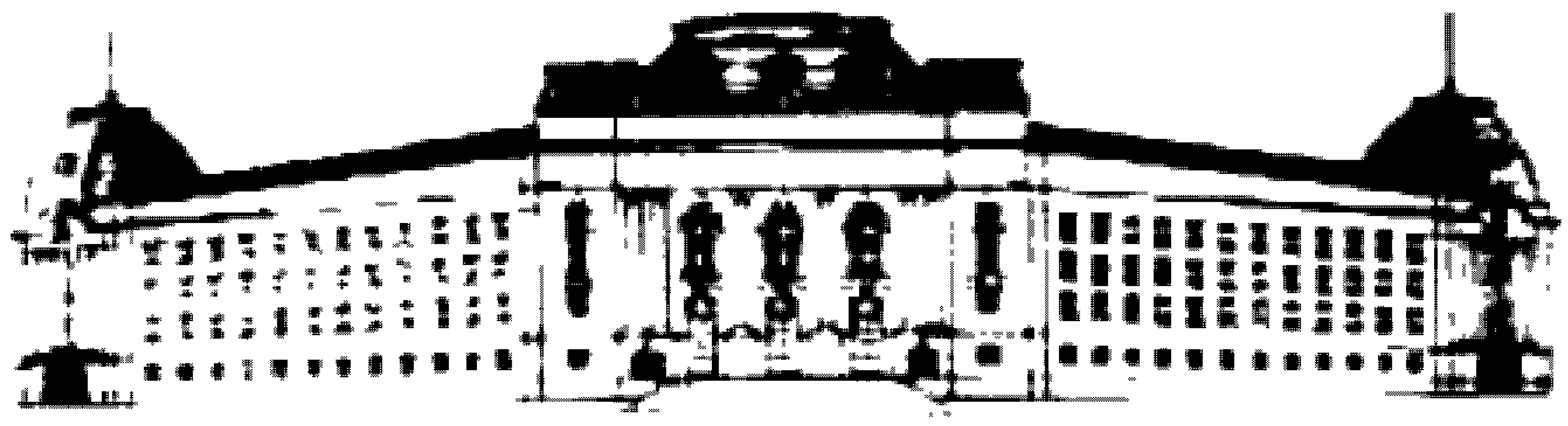
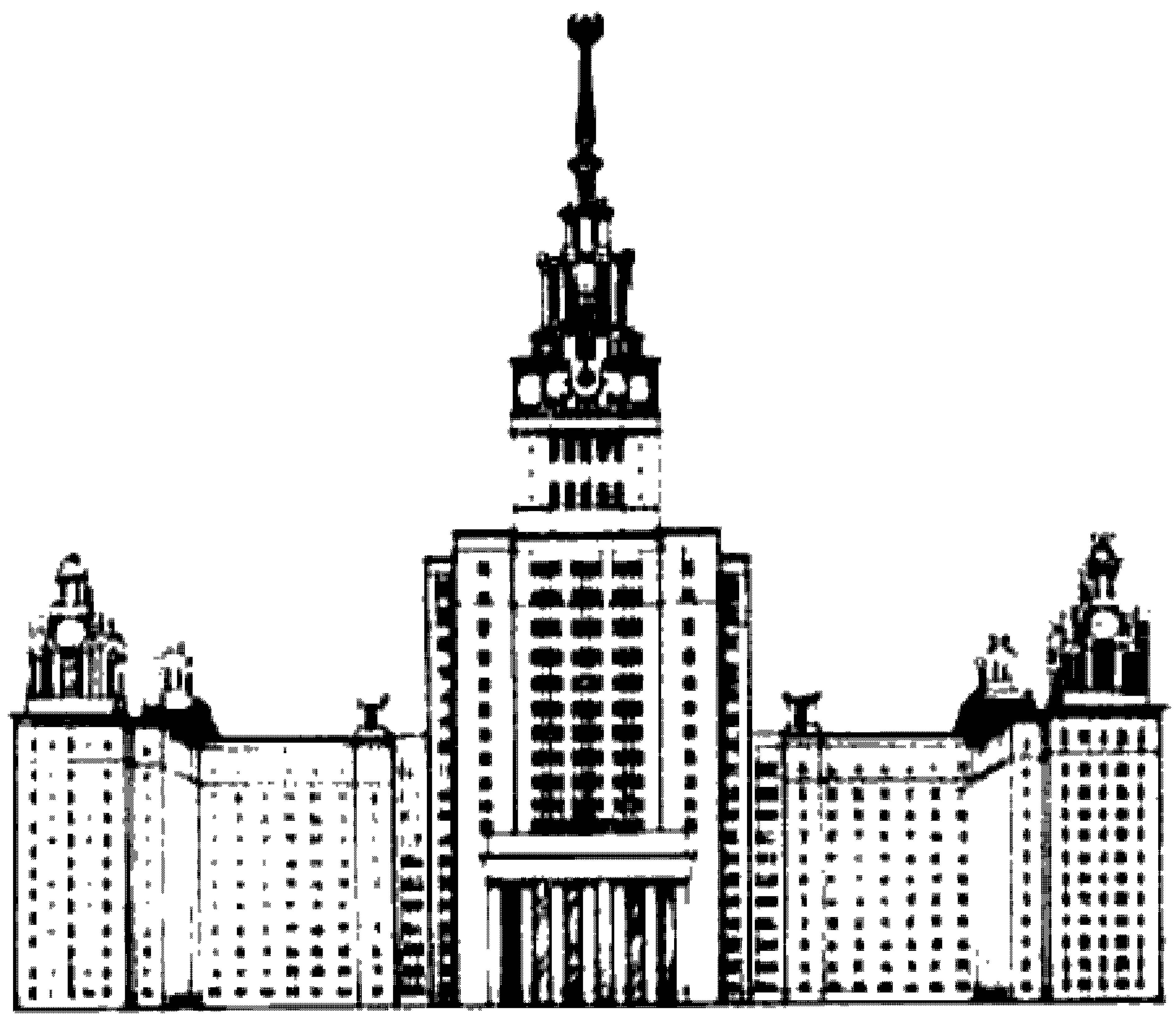




СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ
МЕЖДУ
МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ
«М. В. ЛОМОНОСОВ»
И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
«КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ».
НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТИТЕ
МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МЕХАНИКА
И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничи
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ВТОРА ЧАСТ

Под редакцията
на академик А. Н. Тихонов

НАУКА И ИЗКУСТВО
1989
СОФИЯ

Владимир Бабев 1990г

Индекс 51

Книгата е учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за втората година на обучение на студентите от специалностите математика, информатика, механика и приложна математика. В нея са включени теорията на редовете от числа и функции, теорията на кратните собствени и несобствени интеграли на Риман, теорията на криволинейните интеграли и интегралите по повърхнина, както и теорията на интегралите, зависещи от параметри, теорията на полето (включително теорията на диференциалните форми в евклидови пространства), теорията на редовете и преобразованията на Фурие.

Както и първата част, този учебник съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и повишено.

Математически анализ

ВЛАДИМИР ИЛИН
ВИКТОР САДОВНИЧИ
БЛАГОВЕСТ СЕНДОВ

БЪЛГАРО-СЪВЕТСКА
ПЪРВО ИЗДАНИЕ
ДАДЕНА ЗА НАБОР НА 26. VIII. 1988
ПОДПИСАНА ЗА ПЕЧАТ НА 5. VII. 1989
ИЗЛЯЗЛА ОТ ПЕЧАТ ПРЕЗ август 1989
ФОРМАТ 60/90/16. ПЕЧАТНИ КОЛИ 23,50
ИЗДАТЕЛСКИ КОЛИ 23,50
УСЛОВНО ИЗДАТЕЛСКИ КОЛИ 22,87
ИЗДАТЕЛСКИ № 30131
ТИРАЖ [illegible] ЦЕНА 1,95 лв.
КОД 02/95346/22511 4805—490—89
ДИ «НАУКА И ИЗКУСТВО» — СОФИЯ
ДП «ДИМИТЪР БЛАГОЕВ» — СОФИЯ

РЕЦЕНЗЕНТИ
ГЕНЧО СКОРДЕВ
ПЛАМЕН ДЖАКОВ
РЕДАКТОР
ВАСИЛ ЦАНОВ
ХУДОЖНИК
ЖЕКО АЛЕКСИЕВ
ХУДОЖЕСТВЕН РЕДАКТОР
КРЕМЕНА ФИЛЧЕВА
ТЕХНИЧЕСКИ РЕДАКТОР
ВЛАДИМИР БОЯДЖИЙСКИ
КОРЕКТОР
ТЕМЕНУЖКА БАЛАБАНОВА

Съдържание

3. Двойни и n-кратни интеграли

4. Криволинейни интеграли

5. Повърхнинни интеграли

6. Теория на полето. Основни интегрални формули на анализа

7. Интеграли, зависещи от параметър

8. Редове на Фурие

9. Преобразование на Фурие

Предговор

Настоящата книга е учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за втори курс.

Тя обхваща напълно материала за втората година на обучение, предвиден от програмата за студентите от университетите в СССР и България, по специалностите математика, приложна математика, информатика и механика.

Учебникът съдържа теорията на редовете от числа и функции, теорията на кратните собствени и несобствени интеграли на Риман, теорията на криволинейните интеграли и на интегралите на повърхнина, както и теорията на интегралите, зависещи от параметри, теорията на полето (включително теорията на диференциалните форми в евклидови пространства), теорията на редовете и преобразованията на Фурие.

Както и първата част, настоящият учебник съдържа три лесноразличими нива на изложение: елементарно, основно и повишено.

Елементарното ниво отговаря на програмата на техническите вузове на СССР със задълбочено изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмата на специалността приложна математика и информатика, а материалът на повишеното ниво на изложение допълва основното ниво с редица раздели, които обикновено се изучават в механо-математическите факултети на университетите.

Текстът, означен в книгата с две отвесни черти, се отнася до повишеното ниво на изложение; текстът, означен с една отвесна черта — до основното ниво на изложение, останалият *текст представлява съдържание на елементарно ниво на изложение.*

За усвояването на материала на елементарно ниво не се изисква четене на материал от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала на основно ниво не се изисква четене на този с повишено ниво.

Като цяло материалът в настоящия учебник много се доближава до курса, който реално може да се прочете за студентите от университетите.

При създаването на учебника авторите са използували традиционните лекционни курсове в Московския и Софийския университет, както и част от материала от книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк «Основи на математическия анализ».

Авторите изразяват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

Авторите дължат особена благодарност на И. С. Ломов и С. Л. Троянски, които оказаха неоценима помощ на всички етапи от написването на тази книга.

