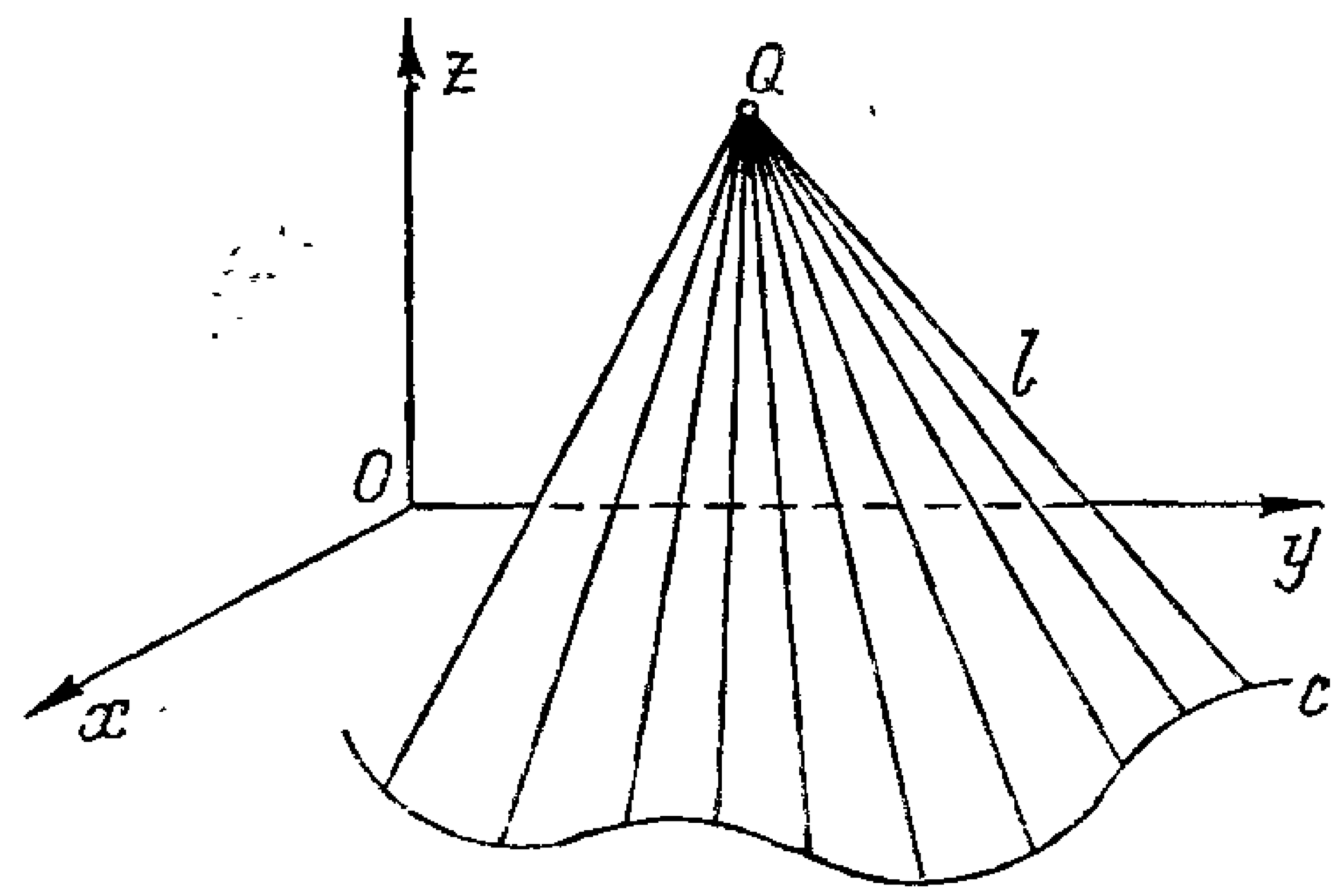
Определяме от (7)

$$a=\frac{x-x_0}{z-z_0}, \quad b=\frac{y-y_0}{z-z_0}$$

и ги заместваме в (3′). Получаваме уравнение за конусната повърхнина

$$(8) \qquad \varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0.$$

Както и при цилиндрична повърхнина, се убеждаваме, че всяко уравнение от вида (8) е уравнение на някаква конусна повърхнина.



Черт. 58

Лесно се съобразява, че това е повърхнината с връх $Q(x_0, y_0, z_0)$ и управителната крива

$$c\colon \varphi\left(\frac{x-x_0}{-z_0},\ \frac{y-y_0}{-z_0}\right)=0, \quad z=0,$$

която лежи в равнината Oxy (черт. 58).

Ротационни повърхнини. Нека правата g и кривата k лежат в една и съща равнина. Ако завъртим k около g, докато направи едно пълно завъртане, тя ще опише една повърхнина S, която се нарича *ротационна*. При това въртене всяка точка $M \in k$ описва една окръжност k_M, която се нарича *паралел* (през точката M). Всеки паралел лежи в равнина, перпендикулярна на g. Всяка равнина през правата g пресича ротационната повърхнина в една линия, която се нарича *меридиан*. Очевидно всеки меридиан е конгруентен на кривата k и се получава от нея чрез завъртане на определен ъгъл. Правата g се нарича *ос* на ротационната повърхнина.

Избираме ортонормирана координатна система $Oxyz$, като Oz съвпада с правата g и линията k лежи в координатната равнина Oxz (черт. 59). Да предположим, че k е представена параметрично:

$$(9) \qquad x=\varphi(u),\ y=0,\ z=\psi(u)\ \ (u \in (a, b)).$$

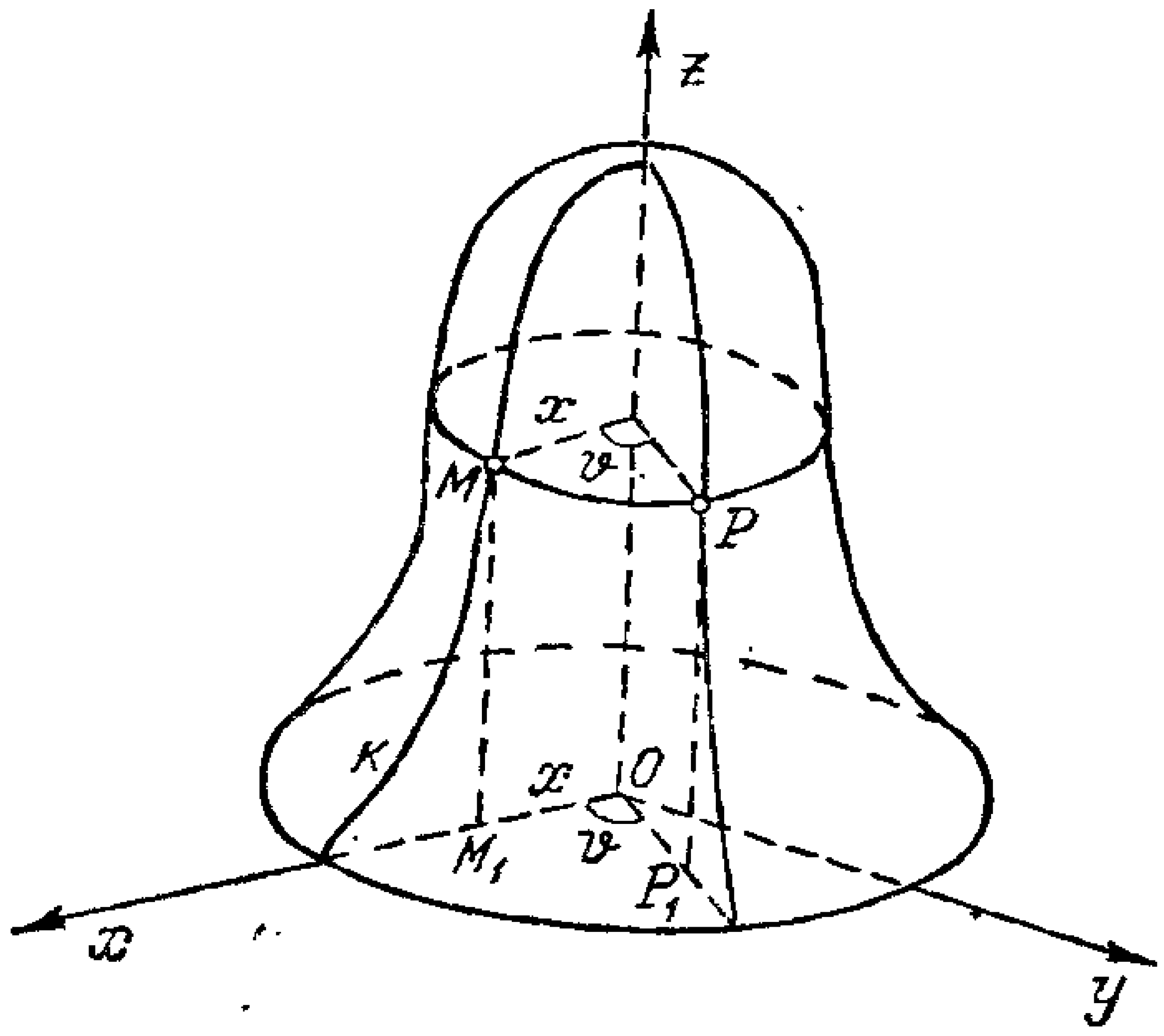
Завъртането на точка $M(x, 0, z)$ около оста Oz на ъгъла v дава точка $P(X, Y, Z)$, като $X=x\cos v$, $Y=x\sin v$, $Z=z$. Следователно всяка точка от ротационната повърхнина се представя така:

$$(10) \qquad \begin{aligned} X&=\varphi(u)\cos v,\\ Y&=\varphi(u)\sin v,\\ Z&=\psi(u) \qquad (u \in (a, b),\ 0 \leq v < 2\pi). \end{aligned}$$

Обратно, всяка тройка уравнения от вида (10) са уравнения на някаква ротационна повърхнина. Това е повърхнината, получена от въртенето на кривата (9) около оста Oz. Уравненията (10) се наричат параметрични уравнения на ротационна повърхнина с ос Oz.

Ако кривата k е зададена с уравнения

(11) $$F(x, z)=0, \ y=0,$$



Черт. 59

от

$$X^2+Y^2=x^2$$

следва, че уравнението на ротационната повърхнина е

(12) $$F(\pm\sqrt{X^2+Y^2}, Z)=0.$$

Ние изведохме правила за написване уравненията на ротационни повърхнини, получени чрез въртене на линия от равнината Oxz около оста Oz. Тези правила (10) и (12) чрез смяна на означенията могат да се приложат и за други случаи.

Да разгледаме няколко примера.

а) Ако завъртим правата

$$g\colon x-\operatorname{tg}\varphi(z-z_0)=0, \ y=0$$

около Oz, следвайки „прехода" от (11) към (12), получаваме ротационната повърхнина

$$x^2+y^2-\operatorname{tg}^2\varphi(z-z_0)^2=0,$$

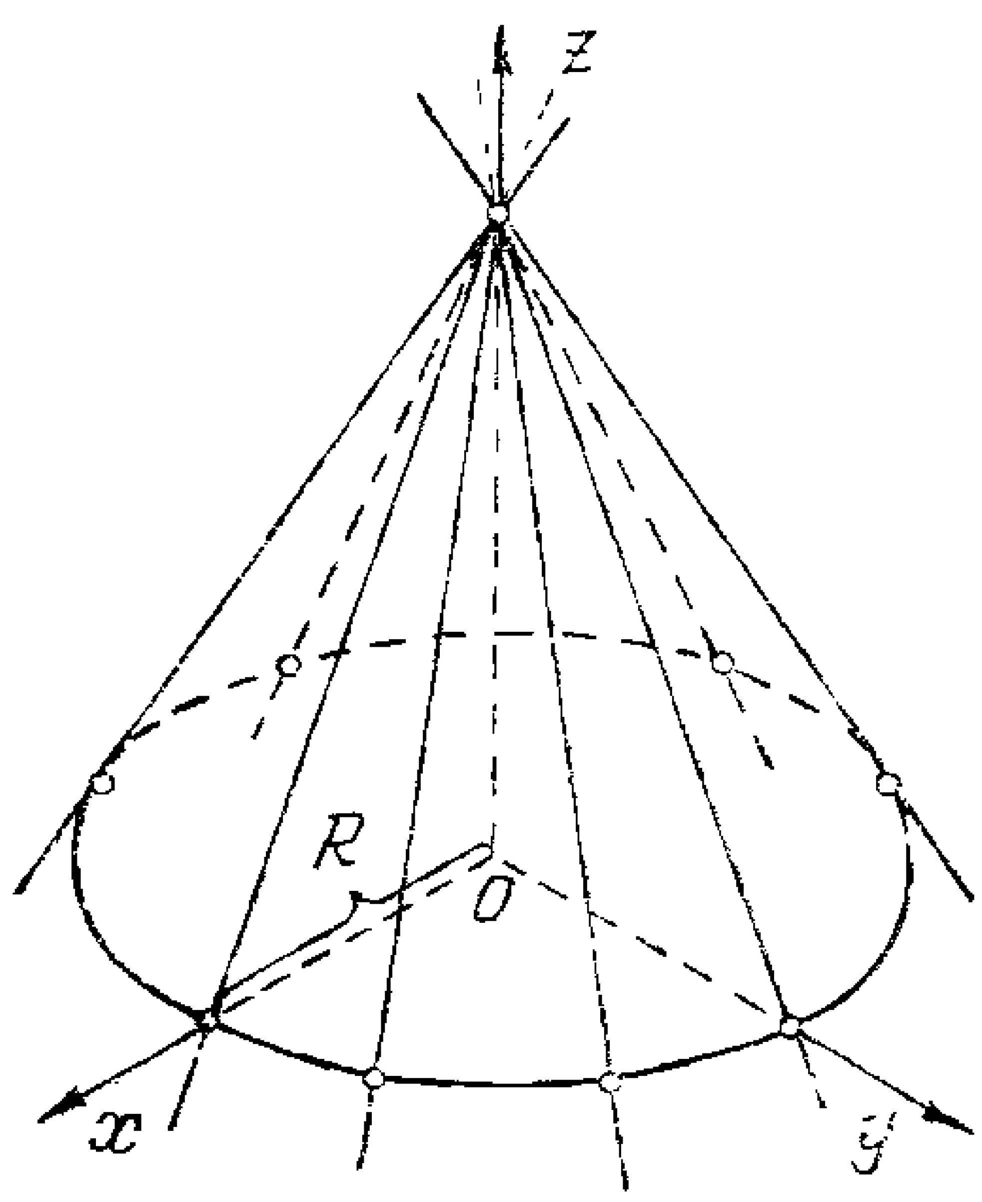
която е *прав кръгов конус* (черт. 60).

б) Ако завъртим елипсата

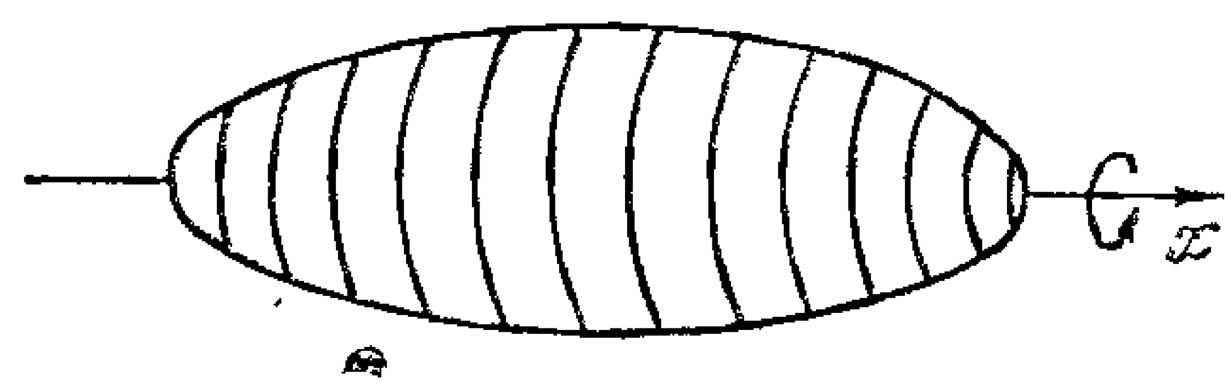
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ z=0 \quad (a>b)$$

около Ox, получаваме *ротационен продълговат елипсоид:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad \text{(черт. 61).}$$



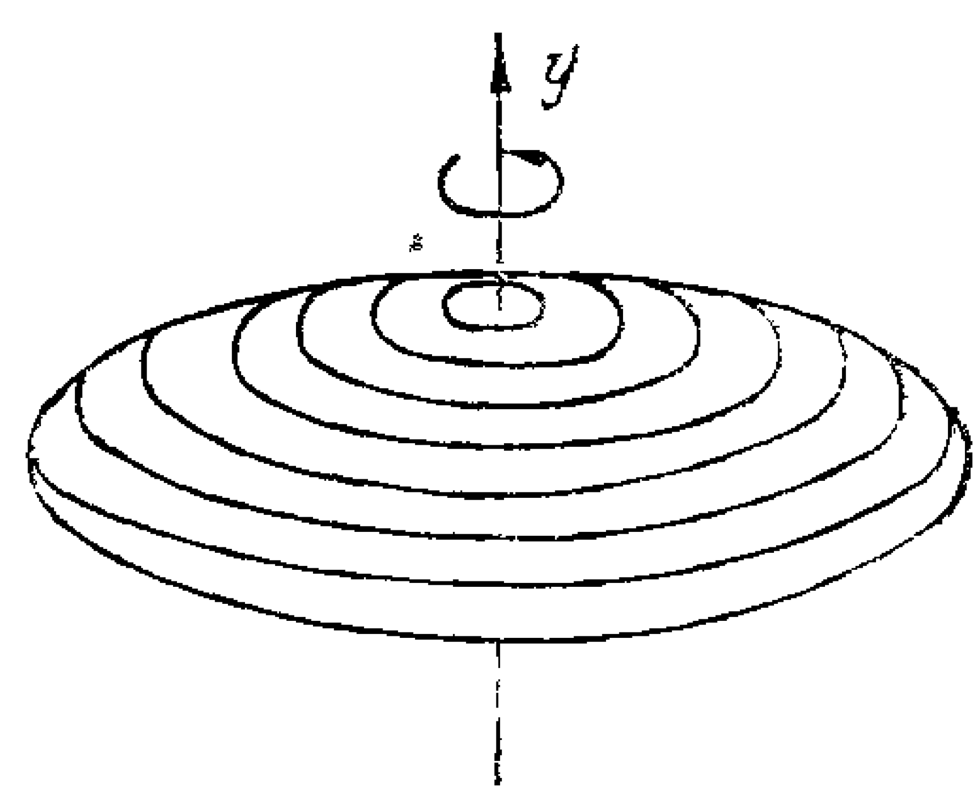
Черт. 60



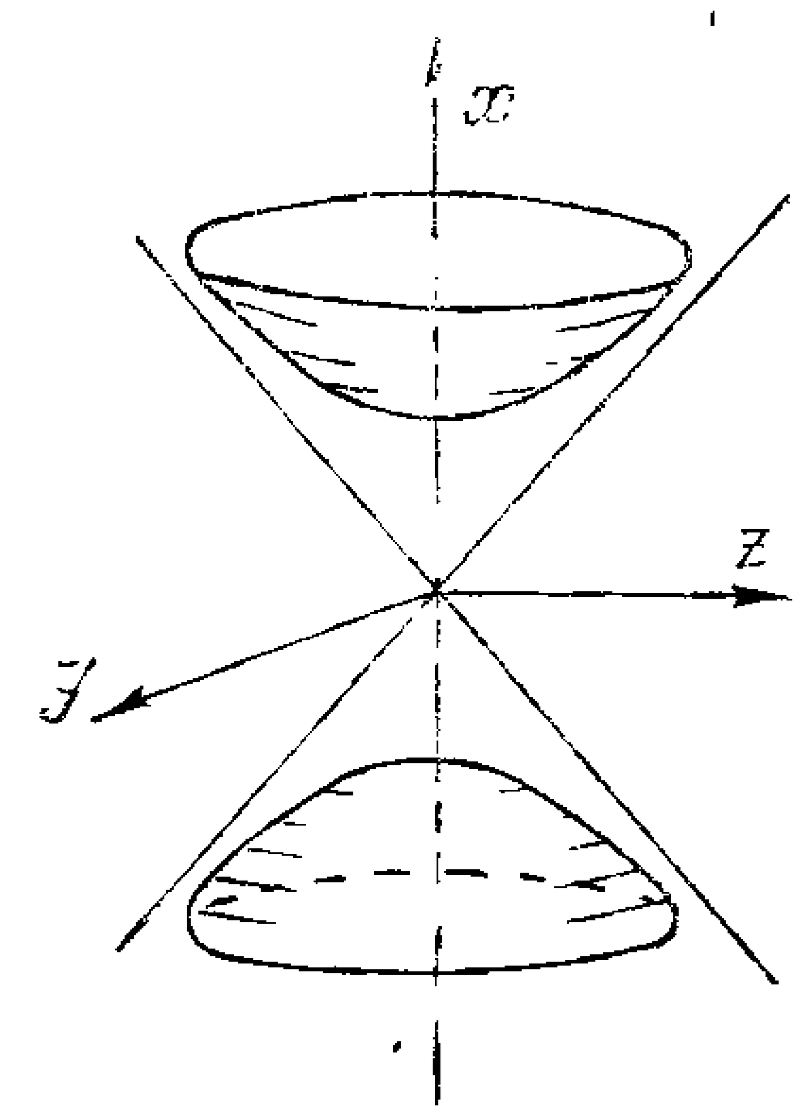
Черт. 61

Ако завъртим същата елипса около Oy, получаваме *ротационен плосък елипсоид* (диск):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \quad \text{(черт. 62).}$$



Черт. 62



Черт. 63

в) Ако завъртим хиперболата

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0$$

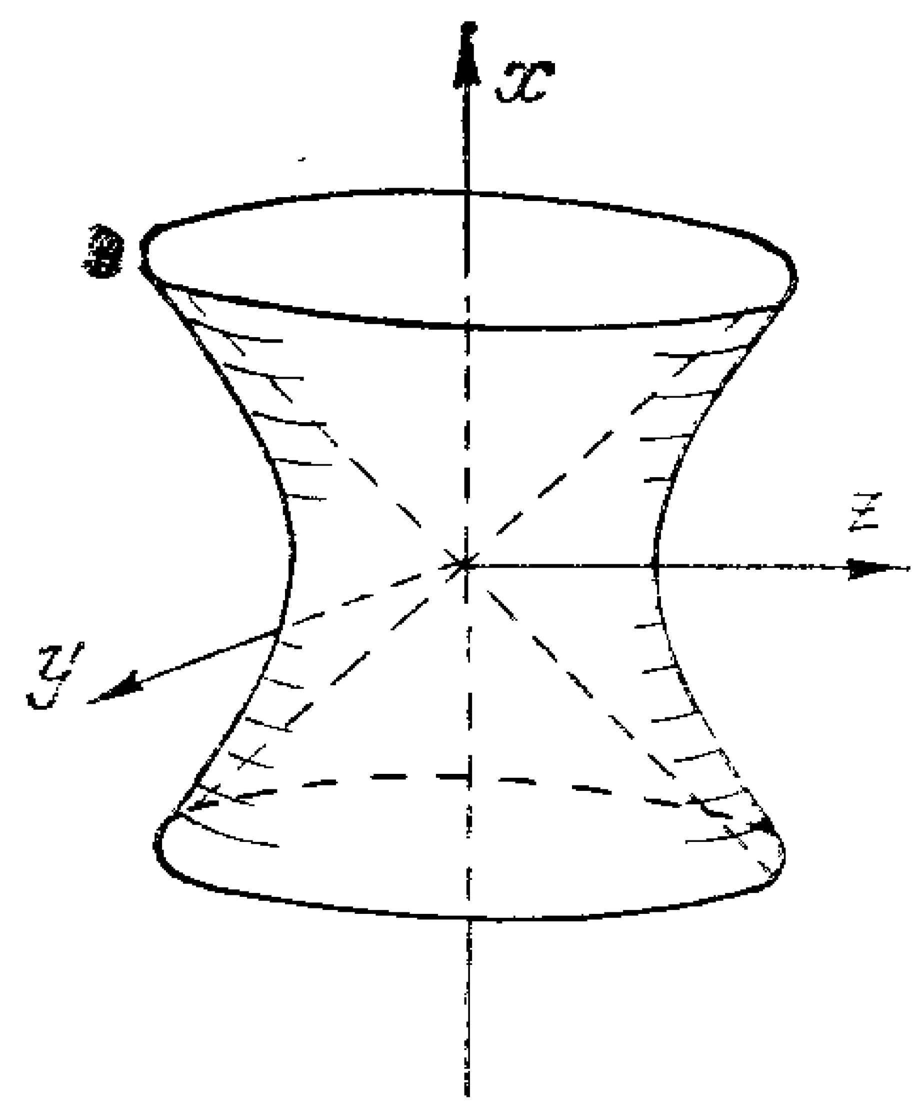
около Ox, получаваме повърхнината

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

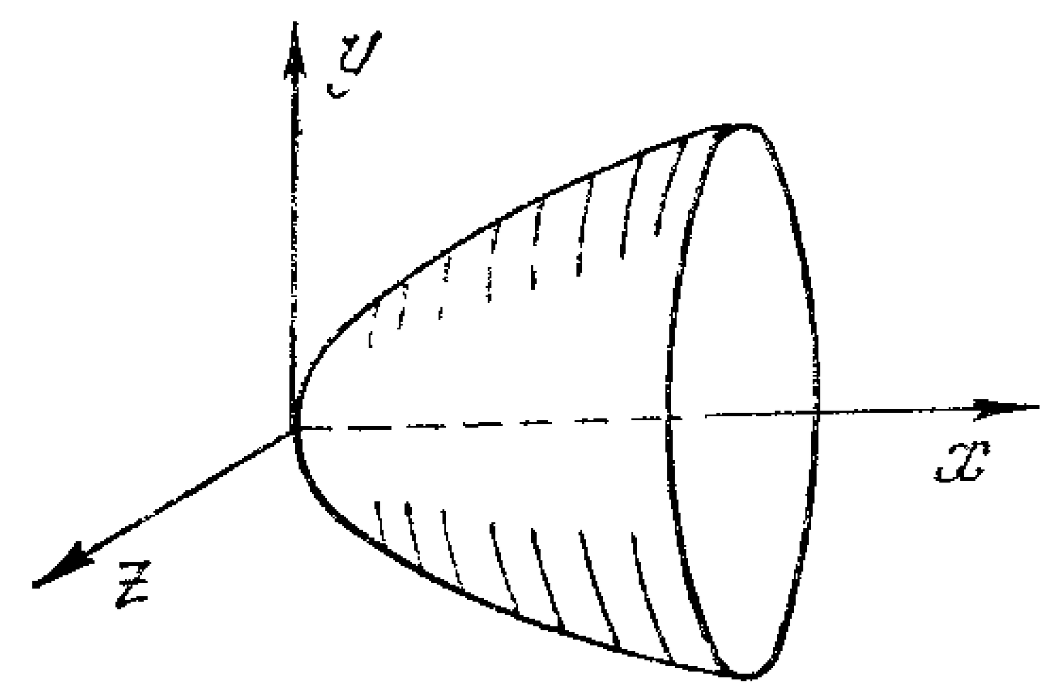
която се нарича *ротационен двоен хиперболоид* (черт. 63); ако завъртим същата хипербола около Oy, получаваме повърхнината

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

която се нарича *ротационен прост хиперболоид* (черт. 64).



Черт. 64



Черт. 65

г) Ако завъртим параболата

$$y^2=2px,\quad z=0$$

около Ox, получаваме повърхнината

$$y^2+z^2=2px,$$

която се нарича *ротационен параболоид* (черт. 65).

§ 37. *Уравнение на сфера. Стереографска проекция*

Сфера наричаме множество от точки в пространството, равноотдалечени от дадена точка, наречена *център* на сферата. Дължината на разстоянието, на което отстои всяка точка от сферата до центъра ѝ, се нарича *радиус* на сферата.

Нека R е радиусът на сферата и $C(a, b, c)$ е центърът ѝ, зададен спрямо ортонормирана координатна система $Oxyz$ в пространството. Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от сферата, то дефиниционното равенство на сферата

$$|\overrightarrow{MC}|=R$$

е еквивалентно на следното координатно равенство:

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

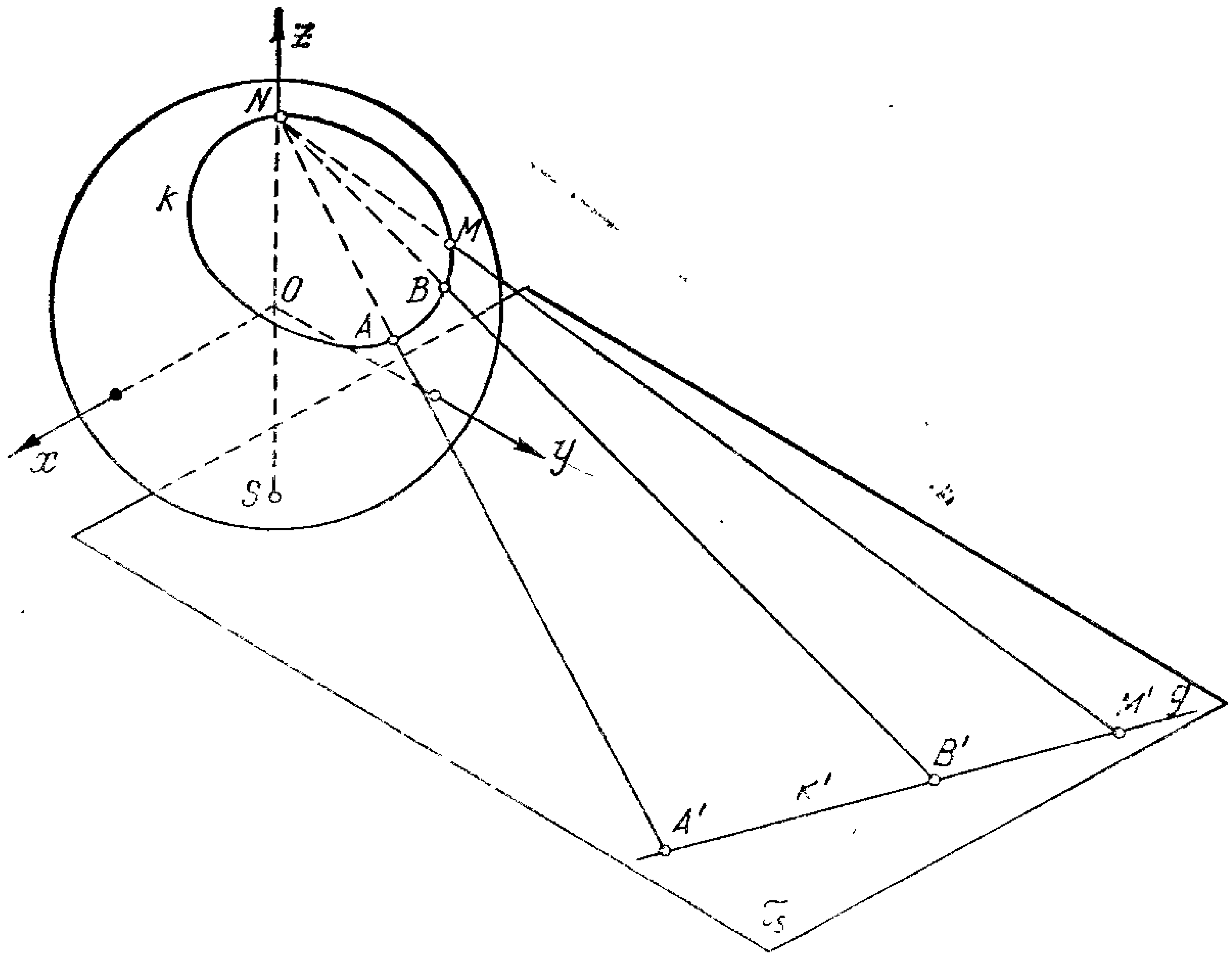
Това уравнение се нарича нормално уравнение на сферата. Като развием степените в (1) и направим приведение, получаваме уравнението

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0, \tag{2}$$

което е от следния вид:

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+p=0. \tag{3}$$

Както и при окръжността (§ 34), се доказва следната



Черт. 66

Теорема 1. *Уравнението* (3) *е уравнение на сфера точно когато е изпълнено условието*

$$l^2+m^2+n^2-4p>0. \tag{4}$$

На доказателството няма да се спираме. Ще отбележим само, че когато е изпълнено (3), сферата има център

$$C\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$$

и радиус

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2-4p}.$$

Ако центърът C на сферата съвпада с началото на координатната система, като положим $a=b=c=0$, (1) приема вида

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

и се нарича централно уравнение на сфера. Ако освен това $R=1$, сферата се нарича *единична*. Тя има уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{5}$$

Нека $S(0,0,-1)$, $N(0,0,1)$ са двойка диаметрално противоположни точки на единичната сфера S^2 с център началото $O(0,0,0)$ (черт. 66). Допирателната равнина τ_S към сферата в точката S има уравнение

$$\tau_S : z+1=0.$$

Нека $M(x,y,z)$ е точка от сферата, различна от N, и нека правата MN пресича равнината τ_S в точката $M'(x',y', z'=-1)$. В текущи координати ξ, η, ζ правата MN има параметрични уравнения

$$\xi=\lambda x,\quad \eta=\lambda y,\quad \zeta=1+\lambda(z-1)$$

(λ—параметър). За пробода ѝ M' с τ_S намираме

$$M'\left(x'=\frac{2x}{1-z},\quad y'=\frac{2y}{1-z},\quad z'=-1\right).$$

Изображението

$$\sigma : S^2-\{N\}\to\tau_S,$$

при което на точка M се съпоставя точката M', се нарича *стереографска проекция на сферата върху равнината.* Това съответствие е взаимно еднозначно. В сила е следната

Теорема 2. *Окръжност върху сферата през точката N (без точката N) се изобразява в права от равнината τ_S и обратно* (черт. 66).

Доказателството следва от факта, че равнината през точката N и правата g пресича сферата в окръжност през N.

Без доказателство ще изкажем следното твърдение: стереографската проекция преобразува окръжност върху сферата в окръжност в равнината и обратно.

§ 38. Полярни координати

В този параграф ще се запознаем накратко с полярните координати в равнината и в пространството.

Полярни координати в равнината. Предполагаме, че равнината е ориентирана. Една полярна координатна система в равнината е определена с един лъч Op (черт. 67). Ако M е точка в равнината, то полярните ѝ координати са определени по следния начин:

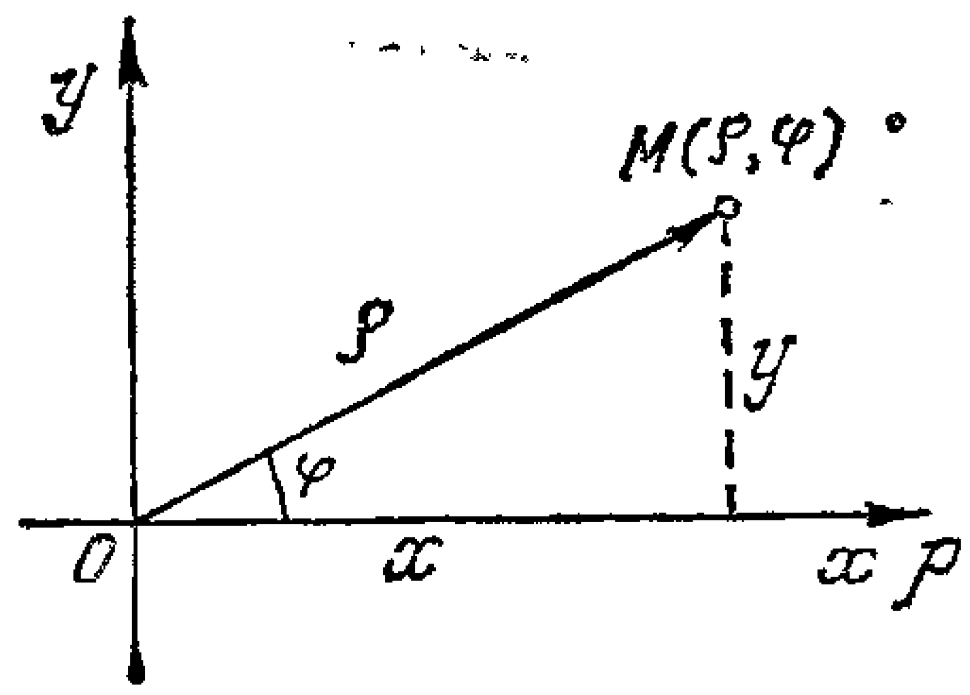
$$\rho := |\overrightarrow{OM}| \geqq 0,$$

$$\varphi=(\widehat{Op, \overrightarrow{OM}}).$$

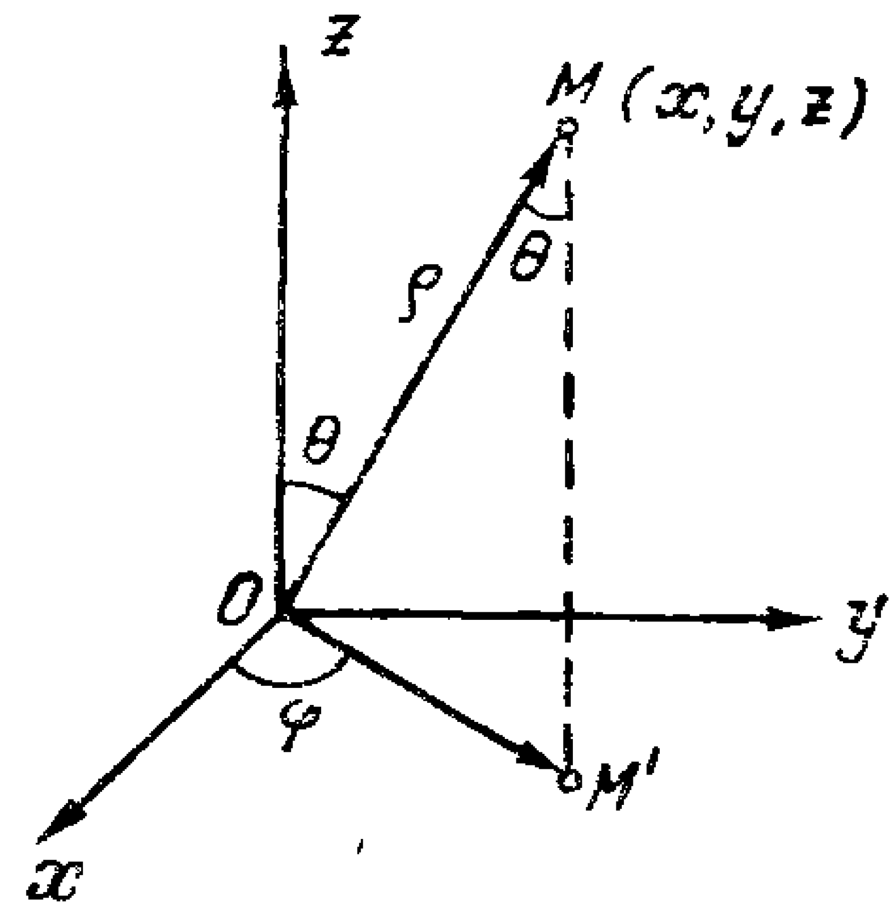
Има се пред вид ориентираният ъгъл между лъча Op и вектора $\overrightarrow{OM}$. Можем да се ограничим с главната му стойност $\varphi\in(-\pi, +\pi]$.