Москва, януари 1986 г.

1. Числови редове

Още в средния курс читателите са се срещали със суми, които съдържат безбройно много членове (например със сумата на безкрайна геометрична прогресия).

Макар че изследването на подобни суми, наречени редове, може да бъде сведено към изследване на числови редици, то тези суми изискват самостоятелно задълбочено изучаване. Същите представляват важно средство за представяне на различни функции, срещащи се в анализа.

§ 1. Понятие за числов ред

1. Сходимост и разходимост на редове. Да разгледаме произволната числова редица $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ и формално да образуваме от нейните елементи безкрайната сума

$$u_1+u_2+\dots+u_k+\dots=\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.1}$$

Формално съставената сума (1.1) е прието да се нарича **числов ред** или просто **ред**. При това отделните събираеми u_k е прието да се наричат членове на реда (1.1).

Сумата на първите n члена на реда (1.1) е прието да се нарича n-та **частична сума** на този ред и да се означава със символа S_n.

И така по определение

$$S_n=u_1+u_2+\dots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.2}$$

*Редът (1.1) се нарича **сходящ**, ако е сходяща редицата $\{S_n\}$ от частичните суми (1.2) на този ред. При това границата S на тази редица се нарича **сума** на реда (1.1).*

По този начин за сходящия ред (1.1) със сума S можем формално да напишем равенството

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случай че за дадения ред (1.1) редицата от частичните суми (1.2) е разходяща, то редът се нарича **разходящ**.

Виждаме, че понятието сума е дефинирано само за сходящи редове, при това (за разлика от понятието сума на краен брой събираеми) понятието сума на ред се въвежда чрез граничен преход.

В съвременната математика и в нейните приложения често се сблъскваме с редове, за които редицата от частичните суми (1.2) е разходяща. За някои такива редове се въвежда понятие сума в обобщен смисъл. В § 7 от тази глава ще бъдат разгледани най-употребяваните методи за обобщено сумиране на разходящи редове.

Един от основните проблеми на теорията на редовете е този за намиране на признаци за сходимост и разходимост на редове. В § 2 ще бъдат доказани такива признаци за редове с неотрицателни членове, а в § 4 — за редове с произволни членове.

Да се спрем на някои примери на сходящи и разходящи редове.

1°. Ще изучим въпроса за сходимостта на реда, съставен от членовете на геометричната прогресия

$$1+q+q^2+\cdots+q^k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}. \tag{1.3}$$

Тъй като n-тата частична сума S_n на този ред при $q\neq 1$ има вида

$$S_n=1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{1.4}$$

то очевидно при $|q|<1$ редицата от частичните суми $\{S_n\}$ клони към $\frac{1}{1-q}$.

Следователно при $|q|<1$ редът (1.3) е сходящ и има сума, равна на $\frac{1}{1-q}$.

Ако $|q|>1$, то от израза (1.4) се вижда, че редицата от частичните суми $\{S_n\}$ е разходяща, т. е. при $|q|>1$ редът (1.3) е разходящ.

За пълнота остава да разгледаме случая $|q|=1$, т. е. случая, когато q е равно на $+1$ или -1.

В случая $q=+1$ всички членове на реда (1.3) са равни на единица и n-тата частична сума на реда S_n е равна на n. Оттук следва, че в случая $q=+1$ редицата $\{S_n\}$ е разходяща, т. е. редът (1.3) е разходящ.

Накрая в случая $q=-1$ редът (1.3) има вида $1-1+1-1+\cdots$ и следователно редицата $\{S_n\}$ от частичните суми съвпада с очевидно разходящата редица 1, 0, 1, 0, ... Така че и при $q=-1$ редът (1.3) е разходящ.

2°. За фиксирано число x да разгледаме въпроса за сходимостта на следните редове*:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!},\tag{1.5}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!},\tag{1.6}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}.\tag{1.7}$$

Означавайки n-тите частични суми на редовете (1.5), (1.6) и (1.7) съответно с $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$, можем да пишем

$$S_n^{(1)}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\tag{1.8}$$

$$S_n^{(2)}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!},\tag{1.9}$$

$$S_n^{(3)}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}.\tag{1.10}$$

Като съпоставим изразите (1.8), (1.9) и (1.10) с разлаганията по формулата на Маклорен на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$ (вж. п. 2, § 9 от глава 6 на част I), получаваме, че

$$\begin{aligned}e^x&=S_n^{(1)}(x)+R_n^{(1)}(x),\\ \sin x&=S_n^{(2)}(x)+R_n^{(2)}(x),\\ \cos x&=S_n^{(3)}(x)+R_n^{(3)}(x),\end{aligned}\tag{1.11}$$

където $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$, $R_n^{(3)}(x)$ означават n-тите остатъчни членове в разлаганията по формулата на Маклорен съответно на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

* Символът 0! отъждествяваме с числото 1.

В пунктове 1 и 2, § 9, глава 2 на част 1 е доказано, че във всяка точка x от реалната права тези остатъчни членове клонят към нула при $n\to\infty$. Следователно съгласно с (1.11) във всяка точка x от безкрайната права частичните суми $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ и $S_n^{(3)}$ клонят към граници, съответно равни на e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Това означава, че редовете (1.5), (1.6) и (1.7) са сходящи във всяка точка x от безкрайната права и техните суми са равни съответно на e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Забележка 1. Ще подчертаем, че от формална гледна точка изучаването на числовите редове е нова форма на изучаване на числовите редици, понеже: 1) на всеки ред (1.1) еднозначно се съпоставя редицата $\{S_n\}$ от неговите частични суми, 2) на произволна числова редица $\{S_n\}$ еднозначно се съпоставя числовият ред (1.1) с членове $u_1=S_1$, $u_k=S_k-S_{k-1}$ при $k>1$, за който тази редица служи за редица от частични суми.

Забележка 2. Ще отбележим две прости свойства на произволен ред, които следват непосредствено от определението за сходимост на ред.

I. Премахването на краен брой членове на реда (или добавянето към реда на краен брой нови членове) не влияе на сходимостта или разходимостта му.

II. Ако C е различна от нула константа, $u_k'=C\,.\,u_k$, то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

За обосноваването на първото от тези свойства е достатъчно да се забележи, че в резултат на казаното премахване (или добавяне) на краен брой членове всички частични суми на реда от известно място нататък се изменят с една и съща константа.

За доказателството на второто свойство нека означим с S'_n и S_n n-тите частични суми съответно на редовете $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Вижда се, че $S'_n=C.\ S_n$, където $C\neq 0$. Оттук следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n$ съществува тогава и само тогава, когато съществува $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. Критерий на Коши за сходимост на редове. Тъй като въпросът за сходимост на даден ред е еквивалентен по определение на въпроса за сходимост на редицата от частичните му суми, то ние ще получим необходимо и достатъчно условие за сходимост на даден ред, формулирайки критерия на Коши за редицата от неговите частични суми. За удобство да формулираме отново критерия на Коши за редици. *За да бъде редицата* $\{S_n\}$ *сходяща, е необходимо и достатъчно за всяко положително число* ε *да съществува номер* N *такъв, че за всеки номер* n*, удовлетворяващ условието* $n \geq N$*, и за всяко естествено* $p (p=1, 2, 3, \ldots)$ *да е в сила* $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.

Като следствие от това твърдение получаваме следната теорема.

Теорема 1.1 (критерий на Коши за редове). *За да е сходящ редът* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$*, е необходимо и достатъчно за всяко положително число* ε *да съществува номер* N *такъв, че за всеки номер* n*, удовлетворяващ условието* $n \geq N$*, и за всяко естествено число* $p (p=1, 2, \ldots)$ *да е в сила*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

За доказателството на тази теорема е достатъчно да забележим, че величината, стояща под знака за модул в неравенство (1.12), е равна на $S_{n+p}-S_n$.

Ще отбележим, че критерият на Коши представлява главно теоретичен интерес. Неговото практическо използуване за доказване на сходимостта или разходимостта на конкретни редове обикновено е свързано с трудности. Затова наличието на критерия на Коши не изключва необходимостта от намиране на други, практически по-ефективни критерии за сходимост и разходимост на редове.

От теорема 1.1 се получават две елементарни, но важни следствия.

Следствие 1. *Ако редът* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *е сходящ, то редицата* $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$ *е безкрайно малка.* Прието е r_n да се нарича *n-ти остатък* на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

За да докажем следствие 1, е достатъчно да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че $|r_n| \leq \varepsilon$ при $n \geq N$. Последното неравенство следва непосредствено от неравенство (1.12), което е вярно при $p=1, 2, 3, \ldots$ и от теорема 3.13 от т.4, § 1, глава 3, част I.

Следствие 2 (необходимо условие за сходимост на редове). *За да бъде сходящ редът* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, *е необходимо редицата* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ *от членовете на реда да е безкрайно малка.*

Достатъчно е да се докаже, че за дадения сходящ ред и за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N_0 такъв, че при $n\geqq N_0$ е в сила $|u_n|<\varepsilon$. Нека е дадено произволно $\varepsilon>0$. Съгласно теорема 1.1 съществува номер N такъв, че при $n\geqq N$ и за всяко естествено p е изпълнено неравенство (1.12). В частност при $p=1$ това неравенство има вида

$$|u_{n+1}|<\varepsilon \quad (\text{при } n\geqq N). \tag{1.12'}$$

Ако сега положим $N_0=N+1$, то при $n\geqq N_0$, имайки предвид неравенство (1.12'), получаваме $|u_n|<\varepsilon$, което трябваше да се докаже.

С други думи, следствие 2 може да се формулира така: за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е необходимо $\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$. Следователно при изследване сходимостта на даден ред трябва преди всичко да се провери дали клони към нула k-тият член на реда при $k\to\infty$. Ако това не е така, то редът е разходящ. Така например редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{7k^2+8\,000k}$$

е очевидно разходящ, понеже

$$\lim_{k\to\infty} u_k=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{7k^2+8\,000k}=\frac{1}{7}\neq 0.$$

Аналогично разходимостта на вече познатия ни ред $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ следва от факта, че $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{k-1}$ не съществува.

Да подчертаем обаче, че клоненето към нула на k-тия член на реда при $k\to\infty$ е необходимо, но не е достатъчно условие за сходимост на реда. Като пример да разгледаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots \tag{1.13}$$

Този ред обикновено се нарича *хармоничен* ред. Очевидно за хармоничния ред е изпълнено необходимото условие за сходимост, но (както е доказано в т. 3, § 3, глава 3, част I) редицата от частичните суми на този ред е разходяща.

§ 2. Редове с неотрицателни членове

1. Необходимо и достатъчно условие за сходимост на ред с неотрицателни членове. В този параграф ще разгледаме редове, всички членове на които са неотрицателни.