Нека Oxy е ортонормирана координатна система, като положителната посока на оста Ox съвпада с посоката на лъча Op. Считаме, че равнината е ориентирана с тази координатна система. Тогава връзката между декартовите координати x, y и полярните координати ρ, φ на една и съща точка M се дава с равенствата

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi. \tag{1}$$



Черт. 67



Черт. 68

Оттук намираме

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2}$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{\rho},\qquad \cos\varphi=\frac{x}{\rho}. \tag{3}$$

Полярни координати в пространството. Нека $Oxyz$ е ортонормирана координатна система в пространството и спрямо нея е дадена точка $M(x, y, z)$ (черт. 68). Величините

$$\rho=|\overrightarrow{OM}|\geq 0,$$

$$\varphi=\sphericalangle(Ox, \overrightarrow{OM'}),$$

$$\theta=\sphericalangle(Oz, \overrightarrow{OM}),$$

където M' е ортогоналната проекция на M върху Oxy, наричаме *полярни координати* на точката M. Понеже

$$|\overrightarrow{OM'}|=\rho\sin\theta,$$

то връзката между ортонормираните (декартовите) и полярните координати на една и съща точка M в пространството се дава с формулите

$$\begin{aligned} x&=\rho\sin\theta\cos\varphi,\\ y&=\rho\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=\rho\cos\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Точката M описва цялото пространство, ако оставим ρ, θ, φ да се изменят в следните граници:

$$\rho\in[0,\infty),\quad \theta\in[0,\pi],\quad \varphi\in[0, 2\pi).$$

Във връзка с полярните координати ще отбележим следното:

а) Окръжността с уравнение

$$x^2+y^2=R^2$$

притежава параметрично представяне

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi\qquad (\varphi\in[0, 2\pi)).$$

б) Елипсата с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

притежава параметрично представяне

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi\qquad (\varphi\in[0, 2\pi)).$$

в) Хиперболата

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

притежава параметрично представяне

$$x=a\operatorname{ch}\varphi,\quad y=b\operatorname{sh}\varphi,\qquad \varphi\in(-\infty, +\infty).$$

г) Сферата

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

притежава параметрично представяне

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\quad y=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=R\cos\theta,\qquad \theta\in[0, \pi],\ \varphi\in[0, 2\pi).$$

д) **Полярно уравнение на конусните сечения.** Да разгледаме полярната координатна система в равнината, определена с лъча, който има за начало фокуса F на едно конусно сечение и посоката на оста Ox (черт. 51, 52, 53). Ако (ρ, φ) са полярните координати на произволна точка от конусното сечение, то дефиниционното равенство (1) от § 33 може да се запише във вида

$$\rho=e(p+\rho\cos\varphi),$$

откъдето получаваме

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\varphi}. \tag{5}$$

Това е полярното уравнение на произволно конусно сечение. (При хипербола се има пред вид само клонът, който минава през върха A_2 черт. 53.)

Глава VI

Безкрайни елементи и хомогенни координати

§ 39. Въвеждане на безкрайните елементи и координати за тях

Оттук нататък досега познатите точки, прави и равнини в пространството R_3 ще наричаме *крайни*. Аналогично и за понятията точка и права в равнината R_2. Точките върху една права също ще наричаме крайни и правата ще означаваме понякога с R_1.

В този параграф ще въведем нови обекти—безкрайни точки, безкрайни прави и безкрайна равнина.

Нека $Oxyz$ е афинна координатна система в пространството и спрямо нея крайната точка M има координати (X, Y, Z) (досега употребяваните афинни координати в бъдеще ще означаваме с големи букви): $M(X, Y, Z)$. Както знаем, те са определени еднозначно при дадена точка и, обратно, дадените координати определят напълно точката. Тези координати ще наричаме *нехомогенни координати* на точката M.

Всяка четворка числа $(x, y, z, t \neq 0)$, за които

$$(1) \qquad X=\frac{x}{t}, \quad Y=\frac{y}{t}, \quad Z=\frac{z}{t} \qquad (t \neq 0),$$

наричаме четворка *хомогенни координати* на точката M. Ще пишем $M(x, y, z, t)$. Те са определени с точност до множител, т. е. четворките (x, y, z, t), $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ при $\lambda \neq 0$ определят една и съща точка. Очевидно, ако (X, Y, Z) са нехомогенните координати на точката M, то $(X, Y, Z, 1)$ са хомогенни координати на същата точка.

Нека g е права в пространството, определена с крайната точка $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ и вектор $\mathbf{p}(a, b, c)$, колинеарен на g. Тя има параметрични уравнения

$$(2) \qquad \begin{aligned} X&=X_0+as, \\ Y&=Y_0+bs, \\ Z&=Z_0+cs \end{aligned}$$

(s—параметър). Произволна точка $M(X,Y,Z)$, различна от $M_0(s\neq 0)$ има хомогенни координати

$$(3) \qquad x=\frac{X_0}{s}+a,\quad y=\frac{Y_0}{s}+b,\quad z=\frac{Z_0}{s}+c,\quad t=\frac{1}{s}.$$

В (3) да оставим $s\to\infty$. Тогава поне една от координатите (2) на точката $M(s)$ расте неограничено (ще отбележим, че във (2) X_0, Y_0, Z_0, a,b,c са постоянни величини). Като извършим в (3) граничния преход $s\to\infty$, получаваме четворката числа $(a,b,c,0)$. Това ни дава повод да дефинираме:

Към всяка права g присъединяваме още една точка, която означаваме с U_g и наричаме *безкрайна точка* на правата. Считаме, че тя има четворка хомогенни координати $U_g(a,в,c,0)$, определени с точност до множител на пропорционалност, различен от нула; при това a,b,c са координати на вектор $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$, колинеарен на правата.

Ако към правата g присъединим безкрайната ѝ точка U_g, получаваме *разширената евклидова права*

$$\bar{g}=g\cup\{U_g\}.$$

Значи по определение считаме, че $U_g\in\bar{g}$.

Множеството на всички безкрайни точки в пространството наричаме *безкрайна равнина* на пространството R_3. Ще я означаваме с Ω_2. Пространството R_3, допълнено с безкрайната равнина Ω_2, се нарича *разширено евклидово пространство*. Ще го означаваме с $\bar{R}_3$. Тогава в теоретико-множествен смисъл имаме равенството

$$\bar{R}_3=R_3\cup\Omega_2.$$

Следователно крайните точки имат нехомогенни и хомогенни координати, докато безкрайните точки имат само хомогенни координати. Хомогенните координати на всяка точка (крайна или безкрайна) са определени с точност до множител, различен от нула. Според казаното една точка с хомогенни координати (x,y,z,t) е безкрайна точно когато $t=0$ и крайна точно когато $t\neq 0$. При безкрайна точка $(x,y,z,0)$ тройката числа (x,y,z) са координати на вектор, имащ направлението на безкрайната точка.

От дадените определения следва, че точките $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ съвпадат точно когато са изпълнени равенствата

$$x_2=\lambda x_1,\quad y_2=\lambda y_1,\quad z_2=\lambda z_1,\quad t_2=\lambda t_1$$

при $\lambda\neq 0$.

Аналогично се въвеждат хомогенните координати на крайните точки, безкрайните точки и техните хомогенни координати в равнината R_2. В горните разглеждания просто изпускаме третите координати z, Z, c. Множеството от всички безкрайни точки (на правите в R_2) наричаме *безкрайна права* на равнината R_2. Ще я означаваме с Ω_1. Равнината R_2, допълнена с безкрайните точки на правите, лежащи в нея, се нарича *разширена евклидова равнина* $\bar{R}_2$, т. е.

$$\bar{R}_2=R_2\cup\Omega_1.$$

Досегашното означение g за права обикновено ще употребяваме и за разширената права $\bar{g}$, т. е. права, допълнена с безкрайната ѝ точка U_g. Съгласно направената уговорка считаме, че $U_g \in g$. Също така означението $\bar{\varepsilon}$ за крайна равнина ще употребяваме и за разширението ѝ ε. Следователно безкрайната права u_ε на равнината ε лежи в ε. При разглеждане на успоредни права и равнина ($g \parallel \varepsilon$) в пространството ще считаме, че $U_g \in u_\varepsilon$.

Теорема 1. *Успоредните прави имат (се пресичат в) една и съща безкрайна точка.*

Доказателство. Нека g_1, g_2 са успоредни прави в пространството. Тогава векторите $\mathbf{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{p}_2(a_2, b_2, c_2)$ върху тях са колинеарни и значи са изпълнени равенствата $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_2$, $c_2 = \lambda c_1$. За безкрайните точки на двете прави имаме $U_1(a_1, b_1, c_1, 0)$, $U_2(a_2, b_2, c_2, 0)$. Според определението четворките $(a_1, b_1, c_1, 0)$, $(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, 0)$ определят една и съща безкрайна точка. Теоремата е доказана.

Четворката $(0, 0, 0, 0)$ не е четворка хомогенни координати на никоя точка в пространството. Аналогично тройката $(0, 0, 0)$ не е тройка хомогенни координати на никоя точка в равнината. Най-после двойката $(0, 0)$ не е двойка хомогенни координати на никоя точка върху правата.

Безкрайната права в равнината и безкрайната равнина в пространството ще наричаме понякога *безкрайна фигура.*

§ 40. Уравнения на права и равнина в хомогенни координати

Нека ε е крайна равнина в R_3 със следното уравнение в нехомогенни координати X, Y, Z:

$$AX + BY + CZ + D = 0. \tag{1}$$

Знаем, че е изпълнено равенството

$$|A| + |B| + |C| \neq 0. \tag{2}$$

Като въведем хомогенни координати:

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t} \quad (t \neq 0),$$

уравнението (1) добива вида

$$Ax + By + Cz + Dt = 0, \tag{3}$$

където (x, y, z, t) са хомогенни координати на крайна точка от равнината. Уравнението (1) в нехомогенни координати е изобщо нехомогенно, докато уравнението (3) в хомогенни координати е в хомогенен вид. Това обяснява наименованието хомогенни и нехомогенни координати.

Ще докажем следната

Теорема 1. *Уравнението*

$$Ax + By + Cz + Dt = 0 \tag{3}$$

при условие, че е изпълнено

(4) $$|A|+|B|+|C|+|D|\neq 0,$$

е уравнение на точно една равнина в пространството $\bar{R}_3$. При това то се удовлетворява от координатите точно на всички крайни и безкрайни точки в равнината.

Доказателство. Да разгледаме най-напред случая, когато е изпълнено (2). Тогава (1) (съответно (3)) е уравнение на крайна равнина, което се удовлетворява от координатите на крайните точки на равнината и само от такива крайни точки. Остава да покажем, че то се удовлетворява и от безкрайните точки на равнината. За целта нека g е права, която е успоредна или лежи в равнината ε, и $\mathbf{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е вектор, колинеарен с правата (значи компланарен на равнината). Точката $U_g(\lambda, \mu, \nu, 0)$ е безкрайна точка на равнината. Тя лежи в ε. Нейните координати ще удовлетворяват уравнението на равнината точно когато е изпълнено

$$A\lambda+B\mu+C\nu=0.$$

Но това е условието за компланарност на вектора $\mathbf{p}$ и равнината ε (§ 26). С това първата част е доказана.

Да разгледаме сега случая, когато (2) не е изпълнено, т. е.

$$A=B=C=0.$$

Тогава поради (4) уравнението (3) приема вида

(5) $$t=0,$$

което показва, че координатите само на безкрайни точки удовлетворяват уравнението на равнината. Но (5) показва, че равнината не може да бъде крайна, значи е безкрайна и по определение тя се състои само от безкрайни точки. С това теоремата е доказана.

В равнината е в сила следната

Теорема 2. *Уравнението*

(6) $$Ax+By+Ct=0$$

при условие, че

$$|A|+|B|+|C|\neq 0,$$

е уравнение на точно една права в равнината; то се удовлетворява от координатите точно на всички крайни точки и на безкрайната точка на правата.

Накрая ще споменем следното твърдение: успоредните равнини имат (пресичат се във) една и съща безкрайна права. Доказателството е просто и го предоставяме на читателя.

§ 41. *Параметрично представяне на права в разширеното евклидово пространство*

Най-напред ще докажем следната

Теорема 1. *Ако точките* P_1, P_2, *са различни, по формулата*

$$(1) \qquad P=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2$$

при условие, че

$$(2) \qquad |\lambda_1|+|\lambda_2|\neq 0,$$

се получават всички точки върху правата P_1P_2 *когато* λ_1, λ_2 *вземат всички реални стойности.*

Преди да пристъпим към доказателството, ще направим някои забележки. Теоремата е в сила, когато разглеждаме правата (крайна или безкрайна) P_1P_2 в разширеното евклидово пространство, в разширената евклидова равнина или отделно сама за себе си. Ще проведем доказателството, предполагайки, че правата е в пространството. Тогава тя може да се представи като пресечница на две равнини:

$$P_1P_2: \quad \begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1t=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2t=0. \end{array}$$

Поне една от детерминантите, образувани от матрицата на коефициентите на двете уравнения, е различна от нула. Иначе ще излезе, че двете равнини съвпадат. Ако предположим, че $C_1D_2-C_2D_1\neq 0$, то можем да определим z, t:

$$(3) \qquad \begin{array}{l} z=\alpha x+\beta y, \\ t=\gamma x+\delta y. \end{array}$$

Тук $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ са някакви числа. Уравненията (3) представят също правата P_1P_2. Понеже точките P_1, P_2 лежат на правата, то изпълнени са

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} z_1=\alpha x_1+\beta y_1, & z_2=\alpha x_2+\beta y_2, \\ t_1=\gamma x_1+\delta y_1, & t_2=\gamma x_2+\delta y_2. \end{array}$$

Ще отбележим още, че равенството (1) може да се запише в координатна форма така:

$$(1') \qquad \begin{array}{l} x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, \\ y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2, \\ z=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2, \\ t=\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2. \end{array}$$

След тези подготвителни неща да пристъпим към доказателството.

Нека точката $P(x, y, z, t)$ лежи на правата P_1P_2. Тогава са в сила равенствата (3). Търсим ненулева двойка λ_1, λ_2 такава, че да важат (1'). В сила е неравенството $x_1y_2-x_2y_1\neq 0$. Действително, ако допуснем противното, ще получим $x_2=\lambda x_1, y_2=\lambda y_1$ при някакво $\lambda\neq 0$. От (4) следва още

$$z_2=\lambda(\alpha x_1+\beta y_1)=\lambda z_1, \quad t_2=\lambda(\gamma x_1+\delta y_1)=\lambda t_1,$$

което е невъзможно, тъй като $P_1\neq P_2$.

От първите две уравнения на (1′) определяме λ_1, λ_2. С така намерените стойности, като вземем пред вид (4), изчисляваме от (3)

$$z=\alpha x+\beta y=\alpha(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+\beta(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=$$
$$=\lambda_1(\alpha x_1+\beta y_1)+\lambda_2(\alpha x_2+\beta y_2)=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2.$$

Аналогично получаваме $t=\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2$. Така показахме, че за произволна точка $P \in P_1P_2$ съществуват числа λ_1, λ_2 такива, че важат (1′). Неравенството (2) е изпълнено, тъй като четворката координати (x, y, z, t) е ненулева.

Обратно, нека λ_1, λ_2 са произволни числа, подчинени на (2). Ще покажем, че точката с координати (x, y, z, t), удовлетворяващи формулите (1′), лежи на правата P_1P_2, т. е. в сила е (3). Действително

$$z-\alpha x-\beta y=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2-\alpha(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-\beta(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=$$
$$=\lambda_1(z_1-\alpha x_1-\beta y_1)+\lambda_2(z_2-\alpha x_2-\beta y_2)=0.$$

Аналогично се получава $t-\gamma x-\delta y=0$.

С това теоремата е доказана. Ще отбележим, че формулите (1′) са обобщение на формулите (3) от § 39. Действително, ако изберем P_1 да е крайната точка с координати $(X_0, Y_0, Z_0, 1)$, а P_2 да е безкрайната точка с координати $(a, b, c, 0)$ и положим $\lambda_1=\frac{1}{s}$, $\lambda_2=1$, то формулите (1′) приемат вида (39.3):

$$x=\frac{1}{s}X_0+a,$$
$$y=\frac{1}{s}Y_0+b,$$
$$z=\frac{1}{s}Z_0+c,$$
$$t=\frac{1}{s}.$$

Поради това формулата (1) или все едно формулите (1′) ще наричаме параметрично представяне на права в разширеното евклидово пространство.

Теорема 2. *Ако точките P_1, P_2, P_3 са различни и неколинеарни, по формулата*

$$P=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\lambda_3 P_3 \tag{5}$$

при условие, че

$$|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3|\neq 0, \tag{6}$$

се получават всички точки върху равнината $P_1P_2P_3$, когато $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вземат всички реални стойности.

Доказателството, което се базира на предната теорема, предоставяме на читателя. Формулата (5) наричаме параметрично представяне на равнина в разширеното евклидово пространство. Ще отбележим, че до тази формула може да се стигне и по друг начин (§ 50).

Глава VII

Комплексни елементи

§ 42. Комплексни точки, прави и равнини

Нека $Oxyz$ е афинна координатна система в $\bar{R}_3$. Всяка точка $M \in R_3$, чиито хомогенни афинни координати (x, y, z, t) са реални числа, наричаме *реална точка*. Досега работехме само с реални точки. *Комплексна точка* M наричаме наредена четворка комплексни числа (x, y, z, t), поне едно от които е различно от нула. Тази четворка наричаме хомогенни афинни координати на комплексната точка M и ги считаме определени с точност до множител $\rho \neq 0$ (сега ρ е комплексно число). Комплексната точка е крайна, ако $t \neq 0$. Тогава тя притежава нехомогенни координати, определени с (39.1). Комплексната точка е безкрайна, ако $t = 0$.

Нека A, B, C, D е ненулева четворка комплексни числа, определена с точност до ненулев множител. Множеството от всички комплексни точки (x, y, z, t), удовлетворяващи уравнението

$$Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

наричаме *комплексна равнина* в R_3. В частност и четирите коефициента в уравнението могат да бъдат реални числа.

Комплексна права наричаме съвкупността от общите точки на две комплексни равнини. За нея е в сила параметричното представяне (41.1), като сега коефициентите λ_1, λ_2 са комплексни числа.

Понятието комплексна точка ни дава възможност да дефинираме и понятието комплексен вектор. Наредена двойка от крайни комплексни точки $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ наричаме *комплексна насочена отсечка* $\overrightarrow{A_1A_2}$ с начало A_1 и край A_2. Нейни координати относно координатната система $Oxyz$ наричаме комплексните числа $\lambda = X_2 - X_1$, $\mu = Y_2 - Y_1$, $\nu = Z_2 - Z_1$; $\overrightarrow{A_1A_2}(X_2 - X_1,\ Y_2 - Y_1,\ Z_2 - Z_1)$. Понятието *комплексен вектор* се дефинира като множество от всички комплексни насочени отсечки, които имат равни координати.

Пространството $\bar{R}_3$ (равнината $\bar{R}_2$, правата $\bar{R}_1$), допълнено с комплексните елементи (точки, прави, равнини), ще означаваме с $C\bar{R}_3$ ($C\bar{R}_2$, $C\bar{R}_1$) и ще наричаме *комплексно разширено евклидово пространство* (*комплексна разширена евклидова равнина, комплексна разширена евклидова права*).

§ 43. *Изотропни елементи. Циклични точки*

Нека $Oxyz$ е (реална) ортонормирана координатна система в $C\bar{R}_3$ и спрямо нея са дадени два комплексни вектора $\mathbf{p}_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\mathbf{p}_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ „Скаларно произведение" на $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ наричаме комплексното число

$$(1) \qquad \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 := \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2.$$

Ако $\mathbf{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е комплексен вектор, дължина на $\mathbf{p}$ наричаме комплексното число

$$(2) \qquad |\mathbf{p}| := \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

като се взема коя да е от двете стойности на квадратния корен. Под разстояние между две крайни комплексни точки $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ разбираме комплексното число

$$(3) \qquad |\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}.$$

Два комплексни вектора $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ наричаме ортогонални точно когато тяхното „скаларно произведение" е нула:

$$(4) \qquad \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0.$$

Изотропен вектор наричаме комплексен ненулев вектор $\mathbf{p}(\lambda, \mu, \nu)$, чиято дължина е нула, т. е.

$$(5) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0.$$

Следователно един комплексен вектор е изотропен точно когато е перпендикулярен на себе си.

Ще отбележим, че изотропните вектори съществуват само в комплексна област, т. е. невъзможно е един реален вектор (вектор с реални координати) да е изотропен.

Нека векторите $\mathbf{p}_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\mathbf{p}_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ са колинеарни комплексни вектори, т. е. $\mathbf{p}_1 = \rho\mathbf{p}_2$, което означава, че координатите им са пропорционални:

$$\lambda_1 = \rho\lambda_2, \quad \mu_1 = \rho\mu_2, \quad \nu_1 = \rho\nu_2 \quad (\rho \neq 0).$$

Оттук следва равенството

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = \rho^2(\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2),$$

откъдето непосредствено получаваме твърдението

Теорема. *Два колинеарни ненулеви комплексни вектора са едновременно изотропни или неизотропни.*

Това твърдение ни дава възможност да дефинираме изотропна права и изотропна равнина. Именно права, върху която съществува изотропен вектор, се нарича *изотропна права*. Равнина, за която съществува нормален изотропен вектор, се нарича *изотропна равнина*.

Безкрайните точки на изотропните прави се наричат *циклични точки*. Нека $U_g(x, y, z, 0)$ е циклична точка, т. е. векторът $\mathbf{p}(x, y, z)$ е изотропен. Тогава е изпълнено условието

(6) $$x^2+y^2+z^2=0,$$

което е уравнение на повърхнина от втора степен (§ 32); нарича се *изотропен конус* (централна сфера с нулев радиус). От казаното е ясно, че в пространството $C\bar{R}_3$ цикличните точки са решения на системата

(7) $$x^2+y^2+z^2=0, \quad t=0.$$

Понеже първото уравнение е уравнение на повърхнина (сфера с нулев радиус), а второто — на безкрайната равнина, то (7) определят в безкрайната равнина една крива линия, която се нарича *абсолютна окръжност*.

Аналогични разсъждения важат и за комплексната равнина $C\bar{R}_2$, като навсякъде трябва да се положи $v=0$, $z=0$. Следователно цикличните точки в разширената комплексна евклидова равнина $C\bar{R}_2$ са решения на системата

(8) $$x^2+y^2=0, \; t=0.$$

Понеже $(x, y, t=0)$ са хомогенни координати (определени с точност до множител), като положим $x=1$ в (8), получаваме $y=\pm i$. Значи в комплексната равнина $C\bar{R}_2$ съществуват точно две различни комплексно спрегнати (т. е. координатите им са комплексно спрегнати) циклични точки с координати

(9) $$Y_1(1, i, 0), \quad Y_2(1, -i, 0) \quad (i^2=-1).$$

Те играят важна роля при теоретико-груповото изграждане на евклидовата геометрия.

§ 44. Аналитично представяне на еднаквостите

Нека в равнината R_2 са дадени два ортонормирани репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$. Дефинираме:

Изображението φ на евклидовата равнина R_2 в себе си:

$$\varphi: M \to M',$$

при което на точка M с координати (x, y) относно координатната система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ се съпоставя точката M' със същите координати, но спрямо координатната система $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$, наричаме *еднаквост* в равнината.

Точката M' се нарича образ на точката M, а точката M — *прообраз* на точката M'.

За да намерим аналитично представяне на еднаквостите в равнината, да предположим, че положението на втората система по отношение на първата се определя, както в § 7 (черт. 24):

$$\overrightarrow{OO'}=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_1'=\alpha_1^1\mathbf{e}_1+\alpha_2^1\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_2'=\alpha_1^2\mathbf{e}_1+\alpha_2^2\mathbf{e}_2.$$

Матрицата (α_i^j) е ортогонална. Нека точката M има координати (x, y) спрямо $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Значи

$$\overrightarrow{OM}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2.$$

Ако точката M' има същите координати спрямо $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$, в сила е

$$\overrightarrow{O'M'}=x\mathbf{e}_1'+y\mathbf{e}_2'.$$

Да приемем, че точката M' има координати (x', y') относно $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Тогава

$$\overrightarrow{OM'}=x'\mathbf{e}_1+y'\mathbf{e}_2.$$

Като вземем пред вид и векторното равенство

$$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M'},$$

получаваме

$$x'=a+\alpha_1^1x+\alpha_1^2y,$$
$$y'=b+\alpha_2^1x+\alpha_2^2y.$$

Поради ортогоналността на матрицата (α_i^j) тези равенства приемат вида

(1) $$x'=a+x\cos\alpha-\varepsilon y\sin\alpha,$$
$$y'=b+x\sin\alpha+\varepsilon y\cos\alpha \qquad (\varepsilon^2=1).$$

Това са формулите, които аналитично представят всяка еднаквост в равнината. Забелязваме, че всяка еднаквост в евклидовата равнина се определя с 3 параметъра a, b, α и числото $\varepsilon=\pm 1$. Ако $\varepsilon=+1$, еднаквостта се нарича *движение*. При $\varepsilon=-1$ еднаквостта се нарича *отражение*. Еднаквостта, определена с (1), ще означаваме с $P(a, b, \alpha; \varepsilon)$.

Ще подчертаем, че във формулите (1) за произволна еднаквост в равнината $R_2(x, y)$ са координати на произволна точка M, а (x', y') са координатите на нейния образ M' при еднаквостта. При това двете точки са отнесени спрямо една и съща ортонормирана координатна система.

Забележка. Формулите (1) за произволна еднаквост в равнината съвпадат по вид с формулите (7.8) за смяна на ортонормирана координатна система в равнината. Значи формулите (1) допускат двояко геометрично тълкуване: от една страна, те са формули за смяна на ортонормирана координатна система в равнината, а, от друга страна, те са формули, представящи аналитично еднаквостите в равнината.

Като знаем формулите (1) за преобразуване на точките, можем да намерим и формули за преобразуване на векторите. Както при извода на формулите (9) от § 7, намираме

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda \cos\alpha - \varepsilon\mu \sin\alpha, \\ \mu' &= \lambda \sin\alpha + \varepsilon\mu \cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Тук (λ, μ) са координатите на вектор $\mathbf{p}$, а (λ', μ') са координатите на неговия образ $\mathbf{p}'$ при еднаквостта (1).

Ще докажем следната

Теорема. *За всеки два ортонормирани репера съществува точно една еднаквост, която привежда единия репер в другия. Освен това всяка еднаквост преобразува ортонормиран репер също в ортонормиран.*

Доказателство. Нека $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ са два ортонормирани репера, като O' има координати (a, b), $\mathbf{e}_1'$ има координати $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\mathbf{e}_2'$ —$(-\varepsilon \sin\alpha, \varepsilon \cos\alpha)$ спрямо първата координатна система. Ясно е, че при $\varepsilon=+1$ двата репера са еднакво ориентирани, а при $\varepsilon=-1$ те са противоположно ориентирани. Разглеждаме еднаквостта (1), определена с параметрите a, b, α и числото ε. Съгласно (1) и (2) имаме

$$\begin{aligned} &O(0, 0) \text{ се преобразува в } O'(a, b), \\ &\mathbf{e}_1'(1, 0) \text{ се преобразува в } \mathbf{e}_1'(\cos\alpha, \sin\alpha), \\ &\mathbf{e}_2'(0,1) \text{ се преобразува в } \mathbf{e}_2'(-\varepsilon\sin\alpha, \varepsilon \cos\alpha). \end{aligned}$$

Разглежданата еднаквост притежава исканото свойство и не е трудно да се види, че тя е единствена. С това първата част е доказана.

Нека $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ е произволен ортонормиран репер в равнината и е дадена еднаквостта (1), т. е. числата a, b, α, ε са отнапред дадени. Тя преобразува точката $O(0, 0)$ в точката $O'(a, b)$, векторът $\mathbf{e}_1(1, 0)$ във вектора $\mathbf{e}_1'(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и векторът $\mathbf{e}_2'(0,1)$ във вектора $\mathbf{e}_2'(-\varepsilon\sin\alpha, \varepsilon\cos\alpha)$. Така определеният репер $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ относно $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ е ортонормиран и с това теоремата е доказана.

Следвайки същия път, можем да дефинираме и намерим аналитично представяне на еднаквостите в пространството.

Нека в пространството са дадени два ортонормирани репера: $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, като O' има координати (a, b, c), а векторът $\mathbf{e}_i'$ —координати $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)$, $i=1, 2, 3$, относно първия репер. Матрицата (α_i^j) е ортогонална. Нека точката M има координати (x, y, z), а точката M'—(x', y', z) спрямо $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Да приемем още, че точката M' има координати (x, y, z') спрямо втората координатна система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Ако на точката M съпоставим точката M', получаваме преобразуване в пространството, което аналитично се представя с формулите

$$\begin{aligned} x' &= a + \alpha_1^1 x + \alpha_1^2 y + \alpha_1^3 z, \\ y' &= b + \alpha_2^1 x + \alpha_2^2 y + \alpha_2^3 z, \\ z' &= c + \alpha_3^1 x + \alpha_3^2 y + \alpha_3^3 z. \end{aligned} \tag{3}$$

Това преобразуване наричаме *еднаквост в пространството.* Поради ортогоналността на матрицата (α_i^j) между нейните елементи съществуват 6 независими връзки (§ 8). Следователно една еднаквост в пространството зависи от 6 параметъра: това са величините a, b, c и 3 от числата α_i^j.

Аналогично на формулите (2) намираме, че еднаквостите в пространството преобразуват вектора **p** с координати (λ, μ, ν) във вектора **p′** с координати (λ', μ', ν') (и двата вектора, отнесени спрямо една и съща ортонормирана система в пространството), като

$$
\begin{aligned}
\lambda' &= \alpha_1^1\lambda + \alpha_1^2\mu + \alpha_1^3\nu,\\
\mu' &= \alpha_2^1\lambda + \alpha_2^2\mu + \alpha_2^3\nu,\\
\nu' &= \alpha_3^1\lambda + \alpha_3^2\mu + \alpha_3^3\nu.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Доказаната теорема за равнината важи и за пространството.

§ 45. *Геометрична интерпретация на цикличните точки в равнината*

Да напишем уравненията (1) от предния параграф в хомогенен вид. За целта полагаме

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}; \quad X' = \frac{x'}{t'}, \quad Y' = \frac{y'}{t'}.$$

Като означим с ρ отношението $\frac{t}{t'}$, получаваме

$$
\begin{aligned}
\rho x' &= at + x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha,\\
\rho y' &= bt + x\sin\alpha + \varepsilon y \cos\alpha, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \ (\rho \neq 0).\\
\rho t' &= t,
\end{aligned} \tag{1}
$$

Преобразуването (44.1) се отнасяше за крайните точки в равнината R_2. Формулите (1) ни дават повод да дефинираме преобразуването

$$P(a,\ b,\ \alpha;\ \varepsilon) : \overline{R}_2 \to \overline{R}_2$$

в разширената евклидова равнина, при което на точка $M(x, y, t)$ се съпоставя точката $M'(x', y', t')$ чрез (1). Допускайки и комплексни елементи, пак (1) ни дава възможност да дефинираме преобразуването

$$P(a,\ b,\ \alpha;\ \varepsilon) : C\overline{R}_2 \to C\overline{R}_2$$

в комплексната разширена евклидова равнина.

Сега вече можем да формулираме следната теорема, с която се дава една геометрична интерпретация на цикличните точки:

Теорема. *Цикличните точки са единствените двойни точки при всяко движение в равнината. Всяко отражение в равнината сменя цикличните точки.*

Доказателство. Най-напред от (1) следва, че безкрайната права $t=0$ е двойна, т. е. тя се преобразува с себе си (като цяло). Действително коя да е безкрайна точка $(x, y, 0)$ се преобразува в безкрайна точка $(x', y', 0)$. За образа на цикличната точка $J_1(1, i, 0)$ имаме

$$\begin{aligned}\rho x' &= \cos\alpha - \varepsilon i \sin\alpha,\\ \rho y' &= \sin\alpha + \varepsilon i \cos\alpha = \varepsilon i(\cos\alpha - \varepsilon i \sin\alpha).\end{aligned}$$

Следователно образът J_1' на цикличната точка J_1 има координати $(1, \varepsilon i, 0)$ (съкратили сме на комплексното число $\cos\alpha - \varepsilon i \sin\alpha \neq 0$). Аналогично за образа на цикличната точка $J_2(1, -i, 0)$ получаваме $J_2'(1, -\varepsilon i, 0)$. Тези резултати показват, че всяко движение $(\varepsilon = 1)$ запазва цикличните точки, т. е. те са двойни при всяко движение. Всяко отражение $(\varepsilon = -1)$ сменя цикличните точки.

Остава да покажем, че цикличните точки са единствените двойни точки при всяко движение $P(a, b, \alpha; 1)$. Действително нека $M(x, y, t)$ е двойна точка, съвпадаща с образа си $M'(x', y', t')$ при произволно движение $(\varepsilon = 1)$. Значи изпълнени са равенствата

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad t' = \lambda t$$

при някакво $\lambda \neq 0$. Като заместим в (1), получаваме равенствата

$$\begin{aligned}\rho\lambda x &= at + x\cos\alpha - y\sin\alpha,\\ \rho\lambda y &= bt + x\sin\alpha + y\cos\alpha,\\ \rho\lambda t &= t.\end{aligned} \tag{2}$$

Последното равенство показва, че трябва да разглеждаме два случая $t=0$ и $t \neq 0$.

Нека $t=0$. От (2) следва

$$(\rho\lambda)^2\,(x^2+y^2) = x^2+y^2.$$

Ако приемем, че $\rho\lambda = \pm 1$, следва, че (2) не могат да бъдат верни за произволно α. Остава да приемем, че $x^2+y^2=0$, което заедно с $t=0$ определя цикличните точки.

Нека $t \neq 0$. Тогава $\rho\lambda = 1$, което показва, че първите две равенства на (2) не могат да бъдат верни за произволни a, b, α. Следователно този случай е невъзможен.

С това теоремата е доказана.

Глава VIII

Двойно отношение

§ 46. *Двойно отношение на четири точки*

Нека върху една права g са дадени четири различни точки P_1, P_2, P_3, P_4. Както знаем от § 41, съществуват ненулеви двойки числа (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2) такива, че

$$P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \tag{1}$$
$$P_4 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2.$$

Числото

$$\delta = \frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2} \tag{2}$$

се нарича *двойно отношение* на наредената четворка точки P_1, P_2, P_3, P_4. Използва се означението $\delta = (P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Ще изведем една обща формула за двойното отношение. Нека върху правата g, на която лежат точките P_s $(s=1, 2, 3, 4)$, са дадени две различни точки A и B. Съгласно формулата (41.1) за параметрично представяне на права в сила са представянията

$$P_s = \alpha_s A + \beta_s B \quad (s=1, 2, 3, 4), \tag{3}$$

като α_s, β_s са някакви коефициенти, подчинени на неравенството $|\alpha_s| + |\beta_s| \neq 0$. Означаваме

$$(st) := \begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \alpha_t & \beta_t \end{vmatrix} = \alpha_s \beta_t - \alpha_t \beta_s \quad (s, t = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Очевидно имаме

$$(s, s) = 0, \ (st) = -(ts). \tag{5}$$

Освен тези тривиални тъждества в сила е тъждеството

$$(12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = 0, \tag{6}$$

което се проверява непосредствено.