Редове с неотрицателни членове се срещат често в приложенията. Освен това тяхното предварително изучаване ще облекчи изучаването на редове с членове с произволни знаци. По-нататък, за да подчертаем, че става дума за редове с неотрицателни членове, ще означаваме членовете на такъв ред със символа p_k вместо u_k.

Можем веднага да отбележим основното характеристично свойство на ред с неотрицателни членове: *редицата от частичните суми на такъв ред е ненамаляваща.*

Това ни позволява да докажем следното твърдение.

Теорема 1.2. *За да бъде един ред с неотрицателни членове сходящ, е необходимо и достатъчно редицата от частичните му суми да е ограничена.*

Необходимостта следва от факта, че всяка сходяща редица е ограничена (предвид теорема 3.8 от § 1, глава 3, част I).

Достатъчността следва от това, че редицата от частичните суми е ненамаляваща и следователно за сходимостта ѝ е достатъчно тя да бъде ограничена (предвид теорема 3.15 от точка 2, § 2, глава 3, част I).

2. Критерии за сравнение. В тази точка ще докажем редица критерии, позволяващи да се направи заключение за сходимостта (или разходимостта) на разглеждания ред чрез сравнението му с друг ред, чиято сходимост (или разходимост) е известна.

Теорема 1.3. *Нека* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ *са два реда с неотрицателни членове. Нека за всеки номер* k *е изпълнено*

$$p_k \leq p_k'. \tag{1.14}$$

Тогава от сходимостта на реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ *следва сходимоста на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$; *от разходимостта на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *следва разходимостта на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказателство. Да означим n-тите частични суми на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ съответно с S_n и S_n'. От (1.14) следва, че $S_n \leq S_n'$. Последното неравенство ни позволява да заключим, че от ограничеността на редицата от частични суми $\{S_n'\}$ следва ограниченост на редицата от частични суми $\{S_n\}$ и, обратно, от неограничеността на редицата от частични суми $\{S_n\}$ следва неограниченост на редицата от частични суми $\{S_n'\}$. Вземайки под внимание теорема 1.2, теорема 1.3 е доказана.

Забележка 1. В условията на теорема 1.3 може да се поиска неравенство (1.14) да бъде изпълнено не за всички номера k, а само за тези, които са по-големи от някой номер k_0. Наистина съгласно забележка 2 в края на т. I, § 1 премахването на краен брой членове не влияе на сходимостта на реда.

Забележка 2. Теорема 1.3 остава вярна, ако в предположенията на теоремата заменим неравенство (1.14) със следното неравенство:

$$p_k \leq C p_k', \tag{1.15}$$

където C е произволна положителна константа.

Наистина от забележка 2 от т. I, § 1 следва, че проблемът за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е еквивалентен на проблема за сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} (Cp_k')$. При това естествено можем да поискаме неравенството (1.15) да бъде изпълнено, започвайки от някой достатъчно голям номер k.

Следствие от теорема 1.3. *Ако $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е ред с неотрицателни членове, а $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е ред със строго положителни членове и ако съществува крайната граница*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,$$

то от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ следва сходимост на реда

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$; *от разходимостта на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *следва разходимост на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказателство. Тъй като $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L$, то съгласно определението за граница на редица за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер N такъв, че при $k \geq N$ е в сила

$$L-\varepsilon < \frac{p_k}{p_k'} < L+\varepsilon.$$

Следователно при $k \geq N$ е вярно неравенството $p_k < (L+\varepsilon)p_k'$. Последното неравенство съвпада с неравенство (1.15) при $C = L+\varepsilon$. Предвид забележка 2 към теорема 1.3 следствието е доказано.

Теорема 1.4. *Нека* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ *са два реда със строго положителни членове. Нека за всички номера* k *е вярно неравенството*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'} . \tag{1.16}$$

Тогава от сходимостта на реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ *следва сходимост на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$; *от разходимостта на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *следва разходимост на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказателство. Нека да запишем неравенство (1.16) за $k=1, 2, \ldots, n-1$, където n е произволен номер. Ще имаме

$$\frac{p_2}{p_1} \leq \frac{p_2'}{p_1'},$$

$$\frac{p_3}{p_2} \leq \frac{p_3'}{p_2'},$$

$$\ldots$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p_n'}{p_{n-1}'}.$$

Като умножим почленно всички написани неравенства, получаваме $\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p_n'}{p_1'}$, или $p_n \leq \frac{p_1}{p_1'} p_n'$. Тъй като в последното неравенство величината $C = \frac{p_1}{p_1'}$ е абсолютна положителна константа, независеща от номера k, то съгласно забележка 2 към теорема 1.3 теорема 1.4 е доказана.

Забележка 3. В условията на теорема 1.4 може да се поиска неравенство (1.16) да бъде изпълнено не за всички номера k, а само започвайки от някой номер k (тъй като отстраняването на краен брой членове на реда не влияе на сходимостта на реда).

Двете доказани в тази точка теореми се наричат **теореми за сравнение или критерии за сравнение**.

Ще дадем примери за прилагане на критериите за сравнение.

1. Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+b^k}, \quad \text{където } b>0.$$

Ако $b \leq 1$, то k-тият член на разглеждания ред не клони към нула при $k \to \infty$. Следователно необходимото условие за сходимост на редове е нарушено и значи редът е разходящ. Ако $b>1$, то понеже за всяко k е в сила неравенството

$$\frac{1}{2+b^k} < \frac{1}{b^k}$$

и понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}$ е сходящ, теоремата за сравнение 1.3 ни позволява да твърдим, че разглежданият ред е сходящ.

2. Да изследваме въпроса за сходимост при произволно $\alpha \leq 1$ на следния ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{k^\alpha} + \cdots \tag{1.17}$$

Този ред се нарича често **обобщен хармоничен ред**. Тъй като при $\alpha \leq 1$ за всеки номер k е в сила неравенството

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$$

и понеже хармоничният ред е разходящ*, то теоремата за сравне-

* Разходимостта на хармоничния ред е доказана в края на т. 2, § 1.

ние 1.3 позволява да се твърди, че редът (1.17) е разходящ за всяко $\alpha \le 1$.

3. Критерии на Даламбер и Коши. Критериите на Даламбер и Коши се основават на сравнението на даден ред с геометрична прогресия

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots, \quad |q| < 1, \tag{1.18}$$

или с разходящия ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \tag{1.19}$$

Теорема 1.5 (критерий на Даламбер)*. I. *Ако за всички номера k или най-малкото започвайки от някой номер k, е в сила неравенството*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1^{**} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1\right), \tag{1.20}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *е сходящ (разходящ).*

Г. *Ако съществува границата*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \tag{1.21}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *е сходящ при* $L < 1$ *и е разходящ при* $L > 1$.

Теорема Г обикновено се нарича критерий на Даламбер *в гранична форма*. В тази форма той се използува най-често.

Доказателство. Ще докажем поотделно твърденията I и Г.

1) За доказателството на теорема I да положим $p_k' = q^k$ $(p_k' = 1)$. Тогава $\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q$, където $q < 1$ $\left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1\right)$ и ние можем да запишем неравенство (1.20) във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \le \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge \frac{p'_{k+1}}{p'_k}\right). \tag{1.22}$$

* Жак Лерон Даламбер — френски математик и философ (1717—1783).

** При това естествено се предполага, че всички членове на реда (най-малкото от някой номер нататък) са строго положителни.

Понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, съвпадащ с реда (1.18) ((1.19)), е сходящ (разходящ), то неравенството (1.22) въз основа на теоремата за сравнение 1.4 гарантира сходимостта (разходимостта) на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Твърдението 1 е доказано.

2) Сега ще докажем теорема Г. Ако $L<1$, то съществува положително число ε такова, че $L=1-2\varepsilon$ и $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определението за граница на редица за избраното ε съществува номер N такъв, че при $k\geqq N$

$$(1.23)\qquad L-\varepsilon<\frac{p_{k+1}}{p_k}<L+\varepsilon=1-\varepsilon.$$

Числото $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играе ролята на q в теорема 1. Следователно редът е сходящ.

Ако $L>1$, съществува *положително* число ε такова, че $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В този случай лявото от неравенствата (1.23) ни дава

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}>L-\varepsilon=1 \qquad (\text{при } k\geq N).$$

Редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е разходящ съгласно твърдение 1. Теорема 1.5 е доказана напълно.

Забележки към теорема 1.5

1) Да обърнем внимание на факта, че в теорема 1.5 (1) неравенството $\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqq q<1$ (за всички k от някой номер нататък) не може да се замени с $\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$.

Наистина, както беше доказано по-горе, хармоничният ред (1.13) е разходящ, но за този ред $\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k}{k+1}<1$ (за всички номера k).

2) Ако в предположенията на теорема 1.5 (Г) $L=1$, то не може да се каже нищо определено за сходимостта на реда (т. е. при $L=1$ критерият на Даламбер «не работи»). Наистина за хармоничния ред (1.13) $L=1$, а както знаем, той е разходящ. При това за реда

$$(1.24)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

също имаме $L=1$, но този ред е сходящ, както ще бъде доказано в следващата точка.

Теорема 1.6 (критерии на Коши). 1. *Ако за всички номера k или най-малкото започвайки от някой номер k нататък, е вярно неравенството*

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1), \tag{1.25}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

Г. *Ако съществува границата*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \tag{1.26}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L<1$ и разходящ при $L>1$.

Теорема Г се нарича обикновено критерий на Коши *в гранична форма.*

Доказателство. Твърдения 1 и Г ще докажем поотделно.

1) За доказателството на теорема 1 да положим $p_k' = q^k$ $(p_k' = 1)$. Тогава от неравенствата (1.25) получаваме

$$p_k \leq p_k' \quad (p_k \geq p_k'). \tag{1.27}$$

Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, съвпадащ с реда (1.18) ((1.19)), е сходящ (разходящ), то неравенство (1.27) на основата на теоремата за сравнение 1.3 гарантира сходимостта (разходимостта) на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема 1.6 (1) е доказана.

2) За доказателството на теорема 1.6 (Г) трябва дословно да се повтори схемата на доказателство на теорема 1.5 (Г), като се замени във всички разсъждения $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ с $\sqrt[k]{p_k}$.

Теорема 1.6 е доказана напълно.

Забележки към теорема 1.6

1) Както и в предходната теорема, в теорема 1.6 (1) неравенството $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ не може да се замени с $\sqrt[k]{p_k} < 1$.

2) При $L=1$ критерият на Коши в гранична форма «не работи».

Тези забележки могат да се обосноват веднага чрез двата примера, дадени към съответните забележки към критерия на Даламбер.

3) Възниква въпросът, кой от двата критерия — на Даламбер или на Коши, е по-силен. Да анализираме този въпрос по отношение на критериите на Даламбер и Коши, взети в гранична форма. Може да се докаже, че от съществуването на границата (1.21) следва съществуването на границата (1.26) и равенство на двете граници. (Доказателството е дадено в края на тази част.) Обратното не е вярно. Наистина вижда се, че за реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}} \tag{1.28}$$

границата (1.26) съществува и е равна на $\frac{1}{2}$, докато в същото време границата (1.21) не съществува. Следователно критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер, понеже винаги когато работи критерият на Даламбер, работи и критерият на Коши, но съществуват редове (например редът (1.28)), за които критерият на Коши работи успешно, а критерият на Даламбер не дава резултат. Въпреки това критерият на Даламбер се използва по-често, отколкото критерият на Коши.

Примери. 1) Да изследваме въпроса за сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}. \tag{1.29}$$

Да приложим критерия на Даламбер в гранична форма. Имаме

$$p_k=\frac{(\sqrt{k})^k}{k!}, \quad \frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}\, k!}{(k+1)!\,(\sqrt{k})^k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{1.30}$$

От (1.30) следва, че

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$=0\,.\sqrt{e}=0<1,$$

т. е. редът (1.29) е сходящ.

2) Да разгледаме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,.\,2^{-k}. \tag{1.31}$$

Ще приложим критерия на Коши в гранична форма. Имаме

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\sqrt[k]{k}. \tag{1.32}$$

От равенство (1.32) получаваме* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\frac{1}{2}<1$ и от критерия на Коши следва сходимостта на реда (1.31).

В заключение ще докажем, че ако съществува и е равна на L границата (1.21), то съществува и също е равна на L границата (1.26). При доказателството ще използуваме две леми.

Лема 1. *Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща и има граница l, то към същата граница клони и редицата $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ от средноаритметичните на числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Доказателство. Тъй като редицата $\{a_n\}$ има граница l, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че $|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ за всички $n\geqq N$. Фиксираме N и отбелязваме, че при $n>N$ е в сила равенството

$$\sigma_n-l=\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}$$
$$=\left[\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_N-l)}{n}\right]+\left\{\frac{(a_{N+1}-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right\}.$$

Модулът на дробта, заключена в големите скоби, не надвишава числото $\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(n-N)}{n}$, което е по-малко от $\frac{\varepsilon}{2}$. Понеже номерът N е фиксиран, то модулът на дробта, заключена в средните скоби, не надминава $\frac{\varepsilon}{2}$ за всички $n\geqq N_1$, където N_1 е достатъчно голямо число.

Следователно $|\sigma_n-l|<\varepsilon$ при всички $n\geqq N_1$, където N_1 е достатъчно голямо.

Лема 1 е доказана.

Лема 2. Ако редицата от положителни числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е сходяща и има граница L, то към същата граница L клони и редицата от средногеометричните числа

$$b_k=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}.$$

* За намирането на $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ е достатъчно да се логаритмува изразът $x^{\frac{1}{x}}$ и да се приложи правилото на Лопитал.

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че от непрекъснатостта на логаритмичната функция получаваме $\lim_{k\to\infty} \ln a_k = \ln L$ при $L>0$. (Последното равенство формално е в сила и при $L=0$, когато $\ln L = -\infty$.) Но тогава по лема 1 за сходимост на средните аритметични съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} \ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_k}{k} = \ln L.$$

(Последното равенство е вярно и при $L=0$, когато $\ln L = -\infty$.) От последното равенство и от непрекъснатостта на показателната функция получаваме

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}} = e^{\ln L} = L.$$

(Тези разсъждения са верни и при $L=0$.) Лема 2 е доказана.

Като приложим лема 2 към числата $a_1 = p_1$, $a_2 = \frac{p_2}{p_1}, \ldots, a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$ и използуваме факта, че границата (1.21) съществува и е равна на L, получаваме, че границата (1.26) съществува и е равна също на L.

4. Интегрален критерий на Коши—Маклорен. Критериите на Даламбер и Коши се оказват непригодни за изясняване на въпроса за сходимост на някои често срещани редове с положителни членове. Така например с помощта на тези критерии не може да се изясни въпросът за сходимост на обобщения хармоничен ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \tag{1.33}$$

(α е произволно реално число).

Всъщност в края на точка 2 установихме, че при $\alpha \leq 1$ редът (1.33) е разходящ, но остава открит въпросът за сходимост на този ред при $\alpha > 1$. В тази точка ще докажем един общ критерий за сходимост на редове с неотрицателни членове, от който в частност ще следва сходимостта на реда (1.33) при $\alpha > 1$.

Теорема 1.7 (теорема на Коши—Маклорен). Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и нерастяща върху полуправата $x \geq m$, където m е произволно фиксирано число. Тогава редът

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(m+k)=f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\cdots \tag{1.34}$$

е сходящ тогава и само тогава, когато съществува границата на редицата

$$a_n=\int_m^{m+n} f(x)dx \tag{1.35}$$

при $n\to\infty$.

Доказателство. Нека k е произволен номер, удовлетворяващ условието $k\geqq 1$, а x е произволна стойност на аргумента от сегмента $m+k-1\leqq x\leqq m+k$. Тъй като по условие функцията $f(x)$ е нерастяща в този сегмент, то за всяко x от същия сегмент са верни неравенствата

$$f(m+k)\leqq f(x)\leqq f(m+k-1). \tag{1.36}$$

Функцията $f(x)$, след като е ограничена и монотонна, е интегруема в интервала $[m+k-1,\ m+k]$ (вж. т. 2, §3, глава 9, част I). Освен това от свойствата на интегралите (вж. свойство 6), т. 2, §4, глава 9, част I) следва, че

$$\int_{m+k-1}^{m+k} f(m+k)dx\leqq\int_{m+k-1}^{m+k} f(x)dx\leqq\int_{m+k-1}^{m+k} f(m+k-1)dx$$

или

$$f(m+k)\leqq\int_{k-1}^{k} f(x)dx\leqq f(m+k-1). \tag{1.37}$$

Неравенствата (1.37) сме доказали за всяко $k\geqq 1$. Да запишем тези неравенства за значения на k, равни на $1, 2, \ldots, n$, където n е произволен номер. Имаме

$$f(m+1)\leqq\int_{m}^{m+1} f(x)dx\leqq f(m),$$

$$f(m+2)\leqq\int_{m+1}^{m+2} f(x)dx\leqq f(m+1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n)\leqq\int_{m+n-1}^{m+n} f(x)dx\leqq f(m+n-1).$$

Като съберем почленно горните неравенства, получаваме

(1.38)
$$\sum_{k=1}^{n} f(m+k) \leqq \int_{m}^{m+n} f(x)dx \leqq \sum_{k=0}^{m+n-1} f(m+k).$$

Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.34), равна на

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} f(m+k).$$

Отчитайки означението (1.35), можем да напишем неравенството (1.38) по следния начин:

(1.39)
$$S_n-f(m)\leqq a_n \leqq S_{n-1}.$$

Неравенствата (1.39) позволяват без труд да докажем теоремата. Наистина от формулата (1.35) очевидно следва, че редицата $\{a_n\}$ е ненамаляваща. Следователно, за да бъде тя сходяща, е необходимо и достатъчно да е ограничена. За сходимостта на реда (1.34) предвид теорема 1.2 е необходимо и достатъчно да бъде ограничена редицата $\{S_n\}$. От неравенствата (1.39) следва, че редицата $\{S_n\}$ е ограничена тогава и само тогава, когато е ограничена редицата $\{a_n\}$, т. е. тогава и само тогава, когато е сходяща редицата $\{a_n\}$. Теоремата е доказана.

Примери. 1) Преди всичко да приложим интегралния критерий на Коши—Маклорен за изясняване сходимостта на обобщения хармоничен ред (1.33). Понеже редът (1.33) може да се разглежда като ред от вида (1.34) при $m=1$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ и функцията $f(x)$ е намаляваща и положителна върху полуправата $x\geqq 1$, то въпросът за сходимостта на реда (1.33) е еквивалентен на въпроса за сходимост на редицата $\{a_n\}$, където

$$a_n=\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{x=n}=\dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha\neq 1,\\ \left.\ln x\right|_{n=1}^{x=n}=\ln n & \text{при } \alpha=1.\end{cases}$$

От вида на елементите a_n следва, че редицата $\{a_n\}$ е разходяща при $\alpha\leqq 1$ и сходяща при $\alpha>1$, при това в последния случай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{\alpha-1}$. Следователно редът (1.33) е разходящ при $\alpha\leqq 1$ (това вече установихме по-горе по друг начин) и е сходящ при $\alpha>1$. В частност при $\alpha=2$ редът (1.33) преминава в реда (1.24), чиято сходимост вече можем да твърдим.

2) Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}, \tag{1.40}$$

където β е фиксирано положително число. Редът (1.40) може да се разглежда като ред от вида (1.34) при $m=2$ и $f(x)=\frac{1}{x \ln^{\beta} x}$. Понеже функцията $f(x)$ е неотрицателна и нерастяща върху полуправата $x \geq 2$, то въпросът за сходимостта на реда (1.40) е еквивалентен на въпроса за сходимост на редицата $\{a_n\}$, където

$$a_n=\int_2^n \frac{dx}{x \ln^{\beta} x}=\begin{cases} \left.\frac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta}\right|_{x=2}^{x=n}=\frac{\ln^{1-\beta} n-\ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{при } \beta \neq 1, \\ \left.\ln \ln x\right|_{x=2}^{x=n}=\ln \ln n-\ln \ln 2 & \text{при } \beta=1. \end{cases}$$

От вида на елементите a_n следва, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща при $\beta>1$ и разходяща при $\beta \leq 1$. Следователно редът (1.40) е сходящ при $\beta>1$ и разходящ при $\beta \leq 1$.

5. Критерии на Раабе. Критериите на Даламбер и Коши бяха основани на сравнението на разглеждания ред с ред, представляващ сума на геометрична прогресия. Естествено възниква идеята за получаване на по-тънки критерии, основаващи се на сравнение на разглеждания ред с други стандартни редове, сходящи или разходящи «по-бавно» от реда на геометричната прогресия.

В тази точка ще установим един критерий, основаващ се на сравнението на разглеждания ред с изучения в предната точка стандартен ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots \tag{1.41}$$

Теорема 1.8 (критерий на Раабе*). 1. Ако за всички номера k или поне от известен номер нататък е вярно неравенството

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \geq q>1^{**} \quad \left(k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \leq 1\right), \tag{1.42}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

* Йозеф Лудвиг Раабе — швейцарски математик (1801—1859).