Сега ще докажем общата формула

(7) $$\delta=(P_1P_2P_3P_4)=\frac{(13)}{(23)}\cdot\frac{(24)}{(14)}.$$

Доказателство. От системата

$$P_1=\alpha_1A+\beta_1B,$$
$$P_2=\alpha_2A+\beta_2B$$

намираме

$$A=\frac{\beta_2}{(12)}P_1-\frac{\beta_1}{(12)}P_2,$$

$$B=-\frac{\alpha_2}{(12)}P_1+\frac{\alpha_1}{(12)}P_2.$$

Получените представяния за A и B заместваме в (3) за P_3, P_4. След преработка получаваме

$$P_3=\frac{(32)}{(12)}P_1-\frac{(31)}{(12)}P_2,$$

$$P_4=\frac{(42)}{(12)}P_1-\frac{(41)}{(12)}P_2.$$

Съгласно определението (2) имаме

$$\delta=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}=\frac{(13)}{(12)}\left[-\frac{(24)}{(12)}\right]\cdot\left[-\frac{(12)}{(23)}\right]\cdot\frac{(12)}{(14)}=\frac{(13)}{(23)}\cdot\frac{(24)}{(14)},$$

с което доказателството на (7) е завършено.

В сила е следната

Теорема 1. *Ако разместим елементите на първата или на втората двойка точки, полученото двойно отношение е реципрочно на старото.*

Ако разместим втората с третата или четвъртата с първата точка, двойното отношение допълва до единица старото.

Доказателство. Доказахме, че

$$\delta=(P_1P_2P_3P_4)=\frac{(13)}{(23)}\cdot\frac{(24)}{(14)}.$$

Съгласно тази формула имаме

$$(P_2P_1P_3P_4)=\frac{(23)}{(13)}\cdot\frac{(14)}{(24)}=\frac{1}{\delta}.$$

Също така

$$(P_1P_2P_4P_3)=\frac{(14)}{(24)}\cdot\frac{(23)}{(13)}=\frac{1}{\delta},$$

с което първата част е доказана.

Ще докажем, че

$$(P_1P_3P_2P_4)=1-(P_1P_2P_3P_4)=1-\delta,$$

което съгласно приетите означения е равносилно на равенството

$$\frac{(12)}{(32)}\cdot\frac{(34)}{(14)}+\frac{(13)}{(23)}\cdot\frac{(24)}{(14)}=1$$

или на

$$(12)(34)-(13)(24)=(32)(14).$$

Последното обаче е равносилно на (6), с което доказателството на теоремата е завършено.

От общата формула (7) и от теоремата следва, че двойното отношение на четири различни точки е напълно определено и не приема стойностите 0 или 1. Това следва от обстоятелството, че детерминантите (st) са различни от нула, а ако допуснем, че $(P_1P_2P_3P_4)=1$, ще следва, че $(P_1P_3P_2P_4)=1-1=0$, което е невъзможно.

От четири различни точки могат да се образуват $24=4!$ наредени четворки точки, на които отговарят 24 двойни отношения. Последните се разделят в 6 групи от по 4 двойни отношения, като двойните отношения във всяка група имат една и съща стойност. По-точно, ако $\delta=(P_1P_2P_3P_4)$, то

$$(P_1P_2P_3P_4)=(P_2P_1P_4P_3)=(P_4P_3P_2P_1)=(P_3P_4P_1P_2)=\delta,$$

$$(P_2P_1P_3P_4)=(P_1P_2P_4P_3)=(P_4P_3P_1P_2)=(P_3P_4P_2P_1)=\frac{1}{\delta},$$

$$(P_1P_3P_2P_4)=(P_3P_1P_4P_2)=(P_4P_2P_3P_1)=(P_2P_4P_1P_3)=1-\delta,$$

1234 $$(P_2P_3P_1P_4)=(P_3P_2P_4P_1)=(P_4P_1P_3P_2)=(P_1P_4P_2P_3)=\frac{\delta-1}{\delta},$$

$$(P_3P_1P_2P_4)=(P_1P_3P_4P_2)=(P_4P_2P_1P_3)=(P_2P_4P_3P_1)=\frac{1}{1-\delta},$$

$$(P_3P_2P_1P_4)=(P_3P_2P_4P_1)=(P_4P_1P_2P_3)=(P_1P_4P_3P_2)=\frac{\delta}{\delta-1}.$$

Нека върху крайната права g са дадени четирите различни точки $P_s(x_s, t_s)$ $(s=1, 2, 3, 4)$ със своите хомогенни афинни координати. Означаваме с $O(0, 1)$ и $U(1, 0)$ съответно координатното начало на афинната система върху g и безкрайната точка на g. Непосредствено се проверява равенството

$$P_s=x_sU+t_sO.$$

Като приложим общата формула (7), можем да изразим двойното отношение чрез хомогенните афинни координати на точките върху права. Получаваме

(8) $$\delta=(P_1P_2P_3P_4)=\frac{x_1t_3-x_3t_1}{x_2t_3-x_3t_2}\cdot\frac{x_2t_4-x_4t_2}{x_1t_4-x_4t_1}.$$

Нека сега четирите точки са крайни. Като преминем в нехомогенни координати $x_s=X_s$, $t_s=1$ $(s=1, 2, 3, 4)$, последната формула приема вида

(9) $$\delta=\frac{X_1-X_3}{X_2-X_3}\cdot\frac{X_2-X_4}{X_1-X_4}=\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}}\cdot\frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_4}},$$

като с $\overline{P_iP_s}$ сме означили координатата на $\overrightarrow{P_iP_s}$ върху правата g, превърната в ос.

Като си спомним, че простото отношение

$$(P_1P_2P_3)=\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}},$$

от (9) получаваме, че двойното отношение е отношение на две прости отношения:

$$(10)\qquad (P_1P_2P_3P_4)=\frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)},$$

откъдето може да се обясни и терминът „двойно отношение".

От (8) се вижда, че ако P_4 е безкрайната точка U на правата, а P_1, P_2, P_3 са крайни точки, то

$$(11)\qquad (P_1P_2P_3U)=(P_1P_2P_3)=\frac{X_1-X_3}{X_2-X_3}.$$

Досега предполагахме, че четирите точки са различни. Можем да се освободим от това ограничение, като дефинираме двойно отношение на четири колинеарни точки с помощта на формулата (7). Всички твърдения остават в сила с изключение на това, че сега двойното отношение може да бъде 0, 1 или ∞. Последният случай е налице точно когато $P_2=P_3$ или $P_1=P_4$.

Накрая ще изкажем едно твърдение, което ще използваме при въвеждане на проективните координати.

Теорема 2. *Нека върху една права са дадени три точки P_1, P_2, P_3 и числото δ. Съществува точно една точка P_4 върху правата такава, че $(P_1P_2P_3P_4)=\delta$.*

Доказателството следва от формула (8).

§ 47. Теорема на Пап. Двойно отношение на четири прави

Нека в ориентираната равнина α са дадени крайните реални точки P_1, P_2, P_3, P_4, лежащи на правата g, и точката $S\overline{\in} g$ (черт. 69). Означаваме с h разстоянието от S до g; насочваме g по такъв начин, че когато една точка P се движи в положителната посока на g, то правата SP се върти в положителна посока около S. Да означим с g_s правата $SP_s (s=1, 2, 3, 4)$. Прилагаме формулата (46.9):

$$(P_1P_2P_3P_4)=\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}}\cdot\frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_4}}=\frac{\frac{1}{2}h\overline{P_1P_3}}{\frac{1}{2}h\overline{P_2P_3}}\cdot\frac{\frac{1}{2}h\overline{P_2P_4}}{\frac{1}{2}h\overline{P_1P_4}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}|SP_1||SP_3|\sin(\widehat{g_1,g_3})}{\frac{1}{2}|SP_2||SP_3|\sin(\widehat{g_2,g_3})}\cdot\frac{\frac{1}{2}|SP_2||SP_4|\sin(\widehat{g_2,g_4})}{\frac{1}{2}|SP_1||SP_4|\sin(\widehat{g_1,g_4})}.$$

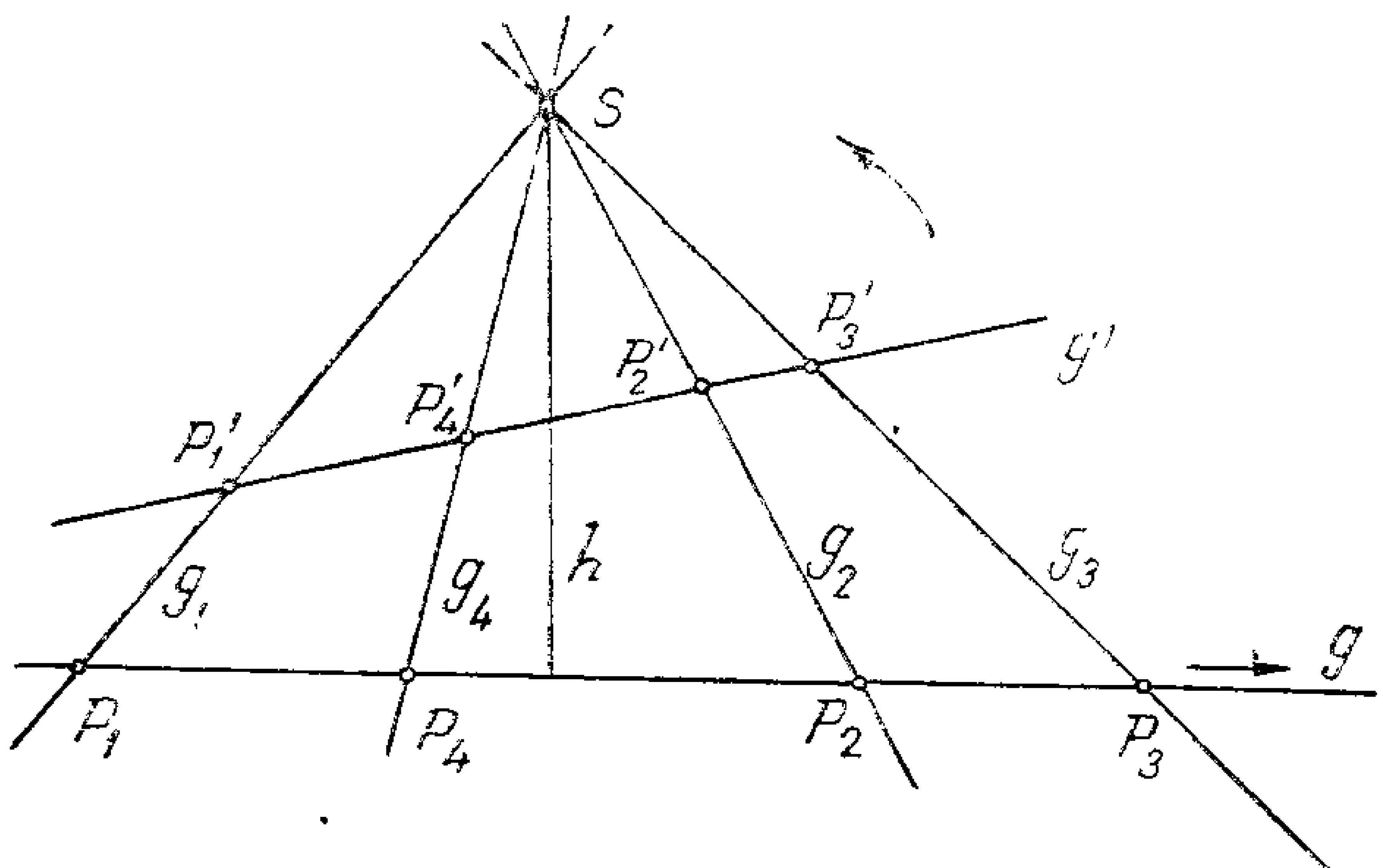
Получаваме

$$(1) \qquad (P_1P_2P_3P_4)=\frac{\sin(\widehat{g_1g_3})}{\sin(\widehat{g_2g_3})}\cdot\frac{\sin(\widehat{g_2g_4})}{\sin(\widehat{g_1g_4})}.$$

Да пресечем правите g_1, g_2, g_3, g_4 с друга права g', неминаваща през S, и да означим пресечните точки с P_1', P_2', P_3', P_4'. Като пресметнем двойното отношение $(P_1'P_2'P_3'P_4')$, отново получаваме

$$(P_1'P_2'P_3'P_4')=\frac{\sin(\widehat{g_1g_3})}{\sin(\widehat{g_2g_3})}\cdot\frac{\sin(\widehat{g_2g_4})}{\sin(\widehat{g_1g_4})}.$$

С това доказахме следната



Черт. 69

Теорема на Пап. *Нека точките P_1, P_2, P_3, P_4 лежат на правата g, P_1', P_2', P_3', P_4' лежат на правата g', като правите g, g' не минават през пресечната точка S на правите P_sP_s' $(s=1, 2, 3, 4)$. В сила е равенството*

$$(2) \qquad (P_1P_2P_3P_4)=(P_1'P_2'P_3'P_4').$$

Теоремата показва, че двойното отношение $(P_1P_2P_3P_4)$ зависи от правите g_1, g_2, g_3, g_4, но не и от правата g, с която те са пресечени. Това ни дава възможност да дефинираме *двойно отношение на четири прави* от един сноп прави посредством равенството

$$(3) \qquad (g_1g_2g_3g_4):=(P_1P_2P_3P_4).$$

Сега ще изразим двойното отношение на четири прави чрез ъгловите им коефициенти относно ортонормирана координатна система.

Избираме общата точка на правите g_s $(s=1, 2, 3, 4)$ за координатно начало O на една ортонормирана координатна система в равнината на правите. Декартовите уравнения на правите са

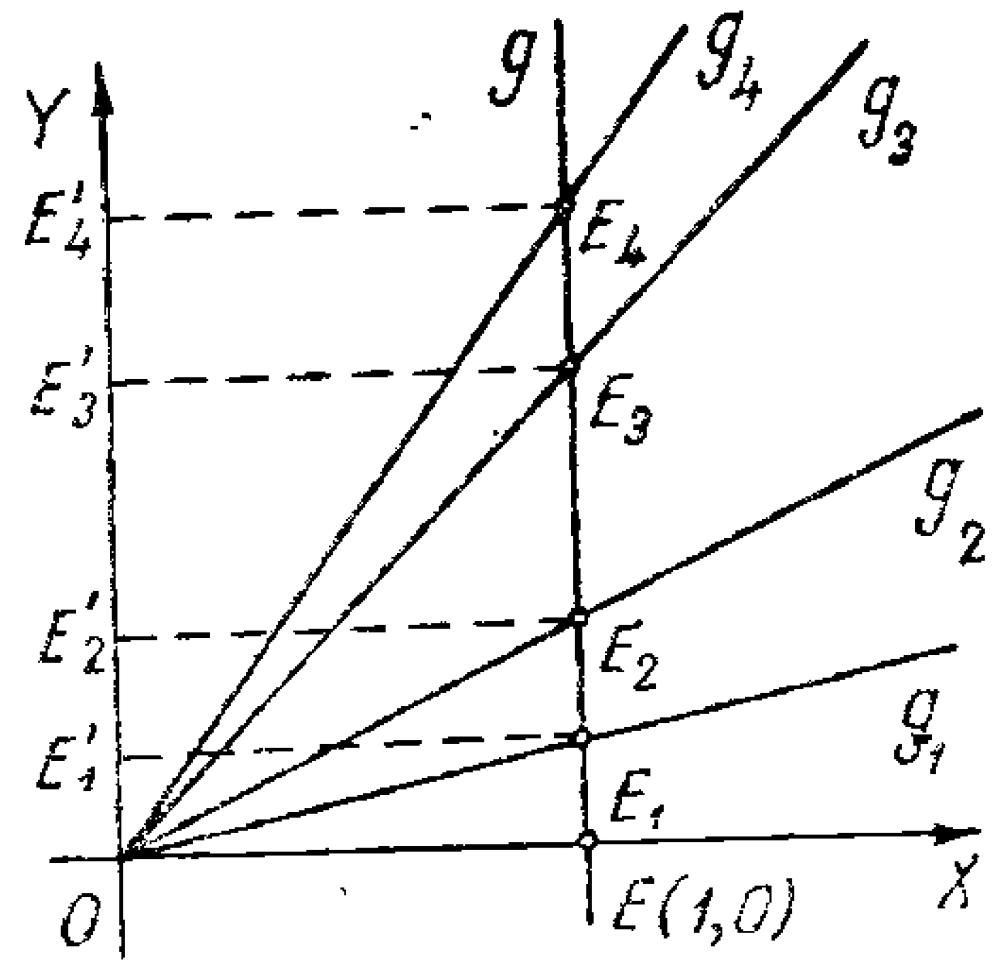
$$g_s: Y=k_sX \quad (s=1, 2, 3, 4).$$

Пресичаме правите g_s с правата $g: X=1$; получаваме точките $E_s(1, k_s)$. По определение имаме

$$(g_1g_2g_3g_4):=(E_1E_2E_3E_4).$$

Сега прилагаме (46.9) и известната теорема на Талес от планиметрията (правата $E_sE_s' \parallel OX$):

$$(E_1E_2E_3E_4)=\frac{\overline{E_1E_3}}{\overline{E_2E_3}}\cdot\frac{\overline{E_2E_4}}{\overline{E_1E_4}}=\frac{\overline{E_1'E_3'}}{\overline{E_2'E_3'}}\cdot\frac{\overline{E_2'E_4'}}{\overline{E_1'E_4'}}=(E_1'E_2'E_3'E_4').$$



Черт. 70

Като вземем пред вид, че E_s' има координата k_s спрямо оста OY, следва желаната формула

(4) $$(g_1g_2g_3g_4)=\frac{k_3-k_1}{k_3-k_2}\cdot\frac{k_4-k_2}{k_4-k_1}.$$

§ 48. Хармонични групи

Наредената четворка колинеарни точки P_1, P_2, P_3, P_4 се нарича *хармонична група*, ако двойното отношение

(1) $$(P_1P_2P_3P_4)=-1.$$

От формулата (46.9) следва твърдението:

Ако групата P_1, P_2, P_3, P_4 е хармонична, то двойката точки P_1, P_2 „дели" двойката точки P_3, P_4.

Действително допускането, че P_1, P_2 са между точките P_3, P_4 или вън от отсечката P_3P_4, води до противоречие с отрицателния знак на двойното отношение на хармонична група (черт. 71).

Ще докажем няколко свойства на хармоничните групи.

Свойство 1. Нека P_1, P_2, P_3, P_4 е хармонична група, $P_1 \neq P_2$ и точката P_3 клони към P_2. Тогава P_4 също клони към P_2.

Доказателство. Можем да излезем от представянията (§ 41)

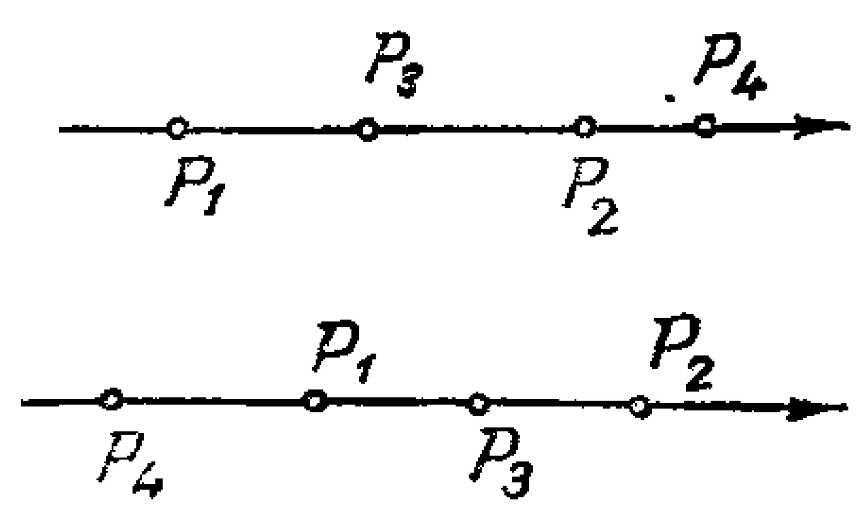
$$P_3=\lambda P_1+P_2,$$
$$P_4=\mu P_1+P_2.$$

Като приложим определението за двойно отношение и вземем пред вид, че групата е хармонична, достигаме до равенството

$$\lambda+\mu=0.$$

Ако $P_3 \to P_2$, т. е. $\lambda \to 0$, то и $\mu \to 0$, т. е. $P_4 \to P_2$.

Свойство 2. *Нека P_1, P_2, P_3 са колинеарни крайни точки и U е безкрайната точка на правата им. Групата P_1, P_2, P_3, U е хармонична точно когато P_3 е среда на отсечката P_1P_2.*



Черт. 71

Доказателство. Прилагаме формулата (46.11):

$$(P_1P_2P_3U)=\frac{X_1-X_3}{X_2-X_3}.$$

Ако $(P_1P_2P_3U)=-1$, получаваме $X_3=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ и обратно.

Свойство 3. *Две крайни пресекателни прави g_1, g_2 са перпендикулярни точно когато*

$$(g_1g_2j_1j_2)=-1,$$

където j_1, j_2 са изотропните прави през пресечната точка на g_1 и g_2.

Доказателство. По определение безкрайните точки на изотропните прави са циклични точки $\mathfrak{J}_{1,2}(1, \pm i, 0)$. Ако изберем пресечната точка на g_1 и g_2 за начало на една ортонормирана координатна система, то изотропните прави имат ъглови коефициенти $+i$, $-i$. Да означим с k_1 и k_2 ъгловите коефициенти на правите g_1, g_2. Формулата (4) от предния параграф, приложена за правите g_1, g_2, j_1, j_2, дава

$$\delta=(g_1g_2j_1j_2)=\frac{i-k_1}{i-k_2}\cdot\frac{-i-k_2}{-i-k_1}.$$

С леки пресмятания се убеждаваме, че $\delta=-1$ е еквивалентно на равенството $k_1k_2=-1$, с което свойството е доказано.

Свойство 4. *Нека g_1, g_2 са крайни пресекателни прави и l_1, l_2 са техните ъглополовящи. Тогава*

$$(g_1g_2l_1l_2)=-1.$$

Доказателството се извършва, като се пресекат правите g_1, g_2, l_1 с права, успоредна на l_2, и се приложи свойство 2.

Глава IX

Проективни координати и проективни координатни системи

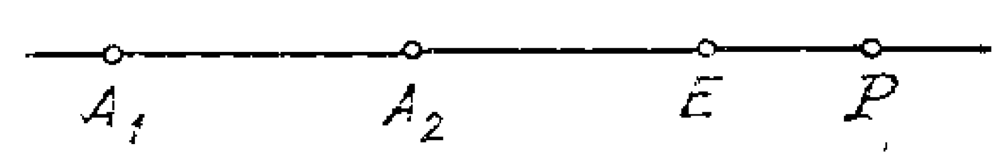
§ 49. Проективни координати на точките върху права

Една *проективна координатна система* K (проективен репер) върху крайна права се състои от три различни точки A_1, A_2, E върху правата. Означаваме $K=[A_1, A_2; E]$. Точката A_1 наричаме *изключена точка*, A_2 — *нулева точка* и E — *единична точка* на системата. Ако P е произволна точка върху правата, определено е двойното отношение

$$X_1 : =(A_1A_2EP), \tag{1}$$

което наричаме *нехомогенна проективна координата* на точката P относно системата K. Нека отбележим, че при дадена система K и дадено число X_1 положението на точката P е напълно определено съгласно теорема 2 от § 46. Така че числото X_1 с право може да бъде наричано координата.

Ако в (1) поставим $P=A_1$, получаваме $X_1=\infty$; ако $P=A_2$, $X_1=0$; ако $P=E$, $X_1=1$. Тези резултати, които следват от формулата (46.7), обясняват термините изключена, нулева и единична точка.



Черт. 72

Ако точката $P\neq A_1$ и X_1 е нейната нехомогенна проективна координата, всеки две числа x_1, x_2, за които

$$\frac{x_1}{x_2}=X_1 \quad (x_2\neq 0), \tag{2}$$

наричаме *хомогенни проективни координати* на точката P относно системата K. Ако $P=A_1$, нейни хомогенни проективни координати е всяка двойка $(x_1\neq 0,\ x_2=0)$, специално двойката $(1, 0)$. За A_2 можем да вземем двойката ($x_1=0$, $x_2\neq 0$) или (0, 1), за E — двойката (1, 1). Ясно е, че хомогенните проективни координати са определени с точност до множител, различен от нула (както беше и при хомогенните афинни координати). Изборът на определен множител, с който се умножават хомогенните координати на една точка, се нарича *нормиране* (координатите) на точката.

От формулата (41.1) следва равенството

$$E=\lambda A_1+\mu A_2.$$

Тъй като $E\neq A_1, A_2$, то $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$. Да предположим, че A_1 има четворката хомогенни афинни координати (x_1, y_1, z_1, t_1). Тогава същата точка има и четворката хомогенни афинни координати $(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1)$. Въз основа на това в горното равенство вместо λA_1 ще пишем A_1. Аналогично и за A_2. Това означава, че като извършим подходящо нормиране на хомогенните афинни координати на точките A_1, A_2, последното равенство може да приеме вида

$$E=A_1+A_2. \tag{3}$$

Ще докажем следната

Лема. *Ако е в сила равенството*

$$P=x_1A_1+x_2A_2, \tag{4}$$

то (x_1, x_2) *са хомогенни проективни координати на* P *относно* $K=[A_1, A_2; E]$. *Обратно, ако* (x_1, x_2) *са хомогенни проективни координати на* P *относно* K, *то в сила е* (4).

Доказателство. Като приложим дефинициите за двойно отношение и за проективни координати, от (3), (4) следва, че x_1 е нехомогенната проективна координата на P. Тогава (x_1, x_2) са хомогенни проективни координати на P относно K.

Обратно, нека (x_1, x_2) са хомогенни проективни координати на P и да предположим, че е в сила равенството

$$P=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2.$$

Тогава

$$\frac{x_1}{x_2}=(A_1A_2EP)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

и следват равенствата $\lambda_1=\rho x_1$, $\lambda_2=\rho x_2$ $(\rho\neq 0)$. Имаме

$$P=\rho(x_1A_1+x_2A_2).$$

С подходящо нормиране координатите на точката P достигаме до (4).

Забележка. С формулата (4) параметрично се представя правата A_1A_2 (§ 41).

Теорема 1. *Афинните координати върху една права са специални проективни координати или, с други думи, проективните координати са обобщение на афинните.*

Доказателство. Нека H — Oe е координатна ос върху една права, E е единичната ѝ точка, U — безкрайната точка на правата. Разглеждаме проективната координатна система $[U, O; E]$. Спрямо афинната координатна система H точките U, O, E имат съответно координати (1, 0), (0, 1), (1, 1). Нека P има координати (h_1, h_2) спрямо H. Като приложим (46.8), получаваме

$$(UOEP)=\frac{h_1}{h_2}\cdot$$

Това равенство показва, че (h_1, h_2) са хомогенни проективни координати на P относно проективната координатна система $[U, O; E]$. С това доказателството на теоремата е завършено.

Теорема 2. *Нека са дадени две проективни координатни системи $K=[A_1, A_2; E]$, $K'=[A_1', A_2'; E']$ върху една и съща права. Съществуват числата a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, подчинени на условието*

$$\det(a_{ij})\neq 0, \tag{5}$$

такива, че са в сила равенствата

$$\begin{aligned}\rho x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \rho x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\end{aligned} \qquad (\rho\neq 0), \tag{6}$$

като (x_1, x_2) са координатите на точка P спрямо K, а (x_1', x_2') са координатите на същата точка P спрямо K'. В нехомогенни координати равенствата (6) са еквивалентни на равенството

$$X_1'=\frac{a_{11}X_1+a_{12}}{a_{21}X_1+a_{22}}\cdot \tag{7}$$

Доказателство. Да предположим, че точките A_1', A_2', E', P имат относно K съответно координати (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (x_1, x_2). Значи имаме представянията

$$\begin{aligned}A_1'&=a_1A_1+a_2A_2;\\ A_2'&=b_1A_1+b_2A_2,\\ E'&=c_1A_1+c_2A_2,\\ P&=x_1A_1+x_2A_2.\end{aligned}$$

Да приемем, че точката P има координати (x_1', x_2') относно K'. Като приложим определението (1) за проективна координата и формулата (46.7), получаваме

$$X_1'=\frac{x_1'}{x_2'}=(A_1'A_2'E'P)=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{b_1c_2-b_2c_1}\cdot\frac{b_1x_2-b_2x_1}{a_1x_2-a_2x_1}\cdot$$

Като положим

$$\begin{aligned}a_{11}&:=-b_2(a_1c_2-a_2c_1), \quad a_{12}:=b_1(a_1c_2-a_2c_1),\\ a_{21}&:=-a_2(b_1c_2-b_2c_1), \quad a_{22}:=a_1(b_1c_2-b_2c_1),\end{aligned}$$

намираме (7), откъдето следват и (6). При това изпълнено е условието (5). Това следва от равенството

$$\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_2 - b_2c_1),$$

като се вземе пред вид, че точките A_1', A_2', E' са различни.

Теоремата е доказана. В сила е и нейната обратна

Теорема 3. *Нека $K=[A_1, A_2; E]$ е дадена проективна координатна система върху една права и a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} са (реални или комплексни) числа, подчинени на условието (5). Съществува точно една проективна координатна система $K'=[A_1', A_2'; E']$ върху същата права такава, че преминаването от K към K' да става с формулите (6), съответно (7).*

Доказателство. Спрямо системата K' точките A_1', A_2', E' имат съответно координати (1, 0), (0, 1), (1, 1). Като използваме (6), намираме, че точките A_1', A_2', E' имат съответно координати $(a_{22}, -a_{21})$, $(-a_{12}, a_{11})$, $(a_{22}-a_{12}, a_{11}-a_{21})$ спрямо K. Непосредствено се проверява, че така определената система K' има желаните свойства. С това теоремата е доказана.

Като следствие от теоремите 1 и 2 непосредствено получаваме

Теорема 4. *Нека K и H са съответно проективна и афинна координатна система върху една права и една точка P има спрямо K хомогенни проективни координати (x_1, x_2) и спрямо H хомогенни афинни координати (h_1, h_2). Тогава (x_1, x_2) са линейни (хомогенни) функции на (h_1, h_2):*

$$\rho x_1 = a_{11}h_1 + a_{12}h_2, \qquad (8) \qquad (\rho \neq 0),$$
$$\rho x_2 = a_{21}h_1 + a_{22}h_2$$

като

$$\det(a_{ij}) \neq 0.$$

Тази теорема в много курсове по аналитична геометрия служи за дефиниране на проективните координати върху права. Ние ще постъпим така при въвеждане на проективните координати в равнината и в пространството.

§ 50. Проективни координати на точките в равнината и в пространството

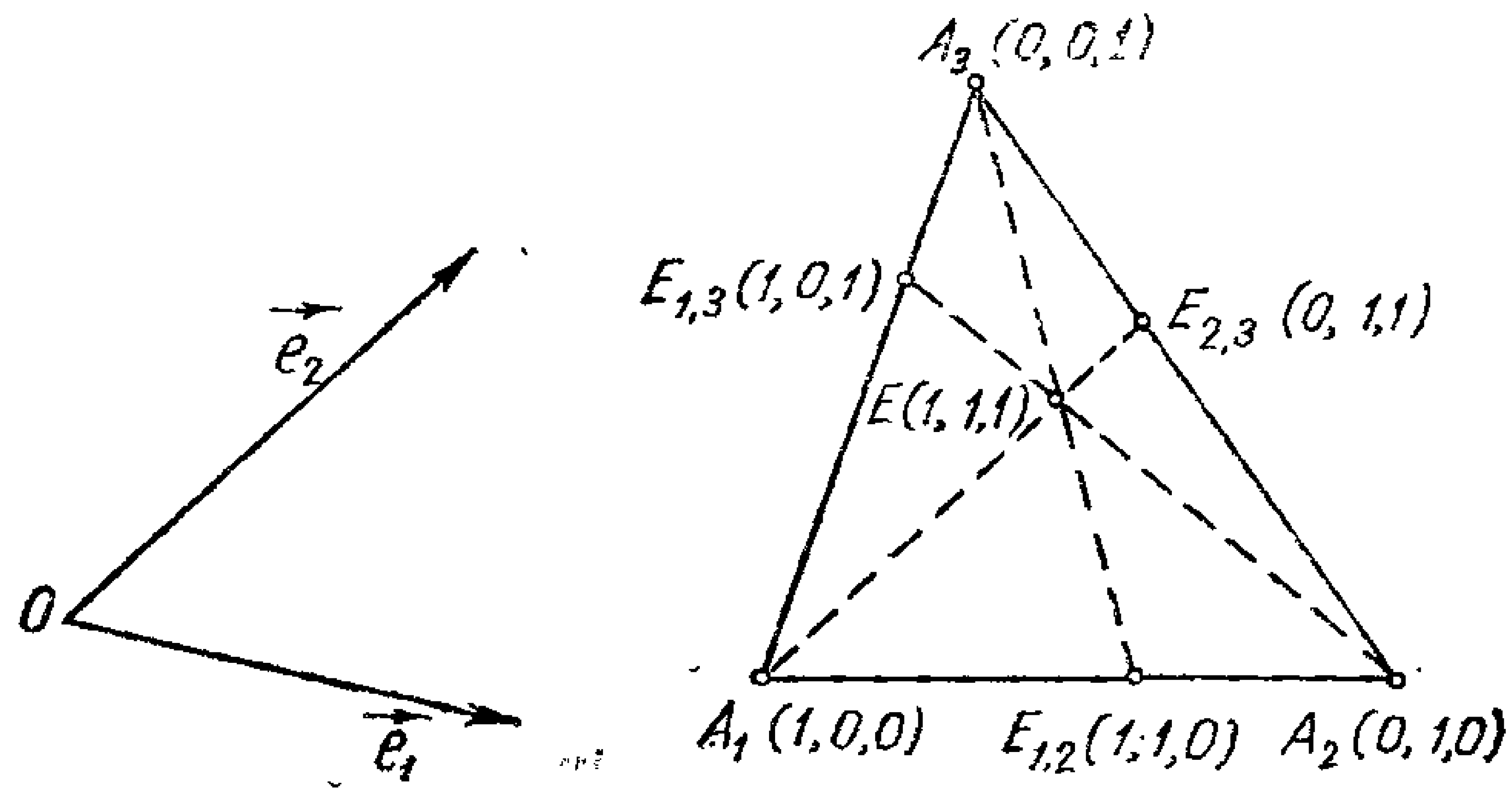
Нека $H = Oe_1e_2$ е афинна координатна система в равнината и нека са дадени девет числа a_{ij}, $i,j=1, 2, 3$, които удовлетворяват неравенството

$$(1) \qquad A = \det\,(a_{ij}) \neq 0.$$

Означаваме с A_{ij} адюнгираното количество на елемента a_{ij} в детерминантата A. Разглеждаме точките, чиито хомогенни афинни координати са съответно:

$$A_1(A_{11},\ A_{12},\ A_{13}),$$
$$A_2(A_{21},\ A_{22},\ A_{23}),$$
$$A_3(A_{31},\ A_{32},\ A_{33}),$$
$$E(A_{11}+A_{21}+A_{31},\ A_{12}+A_{22}+A_{32},\ A_{13}+A_{23}+A_{33}).$$

Поради условието (1) никои три от тези точки не са колинеарни. Съвкупност от четири точки в равнината, никои три от които не са



Черт. 73

колинеарни, наричаме *проективна координатна система* (или проективен репер) *в равнината*. Една проективна координатна система ще означаваме обикновено с буквата K и ако е определена с точките A_1, A_2, A_3, E (в този ред), ще я означаваме така: $K=[A_1,\ A_2,\ A_3;\ E]$. Точките A_1, A_2, A_3 се наричат (координатни) *върхове* на проективната система; триъгълникът $A_1A_2A_3$ се нарича *координатен триъгълник*; E се нарича *единична точка* на системата (черт. 73).

И тъй, ако е дадена една афинна координатна система в равнината и са дадени девет числа a_{ij}, като е изпълнено (1), то по указания път може да се въведе една проективна координатна система.

Като имаме пред вид казаното дотук в този параграф, дефинираме:

Ако една точка P има хомогенни афинни координати $(h_1,\ h_2,\ h_3)$ спрямо H, то тройката числа $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, определени с точност до множител $\rho\neq0$, дефинирани посредством формулите

$$\begin{aligned}
&\rho x_1=a_{11}h_1+a_{12}h_2+a_{13}h_3,\\
(2)\qquad &\rho x_2=a_{21}h_1+a_{22}h_2+a_{23}h_3,\\
&\rho x_3=a_{31}h_1+a_{32}h_2+a_{33}h_3 \qquad (\rho\neq0),
\end{aligned}$$

наричаме *хомогенни проективни координати* на същата точка P спрямо проективната координатна система $K=[A_1,\ A_2,\ A_3;\ E]$.

От определението непосредствено следват твърденията: хомогенните проективни координати спрямо K на точката A_1 са (1, 0, 0); на точката A_2 са (0, 1, 0); на A_3 — (0, 0, 1); на E — (1, 1, 1). Да докажем твърдението за точката A_1. Като заместим в (2) хомогенните афинни координати $h_1 = A_{11}$, $h_2 = A_{12}$, $h_3 = A_{13}$ на точката A_1, получаваме

$$\rho x_1 = A, \; \rho x_2 = 0, \; \rho x_3 = 0.$$

Тъй като хомогенните координати са определени с точност до ненулев множител, като съкратим получените числа на $A \neq 0$, получаваме тройката (1, 0, 0), които са хомогенните проективни координати на точката A_1.