** Естествено ние предполагаме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ поне от някой номер нататък има строго положителни членове.

Г. Ако съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=L, \tag{1.43}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L>1$ и разходящ при $L<1$. [Тео]рема Г обикновено се нарича критерий на Раабе в граничн[а] форма.

Доказателство. Твърденията 1 и Г ще докажем поотделно.

1. За да докажем твърдение 1, да запишем неравенства (1.42) във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\le 1-\frac{q}{k} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\ge 1-\frac{1}{k}\right). \tag{1.44}$$

Тъй като $q>1$, то съществува число α такова, че $q>\alpha>1$. Като разложим функцията $(1+x)^\alpha$ по формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Пеано (вж. т. 2, § 9, глава 6, част I), получаваме

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\bar{\bar{o}}(x).$$

Като положим в последното равенство $x=-\frac{1}{k}$, намираме

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha=1-\frac{\alpha}{k}+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1.45}$$

Понеже редицата $\dfrac{\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$ е безкрайно малка, то от някой номер k_0 нататък е в сила неравенството

$$\frac{o\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\le q-\alpha. \tag{1.46}$$

От (1.45) и (1.46) получаваме неравенството

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\ge 1-\frac{q}{k} \quad (\text{при } k\ge k_0). \tag{1.47}$$

Като сравним неравенствата (1.44) и (1.47), получаваме

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\le\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\ge 1-\frac{1}{k}\right) \quad (\text{при } k\ge k_0).$$

Последните неравенства могат да се запишат още във вида

$$(1.48)\qquad \frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\frac{\dfrac{1}{k^{\alpha}}}{\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha}}}\qquad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqq\frac{\dfrac{1}{k}}{\dfrac{1}{k-1}}\right)\qquad(\text{при } k\geq k_0).$$

Понеже редът 1.41) е сходящ при $\alpha>1$ и разходящ при $\alpha=1$, то от неравенство (1.48) и теоремата за сравнение 1.4 следва, че редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ). Теорема 1 е доказана.

2) Точно както при критериите на Даламбер и Коши, ще сведем твърдение Г към твърдението 1. Нека $L>1$. Да положим $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$, $q=1+\varepsilon=L-\varepsilon$. По определението за граница от (1.43) следва, че за това ε може да се намери номер k_0 такъв, че $\left|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-L\right|<\varepsilon$ при $k>k_0$. Следователно лявото неравенство (1.42) е вярно. Ако $L<1$, то полагаме $\varepsilon=1-L$ и по определението за граница от (1.43) следва, че от някой номер k_0 нататък е в сила дясното неравенство (1.42). Теорема 1.8 е доказана напълно.

З а б е л е ж к а. Ще отбележим, че в теорема 1.8 (1) в лявото неравенство (1.42) не може да се вземе $q=1$ (в такъв случай редът може да не е сходящ). При $L=1$ теорема 1.8 (Г) «не работи» (възможна е и сходимост, и разходимост на реда).

Пример. Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k,\ \text{където}\ p_k=a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)},\ a=\text{const}>0.$$

Непосредствено се проверява, че критериите на Даламбер и Коши, приложени към този ред, «не действуват». Да приложим критерия на Раабе. Лесно се проверява, че

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-\frac{1}{k}}-1}{-\frac{1}{k}}.$$

Вижда се, че последната дроб при $k\to\infty$ клони към производната на функцията a^x в точката $x=0$, т. е. клони към $\ln a$. Съгласно критерия на Раабе разглежданият ред е сходящ при $\ln a>1$, т. е. при $a>e$, и разходящ при $\ln a<1$, т. е. при $a<e$. При $a=e$ въпросът за сходимостта на разглеждания ред изисква допълнително

изследване, тъй като критерият на Раабе «не работи». Друг приме на ред, за който критерият на Раабе «не работи», е редът (1.4

6. Универсален ред за сравнение не съществува. Вече отбелязах че критериите на Даламбер и Коши се основават на сравнение на разглеждания ред с реда на геометричната прогресия, а критерият на Раабе — на сравнение с по-бавно сходящия (или разходящ) ред (1.41).

Естествено възниква въпросът не съществува ли такъв универсален сходящ (или разходящ) (възможно най-бавно) ред, с който може да бъде сравнен произволен ред с неотрицателни членове.

Ще докажем, че такъв универсален ред не съществува. Нека са дадени два сходящи реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Да означим съответно с r_n и r_n' техните n-ти остатъци*. Ще казваме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е сходящ по-бавно от реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'}=0$. Ще докажем, че *за всеки сходящ ред съществува ред, който е по-бавно сходящ от него.* Наистина нека $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е произволен сходящ ред и r_n е неговият n-ти остатък. Ще докажем, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, където $p_k'=\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}$, е по-бавно сходящ от реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Наистина ако r_n' е n-тият остатък на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'}=\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}}=0.$$

Сега да докажем, че не съществува универсален сходящ ред, с който може да бъде сравнен произволен ред. Наистина, ако допуснем, че такъв универсален сходящ ред $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ съществува, като вземем за него построения по-горе ред $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, ще имаме

* За r_0 вземаме цялата сума $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{p_k'}=\lim_{k\to\infty}\frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}\right)=0.$$

Следователно от сравнение с реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ не може да се направи заключение за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Аналогично се доказва, че не съществува универсален разходящ ред, сравнението с който би позволило да установим разходимостта на произволен разходящ ред.

§ 3. Абсолютно и условно сходящи редове

1. Понятията абсолютно и условно сходящи редове. Преминаваме към изучаването на редове, чиито членове са реални числа с произволен знак.

Определение 1. *Ще казваме, че редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.49}$$

е абсолютно сходящ, ако е сходящ редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{1.50}$$

Да отбележим, че в това определение не се предполага сходимост на самия ред (1.49). Оказва се, че това предположение е излишно, понеже е вярна следната теорема.

Теорема 1.9. *От сходимостта на реда* (1.50) *следва сходимост на реда* (1.49).

Доказателство. Ще използуваме критерия на Коши за сходимост на редове, т. е. теорема 1.1. Трябва да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N$, и за всяко естествено p е в сила неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.51}$$

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Понеже редът (1.50) е сходящ, то съгласно теорема 1.1 съществува номер N такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N$, и за всяко естествено p е в сила неравенството

$$(1.52) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

От друга страна, валидно е очевидното неравенство

$$(1.53) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|.$$

Като съпоставим неравенства (1.52) и (1.53), получаваме неравенство (1.51). Теоремата е доказана.

Определение 2. *Редът* (1.49) *се нарича* ***условно сходящ***, *ако е сходящ и в същото време съответният ред от модулите на членовете му* (1.50) *е разходящ.*

Като пример за абсолютно сходящ ред може да служи редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots, \text{ където } \alpha > 1.$$

Този ред е абсолютно сходящ, понеже при $\alpha > 1$ е сходящ редът (1.33). Ще дадем пример за условно сходящ ред. Ще докажем, че е условно сходящ следният ред:

$$(1.54) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Понеже съответният ред от модулите е хармоничният ред, за който знаем, че е разходящ, за да докажем условната сходимост на реда (1.54), е достатъчно да докажем, че този ред е сходящ. Ще докажем, че редът (1.54) има сума $\ln 2$. В т. 2, § 9, глава 6, част I получихме развитието на функцията $\ln(1+x)$ по формулата на Маклорен

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

На същото място за всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$ е получена следната оценка за остатъчния член:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Като положим в последните две съотношения $x = 1$, ще имаме

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1).$$

където

$$\left|R_{n+1}(1)\right| < \frac{1}{n+1},$$

или

$$(1.55)\qquad \left|\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]-\ln 2\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Като означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.54), можем да запишем неравенство (1.55) във вида

$$(1.56)\qquad \left|S_n-\ln 2\right| < \frac{1}{n+1}.$$

От (1.56) следва, че разликата $S_n-\ln 2$ е безкрайно малка редица. Това доказва сходимостта на реда (1.54) към $\ln 2$.

2. Разместване на членовете в условно сходящ ред. Едно от най-важните свойства на сумите на краен брой реални числа е свойството комутативност. Това свойство твърди, че при разместване на събираемите сборът не се променя. Естествено възниква въпросът, остава ли в сила това свойство за сумата на сходящ ред, т.е. може ли да се измени сумата на сходящ ред при разместване на членовете на този ред. В тази точка ще изясним този въпрос по отношение на условно сходящите редове. Ще започнем нашите разглеждания с изучаването на едно конкретно разместване членовете на реда (1.54). За удобство да запишем реда (1.54) във вида

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}}+\cdots$$

В края на предната точка доказахме, че редът (1.54) е условно сходящ и има сума $\ln 2$. Сега да разместим членовете на реда (1.54) така, че след един положителен член да стоят два отрицателни члена. След такова разместване на членовете получаваме реда

$$(1.57)\qquad \underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\cdots$$

Ще докажем, че редът (1.57) е сходящ и има сума, два пъти по-малка от сумата на реда (1.54). Да означим с S_m и S'_m m-те частични суми съответно на редовете (1.54) и (1.57). Можем да пишем

$$S'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

И така

(1.58) $$S'_{3m}=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Очевидно имаме

(1.59) $$S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m},$$

(1.60) $$S'_{3m-2}=S'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}.$$

Понеже $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$, то след граничен преход при $m\to\infty$ в равенствата (1.58), (1.59) и (1.60) получаваме

$$\lim_{m\to\infty}S'_{3m}=\frac{1}{2}S,\ \lim_{m\to\infty}S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S,\ \lim_{m\to\infty}S'_{3m-2}=\frac{1}{2}S.$$

Оттук следва, че редът (1.57) е сходящ и има сума, равна на $\frac{1}{2}S$. Понеже $S=\ln 2\neq 0$, то е ясно, че $\frac{1}{2}S\neq S$. Следователно в резултат на направеното по-горе разместване на членовете на реда (1.54) сумата му се измени. Разгледаният конкретен пример показва, че условно сходящите редове не притежават свойството комутативност. Пълна яснота по въпроса за влиянието на разместването на членовете върху сумата на условно сходящ ред дава следното забележително твърдение, принадлежащо на Риман.