От направеното нормиране на афинните, а също така и на проективните координати следва представянето

$$E = A_1 + A_2 + A_3. \tag{3}$$

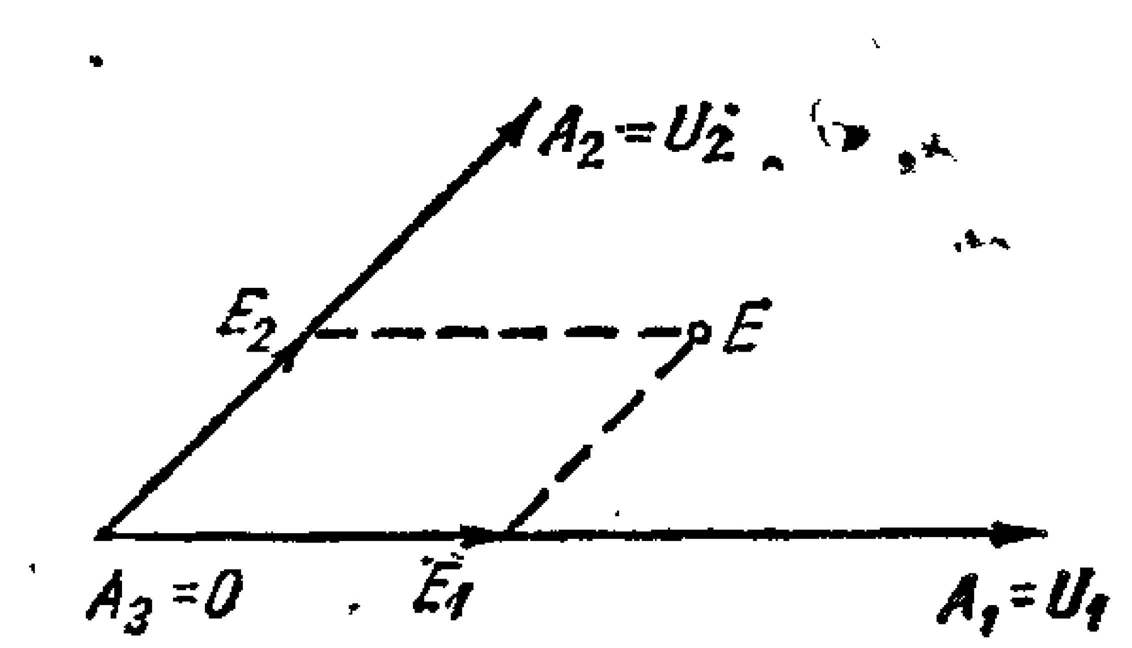
Поради условието (1) системата (2) допуска еднозначно решаване относно афинните координати:

$$\lambda h_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ji} x_j \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

като $\lambda = \frac{A}{\rho}$. Като вземем пред вид, че афинните координати на точката P са (h_1, h_2, h_3), а точката A_i има афинни координати (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}), то равенствата (4) можем да запишем във формата

$$P = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3, \tag{5}$$

като е извършено определено пренормиране координатите на точката P. Ако P съвпада с единичната точка на проективната система, равенството (5) приема вида (3). По същество формулата (5) реализира параметрично представяне на равнината, определена с неколинеарните точки A_1, A_2, A_3 (§ 41). Изрично ще подчертаем, че в (5) (x_1, x_2, x_3)



Черт. 74

са хомогенните проективни координати на точката P спрямо проективната координатна система $K = [A_1, A_2, A_3; E]$.

Да разгледаме специален случай на проективна система, получена от една афинна координатна система. Нека $H = O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ е произволна афинна система с единична точка E. Разглеждаме проективната система $K=[U_1, U_2, O; E]$, където U_1, U_2 са безкрайните точки на координатните оси Oe_1, Oe_2. Понеже хомогенните афинни координати спрямо H на точките $A_1=U_1$, $A_2=U_2$, $A_3=O$, E са съответно $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, като сравним тези координати с координатите, чрез които дефинирахме в началото на този параграф точките A_1, A_2, A_3, E, получаваме $A_{11}=A_{22}=A_{33}$, $A_{ij}=0 (i\neq j)$. Оттук следват равенствата $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$. Следователно връзката (2) между афинните координати (h_1, h_2, h_3) и проективните (x_1, x_2, x_3) на една и съща точка P при този специален избор на проективната система се дава с

$$\rho x_1=h_1, \quad \rho x_2=h_2, \quad \rho x_3=h_3.$$

Резултатът изказваме накратко като

Теорема 1. *Афинните координати са специален случай на проективните координати или, с други думи, проективните координати са обобщение на афинните.*

Сега ще разгледаме въпроса за смяна на проективна координатна система в равнината. Нека, тръгвайки от една афинна система H, сме получили две проективни системи $K=[A_1, A_2, A_3; E]$, $K'=[A_1', A_2', A_3'; E']$, като наред с (2) имаме още равенствата

$$\rho x_i'=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}' h_j, \quad i=1, 2, 3 \quad (\rho\neq 0), \tag{6}$$

при условието

$$\det(a_{ij}')\neq 0. \tag{7}$$

Като имаме пред вид (7), получаваме

$$\rho h_j=\sum_{k=1}^{3} A_{jk}' x_k' \quad (j=1, 2, 3),$$

като очевидно $\det(A_{ij}')\neq 0$. Намерените h_j заместваме в (2). Тогава

$$\rho x_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \sum_{k=1}^{3} A_{jk}' x_k' = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{jk}'\right) x_k'.$$

Ако означим

$$\alpha_{ik}=\sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{jk}',$$

получаваме

$$x_i=\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k' \quad (i=1, 2, 3). \tag{8}$$

При това от (1) и (7) следва

$$\alpha=\det(\alpha_{ik})\neq 0. \tag{9}$$

Така доказахме следната

Теорема 2. *Ако K и K' са две проективни координатни системи в равнината и една точка P има спрямо двете системи съответно координати* (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3), *то в сила са формулите* (8), *като е изпълнено* (9).

С други думи, формулите за смяна на проективна система в равнината са (8).

Обратно, нека са дадени числата α_{ik}, подчинени на неравенството (9), и проективна система K в равнината. Търсим проективна система K' такава, че преходът от K към K' да се реализира с (8). Нека положението на дадената система е определено, както по-горе. Достатъчно е да определим положението на K спрямо H. Без да се впускаме в подробности, да скицираме доказателството.

Да вземем равенствата

$$\alpha_{ik}=\sum_{j=1}^{3} a_{ij} A'_{jk} \quad (i,\ k=1, 2, 3).$$

При фиксирано k разглеждаме системата от три уравнения за неизвестните A'_{jk} ($j=1$, 2, 3), като α_{ik} и a_{ij} считаме за известни. Така определяме A'_{jk}, а с това и a'_{ij}, които определят еднозначно върховете и единичната точка на системата K' относно H. Така доказахме следната

Теорема 3. *Нека K е дадена проективна система в равнината и α_{ik} са дадени числа, подчинени на* (9). *Съществува точно една проективна система K' в равнината такава, че преходът между двете системи се дава с* (8).

Уравнението на една права в хомогенни афинни координати, както знаем, се дава с

$$\sum_{i=1}^{3} a_i h_i = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = 0,$$

като поне един от коефициентите в това уравнение е различен от нула (§ 40). Като използваме (4), уравнението приема вида

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j=1}^{3} A_{ji} x_j = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i A_{ji}\right) x_j = 0.$$

Ако положим

$$b_j=\sum_{i=1}^{3} a_i A_{ji} \quad (j=1,\ 2,\ 3),$$

получаваме

$$\sum_{j=1}^{3} b_j x_j = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0. \tag{10}$$

Трите коефициента b_1, b_2, b_3 не могат едновременно да бъдат нули, тъй като $\det(A_{ij}) \neq 0$. И тъй уравнението на една права в хомогенни проективни координати се дава с (10), като поне един от коефициентите е различен от нула.

Да приложим формулата (5) за точка P, лежаща на координатната права A_1A_2. Понеже P трябва да бъде линейна комбинация само от точките A_1, A_2 (§ 41), получаваме уравнение от вида (10):

$$x_3=0.$$

Това е уравнението на правата A_1A_2 в проективни координати. Аналогично получаваме: правата A_1A_3 има уравнение $x_2=0$, а правата A_2A_3 — уравнение $x_1=0$.

Нека правата A_3E пресича A_1A_2 в точката E_{12}. Лесно съобразяваме, че

$$E_{12}=A_1+A_2$$

и значи E_{12} има координати (1, 1, 0) спрямо K. Точката E_{12} е единичната точка на проективната координатна система $[A_1, A_2; E_{12}]$ върху правата A_1A_2. Аналогични твърдения имаме и за другите координатни прави A_1A_3 и A_2A_3 (черт. 73).

От определението (2) за проективни координати, като се вземе пред вид (1), следва резултатът: тройката (0, 0, 0) не може да бъде тройка хомогенни проективни координати на никоя точка в равнината.

Накрая ще посочим една принципна разлика между афинните и проективните координати. При афинни координати (h_1, h_2, h_3), ако третата координата е нула, т. е. $h_3=0$, точката (h_1, h_2, h_3) е безкрайна. Това не може да се каже за проективните координати. Докато уравнението на безкрайната права в афинни координати е $h_3=0$, в проективни координати то ще бъде от общия вид (10). Това следва от (2) чрез елиминирането на h_1, h_2.

Изложението в този параграф може стриктно да се следва при въвеждане на проективните координати в пространството. Една проективна координатна система $K=[A_1, A_2, A_3, A_4; E]$ в пространството се състои от пет точки, като никои четири от тях не лежат в една равнина. Върховете на системата $A_1(1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0)$, $A_4(0, 0, 0, 1)$ имат съответните хомогенни проективни координати относно K. Единичната точка

$$E=A_1+A_2+A_3+A_4$$

има координати $E(1, 1, 1, 1)$. Произволна точка P има спрямо K хомогенни проективни координати (x_1, x_2, x_3, x_4), като

$$P=x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4.$$

Всяка равнина има уравнение

$$\sum_{j=1}^{3} b_jx_j=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0,$$

като поне един от коефициентите $b_j\neq 0$ $(j=1, 2, 3, 4)$. Координатната равнина на $A_1A_2A_3$ има уравнение $x_4=0$, а координатната права A_1A_2 се представя с двойката уравнения $x_3=x_4=0$. Доказаните теореми 1, 2, 3 за равнината важат и за пространството.

Глава X

Групи от преобразувания и техните геометрии

§ 51. Изображения и преобразувания

Нека M, M' са две множества. Ако на всеки елемент $x \in M$ съпоставяме един елемент $x' \in M'$, казваме, че е зададено едно *изображение* на множеството M в множеството M'. Елементът x се нарича *прообраз* на x', а x' — *образ* на x. Изображението ще означаваме с някоя буква, например с f, и ще пишем $x'=f(x)$. Срещат се и означенията

$$f: M \to M' \text{ или } M \xrightarrow{f} M'.$$

Изображението f се нарича *инективно*, ако притежава следното свойство: $f(x_1)=f(x_2)$ влече след себе си $x_1=x_2$ за произволни x_1 $x_2 \in M$. Ако всеки елемент $x' \in M'$ е образ на някакъв елемент $x \in M$, f се нарича *сюрективно* изображение или изображение на M *върху* M'. Най-сетне f се нарича *биективно* (взаимно-еднозначно) изображение, ако е едновременно инективно и сюрективно.

Нека $f: M \to M'$ е биективно изображение. Тогава определено е и изображението (в обратна посока)

$$g: M' \to M$$

по следния начин: на елемента $x' \in M'$ съпоставяме чрез изображението g онзи елемент $x \in M$, който при изображението f има за образ тъкмо x', т. е. $g(x')=x$, където $f(x)=x'$. Това изображение g ще означаваме с f^{-1} и ще го наричаме *обратно* на f. Обратното изображение f^{-1} на f е също биективно.

Нека $M \xrightarrow{f} M'$ е изображение на M върху M', а $M' \xrightarrow{g} M''$ е изображение на M' в M''. Дефинираме изображението

$$M \xrightarrow{g \circ f} M'' \qquad (g \circ f \text{ се чете: } g \text{ след } f)$$

по следния начин:

$$(g \circ f)(x)=g[f(x)]$$

за всяко $x \in M$. Понякога вместо $g \circ f$ се пише gf и изображението се нарича *произведение* на изображенията g и f.

Ще покажем, че за три произволни изображения f, g, h е в сила асоциативният закон:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Действително за произволно $x \in M$ имаме

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g(f(x))],$$
$$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))].$$

Тъй като получените образи съвпадат за произволно $x \in M$, изображенията в левите страни на равенствата считаме едни и същи.

Биективно изображение на множеството M върху себе си ще наричаме *преобразуване* на множеството M.

Нека $f : M \to M$ е преобразуване на M. Един елемент $x \in M$, притежаващ свойството $f(x) = x$, се нарича *двоен* елемент на преобразуването f. Например цикличните точки са единствените двойни точки на всяко движение. Ако всеки елемент x е двоен за преобразуването f, последното наричаме *тъждествено* или *единично* преобразуване на M. Среща се още названието идентитет на M. Ще го означаваме понякога с e.

Ако f и f^{-1} са обратни едно на друго (биективни) изображения, то ясно е, че

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

Напоследък в литературата (крива) линия c в равнината се дефинира като изображение

$$c : (s_1, s_2) \to R_2$$

на интервал от реалната права в равнината. При това изображение на произволно $s \in (s_1, s_2)$ се съпоставя точката $(\varphi(s), \psi(s))$. Съгласно класическото определение на крива, дадено в § 32, кривата (32.3) е множеството от точките $\{\varphi(s), \psi(s)\}_{s \in (s_1, s_2)}$.

§ 52. *Групи от преобразувания. Ерлангенска програма. Метрична геометрия*

Нека M е множество и да означим с G едно множество от преобразувания на M в себе си, което притежава следните свойства:

G_1. Ако $f \in G$, $g \in G$, то $g \circ f \in G$;

G_2. Ако $f \in G$, то $f^{-1} \in G$.

Тогава G се нарича *група от преобразувания* на M.

Едно подмножество G_1 на G се нарича *подгрупа* от преобразувания, ако то е група относно същата операция „произведение на преобразувания".

В 1872 г. немският математик Ф. Клайн (F. Klein, 1849—1925) в своята встъпителна лекция при избирането му за професор в унивърситета в град Ерланген е формулирал предмета на геометрията по следния начин:

„Геометрията е наука, изучаваща свойствата на фигурите, които са инвариантни (неизменни) относно някаква група от преобразувания."

По-подробно предметът на геометрията може да се формулира така:

Дадено е множество M и в него група G от преобразувания. Съвкупността от величините, фигурите, свойствата за тях, които са инвариантни при произволно преобразуване на групата, се нарича G-геометрия на множеството M.

Идеята на Ф. Клайн за предмета на геометрията изигра водеща роля в цялото следващо развитие на тази наука. От нея следва, че съществуват твърде много геометрии, грубо казано, толкова, колкото групи от преобразувания има. Евклидовата геометрия е една от тях. За да поясним това, да разгледаме еднаквостите в равнината, които аналитично се представят по следния начин (§ 44):

$$(1)\quad P(a,\ b,\ \alpha;\ \varepsilon):\quad \begin{aligned} x' &= a + x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha,\\ y' &= b + x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha \end{aligned}\qquad (\varepsilon^2 = 1).$$

Множеството на еднаквостите е група. Действително нека наред с еднаквостта $P(a,\ b,\ \alpha;\ \varepsilon)$ да разгледаме и еднаквостта $P_1(a_1,\ b_1,\ \alpha_1;\ \varepsilon_1)$. Това означава, че на мястото на a, b, α, ε в (1) трябва да се поставят a_1, b_1, α_1, ε_1. Ако точката $(x,\ y)$ чрез $P(a,\ b,\ \alpha;\ \varepsilon)$ се преобразува в точката $(x',\ y')$, която от своя страна се преобразува в точката $(x'',\ y'')$ под действието на втората еднаквост $P_1(a_1,\ b_1,\ \alpha_1;\ \varepsilon_1)$, то произведението на двете еднаквости P, P_1 е равно на еднаквостта $P_2(a_2,\ b_2,\ \alpha_2;\ \varepsilon_2)$, определена със същите формули (1), като

$$(2)\quad \begin{aligned} a_2 &= a_1 + a\cos\alpha_1 - \varepsilon_1 b\sin\alpha_1,\\ b_2 &= b_1 + a\sin\alpha_1 + \varepsilon_1 b\cos\alpha_1,\\ \alpha_2 &= \varepsilon_1\alpha + \alpha_1,\\ \varepsilon_2 &= \varepsilon\varepsilon_1. \end{aligned}$$

С това показахме, че аксиомата G_1 за група от преобразувания е изпълнена.

Нека точката $(x,\ y)$ чрез $P(a,\ b,\ \alpha;\ \varepsilon)$ се преобразува в точката $(x',\ y')$. Тогава точката $(x',\ y')$ се преобразува в $(x,\ y)$ с помощта на еднаквостта $P(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{\alpha};\ \bar{\varepsilon})$, като

$$(3)\quad \begin{aligned} \bar{a} &= -a\cos\alpha - b\sin\alpha,\\ \bar{b} &= \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha),\\ \bar{\alpha} &= -\varepsilon\alpha,\\ \bar{\varepsilon} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Това се вижда, като се реши системата (1) спрямо x и y. С това е показано, че и втората аксиома за група от преобразувания е в сила. От последната проверка се вижда, че всяка еднаквост (1) е биективно изображение, значи преобразуване на равнината. Групата от преобразувания (1) се нарича *група на еднаквостите* в равнината, а породената от нея геометрия — *геометрия на еднаквостите* в равнината.

Нека са дадени две точки M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) и нека M'_1 (x'_1, y'_1), M'_2 (x'_2, y'_2) са техните образи при произволно преобразуване (1). С непосредствена проверка се убеждаваме, че величината

$$d(M_1, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{4}$$

е инвариантна (неизменна) при произволна еднаквост (1), т. е.

$$d(M_1, M_2)=d(M'_1, M'_2).$$

Поради това, че произволна еднаквост (1) запазва разстоянието между две точки (§ 6), всяка еднаквост се нарича *метрично преобразуване* на равнината. Съответно формулите (1) аналитично представят групата на метричните преобразувания (метричната група) в равнината, а породената от тази група геометрия се нарича *метрична геометрия* на равнината. Ще отбележим, че метричната група в равнината е трипараметрична: параметрите са a, b, α.

В курса по геометрия в средното училище се третират неща, които не са инвариантни при еднаквостите. Например изучават се свойства, които произтичат от групата на подобностите в равнината, която аналитично се представя по следния начин:

$$\begin{aligned} x' &= a+k\,(x\cos\alpha-\varepsilon y\sin\alpha), \\ y' &= b+k\,(x\sin\alpha+\varepsilon y\cos\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Тук k е коефициентът на подобността. Породената от нея геометрия е *геометрия на подобностите* в равнината или *евклидова геометрия* на равнината.

От (1) и (5) се вижда, че всяка подобност при $k=1$ е еднаквост. Това означава, че групата на еднаквостите е подгрупа на групата на подобностите. Геометрията, породена от подгрупата, е по-богата (налице са повече свойства) от геометрията на самата група. Например разстоянието между две точки е инвариантно за подгрупата, но подобностите не запазват разстоянието.

Аналогично на разглежданията тук може да се покаже, че еднаквостите (44.3) в пространството образуват група от преобразувания и всяка еднаквост запазва разстоянието между две точки в пространството. Поради това еднаквостите в пространството се наричат също метрични преобразувания, а групата им — метрична група в пространството. Тя е 6-параметрична. Параметрите са a, b, c и α_i^j $(i, j=1, 2, 3)$, между които съществуват 6 връзки (§ 8).

Забележка. Ще отбележим, че съвременната геометрия не се вмества в схемата на Клайн. Немският математик Б. Риман (B. Riemann (1826—1866)) в 1854 г. представи една концепция за геометрията, която играе изключително голяма роля за развитието на геометричните идеи, а също така и на теорията на относителността.

§ 53. Афинни преобразувания и афинна геометрия в разширеното евклидово пространство

Нека $H = O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $\bar{H} = \bar{O}\,\bar{\mathbf{e}}_1\,\bar{\mathbf{e}}_2\,\bar{\mathbf{e}}_3$ са два афинни репера в пространството. Да вземем две точки $M(h^1, h^2, h^3)$, $\bar{M}(h^1, h^2, h^3)$ с едни и същи координати относно съответно H и $\bar{H}$, т. е.

$$\overrightarrow{OM} = h^1\mathbf{e}_1 + h^2\mathbf{e}_2 + h^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} h^i\,\mathbf{e}_i,$$

$$\overrightarrow{\bar{O}\bar{M}} = h^1\bar{\mathbf{e}}_1 + h^2\bar{\mathbf{e}}_2 + h^3\bar{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^{3} h^i\,\bar{\mathbf{e}}_i.$$

Изображението на R_3 в себе си, при което на точка M се съпоставя точката $\bar{M}$, се нарича *афинно преобразуване на евклидовото пространство* R_3. Очевидно това изображение е биективно и затова е наречено преобразуване.

Нека точката $\bar{M}(\bar{h}^1, \bar{h}^2, \bar{h}^3)$ е отнесена спрямо H. Това означава, че е в сила равенството

$$\overrightarrow{O\bar{M}} = \bar{h}^1\mathbf{e}_1 + \bar{h}^2\mathbf{e}_2 + \bar{h}^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} \bar{h}^i\mathbf{e}_i.$$

Положението на втория репер по отношение на първия считаме определено по следния начин: $\bar{O}(a^1, a^2, a^3)$, $\bar{\mathbf{e}}_i(\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3)$ $(i=1, 2, 3)$ относно H. Значи в сила са равенствата

$$\overrightarrow{O\bar{O}} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a^i\mathbf{e}_i,$$

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \alpha_1^1\mathbf{e}_1 + \alpha_1^2\mathbf{e}_2 + \alpha_1^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_1^i\mathbf{e}_i,$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \alpha_2^1\mathbf{e}_1 + \alpha_2^2\mathbf{e}_2 + \alpha_2^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_2^i\mathbf{e}_i,$$

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \alpha_3^1\mathbf{e}_1 + \alpha_3^2\mathbf{e}_2 + \alpha_3^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_3^i\mathbf{e}_i.$$

Векторното равенство

$$\overrightarrow{O\bar{M}} = \overrightarrow{O\bar{O}} + \overrightarrow{\bar{O}\bar{M}},$$

като се вземат пред вид горенаписаните равенства, води до

$$\bar{h}^i = a^i + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^i h^j, \quad \det(\alpha_i^j) \neq 0 \ (i=1, 2, 3), \tag{1}$$

или подробно:

$$
\begin{aligned}
\bar{h}^1 &= a^1+\alpha_1^1 h^1+\alpha_2^1 h^2+\alpha_3^1 h^3,\\
(1') \qquad \bar{h}^2 &= a^2+\alpha_1^2 h^1+\alpha_2^2 h^2+\alpha_3^2 h^3, \qquad \det(\alpha_i^j)\neq 0.\\
\bar{h}^3 &= a^3+\alpha_1^3 h^1+\alpha_2^3 h^2+\alpha_3^3 h^3
\end{aligned}
$$

И тъй всяко афинно преобразуване в пространството R_3 се дава с формулите (1), като точките $M(h^1, h^2, h^3)$, $\bar{M}(\bar{h}^1, \bar{h}^2, \bar{h}^3)$ са отнесени спрямо една и съща афинна система H. Очевидно е и обратното: всяко преобразуване (1) в R_3 е афинно.

Да преминем в хомогенни координати (h^1, h^2, h^3, h^4). Това означава, че в (1) трябва да заместим h^i с $\frac{h^i}{h^4}$ $(i=1, 2, 3)$. Като положим $\frac{\bar{h}^4}{h^4} : =\rho\neq 0$, (1) приемат вида

$$
\begin{aligned}
\rho\bar{h}^1 &= \alpha_1^1 h^1+\alpha_2^1 h^2+\alpha_3^1 h^3+a^1 h^4,\\
\rho\bar{h}^2 &= \alpha_1^2 h^1+\alpha_2^2 h^2+\alpha_3^2 h^3+a^2 h^4, \quad \det(\alpha_i^j)\neq 0,\\
\rho\bar{h}^3 &= \alpha_1^3 h^1+\alpha_2^3 h^2+\alpha_3^3 h^3+a^3 h^4,\\
(2) \qquad \rho\bar{h}^4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad h^4.
\end{aligned}
$$

Това ни дава повод да дефинираме: изображението на $\bar{R}_3$ в себе си, при което съгласно (2) на точка $M(h^1, h^2, h^3, h^4)$ се съпоставя точката $\bar{M}(\bar{h}^1, \bar{h}^2, \bar{h}^3, \bar{h}^4)$, се нарича афинно преобразуване в $\bar{R}_3$.

Теорема 1. *Афинните преобразувания образуват група от преобразувания.*

Доказателство. Нека наред с (1) разгледаме и афинното преобразуване

$$\bar{\bar{h}}^i=\bar{a}^i+\sum_{j=1}^{3}\bar{\alpha}_j^i \bar{h}^j \qquad (\det(\bar{\alpha}_j^i)\neq 0).$$

Като извършим последователно двете преобразувания, получаваме

$$\bar{\bar{h}}^i=\bar{a}^i+\sum_{k=1}^{3}\bar{\alpha}_k^i\left(a^k+\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^k h^j\right),$$

полагаме

$$\overset{*}{a}{}^i=\bar{a}^i+\sum_{k=1}^{3}\bar{\alpha}_k^i a^k,$$

$$\overset{*}{\alpha}{}_j^i=\sum_{k=1}^{3}\bar{\alpha}_k^i\alpha_j^k .$$

Тогава

$$\bar{\bar{h}}^i=\overset{*}{a}{}^i+\sum_{j=1}^{3}\overset{*}{\alpha}{}_j^i h^j \quad (i=1, 2, 3).$$

Понеже

$$\det\left(\overset{*}{\alpha}{}^i_j\right)=\det\left(\overline{\alpha}{}^i_k\right)\det\left(\alpha^k_j\right)\neq 0,$$

последните равенства показват, че произведението на две афинни преобразувания е също афинно преобразуване.

Да решим системата (1') относно h^1, h^2, h^3. Намираме

$$h^i=\sum_{k=1}^{3}\left(\overline{h}^k-a^k\right)\beta^i_k,$$

където β^i_k е адюнгираното количество на α^k_i в $\det\left(\alpha^k_i\right)$, разделено на тази детерминанта. Като положим $\overline{a}^i=-\sum_{k=1}^{3}\beta^i_k a^k$, следват равенствата

$$h^i=\overline{a}^i+\sum_{k=1}^{3}\beta^i_k\overline{h}^k \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

които показват, че обратното преобразуване на едно афинно преобразуване е също афинно.

С това теоремата е доказана. Групата на афинните преобразувания (1) в пространството е 12-параметрична, т. е. зависи от 12 параметъра. Това са величините a^i, α^j_i $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$.

Теорема 2. *Всяко афинно преобразуване преобразува афинен репер в афинен репер; обратно, за всеки два афинни репера съществува точно едно афинно преобразуване, което привежда единия репер в другия.*

Доказателство. Най-напред да намерим формула за афинното преобразуване на векторите. Нека $\mathbf{p}(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)$ е вектор с представител $\overrightarrow{M_1M_2}$, като M_1, M_2 имат съответно координати $\left(h^1_1,\ h^2_1,\ h^3_1\right)$, $\left(h^1_2,\ h^2_2,\ h^3_2\right)$. Да означим с $\overline{M}_1\left(\overline{h}^1_1,\ \overline{h}^2_1,\ \overline{h}^3_1\right)$, $\overline{M}_2\left(\overline{h}^1_2,\ \overline{h}^2_2,\ \overline{h}^3_2\right)$ образите съответно на M_1, M_2 при афинното преобразуване (1). Като вземем пред вид, че $\lambda^i=h^i_2-h^i_1$, $\overline{\lambda}^i=\overline{h}^i_2-\overline{h}^i_1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, от (1) следва, че векторът $\mathbf{p}(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)$ се преобразува във вектора $\overline{\mathbf{p}}\left(\overline{\lambda}^1,\ \overline{\lambda}^2,\ \overline{\lambda}^3\right)$, като

$$\overline{\lambda}^i=\sum_{j=1}^{3}\alpha^i_j\lambda^j \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

Нека сега $B\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3$ е афинен репер, като точката $B\,(b^1,\ b^2,\ b^3)$ и векторите $\mathbf{f}_i\ \left(f^1_i,\ f^2_i,\ f^3_i\right)$ са отнесени спрямо H. Съгласно (1) точката B се преобразува в точката $\overline{B}\,(\overline{b}^1,\ \overline{b}^2,\ \overline{b}^3)$, като

$$\overline{b}^i=a^i+\sum_{j=1}^{3}\alpha^i_j b^j \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Съгласно (3) векторът $\mathfrak{f}_i$ се преобразува във вектора $\overline{f}_i\ (\overline{f}_i^1, \overline{f}_i^2, \overline{f}_i^3)$, като

$$(5)\qquad \overline{f}_i^j = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^j f_i^k \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Понеже $\det(\overline{f}_i^j) = \det(\alpha_i^j)\ \det(f_i^k) \neq 0$, то векторите $\overline{\mathfrak{f}}_1, \overline{\mathfrak{f}}_2, \overline{\mathfrak{f}}_3$ са линейно независими и следователно афинният репер $B\,\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2\ \mathfrak{f}_3$ се преобразува в афинния репер $\overline{B}\ \overline{\mathfrak{f}}_1\ \overline{\mathfrak{f}}_2\ \overline{\mathfrak{f}}_3$.

Обратно, нека са дадени два афинни репера $B\,\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2\ \mathfrak{f}_3$, $\overline{B}\ \overline{\mathfrak{f}}_1\ \overline{\mathfrak{f}}_2\ \overline{\mathfrak{f}}_3$:

$$B\,(b^1, b^2, b^3),\ \mathfrak{f}_i\,(f_i^1, f_i^2, f_i^3),$$
$$\overline{B}\,(\overline{b}^1, \overline{b}^2, \overline{b}^3),\ \overline{\mathfrak{f}}_i\,(\overline{\mathfrak{f}}_i^1, \overline{\mathfrak{f}}_i^2, \overline{\mathfrak{f}}_i^3),$$

относно H. От системата (4) определяме α_i^j, а от (1) — (a^1, a^2, a^3). С това е определено афинното преобразуване (1), което преобразува първия репер във втория.

Теорема 3. *Всяко афинно преобразуване преобразува равнина в равнина, права в права и запазва простото отношение на три точки.*

Доказателство. Нека

$$\varepsilon: u_1 h^1 + u_2 h^2 + u_3 h^3 + u_4 = 0 \quad (|u_1| + |u_2| + |u_3| \neq 0)$$

е уравнение на крайна равнина (§ 40). Да заместим в него h^i от (3):

$$\sum_{i=1}^{3} u_i h^i + u_4 = \sum_{i=1}^{3} u_i(\overline{a}^i + \sum_{k=1}^{3} \beta_k^i \overline{h}^k) + u_4 = 0.$$

Като положим $\overline{u}^k = \sum_{i=1}^{3} u_i \beta_k^i \quad (k = 1, 2, 3),\ \overline{u}_4 = \sum_{i=1}^{3} u_i \overline{a}^i + u_4,$ последното уравнение приема вида

$$\overline{\varepsilon}: \overline{u}_1\ \overline{h}^1 + \overline{u}_2\ \overline{h}^2 + \overline{u}_3\ \overline{h}^3 + \overline{u}_4 = 0.$$

Понеже $|\overline{u}_1| + |\overline{u}_2| + |\overline{u}_3| \neq 0$, то е уравнение на равнина. С това е показано, че афинното преобразуване (1) преобразува ε в $\overline{\varepsilon}$.

Нека $M_1\,(h_1^1, h_1^2, h_1^3)$, $M_2\,(h_2^1, h_2^2, h_2^3)$, $M_3\,(h_3^1, h_3^2, h_3^3)$ са три колинеарни крайни точки, чието просто отношение е $(M_1 M_2 M_3) = \lambda$. Тогава (§ 5)

$$h_3^i = \frac{h_1^i - \lambda h_2^i}{1 - \lambda} \quad (i = 1, 2, 3).$$

За образите на трите точки получаваме $\overline{M}_1\,(\overline{h}_1^1, \overline{h}_1^2, \overline{h}_1^3)$, $\overline{M}_2\,(\overline{h}_2^1, \overline{h}_2^2, \overline{h}_2^3)$, $\overline{M}_3\,(\overline{h}_3^1, \overline{h}_3^2, \overline{h}_3^3)$, като

$$\overline{h}_j^i = a^i + \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^i h_j^k \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Непосредствено проверяваме, че

$$\overline{h}_3^i = \frac{\overline{h}_1^i - \lambda \overline{h}_2^i}{1-\lambda},$$

което показва, че точките $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ са също колинеарни и простото отношение $(\overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3)=\lambda$. С това теоремата е доказана.

Теорема 4. *Всяко афинно преобразуване преобразува безкрайна точка в безкрайна.*

Доказателство. Нека точката M (h^1, h^2, h^3, h^4) е безкрайна, т. е $h^4=0$. От (2) намираме, че нейният образ $\overline{M}$ $(\overline{h}^1, \overline{h}^2, \overline{h}^3, \overline{h}^4)$ има също четвърта координата $\overline{h}^4=0$, т. е. M е също безкрайна.

Това, което направихме в $\overline{R}_3$, може да се направи в $\overline{R}_2$ и $\overline{R}_1$. Само ще изкажем резултатите.

Всяко афинно преобразуване в хомогенни координати аналитично се представя по следния начин:

а) в разширената евклидова равнина:

$$\begin{aligned} \rho\, \overline{h}^1 &= \alpha_1^1 h^1 + \alpha_2^1 h^2 + a^1 h^3, \\ \rho\, \overline{h}^2 &= \alpha_1^2 h^1 + \alpha_2^2 h^2 + a^2 h^3, \\ \rho\, \overline{h}^3 &= h^3 \end{aligned} \qquad (\det(\alpha_i^j) \neq 0); \tag{6}$$

б) върху разширената права:

$$\begin{aligned} \rho\, \overline{h}^1 &= \alpha_1^1 h^1 + a^1 h^2, \\ \rho\, \overline{h}^2 &= h^2 \end{aligned} \qquad (\alpha_1^1 \neq 0). \tag{7}$$

§ 54. Проективни преобразувания и проективна геометрия в разширеното евклидово пространство

В този параграф ще разглеждаме нещата в тримерното разширено евклидово пространство $\overline{R}_3$. Допускането и на комплексни елементи не пречи разглежданията да се водят по същия начин в комплексното пространство $C\overline{R}_3$.

Нека са дадени два (реални) проективни репера $K=[A_1A_2A_3A_4; E]$, $\overline{K}=[\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4; \overline{E}]$, точка M (x^1, x^2, x^3, x^4) спрямо K и точка $\overline{M}$ (x^1, x^2, x^3, x^4), имаща същите координати относно $\overline{K}$. Изображението на $\overline{R}_3$ в $\overline{R}_3$, при което на точка M се съпоставя точката $\overline{M}$, наричаме *проективно преобразуване в разширеното евклидово пространство*. Очевидно това изображение е биективно, така че с право е наречено преобразуване.

От направените предположения следват разлаганията

$$M=x^1A_1+x^2A_2+x^3A_3+x^4A_4=\sum_{i=1}^{4} x^iA_i,$$

$$\overline{M}=x^1\overline{A}_1+x^2\,\overline{A}_2+x^3\overline{A}_3+x^4\overline{A}_4=\sum_{i=1}^{4} x^i\overline{A}_i.$$

Да предположим, че точката $\overline{M}$ има координати $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3, \overline{x}^4)$ относно K. Тогава

$$\overline{M}=\overline{x}^1A_1+\overline{x}^2A_2+\overline{x}^3A_3+\overline{x}^4A_4=\sum_{i=1}^{4}\overline{x}^iA_i.$$

Нека $\overline{A}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ има координати $(a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4)$ относно K. Имаме

$$\overline{A}_i=a_i^1\,A_1+a_i^2\,A_2+a_i^3\,A_3+a_i^4\,A_4=\sum_{j=1}^{4} a_i^jA_j\ (i=1, 2, 3, 4).$$

От равенствата

$$\overline{M}=\sum_{i=1}^{4}\overline{x}^iA_i=\sum_{k=1}^{4} x^k\overline{A}_k=\sum_{k=1}^{4} x^k\sum_{i=1}^{4} a_k^iA_i$$

поради некомпланарността на точките A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ следват равенствата

(1) $$\overline{x}^i=\sum_{k=1}^{4} a_k^ix^k \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

или подробно подписани:

(1′) $$\begin{aligned}\overline{x}^1&=a_1^1x^1+a_2^1x^2+a_3^1x^3+a_4^1x^4,\\ \overline{x}^2&=a_1^2x^1+a_2^2x^2+a_3^2x^3+a_4^2x^4,\\ \overline{x}^3&=a_1^3x^1+a_2^3x^2+a_3^3x^3+a_4^3x^4,\\ \overline{x}^4&=a_1^4x^1+a_2^4x^2+a_3^4x^3+a_4^4x^4.\end{aligned}$$

Детерминантата

(2) $$\det(a_i^j)\neq 0,$$

тъй като точките $\overline{A}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ не лежат в една равнина.

И тъй всяко проективно преобразуване в $\overline{R}_3$ се представя аналитично с (1) при условието (2). При това (x^1, x^2, x^3, x^4) са хомогенните проективни координати на точка M, а $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3, x^4)$ — на образа й $\overline{M}$, като двете точки са отнесени спрямо една и съща проективна координатна система K. Очевидно вярно е и обратното, а именно: всяко преобразуване (1) в $\overline{R}_3$ при условието (2), отнесено спрямо проективна координатна система K, е проективно преобразуване.