Теорема 1.10 (теорема на Риман). *Ако един ред е условно сходящ, то за всяко отнапред избрано число L съществува такова разместване на членовете на този ред, че новият ред да е сходящ и сумата му е равна на L.*

Доказателство. Нека

(1.61) $$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$$

е произволен условно сходящ ред. Да означим с $p_1, p_2, p_3, \ldots$ положителните членове на реда (1.61), написани по реда, по който те стоят в реда, а с $q_1, q_2, q_3, \ldots$ модулите на отрицателните членове на реда (1.61), записани в същия ред, по който те стоят в реда. Редът (1.61) съдържа безбройно много както положителни, така и отрицателни членове. Наистина, ако членовете с един и същ знак са краен брой, то условната сходимост няма да се повлияе от премахването на краен брой членове от началото на реда. Същевременно ще получим ред, състоящ се от членове с еднакъв знак, който е сходящ и значи абсолютно сходящ. И така с реда (1.61) са свързани два безкрайни реда с положителни членове $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Ще означаваме първия ред със символа P, а втория — със символа Q. Ще докажем, че двата реда са разходящи. Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.61), с P_n — сумата на всички положителни членове, влизащи в S_n, с Q_n — сумата от модулите на отрицателните членове, влизащи в S_n. Тогава очевидно $S_n=P_n-Q_n$ и понеже по условие редът (1.61) е сходящ и има някаква сума S, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=S. \tag{1.62}$$

От друга страна, понеже редът (1.61) не е абсолютно сходящ, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n+Q_n)=+\infty. \tag{1.63}$$

От (1.62) и (1.63) следва, че $\lim_{n\to\infty} P_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty} Q_n=+\infty$, т. е. двата реда P и Q са разходящи. От разходимостта на редовете P и Q следва, че даже след премахване на произволен краен брой членове на тези редове можем да изберем както от P, така и от Q такъв брой членове, че тяхната сума да надмине всяко отнапред избрано число. Опирайки се на този факт, ще докажем, че може така да се разместят членовете на изходния ред (1.61), че полученият ред да е сходящ и да има сума, равна на отнапред избрано число L. Ще получим търсения ред по следния начин. Най-напред да изберем от изходния ред (1.61) *точно толкова* положителни членове $p_1, p_2, \dots, p_{k_1}$ така, че сумата $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}$ да надхвърли L. След това да добавим към избраните вече членове *точно толкова* отрицателни членове $-q_1, -q_2, \dots, -q_{k_2}$ така, че общата сума $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}-q_1-q_2-\dots-q_{k_2}$ да стане по-малка от L. След това отново да добавим *точно толкова* положителни членове $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \dots, p_{k_3}$ така, че общата сума $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}-q_1-q_2-\dots-q_{k_2}+p_{k_1+1}+\dots+p_{k_3}$ да стане по-голяма от L. Продължавайки по същия начин по-нататък, ще получим един безкраен ред, в който ще влязат всички членове на изходния ред (1.61), тъй като всеки път ще трябва да добавяме поне един положителен или отрицателен член на изходния ред. Остава да се докаже, че полученият ред е сходящ и има сума L. Да отбележим, че в получения ред последователно има групи от положителни и отрицателни членове. Ако една частична сума на получения ред завършва с напълно завършена група, то отклонението на тази частична сума от числото L няма да надминава модула на последния неин член*. Ако частичната сума завършва на ненапълно завършена група, то отклонението на тази частична сума от числото L не надминава модула на последния член от предпоследната група. За да докажем сходимостта на реда към L, е достатъчно да се убедим в това, че модулите на последните членове на последователните групи образуват безкрайно малка редица. Това непосредствено следва от необходимото условие за сходимост на изходния ред (1.61). Теоремата на Риман е доказана.

Забележка. Аналогично може да се докаже, че ако един ред е условно сходящ, то неговите членове могат да бъдат разместени така, че редицата от частичните суми на преобразувания ред да бъде безкрайно голяма, като всички елементи на същата от някой номер нататък са положителни (съответно отрицателни).

3. Разместване членовете на абсолютно сходящ ред. В предишния пункт доказахме, че условно сходящите редове не притежават свойството комутативност. В този пункт ще докажем, че абсолютно сходящите редове притежават това свойство.

Теорема 1.11 (теорема на Коши). *Ако един ред е абсолютно сходящ, то всеки ред, получен от него чрез разместване на членовете му, е също абсолютно сходящ и има същата сума, както първоначалният ред.*

Доказателство. Нека редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.64}$$

е абсолютно сходящ и сумата му е равна на S. Нека освен това

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'. \tag{1.65}$$

е ред, получен от реда (1.64) чрез разместване на членовете му. Трябва да докажем: 1) че редът (1.65) е сходящ и има сума, равна на S, 2) че редът (1.65) е абсолютно сходящ. Да докажем най-напред 1). Достатъчно е да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че при $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - S \right| < \varepsilon. \tag{1.66}$$

Нека фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Понеже редът (1.64) е абсолютно

* Тъй като добавяме към дадената група нови членове точно дотогава, докато общата сума «не премине» през числото L.

сходящ и сумата му е равна на S, то за избраното ε съществува номер N_0 такъв, че са в сила неравенствата

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ — произволно естествено число}) \tag{1.67}$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}^{*}. \tag{1.68}$$

Сега да изберем номер N така, че всяка частична сума S_n' на реда (1.65) с номер n, надминаващ N, да съдържа първите N_0 членове на реда (1.64)**.

Ще оценим разликата, стояща в лявата страна на (1.66), и ще докажем, че при $n \geq N$ за тази разлика е в сила неравенство (1.66).

Наистина посочената разлика може да се представи във вида

$$\sum_{k=1}^{n} u_k' - S = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right). \tag{1.69}$$

Понеже модулът на сума от две числа не надминава сумата от модулите им, то от (1.69) следва, че

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - S\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right|. \tag{1.70}$$

От неравенствата (1.68) и (1.70) очевидно следва, че за доказателството на неравенство (1.66) е достатъчно да се докаже при $n \geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.71}$$

За доказателството на неравенството (1.71) отбелязваме, че при $n \geq N$ първата от сумите, стоящи в лявата страна на (1.71), съдържа всичките N_0 начални членове на реда (1.64). Следователно разликата

* Номерът N_0 в неравенствата (1.67) и (1.68) може да се вземе един и същ. Наистина, ако предварително напишем посочените неравенства с различни номера N_0, то след това можем да вземем по-големия от двата номера N_0.

** Такъв номер N може да бъде избран, тъй като редът (1.65) се получава от (1.64) чрез разместване на някои членове.

(1.72)
$$\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k$$

представлява сума на $(n-N_0)$ члена на реда (1.64) с номера, *ненадминаващи* N_0.

Ако изберем естественото число p толкова голямо, че номерът N_0+p да надминава номерата на всичките $(n-N_0)$ членове на току-що посочената сума, то за разликата (1.72) е вярно неравенството

(1.73)
$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|.$$

От неравенства (1.73) и (1.67) следва неравенство (1.71). С това е доказано неравенство (1.66), т. е. доказано е, че редът (1.65) е сходящ и има сума, равна на S. Остава да докажем твърдение 2) за това, че редът (1.65) е абсолютно сходящ. Доказателството на това твърдение следва от твърдение 1), ако го приложим към редовете

(1.74)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'|.$$

По този начин ще докажем сходимостта на втория ред от (1.74), т. е. ще докажем абсолютната сходимост на реда (1.65). Теорема 1.11 е напълно доказана.

§ 4. Критерии за сходимост на произволни редове

В § 2 получихме критерии за сходимост на редове с неотрицателни членове. В този параграф ще изучим критерии за сходимост на редове, чиито членове имат произволен знак. И така нека

(1.75)
$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

е ред, чиито членове имат произволен знак. Преди всичко ще отбележим, че за да изследваме абсолютната сходимост на този ред, т. е. за да изследваме сходимостта на реда с положителни членове

(1.76)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|,$$

можем да приложим всеки от критериите от § 2 (критериите на Даламбер, Коши, Раабе и интегралния критерий). Но нито един от посочените критерии не може да се приложи за изясняването на по-тънкия въпрос за условната сходимост на реда (1.75)*.

По-долу ще се заемем с намирането на по-тънки критерии, позволяващи да се докаже сходимостта на реда (1.75) и в тези случаи, когато редът не е абсолютно сходящ.

Ще започнем нашите разглеждания с извода на едно важно тъждество, което представлява основен инструмент за доказателството на формулираните по-долу критерии.

Нека $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ са две произволни редици, $S_k=u_1+u_2+\dots+u_k$, n и p са два произволни номера. Тогава вярно е следното тъждество:

$$(1.77)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1})+S_{n+p}\cdot v_{n+p}-S_n v_{n+1},$$

което се нарича ***преобразование на Абел.***

Понеже за всяко $k\geq 2$ е вярно равенството $u_k=S_k-S_{k-1}$, то лявата страна на (1.77) може да се представи във вида

$$(1.78)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k\cdot v_k-\sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}\cdot v_k.$$

В последната сума в дясната страна на (1.78) да сменим индекса на сумиране k с $k-1$. Получаваме

* Да отбележим, че критериите на Даламбер и Коши могат да се прилагат за доказателство на **разходимостта** на реда (1.75), чиито членове имат произволни знаци. Наистина във всеки случай, когато критерият на Даламбер или Коши констатира разходимостта на реда от модулите $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$, k-тият член на реда (1.76) $|u_k|$ не клони към нула при $k\to\infty$, т. е. редът (1.75) е разходящ. Като пример ще докажем, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} k!\left(\frac{x}{k}\right)^k$ е разходящ при всяко фиксирано x, удовлетворяващо неравенството $|x|>e$. Нека подчертаем, че непосредствената проверка на факта, че k-тият член на разглеждания ред клони към нула при $k\to\infty$, е затруднително. Ще приложим критерия на Даламбер към разглеждания ред. Като означим с a_k k-тия член на този ред, ще имаме $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$, откъдето $\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|x|}{e}>1$. Разходимостта на реда е доказана.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k \cdot v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + $$
$$+ S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}.$$

С това тъждеството на Абел е доказано.

Определение. *Редицата $\{v_k\}$ се нарича* редица с ограничена вариация, *ако е сходящ редът*

(1.79) $$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|.$$

Очевидно *всяка редица с ограничена вариация е сходяща.* Наистина от сходимостта на реда от модулите (1.79) следва сходимостта на реда без модулите

(1.80) $$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1} - v_k].$$

Като означим с S сумата на реда (1.80), а с S_n — n-тата частична сума на този ред и като отчетем, че $S_n = v_{n+1} - v_1$, получаваме, че $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1}$ съществува и е равна на $S + v_1$. Това означава, че редицата $\{v_k\}$ е сходяща и има граница $S + v_1$.

Теорема 1.12 (първи критерий на Абел). *Ако редицата от частичните суми на реда*

(1.81) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

е ограничена, а $\{v_k\}$ е редица с ограничена вариация, която клони към нула, то редът

(1.82) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$$

е сходящ.