Теорема 1. *Проективните преобразувания образуват група от преобразувания.*

Доказателството се провежда, както съответното доказателство за афинните преобразувания.

Групата от проективните преобразувания се нарича *проективна група*, а породената от нея геометрия — *проективна геометрия* на разширеното евклидово пространство. Ако преминем в нехомогенни проективни координати

$$X^1=\frac{x^1}{x^4},\quad X^2=\frac{x^2}{x^4},\quad X^3=\frac{x^3}{x^4}\qquad (x^4\neq 0),$$

то проективната група аналитично се записва във вида

$$\bar{X}^1=\frac{a_1^1X^1+a_2^1X^2+a_3^1X^3+a_4^1}{a_1^4X^1+a_2^4X^2+a_3^4X^3+a_4^4},$$

$$(3)\qquad \bar{X}^2=\frac{a_1^2X^1+a_2^2X^2+a_3^2X^3+a_4^2}{a_1^4X^1+a_2^4X^2+a_3^4X^3+a_4^4},\qquad \det(a_i^j)\neq 0$$

$$\bar{X}^3=\frac{a_1^3X^1+a_2^3X^2+a_3^3X^3+a_4^3}{a_1^4X^1+a_2^4X^2+a_3^4X^3+a_4^4},$$

Оттук се вижда, че проективната група в $\bar{R}_3$ е 15-параметрична, т. е. зависи от 15 параметъра. Действително, ако предположим, че $a_4^4\neq 0$, чрез деление на числителя и знаменателя с a_4^4 и въвеждане на нови означения: $\bar{a}_i^j=a_i^j:a_4^4$, се вижда, че преобразуването (3) зависи от 15-те величини $\bar{a}_i^j$.

Теорема 2. *Всяко проективно преобразуване преобразува проективен репер в проективен; обратно, за всеки два проективни репера съществува точно едно проективно преобразуване, което привежда единия репер в другия.*

Доказателство. Нека $[B_1B_2B_3B_4;\ F]$ е проективен репер, като точките

$$B_\lambda\left(b_\lambda^1,\ b_\lambda^2,\ b_\lambda^3,\ b_\lambda^4\right)\quad (\lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$F\left(\sum_{\lambda=1}^{4}b_\lambda^1,\ \sum_{\lambda=1}^{4}b_\lambda^2,\ \sum_{\lambda=1}^{4}b_\lambda^3,\ \sum_{\lambda=1}^{4}b_\lambda^4\right)$$

са отнесени спрямо K. Ако го подложим на проективното преобразуване (1), получаваме точките

$$\bar{B}_\lambda\left(\bar{b}_\lambda^1,\ \bar{b}_\lambda^2,\ \bar{b}_\lambda^3,\ \bar{b}_\lambda^4\right),\ \bar{b}_\lambda^i=\sum_{k=1}^{4}a_k^ib_\lambda^k\qquad (i,\ \lambda=1,\ldots,4).$$

$$\bar{F}\left(\sum_{\lambda=1}^{4}\bar{b}_\lambda^1,\ \sum_{\lambda=1}^{4}\bar{b}_\lambda^2,\ \sum_{\lambda=1}^{4}\bar{b}_\lambda^3,\ \sum_{\lambda=1}^{4}\bar{b}_\lambda^4\right),$$

отнесени също спрямо K. Никои четири от тях не лежат в една равнина, така че те определят проективния репер $[\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4; \bar{F}]$.

Обратно, нека са дадени два проективни репера $[B_1B_2B_3B_4; F]$, $[\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4, \bar{F}]$, като

$$B_\lambda\left(b^1_\lambda, b^2_\lambda, b^3_\lambda, b^4_\lambda\right) \quad (\lambda=1, 2, 3, 4),$$

$$F\left(\sum_{\lambda=1}^4 b^1_\lambda, \sum_{\lambda=1}^4 b^2_\lambda, \sum_{\lambda=1}^4 b^3_\lambda, \sum_{\lambda=1}^4 b^4_\lambda\right),$$

$$\bar{B}_\lambda\ \left(\bar{b}^1_\lambda, \bar{b}^2_\lambda, \bar{b}^3_\lambda, \bar{b}^4_\lambda\right),$$

$$\bar{F}\left(\sum_{\lambda=1}^4 \bar{b}^1_\lambda, \sum_{\lambda=1}^4 \bar{b}^2_\lambda, \sum_{\lambda=1}^4 \bar{b}^3_\lambda, \sum_{\lambda=1}^4 \bar{b}^4_\lambda\right).$$

Разглеждаме системата

$$\bar{b}^i_\lambda = \sum_{k=1}^4 a^i_k b^k_\lambda \quad (\lambda=1, 2, 3, 4)$$

при фиксирано i. Тъй като $\det(b^j_i) \neq 0$, тя притежава еднозначно определени решения за a^i_k. Поради $\det(\bar{b}^j_i) \neq 0$ равенството

$$\det\left(\bar{b}^j_i\right) = \det\left(a^j_i\right) \det\left(b^j_i\right)$$

показва, че $\det |a^j_i| \neq 0$. С това е определено проективното преобразуване (1). Очевидно то привежда първия репер във втория.

Теорема 3. *Всяко проективно преобразуване преобразува равнина върху равнина, права върху права и запазва двойното отношение.*

Нека точката $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$ описва равнината

$$\varepsilon : \sum_{i=1}^4 u_i x^i = u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4 = 0.$$

Поради това, че хомогенните проективни координати са определени с точност до ненулев множител, от (2) намираме

$$x^i = \sum_{k=1}^4 A^i_k \bar{x}^k \quad (i=1, 2, 3, 4), \tag{4}$$

като A^i_k е адюнгираното количество на a^k_i и $\det\left(a^j_i\right)$. Като заместим x_i от (4) в уравнението на ε, получаваме

$$\sum_{i=1}^4 u_i x^i = \sum_{i=1}^4 u_i \sum_{k=1}^4 A^i_k \bar{x}^k = \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{i=1}^4 u_i A^i_k\right) \bar{x}^k = 0.$$

Тъй като поне едно от числата u_1, u_2, u_3, u_4 е различно от нула и $\det\left(A^i_k\right) \neq 0$, то поне едно от числата $\bar{u}_k = \sum_{i=1}^4 u_i A^i_k$ $(k=1, \dots, 4)$ е също различно от нула. Но тогава равнината ε, подложена на (1), се преобразува върху равнината

$$\bar{\varepsilon} : \sum_{k=1}^{4} \bar{u}_k \bar{x}^k = 0.$$

За да докажем твърдението за права, да разгледаме правата, определена с точките A, B. За произволна точка C от тази права имаме представянето

$$C = \lambda A + \mu B \quad (\lambda + \mu \neq 0).$$

Ако точките A, B имат съответно координати (a^1, a^2, a^3, a^4), (b^1, b^2, b^3, b^4), то точката C има координати $(\lambda a^1 + \mu b^1, \lambda a^2 + \mu b^2, \lambda a^3 + \mu b^3, \lambda a^4 + \mu b^4)$. Подлагаме A, B, C на проективното преобразуване (1). Получаваме точките $\bar{A}(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4)$, $\bar{B}(\bar{b}^1, \bar{b}^2, \bar{b}^3, \bar{b}^4)$,

$$\bar{C}\ (\lambda \bar{a}^1 + \mu \bar{b}^1, \lambda \bar{a}^2 + \mu \bar{b}^2, \lambda \bar{a}^3 + \mu \bar{b}^3, \lambda \bar{a}^4 + \mu \bar{b}^4),$$

като

$$\bar{a}^i = \sum_{k=1}^{4} a_k^i a^k, \quad \bar{b}^i = \sum_{k=1}^{4} a_k^i b^k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Очевидно

$$\bar{C} = \lambda \bar{A} + \mu \bar{B}, \tag{6}$$

с което твърдението за права е доказано.

Ако

$$D = \lambda_1 A + \mu_1 B,$$

то от (5) и (6) следва, че образът на D е

$$\bar{D} = \lambda_1 \bar{A} + \mu_1 \bar{B}.$$

Тогава

$$(ABCD) = \frac{\lambda_1 \mu}{\lambda \mu_1} = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}),$$

с което инвариантността на двойното отношение при проективно преобразуване е доказана.

По същия начин се третират нещата и в разширената евклидова равнина R_2 и за разширената евклидова права R_1. Ние ще формулираме само резултатите.

Всяко проективно преобразуване в разширената евклидова равнина се представя аналитично с формулите

$$\bar{x}^i = \sum_{k=1}^{3} a_k^i x^k \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

като $\det(a_i^j) \neq 0$.

Всяко проективно преобразуване върху разширената евклидова права се представя аналитично с формулите

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, \\ \bar{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2, \end{aligned} \tag{8}$$

като $\det(a_i^j) \neq 0$.

З а б е л е ж к а. Да разгледаме проективните преобразувания (7) в разширената евклидова равнина $C\overline{R}_2$, които запазват една права. Нека правата има уравнение $x_3=0$. Условието за инвариантност на тази права, т. е. $x_3=0$ точно когато $\bar{x}_3=0$, води до зависимостите $a_3^1=a_3^2=0$. Множеството на тези преобразувания в хомогенни проективни координати аналитично се дава с формулите

$$
\begin{aligned}
\rho\bar{x}^1&=a_1^1x^1+a_2^1x^2+a_3^1x^3,\\
\rho\bar{x}^2&=a_1^2x^1+a_2^2x^2+a_3^2x^3,\\
\rho\bar{x}^3&=\qquad\qquad\qquad\qquad x^3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

като $a_1^1a_2^2-a_2^1a_1^2\neq 0$. Това множество е група от преобразувания — подгрупа на проективната група в равнината $C\overline{R}_2$. Ако преобразуването (9) е отнесено спрямо афинна система, т. е. към специална проективна система, то (9) съвпада с групата на афинните преобразувания (53.6) в $C\overline{R}_2$, запазваща безкрайната права на равнината. Значи афинната група е подгрупа на проективната група в $C\overline{R}_2$.

Онези афинни преобразувания в $C\overline{R}_2$, за които

$$
\det\left(a_i^j\right)=a_1^1a_2^2-a_2^1a_1^2=\pm 1,
\tag{10}
$$

образуват подгрупа на афинната група, която се нарича *еквиафинна група*, а породената от нея геометрия — *еквиафинна геометрия* на $C\overline{R}_2$. В нехомогенни афинни координати тя има представяне

$$
\begin{aligned}
\bar{h}^1&=\alpha_1^1h^1+\alpha_2^1h^2+a^1,\\
\bar{h}^2&=\alpha_1^2h^1+\alpha_2^2h^2+a^2,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

като е в сила (10). Непосредствено се проверява, че величината

$$
\sigma(M_1,\ M_2,\ M_3)=\begin{vmatrix} h_1^1 & h_1^2 & 1\\ h_2^1 & h_2^2 & 1\\ h_3^1 & h_3^2 & 1\end{vmatrix}
$$

за три точки $M_i\left(h_i^1,\ h_i^2,\ h_i^3\right)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ е инварианта до знак, т. е.

$$
\sigma(M_1,\ M_2,\ M_3)=\varepsilon\sigma\left(M_1',\ M_2',\ M_3'\right).
$$

Значи понятието ориентирано лице (§ 9) е инварианта до знак в еквиафинната геометрия.

Групата на подобностите в равнината (§ 52) аналитично се представя с формулите

$$
\begin{aligned}
\bar{h}^1&=a^1+k\,(h^1\cos\alpha-\varepsilon h^2\sin\alpha),\\
\bar{h}^2&=a^2+k\,(h^1\sin\alpha+\varepsilon h^2\cos\alpha).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Тя е подгрупа на афинната група и се получава от (11), като се изрази условието, че една имагинерна крива от втора степен в $C\overline{R}_2$ е инвариантна:

$$h_1^2 + h_2^2 = 0.$$

Групата на подобностите и еквиафинната група в равнината притежават една забележителна подгрупа — метричната подгрупа (§ 52).

При тези разглеждания е налице следният факт: геометрията на една подгрупа на дадена група от преобразувания е по-богата от геометрията на самата група. Именно всички факти в геометрията на групата са валидни и в геометрията на подгрупата. Обратно, съществуват факти, които са валидни в геометрията на подгрупата, но не се отнасят за геометрията на групата. Като пример ще посочим: двойното отношение е инварианта на проективната група. Значи то е инварианта за афинната (и метричната) група. Простото отношение е инварианта на афинната група, но не е инварианта на проективната група.

Глава XI

Проективна класификация и проективни канонични уравнения на фигурите от втора степен

§ 55. Дефиниция на фигура от втора степен

В този параграф ще разглеждаме паралелно нещата в комплексното разширено евклидово пространство $C\overline{R}_3$ и в комплексната разширена евклидова равнина $C\overline{R}_2$.

Нека в пространството $C\overline{R}_3$ относно (реална) проективна координатна система $k=[A_1A_2A_3A_4; E]$ е дадена квадратната форма

(1) $$F(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j,$$

като матрицата (a_{ij}) с реални коефициенти е симетрична:

(2) $$a_{ij}=a_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3, 4).$$

Множеството от всички точки M (реални и комплексни), чиито хомогенни проективни координати (x_1, x_2, x_3, x_4) относно K удовлетворяват уравнението

(3) $$F(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j=0,$$

се нарича *повърхнина от втора степен* с уравнение (3).

Детерминантата (матрицата)

(4) $$A=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

се нарича *детерминанта* (матрица) *на повърхнината.* Оттук лесно написваме полупроизводните на функцията $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
F_1(M)=F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\
F_2(M)=F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\
F_3(M)=F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\
F_4(M)=F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_4}=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4.
\end{aligned}
$$

От анализа е известно следното тъждество на Ойлер:

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{4} x_i F_i(x_1, x_2, x_3, x_4)=F(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

За две точки $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$ изразът

$$(7)\qquad F(M; N):=\sum_{i=1}^{4} x_i F_i(y_1, y_2, y_3, y_4)=\sum_{i=1}^{4} x_i F_i(N)$$

се нарича *полярна форма* на квадратна форма F. Непосредствено се проверяват равенствата

$$(8)\qquad F(M; N)=F(N; M),$$

$$(9)\qquad F(M):=F(M, M)=F(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Една точка M се нарича *особѐна* за дадена повърхнина от втора степен, ако нейните координати анулират полупроизводните, т. е.

$$(10)\qquad F_1(M)=F_2(M)=F_3(M)=F_4(M)=0.$$

Повърхнината от втора степен се нарича *изродена*, ако тя съдържа равнина.

Аналогично се дефинира понятието *крива от втора степен* в равнината $G\bar{R}_2$. В случая индексите i, j вземат стойностите 1, 2, 3; детерминантата (4) е от трети ред; в случая на крива имаме три полупроизводни. Различно е определението за изродена крива, а именно: крива от втора степен, която съдържа права, се нарича изродена.

Кривите от втора степен в равнината и повърхнините от втора степен в пространството ще наричаме *фигури от втора степен.*

Ако една точка е особена за фигурата от втора степен, тя лежи на фигурата. Доказателството следва от тъждеството на Ойлер.

Две точки M, N се наричат (полярно) *спрегнати* относно фигура от втора степен, ако е изпълнено условието

$$(11)\qquad F(M; N)=0.$$

В тази глава ще се интересуваме от проективните свойства на фигурите от втора степен, т. е. от свойствата, които са инвариантни относно проективната група. Затова и уравненията на фигурите ще записваме в проективните координати.

Свойствата спрегнатост на две точки, изроденост на фигура, особеност на точка относно фигура от втора степен са проективни свойства. На доказателствата нямà да се спираме.

§ 56. Проективна класификация и проективни канонични уравнения на кривите от втора степен

Нека е дадена кривата от втора степен

$$(1)\quad F(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+ +2a_{23}x_2x_3=0.$$

Една точка $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$, отнесена спрямо проективната система $K=[A_1A_2A_3;E]$, лежи на кривата точно когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението (1) на кривата.

Формулите за смяна на проективната координатна система в равнината са

$$(2)\qquad x_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}x'_j\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

като $\det(\alpha_{ij})\neq 0$. С тези формули се реализира и едно линейно неособено преобразуване — проективно преобразуване в разширената евклидова равнина. Ще използваме следната теорема от линейната алгебра:

За квадратната форма

$$(3)\qquad F(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

с реални коефициенти съществува линейно неособено преобразуване (2) с реални коефициенти α_{ij}, което я привежда в алгебрична сума от квадрати:

$$(4)\qquad F'(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)=\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i x_i'^2=\varepsilon_1x_1'^2+\varepsilon_2x_2'^2+\varepsilon_3x_3'^2,$$

като $\varepsilon_i=\pm 1$ или 0.

Въз основа на това следва, че за всяка крива, зададена с уравнение (1) относно проективната координатна система $K=[A_1A_2A_3;E]$, съществува проективна координатна система $K'=[A'_1A'_2A'_3;E']$, като формулите за преминаване от K към K' са (2), такава, че уравнението на кривата относно K' има вида

$$(5)\qquad \varepsilon_1x_1'^2+\varepsilon_2x_2'^2+\varepsilon_3x_3'^2=0\quad (\varepsilon_i=\pm 1,\ 0).$$

Уравнението (5) се нарича *проективно канонично уравнение на кривата.*

В зависимост от стойностите на числата ε_i ще разгледаме следните пет случая:

1. Трите числа ε_i имат еднакви знаци. Тогава (5) е еквивалентно на уравнението

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0. \tag{6}$$

Крива с това уравнение не съдържа реални точки; тя е неизродена с детерминанта $A \neq 0$. Нарича се *имагинерна крива* от втора степен.

2. Две от числата ε_i имат еднакви знаци, а третото ε_i — противоположен знак. Сега (5) е еквивалентно на следното уравнение:

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0. \tag{7}$$

Крива с това уравнение се нарича *овална крива*. Тя е неизродена с детерминанта $A \neq 0$. Съдържа безбройно много реални точки.

3. Две от числата ε_i имат еднакви знаци, а третото е нула. Уравнението (5) в случая приема вида

$$x_1'^2+x_2'^2=0. \tag{8}$$

Крива с това уравнение притежава само една реална точка — (0, 0, 1) Лесно се съобразява, че тройката (x_1', x_2', x_3') удовлетворява (8) точно когато тя удовлетворява поне едно от двете уравнения:

$$x_1'+ix_2'=0, \tag{9}$$

$$x_1'-ix_2'=0. \tag{10}$$

Всяко едно от тях е уравнение на комплексна права. Понеже коефициентите на (10) са комплексно спрегнати на коефициентите от (9), то правите (9) и (10) се наричат *комплексно спрегнати*. Те минават през единствената реална точка на кривата, която е особена точка за кривата. В този случай казваме, че кривата *се разпада* (цепи, изражда) на две комплексно спрегнати прави. Детерминантата $A=0$ има ранг $\rho=2$.

4. Две от числата ε_i имат различни знаци, а третото е нула. Уравнението (5) приема вида

$$x_1'^2-x_2'^2=0. \tag{11}$$

Една точка (x_1', x_2', x_3') лежи на кривата (11) точно когато тя лежи поне на една от правите с уравнения

$$x_1'+x_2'=0, \tag{12}$$

$$x_1'-x_2'=0. \tag{13}$$

Рангът ρ на детерминантата A е също 2. Кривата се разпада на двете реални прави с уравнения (12), (13), чиято пресечна точка (0, 0, 1) е единствената особена точка на кривата.

5. Две от числата ε_i са нула, а третото е отлично от нула. Уравнението (5) приема вида

$$x_1'^2=0. \tag{14}$$

Това уравнение е еквивалентно на уравнението

(15) $$x'_1=0.$$

Точките на кривата от втора степен изпълват една права. Казваме, че кривата е *двойна права.* Сега $\rho=1$ и всяка точка от кривата е особена.

В случаите 3, 4, 5 кривата е изродена.

Така доказахме следната

Теорема 1. *В разширената евклидова равнина* $\bar{R}_2$ *съществуват пет проективни типа криви от втора степен:*

първи тип: с представител имагинерна крива, $\rho=3$, *проективно канонично уравнение* (6);

втори тип: с представител овална крива, $\rho=3$, *проективно канонично уравнение* (7);

трети тип: с представител крива, която съдържа единствена реална точка и се разпада на две комплексно спрегнати прави, $\rho=2$, *проективно канонично уравнение* (8);

четвърти тип: с представител крива, която се разпада на две реални прави, $\rho=2$, *проективно канонично уравнение* (11);

пети тип: с представител крива, която е (двойна) права, $\rho=1$, *проективно канонично уравнение* (14).

Ще направим няколко забележки. Тъй като чрез формулите (2) се реализира неособено преобразуване, то рангът ρ на матрицата (a_{ij}) на кривата не се променя. От теоремата се вижда, че той не характеризира напълно кривата. Ако към него прибавим и информация за множеството от реалните точки на кривата, то с това типът на кривата е напълно определен.

За всеки две криви от един и същ тип съществува проективно преобразуване, което преобразува едната в другата; за две криви от различен тип такова проективно преобразуване не съществува.

§ 57. Проективна класификация и проективни канонични уравнения на повърхнините от втора степен

Нека е дадена повърхнината от втора степен

(1) $$F(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j=0.$$

Една точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$, отнесена спрямо проективната координатна система $K=[A_1A_2A_3A_4; E]$, лежи на повърхнината точно когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението (1) на повърхнината.

Формулите за смяна на проективната координатна система в пространствата са

(2) $$x_i=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}x'_j \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

като $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$. С тези формули се реализира и едно линейно неособено преобразуване — проективно преобразуване в разширеното евклидово пространство. За опростяване на уравнението (1) ще използваме споменатата в предишния параграф теорема от линейната алгебра, валидна за произволен брой променливи. От нея следва, че за всяка повърхнина от втора степен, зададена с уравнение (1) относно проективната координатна система $K=[A_1\ A_2\ A_3\ A_4; E]$, съществува проективна координатна система $K'=[A_1'\ A_2'\ A_3'\ A_4';\ E]$, като формулите за преминаване от K към K' са (2), такава, че уравнението на повърхнината относно K' има вида

$$\varepsilon_1 x_1'^2+\varepsilon_2 x_2'^2+\varepsilon_3 x_3'^2+\varepsilon_4 x_4'^2=0 \quad (\varepsilon_i=\pm 1,\ 0). \tag{3}$$

Това уравнение се нарича *проективно канонично уравнение на повърхнината.*

В зависимост от стойностите на числата ε_i ще разгледаме следните 8 случая.

1. Четирите числа ε_i имат еднакви знаци. Тогава уравнението (3) е еквивалентно на уравнението

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2=0. \tag{4}$$

Повърхнина с това уравнение има детерминанта $A \neq 0$. Нарича се *имагинерна повърхнина* от втора степен, тъй като не съдържа реални точки.

2. Три от числата ε_i имат еднакви знаци, а четвъртото — противоположен. Сега уравнението (3) е еквивалентно на уравнението

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2=0. \tag{5}$$

Повърхнина с това уравнение се нарича *овална повърхнина.* Тя е неизродена с детерминанта $A \neq 0$. Съдържа безбройно много точки, но не съдържа реални прави.

3. Две от числата са положителни, а другите две — отрицателни. Уравнението (3) е еквивалентно на уравнението

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2=0. \tag{6}$$

Повърхнина с това уравнение се нарича (проективен) *хиперболоид.* Тя е неизродена с детерминанта $A \neq 0$. Съдържа безбройно много реални точки, а също така и безбройно много реални прави. По-точно в сила е следната

Лема. *Хиперболоидът* (6) *съдържа две системи от (реални) прави:*

$$(6')\quad \begin{aligned} x_1'-x_3' &= s\,(x_4'-x_2'),\\ x_1'+x_3' &= \frac{1}{s}\,(x_4'+x_2'); \end{aligned}$$

$$(6'')\quad \begin{aligned} x_1'-x_3' &= t\,(x_4'+x_2'),\\ x_1'+x_3' &= \frac{1}{t}\,(x_4'-x_2'), \end{aligned}$$

като s и t са произволни реални числа.

Всеки две прави от една и съща система нямат обща точка.
Всеки две прави от различни системи се пресичат.

Доказателство. Проверката, че при произволно s (съответно t) правата (6′), (съответно (6″)) лежи изцяло върху повърхнината (6), е тривиална.

Ако предположим, че правите, получени за стойностите s_1, s_2, в (6′), имат обща точка, следва, че детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & s_1 & -s_1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{s_1} & \frac{1}{s_1} \\ 1 & -1 & s_2 & -s_2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{s_2} & \frac{1}{s_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук получаваме $s_1=s_2$ или $s_1=-s_2$. В първия случай правите съвпадат, а във втория лесно се показва, че общата точка на двете прави би трябвало да има координати (0, 0, 0, 0), което е невъзможно.

Матрицата на правите с уравнения (6′), (6″)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & s & -s \\ 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & -1 & t & t \\ 1 & 1 & \frac{1}{t} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

има ранг 3. Това означава, че всяка права (6′) има точно една обща точка с всяка права (6″). С това лемата е доказана.

4. Три от числата ε_i имат еднакви знаци, а четвъртото е нула. Сега (3) има вида

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0. \tag{7}$$

Тази повърхнина съдържа само една реална точка (0, 0, 0, 1), която е нейна особена точка. Повърхнината се нарича *имагинерен конус*. Рангът е 3.

5. Две от числата ε_i имат еднакви знаци, третото има противоположния знак, а четвъртото е нула. Сега повърхнината има уравнение

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0. \tag{8}$$

Тази повърхнина се нарича *конус*. За нея $\rho=3$. Единствената ѝ особена точка е Q (0, 0, 0, 1). Лесно се показва, че конусът с уравнение (8) е множеството от точки, които лежат на всички прави през точката Q и пресичат овалната крива $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$ в координатната равнина $x'_4=0$.

6. Две от числата ε_i имат еднакви знаци, а другите две са 0. Повърхнината има уравнение

$$x_1'^2+x_2'^2=0, \tag{9}$$

което се разлага на уравненията

$$(9') \qquad x_1'+ix_2'=0,$$

$$(9'') \qquad x_1'-ix_2'=0.$$

Това са две *комплексно спрегнати равнини* (тъй като коефициентите им са комплексно спрегнати числа), които съдържат реалната права $x_1'=x_2'=0$. Значи повърхнината се състои от две комплексно спрегнати равнини, които се пресичат по реална права. Точките на последната са единствените особени точки на повърхнината. Имаме $\rho=2$. Повърхнината е изродена.

7. Две от числата ε_i имат различни знаци, а другите две са нула. Повърхнината има уравнение

$$(10) \qquad x_1'^2-x_2'^2=0,$$

което се разлага на уравненията на двете равнини:

$$(10') \qquad x_1'+x_2'=0,$$

$$(10'') \qquad x_1'-x_2'=0.$$

Повърхнината е изродена и се разпада (състои от) на две пресекателни равнини (10′), (10″). Тяхната пресечница се състои от особените точки на повърхнината. Имаме $\rho=2$.

8. Три от числата ε_i са равни на нула. Повърхнината има уравнение

$$(11) \qquad x_1'^2=0.$$

Тя е изродена и нейните точки изпълват равнината с уравнение $x_1'=0$. Всяка точка на повърхнината е особена. Имаме $\rho=1$.

Така доказахме следната

Теорема. *В разширеното евклидово пространство съществуват 8 проективно нееквивалентни типа повърхнини от втора степен. Техните проективни канонични уравнения са* (4)—(11).

Ще направим някои забележки. Рангът ρ на матрицата (a_{ij}) на повърхнината (7) е проективна инварианта. Той обаче не характеризира напълно повърхнината. Нужно е да се даде допълнителна информация за множеството от реалните точки на повърхнината.

Както и при кривите от втора степен, за всеки две повърхнини от един и същи тип съществува проективно преобразуване, което преобразува едната повърхнина в другата; за всеки две повърхнини от различни типове не съществува такова проективно преобразуване.

§ 58. Полярност спрямо фигура от втора степен

В този параграф ще разглеждаме нещата паралелно в равнината и в пространството.

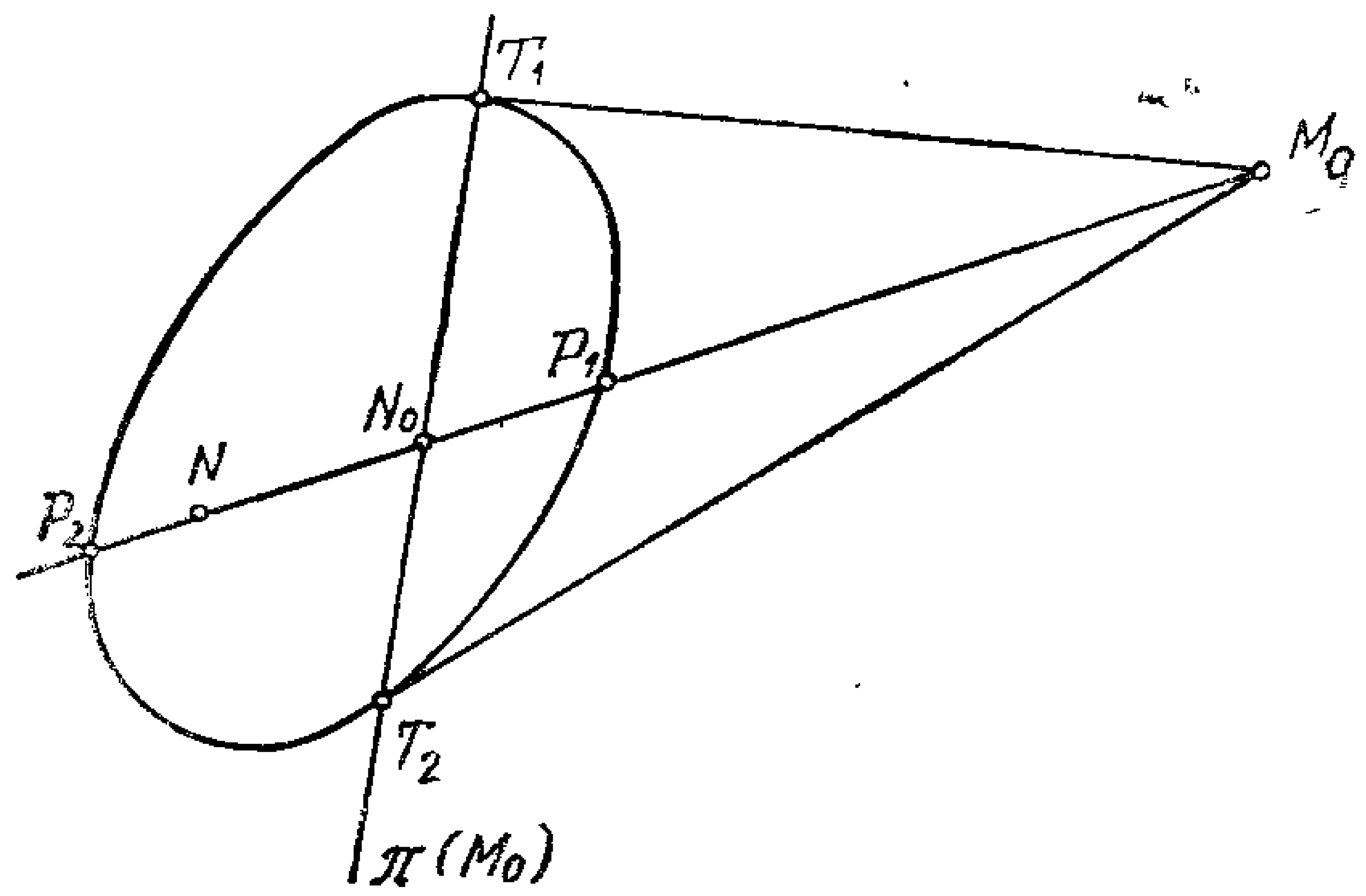
Нека е дадена фигурата от втора степен

$$(1) \qquad F(M)=\sum_{i,j=1} a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji}),$$

като индексите i, j вземат стойностите 1, 2, 3 при крива, а при повърхнина — 1, 2, 3, 4. В случая на крива нека произволна точка M има координати (x_1, x_2, x_3), а при повърхнина — (x_1, x_2, x_3, x_4).

Нека $M_0 (x_{01}, x_{02}, x_{03})$, съответно $M_0 (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})$, е една фиксирана точка, която в случая на крива лежи в равнината ѝ. Условието M_0 да лежи на фигурата (1) е

$$F(M_0)=0.$$



Черт. 75

Ако $N_0 (y_{01}, y_{02}, y_{03})$, съответно $N_0 (y_{01}, y_{02}, y_{03}, y_{04})$, е друга точка, да разгледаме правата M_0N_0 (черт. 75). Тя има следното параметрично представяне:

$$P=\lambda M_0+\mu N_0. \tag{2}$$

За пресечните точки на M_0N_0 с фигурата (1) е в сила равенството $F(P)=0$, което след преработка приема вида

$$\lambda^2 F(M_0)+2\lambda\mu F(M_0; N_0)+\mu^2 F(N_0)=0. \tag{3}$$

Това уравнение е квадратно относно $\frac{\lambda}{\mu}$ (или $\frac{\mu}{\lambda}$). На всеки негов корен съответствува една пресечна точка, определена с равенството (2). Дефинираме: права M_0N_0, която има 2, 1, 0 или безбройно много общи точки с фигурата (1), се нарича съответно *секуща, тангента* (допирателна), *несекуща, образуваща* (образувателна) за фигурата. Последният случай е налице точно когато са изпълнени равенствата

$$F(M_0)=F(M_0; N_0)=F(N_0)=0.$$

Да разгледаме случая, когато правата е секуща. Сега

$$D=[F(M_0; N_0)]^2-F(M_0)\,F(N_0)>0.$$

Ако $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ са корените на (3), то общите точки на правата M_0N_0 и фигурата са

$$P_1=\lambda_1 M_0+\mu_1 N_0,$$
$$P_2=\lambda_2 M_0+\mu_2 N_0.$$

Двойното отношение

(4) $$(M_0N_0P_1P_2)=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}.$$

Ако M_0, N_0 не лежат на фигурата, условието четворката точки (M_0, N_0, P_1, P_2) да е хармонична група се дава с равенството

(5) $$\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}=0,$$

откъдето следва

6) $$F(M_0;N_0)=0.$$

Така доказахме, че ако точките M_0, N_0 не лежат на фигурата (1) и те заедно с пресечните точки P_1, P_2 на правата M_0N_0 със същата фигура образуват хармонична група, то точките M_0, N_0 са полярно спрегнати относно фигурата.

• В условието (6) за полярно спрегнати точки да заместим N_0 с текущата точка $N(x_1, x_2, x_3)$, съответно $N(x_1, x_2, x_3, x_4)$. То приема вида

(7) $$F(M_0;N)=\sum_i F_i(M_0)x_i=0,$$

като при крива имаме подробно

(7′) $$F_1(M_0)x_1+F_2(M_0)x_2+F_3(M_0)x_3=0,$$

а при повърхнина —

(7″) $$F_1(M_0)x_1+F_2(M_0)x_2+F_3(M_0)x_3+F_4(M_0)x_4=0.$$

Нека точката M_0 не е особена за фигурата (това сигурно е налице, ако M_0 не лежи на фигурата). Тогава (7′) е уравнение на права m_0, която се нарича *полярна права* или *поляра* на точката M_0 относно кривата от втора степен (1). Точката M_0 се нарича *полюс на правата* m_0. Аналогично (7″) е уравнение на равнина m_0, която се нарича *полярна равнина* на точката M_0 относно повърхнината от втора степен (1). Точката M_0 се нарича *полюс на равнината* m_0. Понякога вместо за полярна права и полярна равнина ще говорим общо за *полярна фигура.*

По този начин, когато е дадена крива от втора степен, може да се дефинира едно изображение π на множеството от точките в равнината на кривата в множеството на правите от същата равнина:

$$\pi: M_0 \longrightarrow \pi(M_0) := m_0,$$

при което на произволна точка се съпоставя нейната поляра. Аналогично в пространството една повърхнина от втора степен дава възможност на произволна точка да се съпостави нейната полярна равнина. Това изображение π се нарича *полярност,* установено от фигурата от втора степен.

Ако M_0 е особена точка за фигурата от втора степен, то (7) е тъждествено удовлетворено. Поради това можем да считаме, че полярната фигура в особена точка е всяка права (съответно равнина).

Да разгледаме случая, когато правата M_0N_0 е тангента за фигурата. Изпълнено е

(8) $$D=[F(M_0;N_0)]^2-F(M_0)F(N_0)=0,$$

като поне един от коефициентите в (3) е различен от нула (т. е. поне една от точките M_0, N_0 не трябва да лежи на фигурата). В равенството (8) да заместим N_0 с текущата точка $N(x_1, x_2, x_3)$, съответно $N(x_1, x_2, x_3, x_4)$. То приема вида

(8′) $$[F_1(M_0)x_1+F_2(M_0)x_2+F_3(M_0)x_3]^2-F(M_0)F(x_1, x_2, x_3)=0$$

при крива и

(8″) $$[F_1(M_0)x_1+F_2(M_0)x_2+F_3(M_0)x_3+F_4(M_0)x_4]^2-$$
$$-F(M_0)F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0.$$

при повърхнина.

Да разгледаме случая на крива. Ако M_0 лежи на кривата, то $F(M_0)=0$ и (8′) е в същност (7′). Значи правата M_0N е тангента на кривата в точката ѝ M_0 точно когато е изпълнено (7′).

И така, ако една (неособена) точка M_0 лежи на кривата от втора степен, то нейната поляра $\pi(M_0)$ съвпада с тангентата към кривата в точката M_0.

Нека M_0 не лежи на кривата. Очевидно (8′) е уравнение на крива от втора степен. За да определим типа на тази крива и опростим пресмятанията, да приемем, че кривата е овална (другите случаи тук не са интересни). Тогава тя има проективно канонично уравнение

(9) $$F(x_2, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

Сега (8′) има вида

(8*) $$(x_{01}x_1+x_{02}x_2-x_{03}x_3)^2-F(M_0)\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2\right)=0$$

като

$$F(M_0)=x_{01}^2+x_{02}^2-x_{03}^2.$$

Детерминантата за тази крива е

$$A=\begin{vmatrix} x_{01}^2-F(M_0) & x_{01}x_{02} & -x_{01}x_{03} \\ x_{01}x_{02} & x_{02}^2-F(M_0) & -x_{02}x_{03} \\ -x_{01}x_{03} & -x_{02}x_{03} & x_{03}^2-F(M_0) \end{vmatrix}.$$

Следователно кривата (8*) е изродена. Понеже $F(M_0)\neq 0$, рангът на A е 2. Значи кривата (8*) е двойка реални или комплексно спрегнати прави през точката M_0.

Тъй като едно проективно преобразуване запазва типа на кривата от втора степен, преобразува права в права и очевидно преобразува пресечна точка на права и крива от втора степен в пресечна точка на съответните права и крива, то ясно е, че направеното изследване за кривата (9) в проективно каноничен вид важи и за крива от същия тип, зададена с уравнение от вида (1). Така доказахме следната

Теорема 1. *Ако точката M_0 не лежи на кривата* (1), *то уравнението* (8′) *в случая на овална крива е уравнението на двойката тангенти (реални или комплексно спрегнати) през точката M_0 към кривата.*

Тази теорема ни дава повод да дефинираме: една точка M_0 се нарича *външна* (вътрешна) *за овална крива*, ако през нея съществуват двойка реални (комплексно спрегнати) тангенти към кривата.

Да разгледаме случая на повърхнина. Ако M_0 е точка от повърхнината, то $F(M_0)=0$ и уравнението (8″) е в същност (7″). Значи правата M_0N е тангента към повърхнината в точката ѝ M_0 точно когато е изпълнено (7″). Когато точката M_0 е неособена, тези тангенти изпълват една равнина — равнината с уравнение (7″). Тази равнина се нарича *допирателна равнина* към повърхнината в точката ѝ M_0. Ще отбележим, че тя съвпада с полярната равнина $\pi(M_0)$ на същата точка M_0.

Както при изследването на крива, може да се покаже, че ако M_0 не лежи на една овална повърхнина от втора степен или на хиперболоид, то (8″) е уравнение на конус с връх точката M_0, чиито образуващи са тангенти на повърхнината. По-нататък ще използваме това твърдение.

Теорема 2. *Ако* $M_0 \in \pi(N_0)$, *то* $N_0 \in \pi(M_0)$.

Доказателството следва от равенството $F(M_0;\ N_0)=F(N_0;\ M_0)$.

Теорема 3. *Ако M_0 е външна точка за една овална крива от втора степен, то полярата $\pi(M_0)$ съдържа допирните точки T_1, T_2 на тангентите през M_0 към кривата* (черт. 75).

Доказателство. Понеже M_0T_1 е тангента към кривата в точката ѝ T_1, то изпълнено е $F(T_1;\ M_0)=0$. Равенството $F(M_0;\ T_1)=0$ показва, че $T_1 \in \pi(M_0)$.

Аналогично твърдение съществува и за повърхнините.

§ 59. *Определяне на крива от втора степен с точки и тангенти*

Най-напред ще покажем, че до уравнението на тангента (58.7′) на крива от втора степен може да се стигне и по следния геометричен начин.

Да означим с x, y, z хомогенните проективни (или афинни) координати на точка M от равнината $\overline{R}_2$. Уравнението на произволна права е от вида

$$Ax+By+Ct=0.$$

Точките $M_0(x_0,\ y_0,\ t_0)$, $M_1(x_1,\ y_1,\ t_1)$ лежат на правата точно когато са изпълнени равенствата

$$Ax_0+By_0+Ct_0=0,$$
$$Ax_1+By_1+Ct_1=0.$$

Точката M лежи на правата M_0M_1 точно когато написаните три уравнения притежават ненулево решение за A, B, C. Условието за това е

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_0 & y_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & t_1 \end{vmatrix}=0.$$

Следователно това е уравнението на права през две точки в хомогенни проективни (или афинни) координати в равнината.

Да преминем в нехомогенни проективни координати:

$$X=\frac{x}{t},\qquad Y=\frac{y}{t}\quad (t\neq 0).$$

Тогава уравнението (1) може да се запише във вида

$$(2)\qquad Y-Y_0=\frac{Y_1-Y_0}{X_1-X_0}(X-X_0).$$

Нека уравнението на кривата от втора степен в нехомогенни проективни координати е

$$(3)\qquad F(x,\ y,\ 1)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+2a_{12}XY+2a_{13}X+2a_{23}Y+a_{33}=0.$$

Да вземем две точки $M_0(X_0,\ Y_0)$ и $M_1(X_1,\ Y_1)$ от кривата:

$$(4)\qquad F(M_0)=0,\qquad F(M_1)=0.$$

Правата, която ги съединява, има уравнение (2). Нека точката M_1 клони към M_0 (т. е. $X_1\to X_0$, $Y_1\to Y_0$), като остава винаги върху кривата. За да видим какво е поведението на величината

$$k=\frac{Y_1-Y_0}{X_1-X_0},$$

от второто уравнение на (4) изваждаме първото уравнение. Като разделим на X_1-X_0 и оставим $X_1\to X_0$, $Y_1\to Y_0$, получаваме

$$k_0=\lim_{M_1\to M_0} k=-\frac{F_1(M_0)}{F_2(M_0)}.$$

Така получаваме правата с уравнение

$$Y-Y_0=-\frac{F_1(M_0)}{F_2(M_0)}(X-X_0),$$

което, като се вземе пред вид тъждеството на Ойлер

$$F_1(M_0)X_0+F_2(M_0)Y_0+F_3(M_0)=0,$$

приема вида

$$(5)\qquad F_1(M_0)X+F_2(M_0)Y+F_3(M_0)=0.$$

В хомогенни координати то е точно уравнението (7′) от предния параграф.

Така доказахме следната

Теорема 1. *Тангентата към крива от втора степен в точката ѝ* M_0 *е граничното положение* на секущата M_0M_1, *когато* M_1 *клони към* M_0, *оставайки постоянно върху кривата.*

Теорема 2. *Пет точки в равнината, никои четири от които не лежат на една права, определят точно една крива от втора степен, която минава през тях. Кривата е изродена точно когато три от точките са колинеарни.*

Доказателство. Имаме два случая.

Първи случай. Четири от точките са върхове на истински (неизроден) четириъгълник. Нека това са точките $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$. На черт. 76 са указани уравненията на съответните страни. Да разгледаме кривата с уравнение

$$\lambda x_2(x_1-x_3)+\mu x_3(x_1-x_2)=0, \tag{6}$$

като (λ, μ) е произволна ненулева двойка от реални числа. Кривата с уравнение (6) минава през точките A_1, A_2, A_3, E. Ако $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ е петата точка, тя лежи на кривата точно когато

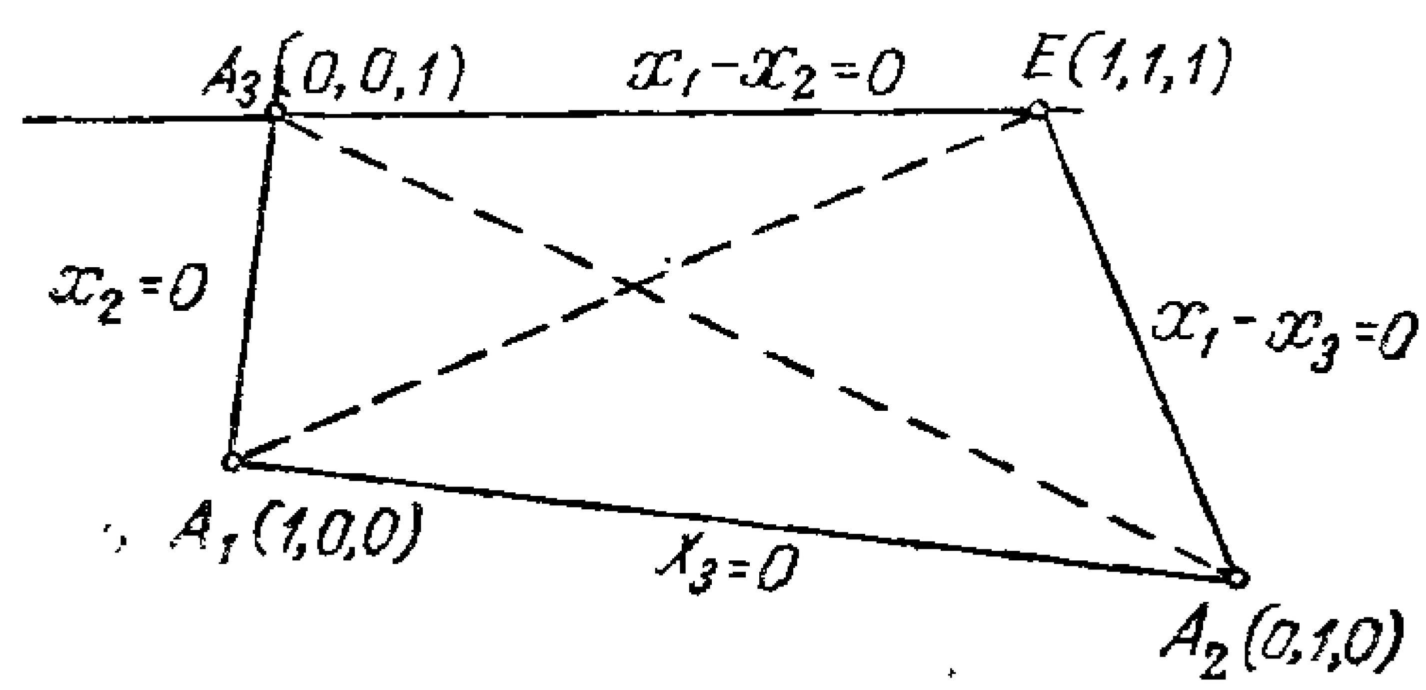
$$\lambda_2 \bar{x}_2(\bar{x}_1-\bar{x}_3)+\mu\bar{x}_3(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=0.$$

Оттук намираме

$$\lambda=\bar{x}_3(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\rho, \quad \mu=-\bar{x}_2(\bar{x}_1-\bar{x}_3)\rho, \tag{7}$$

като $\rho\neq0$. С така получените стойности за λ, μ намираме от (6) една крива от втора степен, минаваща през петте точки. Ще покажем, че тя е единствена. За целта да предположим, че

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{8}$$



Черт. 76

е крива от втора степен, която минава през точките A_1, A_2, A_3. Следва, че $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$. Като изразим, че точката E лежи на същата крива, получаваме $a_{23}=-a_{12}-a_{13}$. Като положим $-a_{12}=\lambda$, $-a_{13}=\mu$, уравнението (8) приема вида (6). Значи кривите (6) и само те съдържат точките A_1, A_2, A_3,E. Тогава кривата (6) при условието (7) е единствената крива през петте точки.

За детерминантата на кривата (6) имаме

$$A=-\lambda\mu(\lambda+\mu).$$

Тя е нула точно когато поне едно от числата λ, μ, $\lambda+\mu$ е нула. Това са точно случаите, когато петата точка M лежи на поне една от правите A_1A_3, A_2A_3, A_1E, A_2E, A_3E. С това първият случай е разгледан.

Втори случай. Петте точки са разположени на две (пресекателни) прави. Тогава кривата е изродена и се състои от двете прави.

Глава XII

Афинни свойства и афинна класификация на фигурите от втора степен

В тази глава ще разгледаме афинните свойства на фигурите от втора степен, т. е. свойствата, които са инвариантни относно произволно афинно преобразуване. Тъй като афинната група е подгрупа на проективната, то всяко проективно свойство е и афинно. Значи всичко казано в предишната глава за фигурите от втора степен важи и тук. В тази глава ще държим сметка и за безкрайните елементи.

§ 60. Безкрайни точки и афинна класификация на фигурите от втора степен

Нека спрямо афинна координатна система Oxy в равнината ($Oxyz$ в пространството) е дадена кривата от втора степен

$$F(x,\ y,\ t)=a_{11}x^2+a_{22}v^2+a_{33}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xt+2a_{23}vt=0, \tag{1}$$

съответно повърхнината

$$\begin{aligned}F(x,\ y,\ z,\ t)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+\\+2a_{14}xt+2a_{23}yz+2a_{24}yt+2a_{34}zt=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Като положим $t=1$, получаваме уравнението на фигурата в нехомогенни афинни координати.

Уравненията

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0, \tag{3}$$

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0, \tag{4}$$

които се получават от (1) и (2) с полагането $t=0$, определят безкрайните точки на кривата, съответно на повърхнината.

Като вземем пред вид, че едно афинно преобразуване (§ 53) (с реални коефициенти) преобразува реална безкрайна точка в реална безкрайна точка и коефициентите в уравнението на една фигура от втора степен са реални числа, получаваме резултата: Ако множеството на реалните безкрайни точки на една фигура от втора степен се състои от краен брой точки, то този брой е афинна инварианта.

Въз основа на това може да се направи следната афинна класификация на фигурите от втора степен:

Случай на крива. Уравнението (3), определящо безкрайните точки $U(x, y, 0)$ на кривата, е еквивалентно на квадратното уравнение

(5) (3) $$a_{11}k^2+2a_{12}k+a_{22}=0 \quad \left(k=\frac{y}{x}\right).$$

Нека

(6) (4) $$A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

е адюнгираното количество на елемента a_{33} в $\det(a_{ij})$ на кривата. Тогава $-A_{33}$ е дискриминантата на квадратното уравнение (5). Имаме следните възможности:

1. $A_{33}>0$. Квадратното уравнение няма реални корени и следователно кривата не притежава (реални) безкрайни точки. Тогава кривата се нарича *крива от елиптичен вид*, а в случай че е неизродена — *елипса*.

2. $A_{33}=0$. Квадратното уравнение има един реален корен и следователно кривата притежава една реална безкрайна точка. Тогава кривата се нарича *крива от параболичен тип*, а в случай че е неизродена — *парабола*.

3. $A_{33}<0$. Квадратното уравнение (3) има два реални (различни) корена и следователно кривата притежава две реални безкрайни точки. Кривата се нарича *крива от хиперболичен тип*, а в случай че е неизродена — *хипербола*.

Ние няма да разглеждаме криви от втора степен, за които са изпълнени равенствата $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$. Това са криви, които съгласно (5) притежават безбройно много безкрайни точки. От (1) следва, че уравнението на такава крива е от вида

$$(2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}t)t=0$$

и значи кривата се разпада на крайната права с уравнение

$$2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}t=0$$

и на безкрайната права $t=0$.

Случай на повърхнина. Понеже x, y, z в (4) са определени с точност до ненулев множител, като положим $z=1$, получаваме уравнението

(7) $$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

определящо безкрайните точки на повърхнината от втора степен. Уравнението (7) е уравнение на крива от втора степен в безкрайната равнина. В зависимост от типа на тази крива (§ 56) може да се направи афинна класификация на повърхнините от втора степен. Ние няма да се спираме на това.

§ 61. *Център и централно уравнение на фигура от втора степен*

Една точка се нарича *център* на крива от втора степен, ако е полюс на безкрайната права на равнината относно кривата от втора степен. Аналогично една точка се нарича център на повърхнина от втора степен, ако е полюс на безкрайната равнина на пространството относно повърхнината от втора степен. Уравнението на полярата на точката $M_0(x_0, y_0, t_0)$ е

$$F_1(M_0)x+F_2(M_0)y+F_3(M_0)t=0.$$

Тя съвпада с безкрайната права $t=0$ точно когато при $F_3(M_0)\neq0$ са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned} &F_1(M_0)=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}t_0=0,\\ (1)\qquad &F_2(M_0)=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}t_0=0.\end{aligned}$$

Аналогично при повърхнина уравнението на полярната равнина на точката $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ е

$$F_1(M_0)x+F_2(M_0)y+F_3(M_0)z+F_4(M_0)t=0.$$

Тя съвпада с безкрайната равнина $t=0$ точно когато при $F_4(M_0)\neq0$ са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned} &F_1(M_0)=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}t_0=0,\\ (2)\qquad &F_2(M_0)=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}t_0=0,\\ &F_3(M_0)=a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}t_0=0.\end{aligned}$$

Системата (1) (съответно (2)) определя всички центрове на кривата (повърхнината) от втора степен, които не са особени точки.

Ако една точка е особена, то нейната поляра е неопределена, т. е. всяка права в равнината (съответно всяка равнина в пространството) е полярна фигура на особената точка. Същото се отнася и за безкрайната фигура, поради което следва твърдението, че всяка особена точка на фигура от втора степен е център на фигурата.

Ще отбележим, че системата (1) (съответно (2)) винаги има ненулево решение, така че всяка фигура притежава център (краен или безбезкраен). Ще се занимаем по-подробно с решенията на системата (1).

1. $A_{33}\neq0$. Системата (1) при $t_0\neq0$ притежава точно едно решение $(x_0, y_0, t_0\neq0)$, с което се определя точно един краен център $M_0(x_0, y_0, t_0\neq0)$ на кривата. При $t_0=0$ системата (1) не притежава ненулево решение и следователно кривата не притежава безкраен център. Значи крива от хиперболичен или елиптичен тип притежава точно един център, и то краен.

2. $A_{33}=0$. В този случай системата (1) за $t_0=0$ има точно едно решение, с което се определя точно един безкраен център. Значи крива от параболичен тип притежава точно един безкраен цен-

тър. Ако кривата е неизродена (т. е. парабола), детерминантата на кривата е различна от нула и системата (1) няма решение при $t_0 \neq 0$. Следователно параболата притежава точно един център, и то безкраен. Ако кривата от параболичен тип е изродена, тя притежава безбройно много крайни центрове. Действително от $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ следва, че поне едно от числата a_{11}, a_{22} е различно от нула. Да приемем, че $a_{11} \neq 0$. Имаме равенствата $a_{12} = \lambda a_{11}$, $a_{22} = \lambda a_{12}$ при някакво число λ. Да положим $a_{23} = \mu a_{13}$ (другият случай $a_{13} = \mu a_{23}$ се разглежда по същия начин). За детерминантата на кривата намираме

$$A = (\lambda - \mu)^2 a_{11} a_{13}^2.$$

Понеже $A = 0$, следва, че $\lambda = \mu$ или $a_{13} = 0$. В двата случая матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

има ранг 1 и следователно системата (1) при $t_0 = 1$ притежава безбройно много решения. Следователно изродена крива от параболичен тип притежава безбройно много крайни центрове.

Фигура от втора степен, която притежава точно един и при това краен център, се нарича *централна*.

Теорема. *Всяка фигура от втора степен е симетрично разположена спрямо всеки свой краен център.*

Доказателство. Нека $M_0(x_0, y_0, t_0 = 1)$ е един кой да е краен център за кривата от втора степен. Пренасяме транслационно координатната система Oxy в точката M_0; получаваме координатната система $M_0\xi\eta$, като формулите за транслацията са

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \tag{3}$$

Като заместим x, y от (3) в уравнението на кривата (60.1) и вземем пред вид (1), получаваме

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + k = 0, \tag{4}$$

където

$$k = F(x_0, y_0, 1) = F(M_0). \tag{5}$$

Като вземем пред вид тъждеството на Ойлер

$$F(M_0) = F_1(M_0)x_0 + F_2(M_0)y_0 + F_3(M_0),$$

намираме

$$k = F_3(M_0). \tag{6}$$

В случай че $A_{33} \neq 0$, от (1) за координатите на центъра намираме

$$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}}, \tag{7}$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} в детерминантата на кривата. Тогава от (6) следва

$$k = \frac{A}{A_{33}}. \tag{8}$$

Уравнението (4) на кривата показва, че заедно с точката (ξ, η) и точката $(-\xi, -\eta)$ лежи на кривата от втора степен. С това теоремата в случая на крива е доказана.

Уравнението (7) се нарича *централно уравнение на крива* от втора степен.

Аналогично се провежда доказателството и в случая на повърхнина от втора степен. Ще формулираме само резултатите.

Ако $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0=1)$ е един краен център на повърхнината, като извършим транслацията

$$(9) \qquad x=x_0+\xi,\ y=y_0+\eta,\ z=z_0+\zeta,$$

получаваме *централното уравнение на повърхнината*

$$(10) \qquad a_{11}\xi^2+a_{22}\eta^2+a_{33}\zeta^2+2(a_{12}\xi\eta+a_{13}\xi\zeta+a_{23}\eta\zeta)+k=0.$$

За величината k имаме

$$(11) \qquad k=F(M_0)=F_4(M_0).$$

Ако повърхнината е централна, то е в сила и формулата

$$(12) \qquad k=\frac{A}{A_{44}}.$$

§ 62. *Асимптоти на фигура от втора степен*

Всяка права, която е тангента на фигура от втора степен в нейна безкрайна точка, се нарича *асимптота* на фигурата.

От определението следва, че кривите от елиптичен тип нямат асимптоти, всяка крива от параболичен тип има една асимптота, всяка крива от хиперболичен тип — две асимптоти (в случай че безкрайните точки не са особени).

Теорема. *Всяка асимптота на фигура от втора степен минава през всеки център на фигурата.*

Доказателство. Нека M_0 е център. Тогава $\pi(M_0)$ е безкрайната фигура. Ако g е асимптота с допирна точка U от фигурата от втора степен, то $\pi(U)$ съвпада с g. Понеже $U \in \pi(M_0)$, то $M_0 \in g$.

Ако кривата е хипербола, то центърът й M_0 е крайна външна точка. Понеже $F_1(M_0)=F_2(M_0)=0$, $F(M_0)=F_3(M_0)=\frac{A}{A_{33}}$, за уравнението (8) от § 58 получаваме

$$(1) \qquad F(x, y, t)-\frac{A}{A_{33}}\,t^2=0.$$

Според резултатите от § 58 (1) е уравнение на двойката асимптоти за хипербола с уравнение $F(x, y, t)=0$.

Да разгледаме случая на повърхнина, която има само един краен център M_0. Уравнението (8″) от § 58 приема вида

$$F(x, y, z, t)-\frac{A}{A_{44}}t^2=0. \tag{2}$$

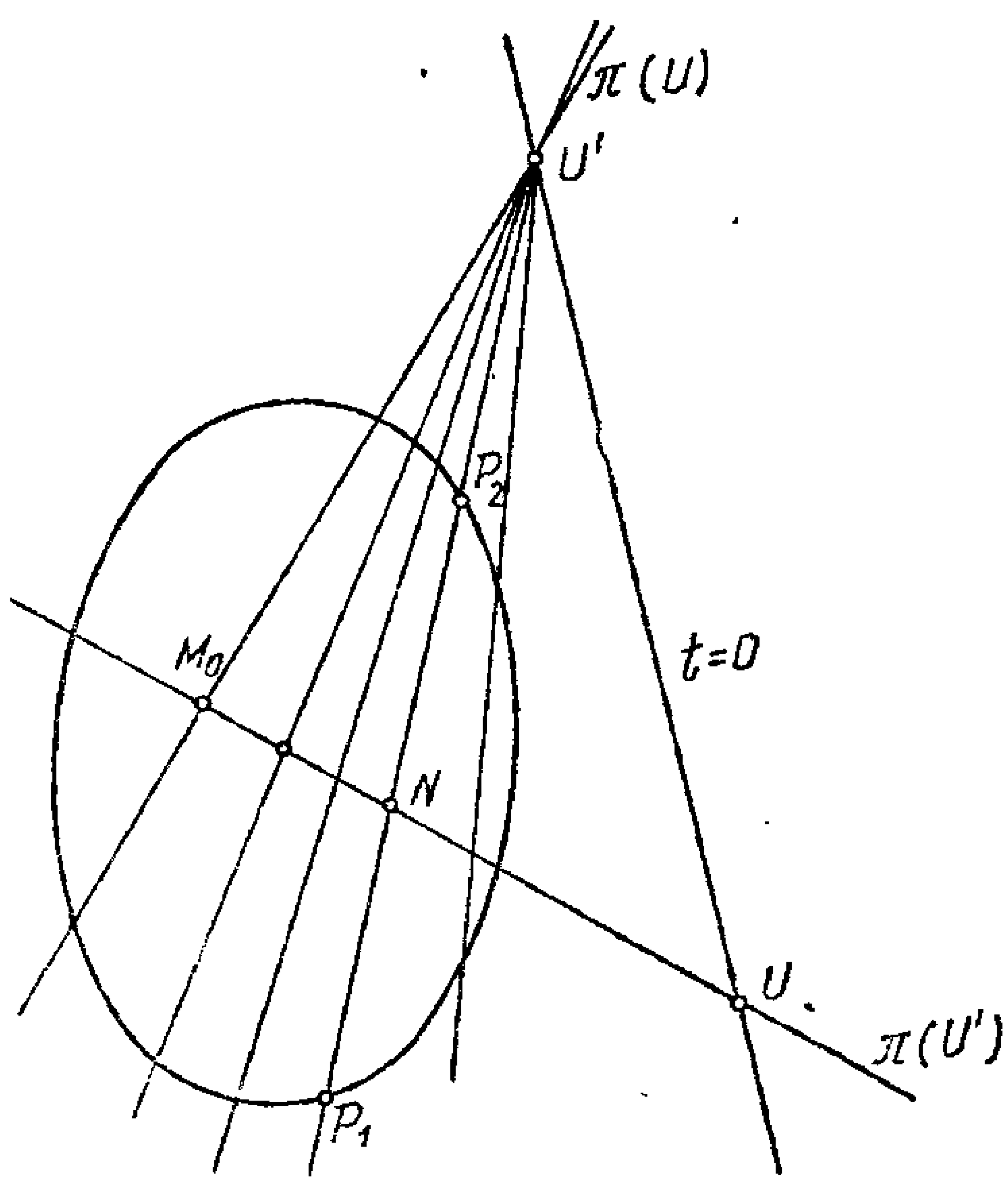
Това е уравнение на конус с връх M_0 — единственият център на повърхнината. Образуващите на този конус са асимптоти на повърхнината. Нарича се *асимптотичен конус* за повърхнината.

§ 63. Диаметри на крива от втора степен. Диаметрални равнини на повърхнина от втора степен

Всяка права, която е поляра на безкрайна точка относно крива от втора степен, се нарича *диаметър на кривата.*

От определението, като се вземе пред вид теорема 1 от § 58, следва резултатът: *всеки диаметър минава през всеки център на кривата.*

Нека U е безкрайна точка и $\pi(U)$ е съответният диаметър, чиято безкрайна точка е U'. Нейната поляра минава през U. Диаметрите



Черт. 77

$\pi(U)$, $\pi(U')$ се наричат *двойка спрегнати диаметри* за кривата. Според определението техните полюси са двойка спрегнати безкрайни точки.

Нека кривата притежава само един краен център и е неизродена, т. е. тя е елипса или хипербола. Ако U, U' не лежат на кривата (това в случая на елипса е винаги изпълнено), то в сила е следното твърдение: хордите P_1P_2 на кривата, успоредни на диаметъра $\pi(U)$, се разполовяват от спрегнатия му диаметър $\pi(U')$ (черт. 77). Доказателството се получава, като се вземе пред вид, че двойното отношение $(P_1P_2NU')=-1$ и U' е безкрайна точка (§ 48).

Уравнението на диаметъра $\pi(U)$ е

$$F_1(U)x+F_2(U)y+F_3(U)t=0. \tag{1}$$

Полярната равнина на всяка безкрайна точка относно повърхнина от втора степен се нарича ***диаметрална равнина на повърхнина.*** **Както и при кривите, лесно се съобразява, че всяка диаметрална равнина минава през всеки център на повърхнината.**

Глава XIII

Метрична класификация и метрични канонични уравнения на фигурите от втора степен

В тази глава ще се интересуваме от метричните свойства на фигурите от втора степен, т. е. от свойства, които са инвариантни относно метричните преобразувания (еднаквостите).

§ 64. Метрична класификация и метрични канонични уравнения на кривите от втора степен

Нека спрямо ортонормирана координатна система $Oxy = Oe_1e_2$ в равнината е дадена кривата от втора степен с уравнение

(1) $$F(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2(a_{12}xy + a_{13}xt + a_{23}yt) = 0,$$

като (x, y, t) са хомогенните координати относно Oxy на точка от кривата. Коефициентите a_{ij} са реални и подчинени на равенствата

(2) $$a_{ij} = a_{ji}.$$

При $t = 1$ получаваме уравнението на кривата в хомогенни координати:

(1′) $$F(x, y, 1) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Формулите за смяна на ортонормираната координатна система в равнината са

(3) $$\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1^1 x' + \alpha_1^2 y', \\ y &= \beta + \alpha_2^1 x' + \alpha_2^2 y', \end{aligned}$$

като матрицата (α_i^j) е ортогонална. Тук (x, y) са координатите на точка M спрямо Oxy, а (x', y') са координатите на същата точка спрямо новата координатна система $O'x'y' = O'e_1'e_2'$. Ще припомним, че относно Oxy точката O' има координати (α, β), а векторите e_1', e_2' имат съответно координати (α_1^1, α_2^1), (α_1^2, α_2^2).

Формулите (3) имат и друго геометрично тълкуване, а именно: те са формули на произволно метрично преобразуване в равнината. Според казаното в § 44 (x, y) са координатите на образа M на точката $M'(x', y')$ (и двете точки са отнесени спрямо системата $O'x'y'$). При това точката O има координати (α, β), векторите e_1, e_2 имат съответно координати (α_1^1, α_2^1), (α_1^2, α_2^2) спрямо координатната система $O'x'y'$.

От линейната алгебра е известно, че за квадратната форма

$$f(x, y) := a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{4}$$

с реални коефициенти съществува ортогонална трансформация (с реални коефициенти)

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1^1 x' + \alpha_1^2 y', \\ y &= \alpha_2^1 x' + \alpha_2^2 y' \end{aligned} \tag{5}$$

на координатната система Oxy до положение $Ox'y'$ (§ 7), така че формата (4) приема вида

$$f(x', y') = s_1 x'^2 + s_2 y'^2. \tag{6}$$

Векторите $e_1'(\alpha_1^1, \alpha_2^1)$, $e_2'(\alpha_1^2, \alpha_2^2)$ са собствени вектори на матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

чието характеристично уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

има корени s_1, s_2. Поради (2) те са винаги реални.

Като заместим x и y от (5) в (1), получаваме уравнение на кривата относно новата координатна система $Ox'y'$:

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \tag{9}$$

Като положим

$$\begin{aligned} x' &= X + \alpha, \\ y' &= Y + \beta, \end{aligned} \tag{10}$$

уравнението (9) приема вида

$$\begin{aligned} & s_1(X^2 + 2\alpha X + \alpha^2) + s_2(Y^2 + 2\beta Y + \beta^2) + \\ & + 2a'_{13}(X + \alpha) + 2a'_{23}(Y + \beta) + a'_{33} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Имаме няколко случая:

1. $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. Величините α, β определяме от равенствата

$$(12) \qquad \begin{aligned} 2\alpha s_1 + 2a'_{13} &= 0, \\ 2\beta s_2 + 2a'_{23} &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$(13) \qquad \alpha = -\frac{a'_{13}}{s_1}, \quad \beta = -\frac{a'_{23}}{s_2}.$$

След приведение уравнението (11) на кривата приема вида

$$(14) \qquad s_1 X^2 + s_2 Y^2 + a''_{33} = 0 \quad (s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0),$$

като

$$(15) \qquad a''_{33} = s_1 \alpha^2 + s_2 \beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a'_{33}.$$

2. Да предположим, че само един от корените s_1, s_2 е нула, например $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$. Сега (11) е в същност уравнението

$$(11') \qquad s_2(Y^2 + 2\beta Y + \beta^2) + 2a'_{13}(X + \alpha) + 2a'_{23}(Y + \beta) + a'_{33} = 0.$$

Величината β определяме пак от (13). Ще разгледаме два подслучая

а) $a'_{13} \neq 0$. Величината α определяме от равенството

$$(16) \qquad s_2\beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a'_{33} = 0.$$

Уравнението (11′) става

$$(17) \qquad s_2 Y^2 + 2a'_{13} X = 0 \quad (s_2 \neq 0,\ a'_{13} \neq 0).$$

б) $a'_{13} = 0$. Сега (11′) приема вида

$$(18) \qquad s_2 Y^2 + a''_{33} = 0 \quad (s_2 \neq 0).$$

Като вземем пред вид, че формулите (10) реализират транслация на координатната система $Ox'y'$ до положението $O'XY$, като точката O' има координати (α, β) относно $Ox'y'$, то получените резултати можем да изкажем като

Теорема 1. *С подходяща смяна на ортонормираната координатна система (ортогоналната трансформация (5) и транслацията (10)) уравнението на всяка крива от втора степен може да приеме един от следните три вида:*

$$(14) \qquad s_1 X^2 + s_2 Y^2 + a''_{33} = 0 \quad (s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0),$$

$$(17) \qquad s_2 Y^2 + 2a'_{13} X = 0 \qquad (s_2 \neq 0,\ a'_{13} \neq 0),$$

$$(18) \qquad s_2 Y^2 + a''_{33} = 0 \qquad (s_2 \neq 0).$$

Да изследваме последните три уравнения.

Ако в (14) $a''_{33} \neq 0$, това уравнение приема вида

(19) $$\frac{X^2}{-\frac{a''_{33}}{s_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{a''_{33}}{s_2}} = 1.$$

За числата $-\frac{a''_{33}}{s_1}$, $-\frac{a''_{33}}{s_2}$ имаме следните възможности: двете са положителни, двете са отрицателни, имат различни знаци. В първия случай полагаме

(20) $$a^2 := -\frac{a''_{33}}{s_1}, \quad b^2 = -\frac{a''_{33}}{s_2},$$

като считаме $a>0$, $b>0$. Уравнението (19) приема вида

(21) $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

което е *каноничното уравнение на елипсата* (§ 33). Във втория случай полагаме

$$a^2 = \frac{a''_{33}}{s_1}, \quad b^2 = \frac{a''_{33}}{s_2} \qquad (a>0,\ b>0)$$

и (19) приема вида

(22) $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

Кривата с уравнение (22) не притежава реални точки; нарича се *имагинерна елипса*. В третия случай полагаме

$$a^2 = -\frac{a''_{33}}{s_1}, \quad b^2 = \frac{a''_{33}}{s_2} \quad (a>0,\ b>0)$$

и (19) приема вида

(23) $$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

което е *канонично уравнение на хипербола с реална ос $O'X$*. Ако

$$a^2 = \frac{a''_{33}}{s_1}, \quad b^2 = -\frac{a''_{33}}{s_2} \quad (a>0,\ b>0),$$

(19) приема вида

(24) $$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

което е *каноничното уравнение на хипербола с реална ос $O'Y$*.

Нека в уравнението (14) $a''_{33}=0$. Сега имаме кривата с уравнение

$$s_1X^2+s_2Y^2=0,$$

което е еквивалентно на уравнението

$$Y^2=-\frac{s_1}{s_2}X^2.$$

Ако s_1, s_2 имат различни знаци, полагаме

$$a^2=-\frac{s_1}{s_2}\quad (a>0).$$

Получаваме уравнението

$$(25)\qquad Y^2=a^2X^2$$

и значи кривата се разпада на двете реални пресекателни прави с уравнения

$$(25')\qquad g_1:\ Y=aX,\ g_2: Y=-aX.$$

Ако s_1, s_2 имат еднакви знаци, полагаме

$$a^2=\frac{s_1}{s_2}\ (a>0).$$

Уравнението на кривата е

$$(26)\qquad Y^2=-a^2X^2$$

и значи тя се разпада на две комплексно спрегнати прави

$$(26')\qquad g_1:\ Y=iaX,\ g_2:\ Y=-iaX\quad (i^2=-1).$$

Кривата притежава единствена реална точка $X=Y=0$.

Уравнението (17) е еквивалентно на уравнението

$$(27)\qquad Y^2=2p\ X\quad \left(p=-\frac{a'_{13}}{s_2}\right)$$

и значи кривата е парабола с ос $O'X$.

Да разгледаме уравнението (18). То е еквивалентно на уравнението

$$Y^2=-\frac{a''_{33}}{s_2}.$$

Имаме следните случаи:

а) $a^2=-\frac{a''_{33}}{s_2}>0$. Кривата се представя с уравнението

$$(28)\qquad Y^2=a^2$$

и значи тя се разпада на двойката успоредни прави

$$(28')\qquad g_1:\ Y=a,\ g_2:\ Y=-a.$$

б) $-\frac{a''_{33}}{s_2}=0$. Кривата има уравнение

$$Y^2=0 \tag{29}$$

и значи тя е двойната права $Y=0$.

в) $a^2=\frac{a''_{33}}{s_2}>0$. Кривата има уравнение

$$Y^2=-a^2. \tag{30}$$

и следователно се състои от двойката комплексно спрегнати успоредни прави

$$Y=ia,\ Y=-ia. \tag{30'}$$

С това доказахме следната

Теорема 2. *Съществуват девет метрично нееквивалентни типа криви от втора степен. Това са кривите със следните метрични канонични уравнения:*

1. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	(*елипса*);
2. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	(*имагинерна елипса*);
3. $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	(*хипербола*);
4. $Y^2=a^2X^2$	(*две реални пресекателни прави*);
5. $Y^2=-a^2X^2$	(*две комплексно спрегнати пресекателни прави*);
6. $Y^2=2pX\ (p\neq 0)$	(*парабола*);
7. $Y^2=a^2$	(*две реални успоредни прави*);
8. $Y^2=-a^2$	(*две комплексно спрегнати успоредни прави*);
9. $Y^2=0$	(*двойна права*).

Написаните уравнения в тази теорема се наричат *метрични канонични уравнения на съответните криви.*

Основните свойства на елипсата, хиперболата и параболата разгледахме вече в § 33.

Задача 1. Спрямо ортонормирана координатна система Oxy е дадена кривата с уравнение

$$x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0. \tag{31}$$

Да се намерят метричното канонично уравнение на кривата и последователните координатни трансформации, чрез които се стига до него.

Решение. Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-s & 2 \\ 2 & 4-s \end{vmatrix}=0$$

има корени $s_1=0$, $s_2=5$. Като решим системата

$$\lambda+2\mu=0,$$
$$\lambda^2+\mu^2=1,$$

намираме координатите $\alpha_1^1=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2^1=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ на собствения вектор e'_1, съответствуващ на корена $s_1=0$. Вторият собствен вектор e'_2 е перпендикулярен на първия и неговите координати написваме направо, без да решаваме нова система:

$$\alpha_1^2=-\alpha_2^1=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \alpha_2^2=\alpha_1^1=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Впрочем, така определен, вторият собствен вектор образува с първия положително ориентирана двойка вектори. Ортогоналната трансформация

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}\,(2x'+y'),$$
$$(32)\qquad y=\frac{1}{\sqrt{5}}\,(-x'+2y')$$

привежда уравнението на кривата (31) в уравнението

$$(33)\qquad y'^2-\frac{10}{\sqrt{5}}\,x'-10=0,$$

отнесено спрямо координатната система $Ox'y'=Oe_1'e_2'$. Като положим

$$x'=X+\alpha,$$
$$y'=Y+\beta,$$

последното уравнение приема вида

$$(Y+\beta)^2-\frac{10}{\sqrt{5}}\,(X+\alpha)-10=0.$$

От $a'_{23}=0$ следва $\beta=0$. Анулирането на свободния член дава $\alpha=-\sqrt{5}$.
Следователно транслацията

$$x'=X-\sqrt{5},$$
$$(34)\qquad y'=Y$$

на координатната система $Ox'y'$ до положението $O'XY$ привежда уравнението на кривата (33) във вида

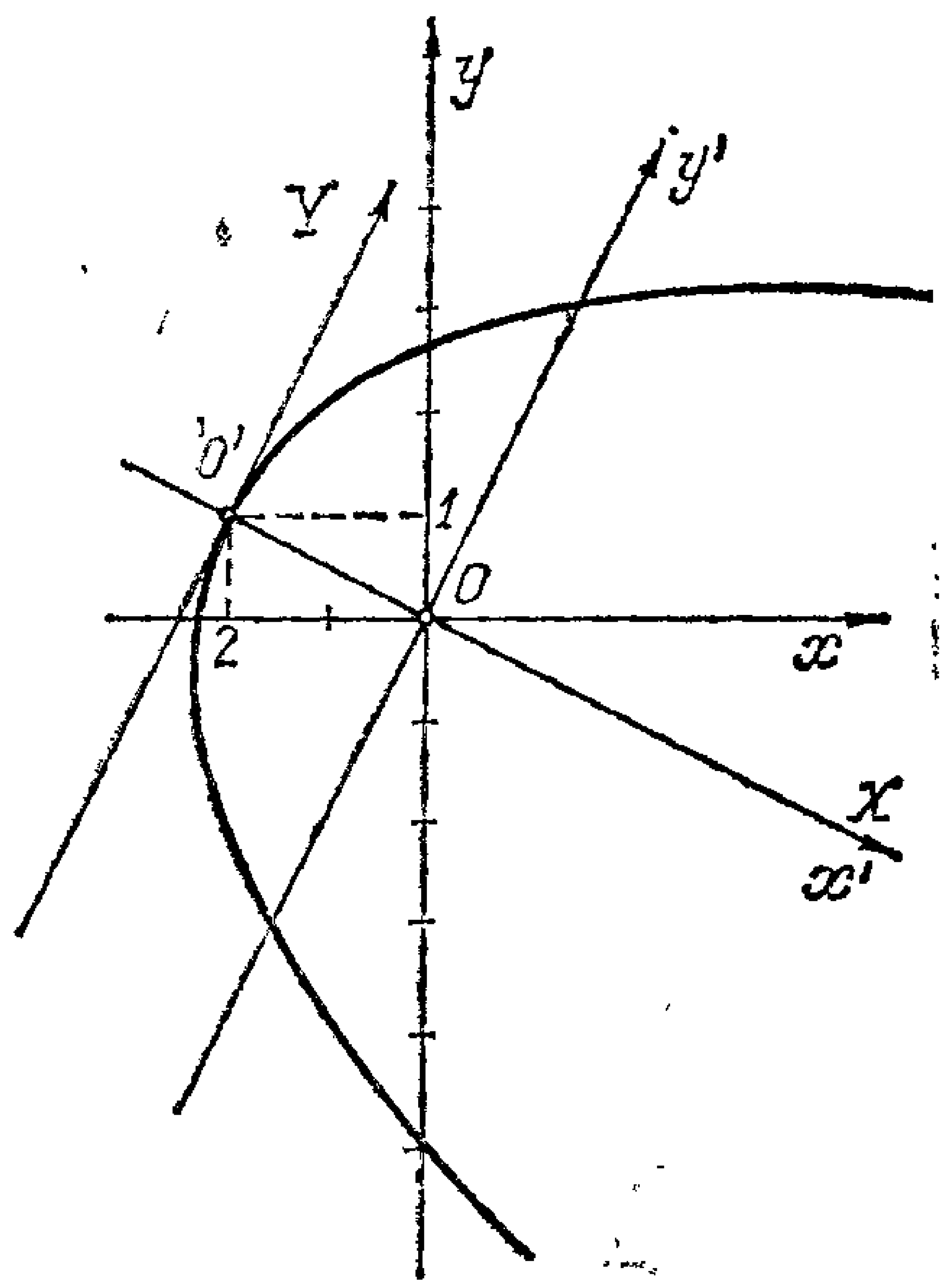
$$(35)\qquad Y^2=2\sqrt{5}\,X,$$

което е метричното канонично уравнение на кривата. Значи кривата е парабола. На черт. 78 е начертана параболата заедно с трите координатни системи.

Задача 2. Спрямо ортонормираната координатна система Oxy е дадена кривата с уравнение

$$(36) \qquad 5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0.$$

Да се намерят метричното канонично уравнение на кривата и последователните координатни трансформации, чрез които се стига до него.



Черт. 78

Решение. Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-s & 2 \\ 2 & 2-s \end{vmatrix}=0$$

има корени $s_1=1$, $s_2=6$. Като решим системата

$$4\lambda+2\mu=0,$$
$$\lambda^2+\mu^2=1,$$

намираме координатите $\alpha_1^1=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2^1=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ на собствения вектор e'_1, съответстващ на корена $s_1=1$. Вторият собствен вектор e'_2 има координати $\alpha_1^2=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2^2=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ортогоналната трансформация

$$(37) \qquad \begin{aligned} x&=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y'), \\ y&=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y') \end{aligned}$$

ривежда уравнението (36) на кривата в уравнението

$$(38) \qquad x'^2+6y'^2-\frac{60}{\sqrt{5}}y'+18=0$$

спрямо системата $Ox'y'=Oe_1'e_2'$. Като положим

$$x'=X+\alpha,$$
$$y'=Y+\beta,$$

последното уравнение приема вида

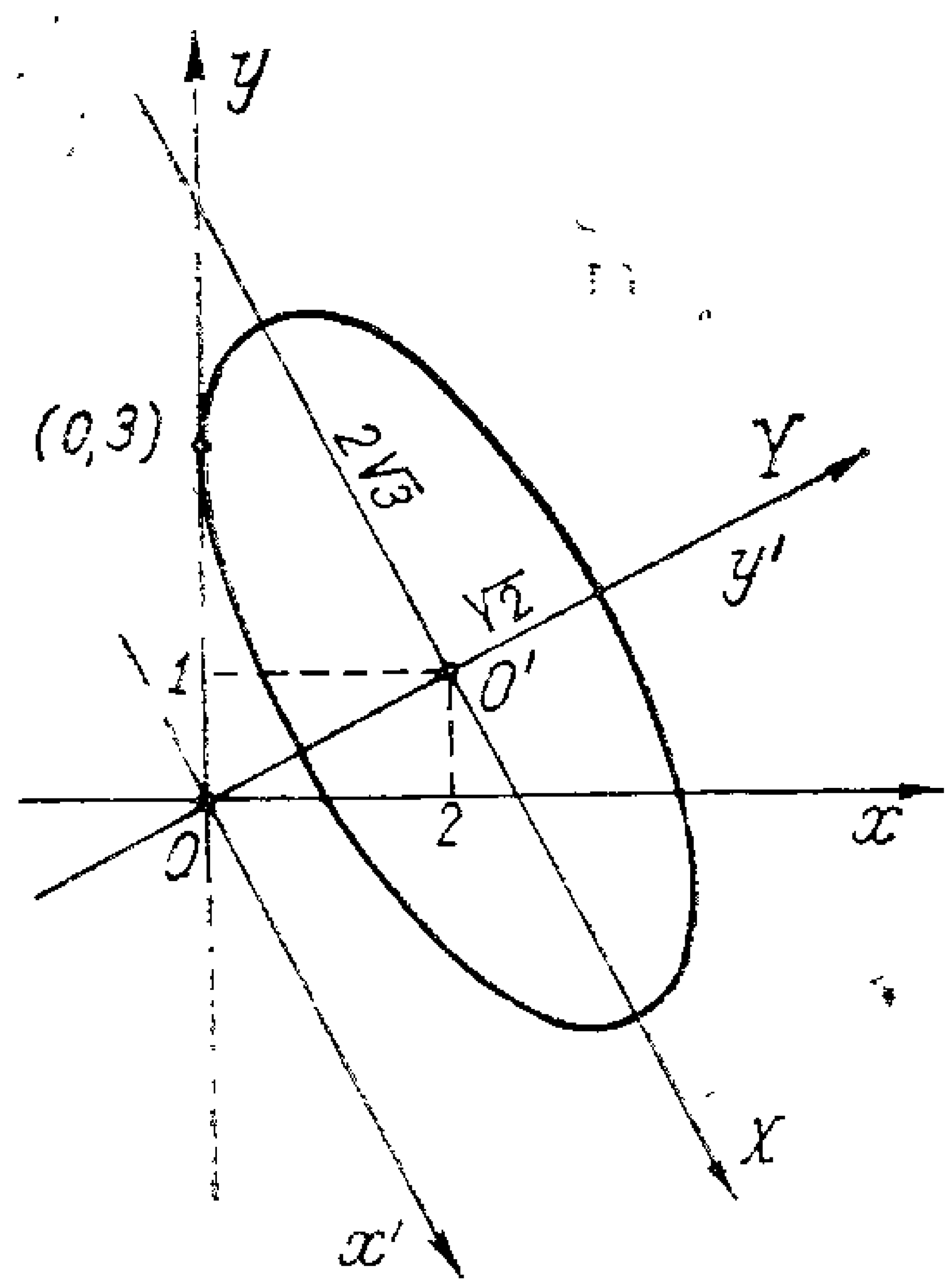
$$X^2+2\alpha X+\alpha^2+6(Y^2+2\beta Y+\beta^2)-\frac{60}{\sqrt{5}}(Y+\beta)+18=0.$$

От $a'_{13}=0$ следва $\alpha=0$. Като анулираме коефициента пред Y, получаваме $\beta=\sqrt{5}$. Следователно транслацията

$$(39) \qquad x'=X,$$
$$y'=Y+\sqrt{5}$$

на координатната система $Ox'y'$ до положението $O'XY$, като O' има координати $(0, \sqrt{5})$ спрямо $Ox'y'$, привежда уравнението (38) на кривата в уравнение на кривата относно системата $O'XY$:

$$X^2+6Y^2=12.$$



Черт. 79

Оттук получаваме метричното канонично уравнение на кривата

$$(70) \qquad \frac{X^2}{12}+\frac{Y^2}{2}=1.$$

Значи кривата е елипса, която е изобразена на черт. 79. Ще отбележим, че елипсата се допира до оста Oy в точката с координати $(x=0,\ y=3)$.

Забележка. Направленията, определени от собствените вектори се наричат *главни направления* за кривата, тъй като те са успоредни на осите на кривата (при парабола едното главно направление е успоредно на оста ѝ, а другото е перпендикулярно на оста).
р

§ 65. *Метрична класификация и метрични канонични уравнения на повърхнините от втора степен*

Нека спрямо ортонормирана координатна система $Oxyz = O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в пространството е дадена повърхнината от втора степен с уравнение

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(x, y, z, t) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + \\ &+ 2(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}xt + a_{23}yz + a_{24}yt + a_{34}zt) = 0, \end{aligned}$$

като (x, y, z, t) са хомогенни координати относно $Oxyz$ на точка от повърхнината. Коефициентите a_{ij} са реални и подчинени на равенствата

$$(2)\qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

При $t = 1$ получаваме уравнението на повърхнината в хомогенни координати относно $Oxyz$:

$$(1')\qquad \begin{aligned} F(x, y, z, 1) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

Формулите за смяна на ортонормирана координатна система в пространството са

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1^1 x' + \alpha_1^2 y' + \alpha_1^3 z', \\ y &= \beta + \alpha_2^1 x' + \alpha_2^2 y' + \alpha_2^3 z', \\ z &= \gamma + \alpha_3^1 x' + \alpha_3^2 y' + \alpha_3^3 z', \end{aligned}$$

като матрицата (α_i^j) е ортогонална. Тук (x, y, z) са координатите на точка M спрямо $Oxyz$, а (x', y', z') са координатите на същата точка спрямо координатната система $O'x'y'z' = O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$. Ще припомним, че спрямо $Oxyz$ точката O' има координати (α, β, γ), а векторът $\mathbf{e}_i'$ — $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Формулите (3) имат и друго геометрично тълкуване, а именно: те са формули на произволно метрично преобразуване в пространството. По-точно (x, y, z) са координати на образа M на точката $M'(x', y', z')$ (и двете точки, отнесени спрямо системата $O'x'y'z'$). При това точката O има спрямо системата $O'x'y'z'$ координати (α, β, γ), а координатите на вектора $\mathbf{e}_i$ са $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

От линейната алгебра е известно, че за квадратната форма

$$(4)\qquad f(x, y, z) := a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz)$$

с реални коефициенти съществува ортогонална трансформация с реални коефициенти

$$(5)\qquad \begin{aligned} x&=\alpha_1^1 x'+\alpha_1^2 y'+\alpha_1^3 z',\\ y&=\alpha_2^1 x'+\alpha_2^2 y'+\alpha_2^3 z',\\ z&=\alpha_3^1 x'+\alpha_3^2 y'+\alpha_3^3 z'\end{aligned}$$

на координатната система $Oxyz$ до положение $Ox'y'z'$, така че формата (4) приема вида

$$(6)\qquad f(x',\ y',\ z')=s_1 x'^2+s_2 y'^2+s_3 z'^2.$$

Векторите $e_1'(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1,\ \alpha_3^1)$, $e_2'(\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\ \alpha_3^2)$, $e'_3(\alpha_1^3,\ \alpha_2^3,\ \alpha_3^3)$ са собствени (единични) вектори на матрицата

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

чието характеристично уравнение

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s\end{vmatrix}=0$$

има корени s_1, s_2, s_3. Поради (2) те са винаги реални.

Като заместим x, y, z от (5) в (1'), получаваме уравнението на кривата относно новата координатна система $Ox'y'z'$:

$$(9)\qquad s_1x'^2+s_2y'^2+s_3z'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

Като положим

$$(10)\qquad \begin{aligned} x'&=X+\alpha_1\\ y'&=Y+\beta,\\ z'&=Z+\gamma,\end{aligned}$$

уравнението се преобразува в

$$(11)\qquad \begin{aligned} &s_1(X^2+2\alpha X+\alpha^2)+s_2(Y^2+2\beta Y+\beta^2)+s_3(Z^2+2\gamma Z+\gamma^2)+\\ &+2a'_{14}(X+\alpha)+2a'_{24}(Y+\beta)+2a'_{13}(Z+\gamma)+a'_{44}=0.\end{aligned}$$

Имаме няколко случая:

1. $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, $s_3 \neq 0$. Величините α, β, γ определяме от равенствата

$$(12)\qquad \begin{aligned} 2\alpha s_1+2a'_{14}&=0,\\ 2\beta s_2+2a'_{24}&=0,\\ 2\gamma s_3+2a'_{34}&=0,\end{aligned}$$

т. е.

$$(13)\qquad \alpha=-\frac{a'_{14}}{s_1},\quad \beta=-\frac{a'_{24}}{s_2},\quad \gamma=-\frac{a'_{34}}{s_3}.$$

След приведение уравнението на повърхнината приема вида

(14) $$s_1X^2+s_2Y^2+s_3Z^2+a''_{44}=0 \quad (s_1\neq 0, \quad s_2\neq 0, \quad s_3\neq 0),$$

като

(15) $$a''_{44}=s_1\alpha^2+s_2\beta^2+s_3\gamma^2+2a'_{14}\alpha+2\,a'_{24}\beta+2\,a'_{34}\gamma+a'_{44}.$$

2. Да предположим, че само един от корените s_1, s_2, s_3 на характеристичното уравнение е нула, например $s_1\neq 0$, $s_2\neq 0$, $s_3=0$. Величините α, β определяме, както по-горе. Ако $a'_{34}\neq 0$, величината γ определяме от условието свободният член в (11) да се анулира:

$$s_1\alpha^2+s_2\beta^2+s_3\gamma^2+2\,a'_{14}\alpha+2\,a'_{24}\beta+2\,a'_{34}\gamma+a'_{44}=0.$$

Уравнението (11) приема вида

(16) $$s_1X^2+s_2Y^2+2\,a'_{34}Z=0 \quad (s_1\neq 0, \quad s_2\neq 0, \quad a'_{34}\neq 0).$$

В случай че $a'_{34}=0$, считаме, че в (10) $\gamma=0$. Уравнението (11) приема вида

(17) $$s_1X^2+s_2Y^2+a'_{44}=0 \quad (s_1\neq 0, \quad s_2\neq 0).$$

3. Да предположим, че два от корените на характеристичното уравнение са нули, например $s_2=s_3=0$, $s_1\neq 0$. Сега (9) е в същност уравнението

(18) $$s_1x'^2+2\,a'_{14}x'+2\,a'_{24}y'+2\,a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

Транслацията

(19) $$x'=x''+\alpha, \quad y'=y'', \quad z'=z'' \qquad \left(\alpha=-\frac{a'_{14}}{s_1}\right)$$

на координатната система $Ox'y'z'$ в $O''x''y''z''$, като точката O'' има координати $(\alpha, 0, 0)$ спрямо $Ox'y'z'$, преобразува (18) в уравнението

(20) $$s_1x''^2+2\,a'_{24}y''+2a'_{34}z''+a''_{44}=0,$$

като

$$a''_{44}=a'_{44}+s_1\alpha^2+2a'_{14}\alpha.$$

Сега имаме два подслучая:

а) Ако $a'_{24}=a'_{34}=0$, имаме уравнението

(21) $$s_1x''^2+a''_{44}=0 \qquad (s_1\neq 0).$$

б) Да приемем, че поне един от коефициентите a'_{24}, a'_{34} е различен от нула, например $a'_{34}\neq 0$. Транслацията на системата $O''x''y''z''$ до $O'''x'''y'''z'''$ посредством

(22) $$x''=x''', \quad y''=y''', \quad z''=z'''+\gamma,$$

като точката O''' има координати $\left(0,\ 0,\ \gamma=-\frac{a''_{44}}{2a_{34}}\right)$ спрямо $O''x''y''z''$, преобразува уравнението (20) в

(23) $$s_1x'''^2+2a'_{24}y'''+2a'_{34}z'''=0.$$

Извършваме ротация на координатната система $O'''x'''y'''z'''$ около оста $O'''x'''$ до системата $O'''XYZ$, определена с формулите

$$(24)\qquad \begin{aligned} x''' &= X, \\ y''' &= X\cos\varphi - Z\sin\varphi, \\ z''' &= X\sin\varphi + Z\cos\varphi. \end{aligned}$$

Като заместим x''', y''', z''' от (24) в (23), получаваме

$$(25)\qquad s_1X^2 + 2\,a'_{24}(Y\cos\varphi - Z\sin\varphi) + 2\,a'_{34}(Y\sin\varphi + Z\cos\varphi) = 0.$$

Величината φ определяме от условието

$$a'_{24}\cos\varphi + a'_{34}\sin\varphi = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a'_{24}}{a'_{34}}.$$

Понеже

$$\sin\varphi = -\varepsilon\frac{a'_{24}}{\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}};\qquad \cos\varphi = \varepsilon\frac{a'_{34}}{\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}}\qquad (\varepsilon = \operatorname{sgn} a'_{34}),$$

уравнението (25) се преобразува в уравнението

$$(26)\qquad s_1X^2 + 2\varepsilon\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}\,Z = 0.$$

Като резюмираме резултатите, получаваме следната (означенията са променени).

Теорема 1. *С подходяща ортогонална трансформация и транслация на ортонормираната координатна система уравнението на всяка повърхнина от втора степен може да се приведе в един от следните пет вида:*

I.	$s_1X^2 + s_2Y^2 + s_3Z^2 + a_{44} = 0$	$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0)$;
II.	$s_1X^2 + s_2Y^2 + 2a_{34}Z = 0$	$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ a_{34} \neq 0)$;
III.	$s_1X^2 + s_2Y^2 + a_{44} = 0$	$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0)$;
IV.	$s_1X^2 + 2a_{34}Z = 0$	$(s_1 \neq 0,\ a_{34} \neq 0)$;
V.	$s_1X^2 + a_{44} = 0$	$(s_1 \neq 0)$.

По-нататъшното изследване на тези пет типа уравнения ни води до следната

Теорема 2. *Всяко уравнение на повърхнина от втора степен, зададена спрямо ортонормирана координатна система, с помощта* *на одпходяща ортогонална трансформация и транслация на координатната система може да се приведе в един от следните 17 вида:*

1. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ (*елипсоид*);
2. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1$ (*имагинерен елипсоид*);
3. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$ (*прост хиперболоид*);
4. $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$ (*двоен хиперболоид*);
5. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$ (*конус*);
6. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$ (*имагинерен конус*);
7. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$ (*елиптичен параболоид*);
8. $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z$ (*хиперболичен параболоид*);
9. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ (*елиптичен цилиндър*);
10. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$ (*имагинерен елиптичен цилиндър*);
11. $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ (*хиперболичен цилиндър*);
12. $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$ (*две реални пресекателни равнини*);
13. $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$ (*две комплексно спрегнати пресекателни равнини*);
14. $X^2=2pZ$ $(p\neq 0)$ (*параболичен цилиндър*);
15. $X^2=a^2$ $(a\neq 0)$ (*две реални успоредни равнини*);
16. $X^2=-a^2$ $(a\neq 0)$ *две комплексно спрегнати успоредни равнини*);
17. $X^2=0$ (*двойна равнина*).

Доказателство. Спираме вниманието си на уравнението I в теорема 1. Ако $a_{44}\neq 0$, то уравнението е еквивалентно на

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{44}}{s_1}}+\frac{Y^2}{-\frac{a_{44}}{s_2}}+\frac{Z^2}{-\frac{a_{44}}{s_3}}=1.$$

В зависимост от знаците на числата $-\frac{a_{44}}{s_1}$, $-\frac{a_{44}}{s_2}$, $-\frac{a_{44}}{s_3}$ имаме случай 1, 2, 3 или 4. Ако $a_{44}=0$, в зависимост от знаците на s_1, s_2, s_3 получаваме случаите 5 или 6.

В уравнението II на предишната теорема прехвърляме в дясната страна члена $2a_{34}Z$. Поради $a_{34}\neq 0$ получаваме уравнението

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{31}}{s_1}}+\frac{Y^2}{-\frac{a_{34}}{s_2}}=2Z.$$

В зависимост от знаците на числата $-\frac{a_{31}}{s_1}$, $-\frac{a_{34}}{s_2}$ получаваме случаите 7 или 8.

Уравнението III при $a_{44}\neq 0$ преобразуваме така:

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{44}}{s_1}}+\frac{Y^2}{-\frac{a_{44}}{s_2}}=1.$$

В зависимост от знаците на числата $-\frac{a_{44}}{s_1}$, $-\frac{a_{44}}{s_2}$ имаме случаите 9, 10 и 11. Ако $a_{44}=0$, в зависимост от знаците на s_1, s_2 имаме случаите 12 и 13.

Уравнението IV поради $a_{34}\neq 0$ е еквивалентно на уравнението в точка 14.

Най-после от уравнението V получаваме случаите 15, 16 и 17.

Уравненията 1—17 в последната теорема се наричат *метрични канонични уравнения на повърхнините от втора степен.* Наименованието им се оправдава с това, че смените на координатните системи, чрез които се достига до тях, могат да се тълкуват като метрични преобразувания в пространството.

Задача 1. Една повърхнина от втора степен има спрямо ортонормирана координатна система $Oxyz$ уравнение

$$4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x+4y+8z+2=0.$$

Да се намерят метричното канонично уравнение на повърхнината и последователните координатни трансформации, чрез които се стига до него.

Решение. Характеристичното уравнение на повърхнината

$$\begin{vmatrix} 4-s & 0 & 2 \\ 0 & 2-s & -2 \\ 2 & -2 & 3-s \end{vmatrix}=-s^3+9s^2-18s=0$$

има корени $s_1=0$, $s_2=3$, $s_3=6$. Координатите на собствения (единичен) вектор $\mathbf{e}'_1$, съответстващ на корена $s_1=0$, се определят от системата

$$\begin{aligned}&2\lambda+\nu=0,\\ &\mu-\nu=0,\\ &\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.\end{aligned}$$

Намираме $\mathbf{e}'_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Координатите на собствения вектор $\mathbf{e}'_2$, съответствуващ на корена $s_2=3$, се определят от системата

$$\lambda+2\nu=0,$$
$$\mu+2\nu=0,$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.$$

Оттук намираме $\mathbf{e}'_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Третият собствен вектор $\mathbf{e}'_3$ можем да намерим като векторно произведение на първите два вектора. Намираме $\mathbf{e}'_3\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Тогава ортогоналната трансформация на координатната система $Oxyz$ в $Ox'y'z'$

$$x=\frac{1}{3}(x'+2y'+2z'),$$

$$y=\frac{1}{3}(-2x'+2y'-z'),$$

$$z=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2z').$$

привежда уравнението на повърхнината в уравнението

$$3y'^2+6z'^2-6x'+4y'+8z'+2=0.$$

Полагаме

$$x'=X+\alpha, \quad y'=Y+\beta, \quad z'=Z+\gamma.$$

Уравнението на повърхнината приема вида

$$3(Y^2+2\beta Y+\beta^2)+6(Z^2+2\gamma Z+\gamma^2)$$
$$-6(X+\alpha)+4(Y+\beta)+8(Z+\gamma)+2=0.$$

Ако изберем $\beta=-\frac{2}{3}$, $\gamma=-\frac{2}{3}$, коефициентите на Y, Z в последното уравнение стават нули. Ако изберем и $\alpha=-\frac{1}{3}$, свободният член е също нула. Значи транслацията

$$x'=X-\frac{1}{3}, \quad y'=Y-\frac{2}{3}, \quad z'=Z-\frac{2}{3}$$

на $Ox'y'z'$ в $O'XYZ$, като O' има координати $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ спрямо $Ox'y'z'$, привежда уравнението на повърхнината в

$$3Y^2+6Z^2-6X=0.$$

Следователно повърхнината е елиптичен параболоид с метрично канонично уравнение

$$\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{1}=X.$$

Задача 2. Дадена е повърхнината от втора степен с уравнение

$$4x^2+y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz-12x-12y+6=0$$

спрямо ортонормирана координатна система $Oxyz$. Да се намерят метричното канонично уравнение на повърхнината и последователните координатни трансформации, чрез които се стига до него.

Решение. Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-s & -2 & 4 \\ -2 & 1-s & -2 \\ 4 & -2 & 4-s \end{vmatrix} = -s^3+9s^2=0$$

има прост корен $s_1=9$ и двукратен корен $s_{2,3}=0$. Координатите на собствения вектор $\mathbf{e}'_1$, съответстващ на корена $s_1=9$, се определят от системата

$$-5\lambda-2\mu+4\nu=0,$$
$$\lambda+4\mu+\nu=0,$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.$$

Оттук намираме $\left(\lambda=\frac{2}{3},\ \mu=\frac{-1}{3},\ \nu=\frac{2}{3}\right)$. Аналогично, като решим системата

$$2\lambda-\mu+2\nu=0,$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,$$

ще получим координатите на собствения вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}'_2}$, съответстващ на корена $s_{2,3}=0$. Понеже коренът е двукратен, имаме по-голяма свобода в избора на $\mathbf{e}'_2$. Вземаме решението $\left(\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mu=0,\ \nu=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Третият собствен вектор $\mathbf{e}'_3$ е векторно произведение на първите два вектора. Намираме $\mathbf{e}'_3\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{4}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$. Тогава ортогоналната трансформация

$$x=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{3\sqrt{2}}z',$$
$$y=-\frac{1}{3}x'+\frac{4}{3\sqrt{2}}z',$$
$$z=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{3\sqrt{2}}z'$$

на $Oxyz$ в $Ox'y'z'=O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ привежда уравнението на повърхнината във вида

$$9x'^2-4x'-6\sqrt{2}y'-10\sqrt{2}z'+6=0.$$

Полагаме

$$x'=x''+\alpha,\ y'=y'',\ z'=z''.$$

В полученото уравнение

$$9(x''^2+2\alpha x''+\alpha^2)-4(x''+\alpha)-6\sqrt{2}\,y''-10\sqrt{2}\,z''+6=0$$

анулираме коефициента на x''. Това е възможно, ако изберем $\alpha=\frac{2}{3}$. Следователно чрез транслация на системата $Ox'y'z'$ до $O''x''y''z''$, като O'' има координати $\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ спрямо $Ox'y'z'$, уравнението на повърхнината приема вида

$$9x''^2-6\sqrt{2}\,y''-10\sqrt{2}\,z''+\frac{22}{3}=0.$$

Транслацията

$$x''=x''', \quad y''=y''', \quad z''=z'''+\frac{11\sqrt{2}}{30}$$

на координатната система $O''x''y''z''$ до $O'''x'''y'''z'''$, като O''' има координати $\left(0, 0, \frac{11\sqrt{2}}{30}\right)$ спрямо $O''x''y''z''$, привежда уравнението на повърхнината във вида

$$9x'''^2-6\sqrt{2}\,y'''-10\sqrt{2}\,z'''=0.$$

Полагаме

$$x'''=X,$$
$$y'''=Y\cos\varphi-Z\sin\varphi,$$
$$z'''=Y\sin\varphi+Z\cos\varphi.$$

Последното уравнение на повърхнината става

$$9X^2-6\sqrt{2}(Y\cos\varphi-Z\sin\varphi)-10\sqrt{2}\,(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi)=0.$$

Ако завъртим координатната система $O'''x'''y'''z'''$ около оста $O'''x'''$ на ъгъл $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5}{3}\right)$, получаваме координатна система $O'''XYZ$, спрямо която уравнението на повърхнината е

$$9X^2=4\sqrt{17}Y.$$

66. *Забележителни повърхнини от втора степен*

1. Елипсоид. Метричното канонично уравнение на елипсоида е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

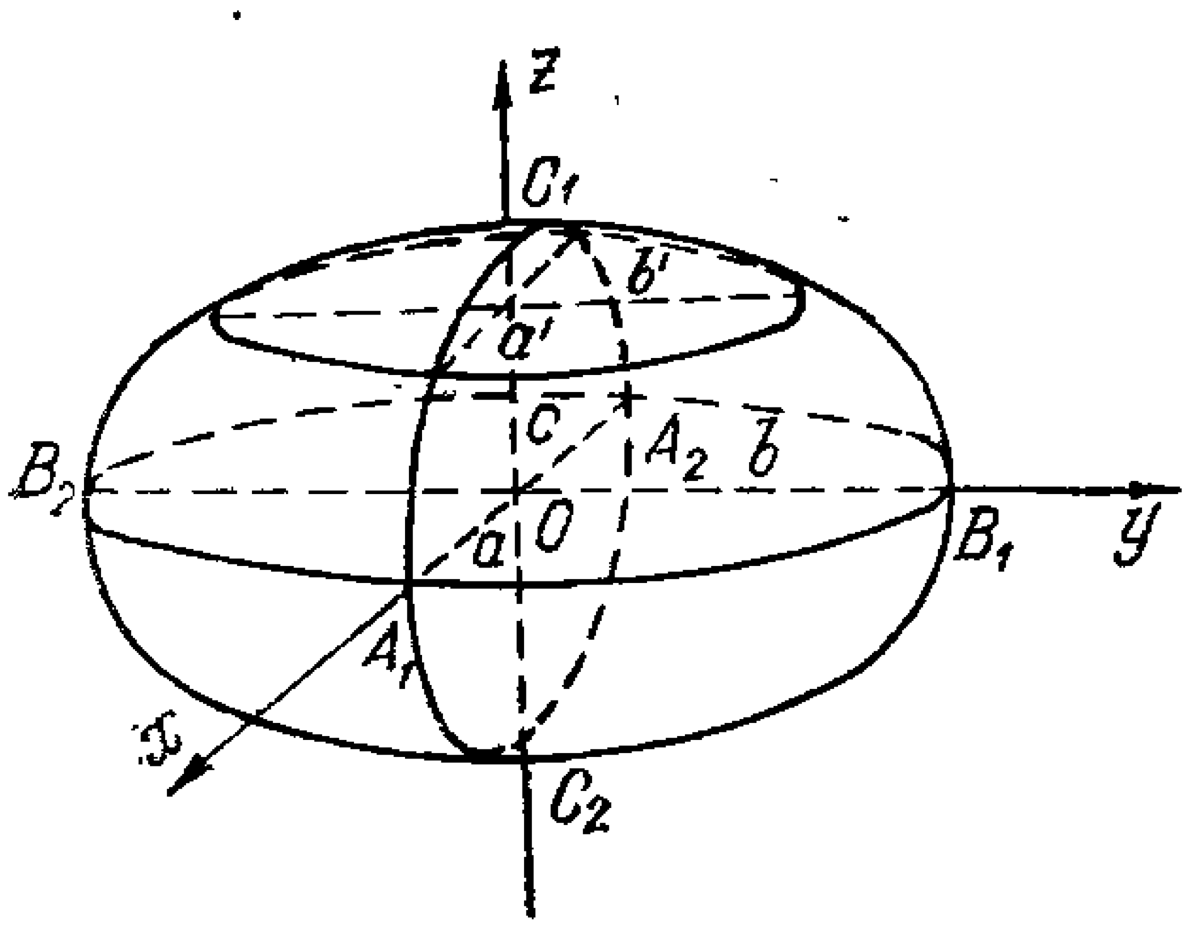
За произволна точка $M(x, y, z)$ от елипсоида имаме $|x|\leq a$, $|y|\leq b$, $|z|\leq c$. Очевидно елипсоидът е симетрично разположен спрямо началото на координатната система, която се явява единственият му център (черт. 80). Равнината $z=z_0$ при $|z_0|<c$ пресича елипсоида по елипсата

$$k: \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad z=z_0, \tag{2}$$

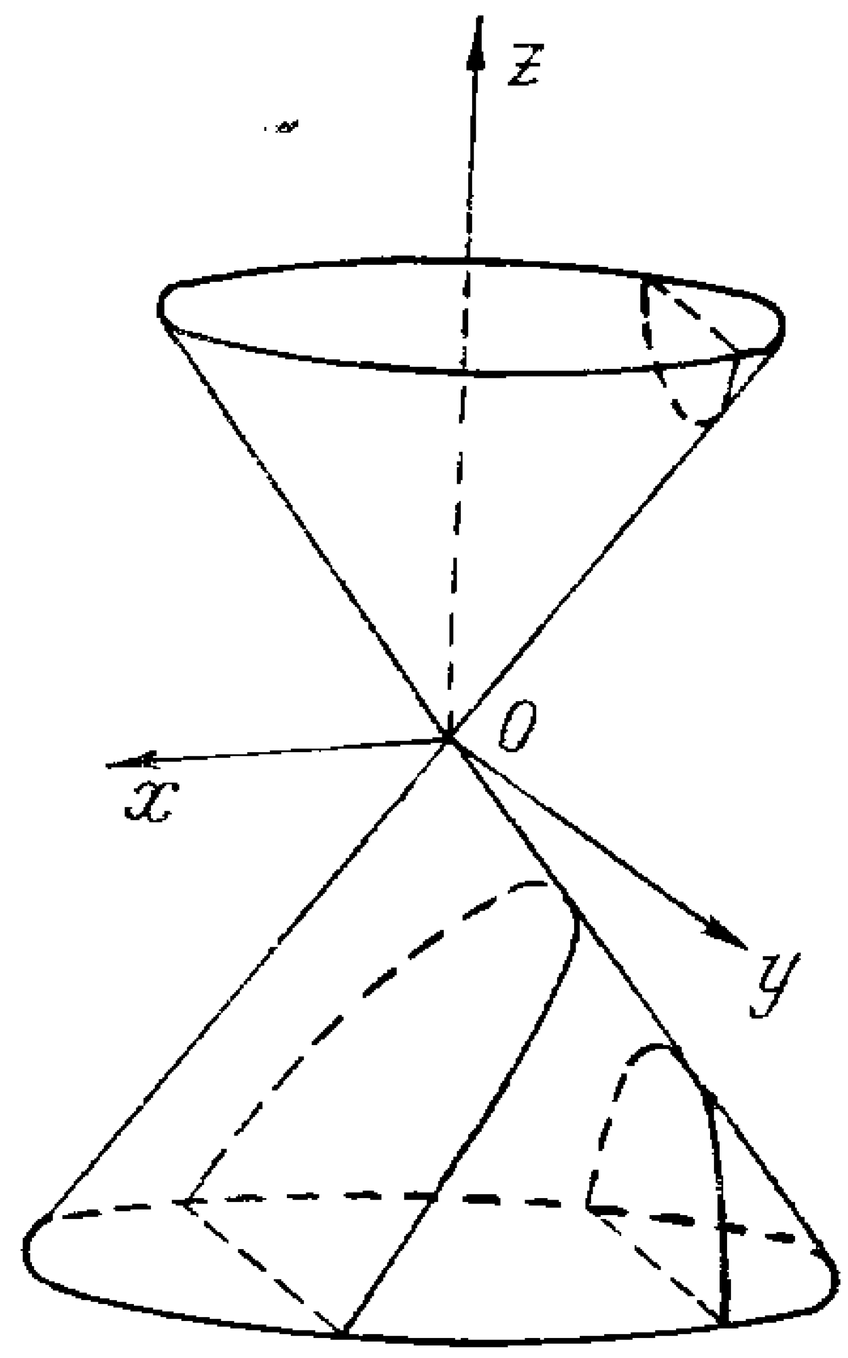
като

$$a' = a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}, \quad b' = b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}.$$

Координатните оси пресичат елипсоида в точките $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$, $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$, които се



Черт. 80



Черт. 81

наричат *върхове* на елипсоида. Координатните оси се наричат *оси* на елипсоида.

При $a>b>c$ елипсоидът се нарича *триосен*, като a е голяма полуос, b — средна, c — малка полуос на елипсата.

Ако $a=b$, елипсоидът е *ротационен* (§ 36).

2. Конус. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{3}$$

Началото на координатната система се явява единственият (краен) център на конуса. Това е и негова особена точка. Нарича се *връх* на конуса. Оста Oz е негова *ос* (черт. 81). Всяка права през началото и точка от елипсата

$$k: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=z_0\neq 0$$

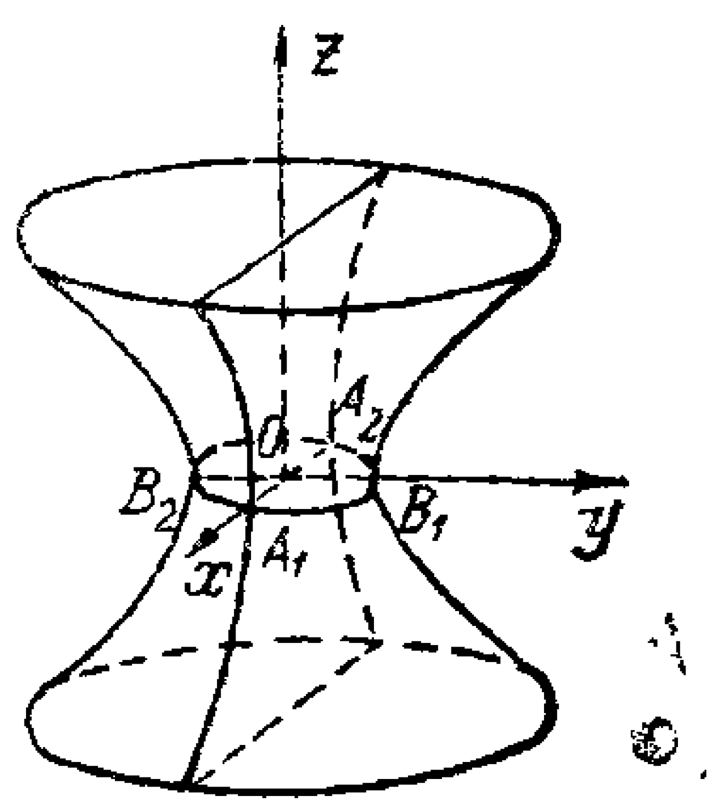
лежи върху конуса (значи е образуваща).

Равнината $z=z_0$ пресича конуса по елипса; равнината $x=x_0$ (или $y=y_0$) го пресича по хипербола. Може да се докаже, че равнините, успоредни на образуващите на конуса, пресичат последния по параболи. Значи елипсата, хиперболата и параболата могат да се получат като сечения на конуса с равнини. Оттук и наименованието им конусни сечения (§ 33).

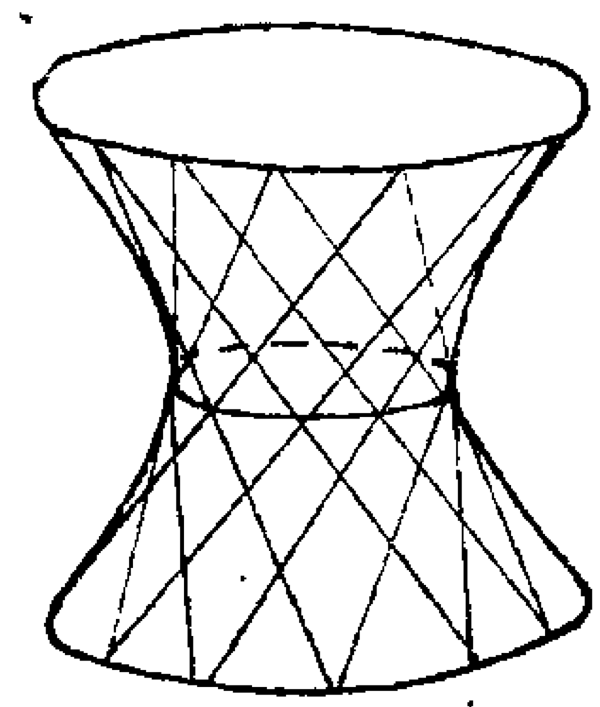
3. **Прост хиперболоид.** Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

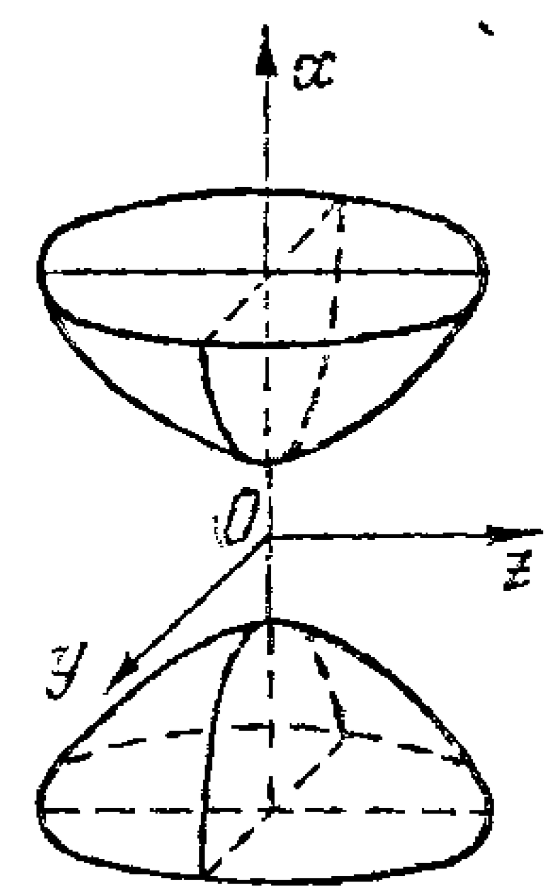
Повърхнината е симетрично разположена спрямо началото, което е единственият (краен) център на повърхнината (черт. 82).



Черт. 82



Черт. 83



Черт. 84

Равнината $z=z_0$ пресича простия хиперболоид по елипса, която при $z=0$ има уравнения

$$k: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0.$$

Нарича се *гърлова елипса* на хиперболоида.

Равнините $x=x_0$ или $y=y_0$ пресичат елипсоида по хиперболи.

За простия хиперболоид важи лемата от § 57. Значи тази повърхнина съдържа две системи образуващи (черт. 83).

Лесно се проверява, че асимптотичният конус (62.2) на простия хиперболоид е тъкмо конусът с уравнение (3).

Точките $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$ се наричат *върхове* на простия хиперболоид. Очевидно те са върхове и на гърловата елипса. Осите Ox, Oy се наричат оси на простия хиперболоид.

При $a=b$ се получава *ротационен прост хиперболоид* (§ 36).

4. **Двоен хиперболоид.** Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Тя има единствен център — началото на координатната система. Равнината $y=y_0$ (или $z=z_0$) пресича хиперболоида по хипербола (черт. 84). Равнината $x=x_0$ при $|x|>a$ го пресича по елипса. Точките $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$ се наричат *върхове* на двойния хиперболоид. Оста Ox се нарича *ос* на двойния хиперболоид.

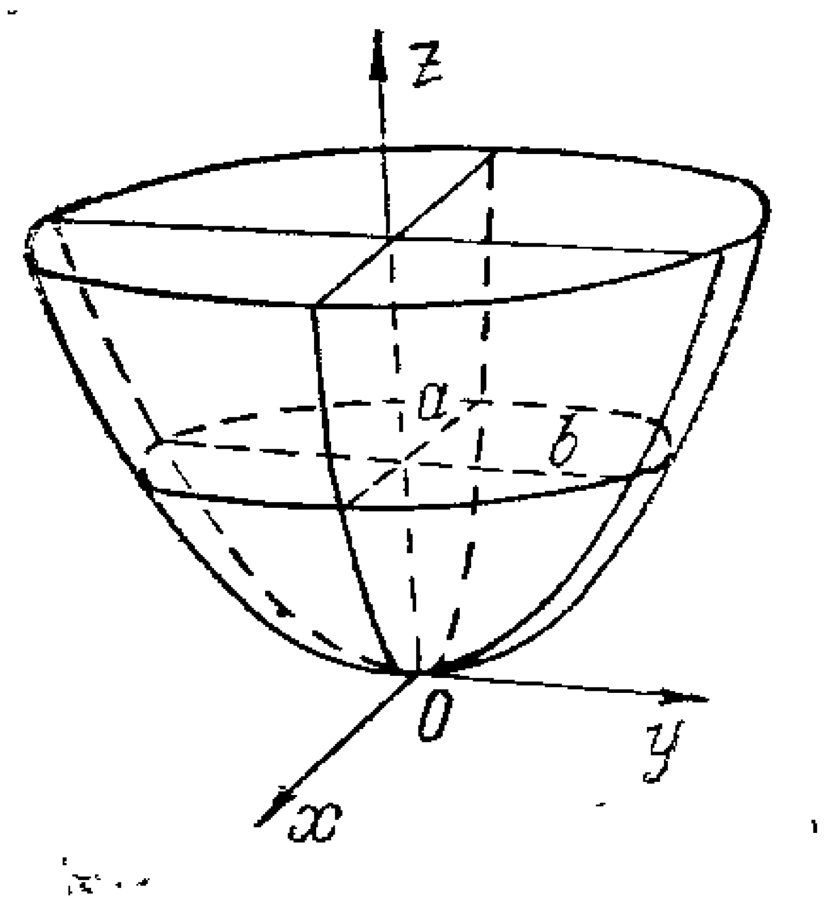
Асимптотичният конус на тази повърхнина е

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0.$$

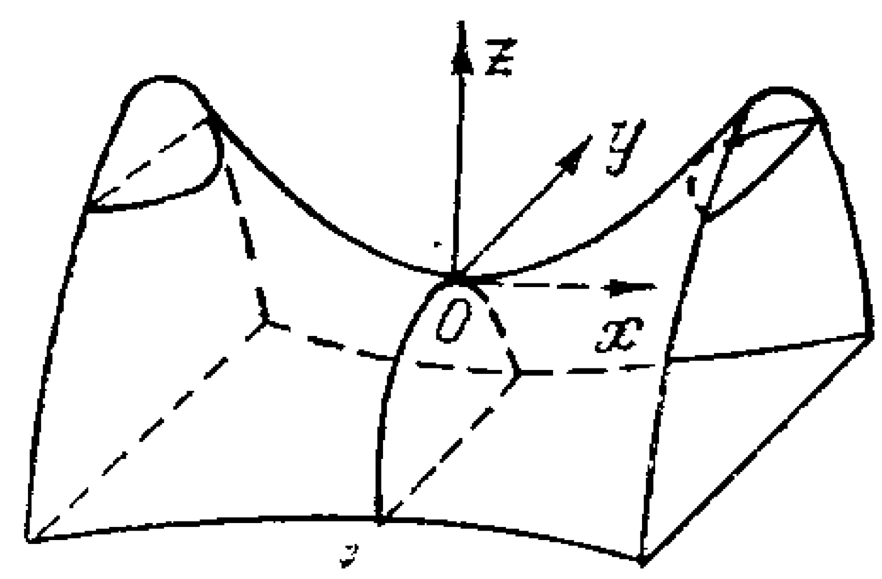
При $b=c$ се получава *ротационен двоен хиперболоид* (§ 36).

5. Елиптичен параболоид. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{6}$$



Черт. 85



Черт. 86

Равнината $z=z_0>0$ пресича елиптичния параболоид по елипса [redacted], а равнината $x=x_0$ (или $y=y_0$) — по парабола (черт. 85). Началото на координатната система се нарича *връх* на елиптичния параболоид (6). Оста Oz се нарича негова *ос*.

6. Хиперболичен параболоид (седло). Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{7}$$

Равнината $z=z_0$ я пресича по хипербола. Равнината $y=y_0$ (или $x=x_0$) — по парабола (черт. 86). Тази повърхнина също съдържа прави линии. По-точно за нея важи лемата от § 57. Двете системи са

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2zs, \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{s};$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2sz, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{s}.$$

Началото O на координатната система се нарича *връх* или *седловидна точка* на хиперболичния параболоид.

§ 67. *Афинни канонични уравнения на фигурите от втора степен*

Като се вземе пред вид, че всяко метрично преобразуване е и афинно, и се използват метричните канонични уравнения на фигурите от втора степен, може да се направи пълна афинна класификация на фигурите от втора степен и да се изведат съответните афинни канонични уравнения.

Теорема 1. *Нека спрямо афинна координатна система в равнината е дадена кривата от втора степен с уравнение*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{1}$$

С подходяща смяна на афинната координатна система уравнението на кривата може да се приведе към един от следните девет афинно нееквивалентни типа криви от втора степен:

1. $x^2+y^2=1$ (*елипса*);
2. $x^2+y^2=-1$ (*имагинерна елипса*);
3. $x^2-y^2=1$ (*хипербола*);
4. $x^2-y^2=0$ (*две реални пресекателни прави*);
5. $x^2+y^2=0$ (*две комплексно спрегнати пресекателни прави*);
6. $y^2=x$ (*парабола*);
7. $y^2=1$ (*две реални успоредни прави*);
8. $y^2=-1$ (*две комплексно спрегнати успоредни прави*);
9. $y^2=0$ (*двойна права*).

Доказателство. Нека спрямо афинна координатна система е дадена кривата с уравнение (1). С помощта на подходяща ортогонална трансформация и транслация на координатната система, които са афинни смени (и могат да се разглеждат като афинни преобразувания), уравнението на кривата приема един от видовете, посочени в теорема 2 на § 64. Да приемем, че е получена кривата с уравнение

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

Ако положим

$$X=ax, \qquad Y=by, \tag{2}$$

уравнението на кривата приема вида

$$x^2+y^2=1.$$

Формулите (2) могат да се разглеждат като формули за смяна на афинната координатна система, а следователно и като формули на афинно преобразуване в равнината. Аналогично се разглеждат и другите случаи.

Уравненията в теорема 1 се наричат *афинни канонични уравнения на кривите от втора степен.* Като едно следствие от тези уравнения ще посочим всички центрове на кривите от различните типове.

Крива от тип 1, 2 или 3 има за център точно една крайна точка; крива от тип 4 или 5 има за център една крайна точка, която е пресечната точка на двете прави; крива от тип 6 има за център една безкрайна точка; крива от тип 7 или 8 има за центрове всички точки върху една права, а именно правата, която е успоредна на двете прави и отстои от тях на равни разстояния; крива от тип 9 има за център всяка своя точка.

Теорема 2. *Нека спрямо афинна координатна система в пространството е дадена повърхнината от втора степен с уравнение*

$$(3)\qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2(a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz)+2(a_{14}x+a_{24}y+ +a_{34}z)+a_{44}=0.$$

С подходяща смяна на афинната координатна система уравнението на повърхнината може да се приведе към един от следните седемнадесет афинно нееквивалентни типа повърхнини от втора степен:

1. $x^2+y^2+z^2=1$ (*елипсоид*);
2. $x^2+y^2+z^2=-1$ (*имагинерен елипсоид*);
3. $x^2+y^2-z^2=1$ (*прост хиперболоид*);
4. $x^2-y^2-z^2=1$ (*двоен хиперболоид*);
5. $x^2+y^2-z^2=0$ (*конус*);
6. $x^2+y^2+z^2=0$ (*имагинерен конус*);
7. $x^2+y^2=z$ (*елиптичен параболоид*);
8. $x^2-y^2=z$ (*хиперболичен параболоид*);
9. $x^2+y^2=1$ (*елиптичен цилиндър*);
10. $x^2+y^2=-1$ (*имагинерен елиптичен цилиндър*);
11. $x^2-y^2=1$ (*хиперболичен цилиндър*);
12. $x^2-y^2=0$ (*две реални пресекателни равнини*);
13. $x^2+y^2=0$ (*две комплексно спрегнати пресекателни равнини*);
14. $x^2=z$ (*параболичен цилиндър*);
15. $x^2=1$ (*две реални успоредни равнини*);
16. $x^2=-1$ (*две комплексно спрегнати успоредни равнини*);
17. $x^2=0$ (*двойна равнина*).

Доказателството се провежда, както в предишната теорема. Като следствие от теорема 2 ще посочим всички центрове на повърхнините от различните типове. Доказателството е просто и се свежда до решаване на системата (61.2).

Повърхнина от тип 1, 2, 3 или 4 има за център една крайна точка; повърхнина от тип 5 или 6 има за център една крайна точка — върха на конуса; повърхнина от тип 7 или 8 има за център една безкрайна точка; повърхнина от тип 9, 10 или 11 има за центрове всички точки върху една права — оста на цилиндъра; повърхнина от тип 12 или 13 има за центрове всички точки върху една права — пресечната права на двете равнини; повърхнина от тип 14 има за центрове точките на една безкрайна права; повърхнина от тип 15 или 16 има за центрове точките на една равнина — равнината, която е успоредна на двете равнини и отстои от тях на равни разстояния; повърхнина от тип 17 има за център всяка своя точка.

§ 68. *Метрични инварианти на крива от втора степен*

Нека спрямо ортонормирана координатна система Oxy в равнината е дадено уравнението на крива от втора степен:

(1) $$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xt+2a_{23}yt=0$$

в хомогенни координати x, y, t и в нехомогенни:

(2) $$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Нека в равнината R_2 действува една група G от преобразувания, като всяко преобразуване трансформира кривата (1) от втора степен в крива от втора степен:

(3) $$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}t'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{13}x't'+2a'_{23}y't'=0.$$

Една функция

$$J(a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23})$$

от коефициентите a_{ij} на кривата (1) от втора степен се нарича *инварианта на кривата относно групата* G (G — инварианта), ако е в сила равенството

(4) $$J(a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23})=J(a'_{11},\ a'_{22},\ a'_{33},\ a'_{12},\ a'_{13},\ a'_{23})$$

за произволно преобразуване на групата G, трансформиращо кривата (1) в кривата (3).

В този параграф ще се интересуваме от инварианти на крива от втора степен относно метричната група от преобразувания, т. е. относно преобразуванията

(5) $$\begin{aligned} x&=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_1,\\ y&=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_2, \end{aligned}$$

като матрицата (α_{ij}) е ортогонална. Разбира се, всички величини a_i α_{ij} са реални числа. Получените инварианти се наричат *метрични инварианти* на крива.

За да се намерят метричните инварианти на крива, трябва да се заместят x и y от (5) в (2), да се изразят a'_{ij} чрез a_{kl} и α_{pq} и след това да се съставят подходящи изрази, удовлетворяващи (4). Освен казаното ние ще приложим и известни други съображения.

Най-напред написваме (5) в хомогенни координати

(6) $$\begin{aligned} x&=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_1t',\\ y&=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_2t',\\ t&=t'. \end{aligned}$$

От линейната алгебра е известно, че ако заместим x, y, t от (6) в (1), ще получим (3), като

(7) $$\det(a'_{ij})=\det(a_{ij})\,(\det(\alpha_{ij}))^2.$$

Тъй като (α_{ij}) е ортогонална матрица, от (7) получаваме

(8) $$\det(a_{ij})=\det(a'_{ij}).$$

Това означава, че величината

$$(9) \qquad J_3: = \det(a_{ij})$$

е метрична инварианта на кривата (1).

Да положим в (6) $t = t' = 0$. Получените x и y заместваме в (1) и (3). Получаваме

$$(10) \qquad A'_{33} = A_{33}(\det(\alpha_{ij}))^2,$$

като $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ е адюнгираното количество на a_{33} в (a_{ij}). Тъй като (α_{ij}) е ортогонална матрица, получаваме

$$(11) \qquad A_{33} = A'_{33}.$$

Това означава, че величината

$$(12) \qquad J_2: = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$$

е метричната инварианта на кривата (1).

Най-сетне ще покажем, че величината

$$(13) \qquad J_1: = a_{11} + a_{22}$$

е също метрична инварианта. За целта преобразуването (5) разлагаме на две преобразувания:

$$(14) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y', \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'; \end{aligned}$$

$$(15) \qquad \begin{aligned} x &= x' + \alpha_1, \\ y &= y' + \alpha_2. \end{aligned}$$

Транслацията (15) не променя коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{12}, а също така и функцията (13). Ако заместим x и y от (14) в (2), получаваме

$$a_{11}(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}\, y')^2 + a_{22}(\alpha_{21}x' + \alpha_{22}\, y')^2 + 2a_{12}(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}\, y')(\alpha_{21}x' + \alpha_{22}\, y') +$$
$$+ 2a_{13}(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}\, y') + 2a_{23}(\alpha_{21}x' + \alpha_{22}\, y') + a_{33} = 0.$$

Оттук намираме

$$a'_{11} = a_{11}\alpha_{11}^2 + a_{22}\alpha_{21}^2 + 2a_{12}\alpha_{11}\alpha_{21},$$

$$a'_{22} = a_{11}\alpha_{12}^2 + a_{22}\alpha_{22}^2 + 2a_{12}\alpha_{12}\alpha_{22}.$$

Като се вземе пред вид, че матрицата (α_{ij}) е ортогонална, следва

$$J'_1 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = J_1,$$

което показва, че J_1 е инварианта.

В сила е следната

Лема. *а) Величината*

$$(16) \qquad J_4: = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(J_4 = A_{11} + A_{22})$$

е инварианта относно ортогоналното преобразуване (14).

б) Ако кривата (2) *може да се преобразува в крива от вида*

(17) $$a'_{11}x'^2+2a'_{13}x'+a'_{33}=0$$

с помощта на преобразуването (14), *то* (16) *е метрична инварианта на кривата.*

Доказателство на а). Да разгледаме кривата

(18) $$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}-\lambda(x^2+y^2)=0,$$

като λ е произволно реално число. Посредством (14) тя преминава в кривата

(19) $$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}-\lambda(x'^2+y'^2)=0.$$

Знаем вече, че детерминантата на (18) е инварианта относно (14). Следователно

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Като сравним коефициентите пред λ в двете страни, получаваме желаното равенство

$$J_4=J'_4.$$

Доказателство на б). Нека ортогоналното преобразуване (14) преобразува (2) в (17). Според доказаното в точката а) имаме

$$J_4=J'_4=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{13} & a'_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{13} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Подлагаме (17) на транслация:

(21) $$\begin{aligned} x'&=x''+\alpha_1, \\ y'&=y''+\alpha_2. \end{aligned}$$

От (17) получаваме

$$a'_{11}(x''+\alpha_1)^2+2a'_{13}(x''+\alpha_1)+a'_{33}=$$
$$=a'_{11}x''^2+2(a'_{13}+a'_{11}\alpha_1)x''+a'_{33}+\alpha_1^2a'_{11}+2a'_{13}\alpha_1=0.$$

За получената крива пресмятаме

$$J''_4=\begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{13} \\ a''_{13} & a''_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{11}\alpha_1+a'_{13} \\ a'_{11}\alpha_1+a'_{13} & a'_{11}\alpha_1^2+2a'_{13}\alpha_1+a'_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=a'_{11}(a'_{11}\alpha_1^2+2a'_{13}\alpha_1+a'_{33})-$$
$$-(a'^2_{11}\alpha_1^2+a'^2_{13}+2a'_{11}a'_{13}\alpha_1)=a'_{11}a'_{33}-a'^2_{13}=J'_4.$$

Следователно

$$J_4=J'_4=J''_4,$$

с което доказателството на б) е завършено.

Получените резултати ще обединим в следната

Теорема 1. *Величините J_1, J_2, J_3 са метрични инварианти на произволна крива от втора степен. Ако кривата* (2) *може да се преобразува с помощта на ортогоналната трансформация* (14) *в крива от вида* (17), *тя притежава и J_4 като метрична инварианта.*

Да се върнем към характеристичното уравнение на кривата (2):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук получаваме

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Като вземем пред вид предишните означения, то приема вида

(22) $$\lambda^2-J_1\lambda+J_2=0.$$

За характеристичните корени имаме

(23) $$\lambda_{12}=\frac{J_1\pm\sqrt{J_1^2-4J_2}}{2}.$$

Следствие. Характеристичните корени са метрични инварианти на кривата.

Накрая ще докажем следната

Теорема 2. *В следващата таблица са дадени необходими и достатъчни условия за всеки един от деветте метрични класа криви от втора степен:*

1. *Елипса:* $J_2>0$, $J_1J_3<0$.
2. *Имагинерна елипса:* $J_2>0$, $J_1J_3>0$.
3. *Хипербола:* $J_2<0$, $J_3\neq0$.
4. *Парабола:* $J_2=0$ $J_3\neq0$.
5. *Две пресекателни прави:* $J_2<0$, $J_3=0$.
6. *Две комплексно спрегнати прави:* $J_2>0$, $J_3=0$.
7. *Две успоредни прави:* $J_2=0$, $J_3=0$, $J_4<0$.
8. *Две комплексно спрегнати успоредни прави:* $J_2=0$, $J_3=0$, $J_4>0$.
9. *Две съвпадащи прави* $J_2=0$, $J_3=0$, $J_4=0$.

Доказателство. Необходимостта проверяваме, като използваме каноничните уравнения на съответните криви. Например нека кривата е елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Имаме

$$J_2=\frac{1}{a^2b^2}>0, \quad J_1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \quad J_3=-\frac{1}{a^2b^2}.$$

Да разгледаме случая на две успоредни прави:

$$x^2-a^2=0.$$

Имаме

$$J_2=0,\quad J_3=0,\quad J_4=-a^2<0.$$

Аналогично се проверяват и останалите случаи.

Достатъчността се проверява чрез допускане на противното.

Последната теорема има изключително важно значение. Тя показва, че инвариантите J_1, J_2, J_3, J_4 на една крива определят напълно типа крива.

Пример. Спрямо ортонормираната координатна система е дадена кривата от втора степен

$$2x^2-y^2+xy+x+4y-3=0.$$

Да се определи видът ѝ.

Имаме $J_3=0$, $J_2=-\frac{9}{4}<0$. Следователно кривата представлява две пресекателни прави.

Приложение

За да направим учебника по-достъпен, ще приведем някои определения и резултати, които имат връзка с изложения материал, но не са предмет на обстойно разглеждане.

1. В математиката твърде често се изучават множества, между елементите на които са дефинирани (или предварително зададени) определени релации (съотношения). По силата на една релация R в дадено множество M може да се каже кога два елемента a, b от множеството M са (се намират) в релацията R и кога не. Ако елементите $a \in M$ $b \in M$ са в релацията R, ще пишем $a \underset{(R)}{=} b$. Например в множеството на реалните числа релация R е равенството на две числа.

В математиката от особено значение са така наречените релации на еквивалентност.

Една релация R в множеството M се нарича *релация на еквивалентност* в M, ако са изпълнени следните три условия:

R_1. Рефлексивност: $a \underset{(R)}{=} a$.

R_2. Симетричност: ако $a \underset{(R)}{=} b$, то $b \underset{(R)}{=} a$.

R_3. Транзитивност: ако $a \underset{(R)}{=} b$, $b \underset{(R)}{=} c$, то $a \underset{(R)}{=} c$.

Една релация на еквивалентност R в множество M разбива множеството M на класове (подмножества) K_1, K_2, $K_3, \ldots$ по следния начин: към един клас се причисляват всички елементи от M, които се намират в релацията R помежду си. Следователно класовете притежават следните свойства:

а) всеки два елемента от един клас са в релацията R;

б) всеки два елемента от различни класове не са в релацията R.

Така добиваме възможността наред с даденото множество M да разглеждаме едно ново множество M/R, чиито елементи са класовете K_1, K_2, $K_3, \ldots$ при релацията R.

И тъй наличието на една релация на еквивалентност R в дадено множество M ни дава повод да разглеждаме едно ново множество M/R. Ние избрахме този път при въвеждане на понятието свободен вектор.

2. Нека в множеството V са дефинирани две операции:

а) събиране на елементи от V, по силата на което на всеки два елемента $a \in V$, $b \in V$ се съпоставя елементът $a+b \in V$;

б) умножение на елемент от V с реално число, по силата на което на всеки елемент $a \in V$ и реалното число λ се съпоставя елементът $\lambda a \in V$.

Ако съществува определен елемент $0 \in V$, така че за произволни елементи a, b, c от V и произволни реални числа λ, μ са изпълнени равенствата:

V_1. $(a+b)+c=a+(b+c)$,

V_2. $a+0=a$,

V_3. $a+(-a)=0 \qquad (-a:=-1.a)$,

V_4. $a+b=b+a$,

V_5. $1.a=a$,

V_6. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$,

V_7. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$,

V_8. $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$,

то множеството V се нарича *векторно пространство над полето на реалните числа.*

Елементите на V се наричат *вектори.*

Казваме, че векторът p е линейна комбинация на векторите a_1, $a_2, \ldots, a_k$, ако съществува представянето

$$p=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_k a_k,$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са подходящи реални числа.

Векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ се наричат *линейно зависими,* ако съществуват реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула, такива, че е в сила равенството

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_k a_k=0.$$

Векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са *линейно независими,* ако не са линейно зависими.

Векторното пространство V се нарича *n-мерно,* ако съществуват n линейно независими вектора $e_1, e_2, \ldots, e_n$ във V, но всеки $n+1$ вектора във V са линейно зависими. Числото n се нарича *размерност* на векторното пространство V.

3. Нека V е векторно пространство, в което е дефинирана една трета операция, по силата на която на всеки два вектора $a \in V$, $b \in V$ се съпоставя реалното число ab. Ако за произволни вектори a, b, c от V и произволни реални числа λ, μ са в сила равенствата

EV_1. $ab=ba$,

EV_2. $(a+b)c=ac+bc$,

EV_3. $(\lambda a)b=\lambda(ab)$,

EV_4. $aa \geq 0$, като равенство имаме точно когато $a=0$, то V се нарича *евклидово векторно пространство.*

4. Множеството G се нарича *група,* ако в G е дефинирана една операция, по силата на която на всеки два елемента a, b от G в по-

сочения ред е съпоставен елементът $a+b \in G$ така, че са в сила свойствата:

G_1. За всеки три произволни елемента a, b, c от G е в сила равенството

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

G_2. В G съществува елемент 0, притежаващ свойството

$$a+0=a$$

за всеки елемент $a \in G$.

G_3. За всеки елемент $a \in G$ съществува елемент $-a \in G$ такъв, че е в сила равенството

$$a+(-a)=0.$$

Елементът 0 се нарича *нулев* елемент на групата, а елементът $-a$ — *противоположен елемент* на елемента a.

Ако освен това е в сила и свойството

G_4. $a+b=b+a$,

то G се нарича *комутативна* или *абелова* група.

Ако операцията в групата, както по-горе, е записана с „+“ групата се нарича *адитивна*. Съществуват групи, при които резултатът от операцията, приложена за елементите a, b, се означава с ab. Такава група се нарича *мултипликативна*. В този случай изискванията за група са:

G'_1. За всеки три произволни елемента a, b, c от G е в сила равенството

$$(ab)c=a(bc).$$

G_2'. В G съществува елемент e, притежаващ свойството

$$ae=a$$

за всеки елемент $a \in G$.

G_3'. За всеки елемент $a \in G$ съществува елемент $a^{-1} \in G$ такъв, че е в сила равенството

$$aa^{-1}=e.$$

Елементът e се нарича *единичен* елемент на групата, а елементът a^{-1} се нарича *обратен* елемент на елемента a.

Изискването за комутативност е

G_4'. $ab=ba$.

5. Нека V е векторно пространство, в което е дефинирана една трета операция, по силата на която на всеки два вектора $a \in V$, $b \in V$ се съпоставя вектор $a \wedge b \in V$. Ако за произволни вектори a, b, c са в сила равенствата

AL_1. $a \wedge b = -b \wedge a$,

AL_2. $(a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$,

AL_3. $(a \wedge b) \wedge c + (b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b = 0$,

то V се нарича *алгебра на Ли*.

6. В учебника често е използван терминът репер като синоним на координатна система. Това се прави обикновено при разглеждане на въпроси в теорията на групите от преобразувания. Понятието репер се дефинира по следния начин.

Нека G е група от преобразувания, действуваща в множеството M, и F е множество от фигури в M. Ако са изпълнени следните свойства:

F_1. за всеки две фигури от множеството F съществува точно едно преобразуване от G, което преобразува едната фигура в другата;

F_2. всяко преобразуване от G преобразува фигура от F във фигура също от F, то всяка фигура от множеството F се нарича *репер* в M относно групата G (или G-репер).

7. Да поясним употребата на някои знаци.

а) Знакът „$\in$" означава принадлежност. Например ако A е точка и g е права, то $A \in g$ означава, че A лежи на g; ако точката A не лежи на правата g, записваме $A \bar{\in} g$.

б) Знакът „$:=$" означава, че величината от лявата страна на равенството по дефиниция е равна на величината от дясната страна. Например равенството $\mathbf{a}^2 := \mathbf{a}\,\mathbf{a}$ показва, че скаларният квадрат $\mathbf{a}^2$ на вектора $\mathbf{a}$ е равен на скаларното произведение $\mathbf{a}\,\mathbf{a}$.

в) Знакът $\cap$ означава обща част на две множества. Например ако g_1, g_2 са две пресекателни прави, равенството $S = g_1 \cap g_2$ показва, че S е общата им точка.

г) Знакът $\cup$ е знак за обединение, присъединяване. Например ако M е множество и P е някакъв елемент, то $M \cup \{P\}$ означава, че към множеството M се присъединява P.

Литература

1. Петканчин, Б., *Аналитична геометрия*, Наука и изкуство, София, 1966

2. Матеев, А., *Аналитична геометрия*, Наука и изкуство, София, 1968.

3. Моденов, П. С., *Аналитическая геометрия*, изд. Московского университета, Москва, 1968.

4. Курош, А. Г., *Курс по висша алгебра*, Наука и изкуство, София, 1968

5. Дочев, К., Д. Димитров, *Линейна алгебра*, Наука и изкуство, София, 1973.

Азбучен указател

Печатни грешки

Стр.	Ред	Напечатано	Да се чете	По вина на
13	12 отг.	еднопосочни	еднопосочно	коректора
17	2 отг.	$\overrightarrow{\lvert\lambda\rvert\,\lvert a}$	$\lambda\lvert\,\lvert\mathbf{a}\rvert$	печатн.
25	5 отг.	успо-	еднопосочно успо-	автора
28	4 отг.	оси	оси (черт. 15)	„
29	7 отд.	$ABCD$	$ABDC$	„
33	3 отд.	$\overline{AC} = \cdots$; $\overline{BC} = \cdots$;	$\overrightarrow{AC} = \cdots$; $\overrightarrow{BC} = \cdots$	коректора
37	17 отг.	$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	$\lambda(\mathbf{ab})$	„
41	5 отд.	$\mathbf{e}_1'$	$\mathbf{e}_2'$	печатн.
53	1 отг.	колинеарен	еднопосочно колинеарен	автора
53	4 отг.	32; 33	33; 32	печатн.
74	5 и 4 отд.	$\vec{P}_1$; $\vec{P}_2$	$\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$	автора
93	7 отг.	$p: \overrightarrow{OP}\rvert > 0$	$p: = \lvert\overrightarrow{OP}\rvert > 0$	коректора
129	11 отд.	Y_1, Y_2	J_1, J_2	автора
131	6 отд.	$O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$	$O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3$	„
140	13 отд.	Y_1, Y_2	J_1, J_2	„
163	9 отд.	$M_i(h_i^1, h_i^2, h_i^3)$	$M_i(h_i^1, h_i^2)$	„

Аналитична геометрия

Аналитична геометрия
Грозьо Станилов Иванов

Рецензент
Иван Хр. Димовски

Редактор
Лиляна Н. Стойкова

Художник
Симеон Туйков

Художествен редактор
Лили Радева

Технически редактор
Лорет Прижибиловска

Коректор
Биляна Василева

Дадена за набор на 24. XII. 1973 г. Подписана за печат на 26. IV. 1974 г. Печатни коли **14.**
Издателски коли 14. Формат 65/92/16. Тираж 8075. Издателски № 21289.
Тематичен № 643. Литературна група I-4.
Цена 0,76 лв.

ДИ *„Наука и изкуство“* — София
ДП *„Георги Димитров“* — Ямбол