Доказателство. По условие съществува число $M > 0$ такова, че редицата от частичните суми $\{S_n\}$ на реда (1.81) удовлетворява условието $|S_n| \leq M$.

Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и заедно с него номер N такъв, че при $n \geq N$ и за произволно естествено p са в сила неравенствата

(1.83) $$|v_n| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}-v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{1.84}$$

(Тук ние използувахме, че редицата $\{v_k\}$ клони към нула и че редът (1.79) е сходящ.)

От тъждеството на Абел (1.77) и от факта, че модулът на сума от три числа не надминава сумата от техните модули, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1})\right| + |S_{n+p}|\,|v_{n+p}| + |S_n|\,|v_{n+1}|.$$

Като вземем под внимание, че за всеки номер n е в сила неравенството $|S_n| \le M$, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le M\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}-v_k| + M\,|v_{n+p}| + M\,.\,|v_{n+1}|.$$

Като съпоставим последното неравенство с (1.83) и (1.84), получаваме, че при $n \ge N$ и за произволно естествено p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon, \tag{1.85}$$

а това означава, че редът (1.82) е сходящ (по критерия на Коши).

Теорема 1.12 е доказана.

Теорема 1.13 (втори критерий на Абел). *Ако редът* (1.18) *е сходящ, а* $\{v_k\}$ *е произволна редица с ограничена вариация, то редът* (1.82) *е сходящ.*

Доказателство. Тъй като сходящият ред (1.81) има сходяща, а значи и ограничена редица от частични суми $\{S_n\}$, то съществува константа $M>0$ такава, че $|S_n| \le M$ за всички номера n.

Да означим с S сумата на реда (1.81), а с v границата на редицата $\{v_k\}$. Тогава можем да твърдим, че всяка от редиците $\{S_n\,.\,v_n\}$ и $\{S_n v_{n+1}\}$ клони към $S\,.\,v$ при $n \to \infty$ и следователно всяка от редиците

$$\{S_n v_n - Sv\} \quad \text{и} \quad \{S_n v_{n+1} - Sv\} \tag{1.86}$$

е безкрайно малка.

Отчитайки това и сходимостта на реда (1.79) и фиксирайки произволно $\varepsilon>0$, можем да намерим номер N такъв, че за всяко $n \ge N$ и за произволно естествено p да имаме

$$|S_n v_n - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S_n v_{n+1} - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}-v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{1.87}$$

Неравенствата (1.87), оценката $|S_n|\leq M$ и тъждеството на Абел (1.77), което можем да запишем във вида

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1})+[S_{n+p}v_{n+p}-Sv]+[S\cdot v-S_n v_{n+1}],$$

ни позволяват да твърдим, че е в сила неравенство (1.85) (при всички $n\geq N$ и за произволно естествено p). Съгласно критерия на Коши теорема 1.13 е доказана.

Следствие 1 от теорема 1.12 (критерий на Дирихле—Абел). *Ако редицата от частичните суми на реда (1.81) е ограничена, а редицата $\{v_k\}$ нерастяща и клони към нула, то редът (1.82) е сходящ.*

Достатъчно е да се забележи, че нерастящата редица $\{v_k\}$, която клони към нула, има ограничена вариация, понеже n-тата частична сума S_n на реда (1.79) е равна на v_1-v_{n+1} и има граница, равна на v_1.

За да формулираме още едно следствие от теорема 1.12, ще въведем понятието ред на Лайбниц.

Ще казваме, че един ред е с алтернативно сменящи се знаци, ако всички членове на реда с нечетни номера са положителни, а всички членове с четни номера — отрицателни.

Ще казваме, че един ред е ред на Лайбниц, ако той е с алтернативно сменящи се знаци и модулите на членовете му образуват нерастяща и сходяща към нула редица.

Следствие 2 от теорема 1.12 (критерий на Лайбниц). *Ако всеки ред е ред на Лайбниц, то той е сходящ.*

Наистина всеки ред на Лайбниц може да се запише във вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot v_k=v_1-v_2+v_3-v_4+\cdots, \tag{1.88}$$

където $\{v_k\}$ е нерастяща и клоняща към нула редица (всички $v_k>0$).

Горният ред е частен случай на реда (1.82) при $u_k=(-1)^{k-1}$, като редът (1.81) е с ограничена редица от частичните суми*. Следователно критерият на Лайбниц следва непосредствено от доказания вече критерий на Дирихле—Абел (следствие 1 от теорема 1.12).

Забележка. Лесно се вижда, че за произволен ред на Лайбниц (1.88) редицата $\{S_{2n}\}$ от частичните суми с четни номера е ненамаляваща, а редицата $\{S_{2n-1}\}$ от частичните суми с нечетни номера е нерастяща. Оттук и от забележка 3 към теорема 3.15 от

* Редицата от частичните суми на реда (1.81) с членове $u_k=(-1)^{k-1}$ ще има вида 1, 0, 1, 0, . . .

част 1 следва, че сумата S на реда на Лайбниц (1.88) за всеки номер n удовлетворява неравенствата

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1},$$

и понеже $S_{2n-1}-S_{2n}=v_{2n}$, то всяка от сумите S_{2n} и S_{2n-1} се отличава от S с не повече от v_{2n}. Оттук и от факта, че $v_{2n-1} \geq v_{2n}$, следва, че за произволен номер n е в сила оценката

$$|S_n-S| \leq v_n.$$

Тази оценка играе важна роля при приближеното пресмятане на сумите на редовете на Лайбниц с помощта на техните частични суми.

Ще дадем примери за използуване на доказаните критерии.

1°. По-горе чрез формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ ние доказахме сходимостта на реда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\dots$

Да отбележим, че сходимостта на този ред следва непосредствено от критерия на Лайбниц.

2°. Ще изучим въпроса за сходимостта на реда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\dots+\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}+\dots$$

Този ред е ред от вида (1.82) при $v_k=\frac{1}{k}$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=-2$, $u_4=1$, $u_5=1$, $u_6=-2, \dots$

Вижда се, че редицата от частичните суми на реда (1.81) с такива u_k има вида 1, 2, 0, 1, 2, 0, ..., т.е. същата е ограничена.

Тъй като редицата $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ е нерастяща и клони към нула, то разглежданият ред е сходящ по критерия на Дирихле—Абел.

3°. Да изясним въпроса за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$, където x е някое фиксирано реално число. Като използуваме означенията на теорема 1.13, да положим $u_k=\cos kx$, $v_k=\frac{1}{k}$. Да оценим редицата от частичните суми $\{S_n\}$ на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Понеже за всеки номер k имаме

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx,$$

то като сумираме тези равенства по k от 1 до n, ще получим

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2S_n\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

Оттук

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следователно за всяко x, което *не е кратно на* 2π, редицата от частичните суми $\{S_n\}$ е ограничена:

$$|S_n|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Съгласно теорема 1.13 *разглежданият ред е сходящ за всяко x, което не е кратно на* 2π. Ако x е кратно на 2π, то разглежданият ред се превръща в хармоничния ред и, както беше доказано по-преди, е разходящ.

§ 5. Аритметични действия със сходящи редове

В този параграф ще разгледаме въпроса за почленно събиране и за умножение на сходящи редове.

Теорема 1.14. *Ако редовете $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ са сходящи и имат суми съответно равни на U и V, то редът $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$ е също сходящ и има сума, равна на $U\pm V$.*

Доказателство. Да означим с S_n, U_n и V_n n-тите частични суми съответно на редовете $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$. Тогава очевидно $S_n=U_n\pm V_n$. Тъй като $\lim_{n\to\infty}U_n=U$, $\lim_{n\to\infty}V_n=V$, то съгласно теореми 3.9 и 3.10 от глава 3, част I съществува границата $\lim_{n\to\infty}S_n=U\pm V$. Теоремата е доказана.

И така можем почленно да събираме и изваждаме сходящи редове.

Преминаваме към въпроса за почленно умножаване на редове.

Теорема 1.15. *Ако двата реда* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum_{l=1}^{\infty} v_l$ *са абсолютно сходящи и имат суми, съответно равни на* U *и* V, *то редът, съставен от всички произведения от вида* $u_k.v_l$ $(k=1, 2, \ldots; l=1, 2, \ldots)$, *номерирани в произволен ред, също е абсолютно сходящ и сумата му е равна на* $U.V$.

Доказателство. Да означим с $w_1, w_2, w_3, \ldots$ произведенията от вида $u_k v_l$ $(k=1, 2, \ldots; l=1, 2, \ldots)$, номерирани в произволен ред. Ще докажем, че редът $\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|$ е сходящ. Нека S_n е n-тата частична сума на този ред. Сумата S_n се състои от членове от вида $|u_k v_l|$. Измежду индексите k и l на членовете, влизащи в S_n, съществува най-голям индекс, който да означим с m. Тогава очевидно

$$S_n \leq (|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|). \tag{1.89}$$

В дясната страна на неравенството (1.89) стои произведението на m-тите частични суми на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$. По предположение тези редове са сходящи и следователно всички техни частични суми (значи и всички произведения от частични суми) са ограничени. Следователно ограничена е и редицата от частичните суми $\{S_n\}$. Оттук следва сходимостта на реда $\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|$, т. е. абсолютната сходимост на реда $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$.

Остава да се докаже, че последният ред има сума S, равна на $U.V$. Понеже този ред е абсолютно сходящ, то съгласно теорема 1.11 неговата сума S не зависи от реда, по който ние го сумираме. Произволна редица (а значи и подредица*) от частични суми на този ред клони към S. Но в такъв случай сумата S на реда $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$ е сигурно равна на $U.V$, тъй като именно към това число клони подредицата W_m от частични суми на този ред от вида $W_m=(u_1+u_2+\cdots+u_m)(v_1+v_2+\cdots+v_m)$. Теоремата е доказана.

* Вж. твърдение 1° от т. 1, § 3, глава 3, част I.

Произведението на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ за много цели е удобно да се записва във вида

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right)=$$

$$=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_k+u_2v_{k-1}+\cdots+u_kv_1)+\cdots$$

Мертенс е доказал следното твърдение: *всеки ред, който е получен при умножението на два реда по посочения начин, е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на тези два реда, при условие че единият от умножените редове е абсолютно сходящ, а другият е сходящ.*

Нека например редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е абсолютно сходящ, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ е сходящ. Да означим с U_n и V_n n-ти частични суми съответно на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, а съответно с U и V — техните суми. Да положим $w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1$, $W_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$. Достатъчно е да докажем, че $\lim_{n\to\infty} W_n=U.V$. Елементарно се проверява, че $W_n=u_1V_n+u_2V_{n-1}+\cdots+u_nV_1$.

От сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ следва, че неговият остатък $\alpha_n=V-V_n$ е безкрайно малка, а значи и ограничена редица, т. е. съществува константа M такава, че $|\alpha_n|\leq M$ за всички номера n. Вижда се, че

$$W_n=u_1(V-\alpha_n)+u_2(V-\alpha_{n-1})+\cdots+u_n(V-\alpha_1)=U_n.V-\beta_n,$$

където

$$\beta_n=u_1\alpha_n+u_2\alpha_{n-1}+\cdots+u_n\alpha_1.$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty} U_n=U$, то за нашата цел е достатъчно да докажем, че $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица. Понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е абсолютно сходящ, то за произволно $\varepsilon>0$ съществува номер m такъв, че $\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Освен това по същата причина съществува константа M_1 такава, че $\sum_{k=1}^{n} |u_k| \leq M_1$ за всеки номер n.

Сега да представим β_n във вида

$$\beta_n = [u_1\alpha_n + \ldots + u_m \cdot \alpha_{n+1-m}] + [u_{m+1} \cdot \alpha_{n-m} + \cdots + u_n \cdot \alpha_1]$$

и да изберем в зависимост от m номер n_1 толкова голям, че $|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$ при $k > n_1 - m$ (това може да се направи, тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка). Следните четири неравенства

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leq M_1; \quad |\alpha_n| \leq M \quad \text{и} \quad |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \quad (\text{при } k > n_1 - m)$$

ни позволяват да се убедим, че при $n \geq n_1$ всеки израз в средните скоби [в представянето на β_n по модул не надминава $\frac{\varepsilon}{2}$. Оттук следва, че $|\beta_n| < \varepsilon$ при $n \geq n_1$ и понеже ε е произволно положително число, то формулираното твърдение е доказано.

Забележка. В случай че двата реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ са само условно сходящи, то тяхното почленно умножение даже по указания по-горе специален начин дава в общия случай разходящ ред.

Например, ако редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ съвпадат с условно сходящия по критерия на Лайбниц ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, то за такива редове определената по-горе величина w има вида

$$w_n = (-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1}}\right\}.$$

Тъй като в средните скоби има n положителни събираеми, всяко от които е не по-малко от числото $\frac{1}{n}$, то $|w_n| \geq 1$, а това показва, че е нарушено необходимото условие за сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ — n-тият член на реда да клони към нула.

§ 6. Безкрайни произведения

1. Основни понятия. С понятието числов ред е тясно свързано понятието *безкрайно числово произведение.* Нека е дадена една безкрайна числова редица $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ Написаният формално израз

$$v_1 \,.\, v_2 \,.\, v_3 \ldots v_k \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \tag{1.90}$$

се нарича безкрайно произведение. Отделните елементи v_k се наричат членове на даденото произведение. Произведението на първите n члена на даденото произведение се нарича n-то частично произведение и се означава със символа

$$P_n = v_1 \,.\, v_2 \,.\, \ldots \,.\, v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Безкрайното произведение (1.90) се нарича сходящо, ако редицата от частичните произведения P_n има крайна граница P, различна от нула*. Ако безкрайното произведение (1.90) е сходящо, посочената граница P се нарича стойност на това безкрайно произведение, т. е. пише се

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Да подчертаем, че последното равенство има смисъл само за сходящи безкрайни произведения. Ясно е, че разглеждането на безкрайните произведения е по същество форма на изучаване на числовите редици, тъй като на всяко безкрайно произведение се съпоставя еднозначно редицата от частичните му произведения и на всяка числова редица $\{P_k\}$, всички членове на която са различни от нула, се съпоставя еднозначно безкрайно произведение, за което тази редица е редицата от частичните произведения (достатъчно е членовете на безкрайното произведение да се положат равни на $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$ при $k>1$ и $v_1 = P_1$).

Теорема 1.16. *Необходимо условие за сходимостта на безкрайното произведение (1.90) е k-тият член на това произведение да клони към единица при $k \to \infty$.*

* При $P=0$ безкрайното произведение е прието да се счита разходящо. Както ще видим по-долу, това позволява да се направи ясна аналогия между сходимостта на редовете и безкрайните произведения.

Доказателство. Нека безкрайното произведение (1.90) е сходящо и има стойност P, различна от нула. Тогава имаме $\lim_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$. Понеже $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$, то $\lim_{k\to\infty} v_k$ съществува и е равна на единица.

Да отбележим, че сходимостта на едно безкрайно произведение не се влияе от отстраняването на произволен краен брой членове на произведението (естествено, ако сред тези членове няма равни на нула). Понеже безкрайно произведение, в което поне един член е равен на нула, съгласно приетото по-горе определение е разходящо, то по-нататък ние изобщо не разглеждаме безкрайни произведения, в които, макар и един член е равен на нула.

Примери за безкрайни произведения

1.

$$(1.91) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots$$

(x—произволно фиксирано число).

Ще докажем, че безкрайното произведение (1.91) е сходящо за всяко $x \neq \pi . n$ и има стойност $\frac{\sin x}{x}$. Да пресметнем n-тото частично произведение

$$(1.92) \qquad P_n = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Като умножим двете страни на (1.92) със $\sin\frac{x}{2^n}$ и използваме последователно формулата за синус от двоен ъгъл $\sin 2y = 2\sin y\cos y$, получаваме

$$P_n \cdot \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x.$$

От последната формула* намираме

$$P_n = \frac{\sin x}{x}\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right).$$

Понеже изразът в големите скоби клони към единица при $n\to\infty$, то

* Считаме, че $x \neq 0$. Ако $x = 0$, то всички членове на (1.91) и неговата стойност са равни на единица.

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ съществува и е равна на $\frac{\sin x}{x}$. Следователно доказано е, че безкрайното произведение (1.91) е сходящо и има стойност $\frac{\sin x}{x}$ за всяко $x \neq \pi . n$.

2.

$$(1.93) \qquad 2. \prod_{k=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right]=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\cdots$$

Ще докажем, че безкрайното произведение (1.93) е сходящо и има стойност $\frac{1}{3}$. Да пресметнем частичното произведение P_n:

$$P_n=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{(n-1)}{n}}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{(n+2)}{(n+1)}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Оттук следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$ съществува и е равна на $\frac{1}{3}$.

2. Връзка между сходимостта на безкрайни произведения и на редове. Ако безкрайното произведение (1.90) е сходящо, то съгласно теорема 1.16 $\lim\limits_{k\to\infty} v_k=1$ и следователно всички негови членове v_i от някой номер k_0 нататък са положителни. Понеже краен брой начални членове изобщо не влияят на сходимостта на безкрайното произведение, то при изучаването на въпроса за сходимостта на безкрайните произведения без ограничение на общността можем да разглеждаме само безкрайни произведения с положителни членове.

Теорема 1.17. *За да бъде безкрайното произведение* (1.90) *с положителни членове сходящо, е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът*

$$(1.94) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k.$$

В случай на сходимост сумата S на реда (1.94) и стойността P на произведението (1.90) са свързани с равенството

$$(1.95) \qquad P=e^S.$$

Доказателство. Да означим с P_n n-тото частично произведение на безкрайното произведение (1.90), а с S_n — n-тата частична сума на реда (1.94). Имаме

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

От непрекъснатостта на показателната и логаритмичната функция следва, че редицата P_n е сходяща тогава и само тогава, когато е сходяща редицата S_n. При това, ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$. Теоремата е доказана.

При изследването на сходимостта на едно безкрайно произведение е удобно това произведение да се представи във вида

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots \tag{1.96}$$

При това съгласно възприетото по-горе предположение считаме, че $u_k > -1$.

Теорема 1.17 твърди, че въпросът за сходимостта на произведението (1.96) е еквивалентен на въпроса за сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k). \tag{1.97}$$

Сега можем да докажем още едно твърдение.

Теорема 1.18. *Ако всички u_k (или поне от някой номер k_0 нататък) имат един и същ знак, то за сходимостта на безкрайното произведение* (1.96) *е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.98}$$

Доказателство. Понеже условието $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ е необходимо и за сходимостта на реда (1.98), и за сходимостта на произведението (1.96), ще считаме, че това условие е изпълнено както при доказателството на необходимостта, така и при доказателството на достатъчността. Но от посоченото условие и от асимптотичното равенство*

$$\ln(1+y) = y + o(y)$$

следва, че

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1 \tag{1.99}$$

и

* Вж. т. 6, § 10, глава 5, част I.

$$(1.100)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{\ln(1+u_k)}=1.$$

Понеже по условие от известен номер k_0 нататък всички членове имат един и същ знак, то от условията (1.99) и (1.100) и от теоремата за сравнение 1.3 следва, че редът (1.98) е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът (1.97). Теоремата е доказана.

Примери. 1) От разходимостта на хармоничния ред и от теорема 1.18 следва разходимостта на следните безкрайни произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdot$$

Вижда се, че първото произведение е разходящо към $+\infty$, а второто — към нула.

2) От същата теорема 1.18 и от сходимостта на реда (1.33) при $\alpha>1$ следва сходимостта при $\alpha>1$ на следните безкрайни произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)=\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\cdots$$

Както и при редовете за безкрайните произведения се въвеждат понятията абсолютна и условна сходимост. Безкрайното произведение (1.96) се нарича абсолютно сходящо тогава и само тогава, когато е абсолютно сходящ редът (1.97). Теоремите на Коши 1.11 и Риман 1.10 позволяват да се заключи, че абсолютно сходящите произведения притежават свойството комутативност, докато в същото време условно сходящите произведения не притежават това свойство.

Доказателството на следното твърдение оставяме на читателя.

Теорема 1.19. *Безкрайното произведение (1.96) е абсолютно сходящо тогава и само тогава, когато е абсолютно сходящ редът (1.98).*

Упътване. За доказателството на тази теорема е достатъчно да се докаже, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1+u_k)|$. Това следва лесно от съществуването на границите (1.99) и (1.100).

Накрая ще разгледаме още няколко примера.

1°. Да разгледаме безкрайното произведение

$$x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\cdots \tag{1.101}$$

Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ е сходящ, като използуваме теорема 13.19, заключаваме, че безкрайното произведение (1.101) е абсолютно сходящо за фиксирано x, различно от $l\pi$ (където $l=0, \pm 1, \ldots$). В т. 3 ще докажем, че това произведение има стойност $\sin x$. По такъв начин ще получим разлагането на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.102}$$

2°. От разлагането (1.102) и от съотношението $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$ се получава непосредствено следното разлагане:

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right). \tag{1.103}$$

Абсолютната сходимост на произведението в дясната страна на (1.103) за всяко x, различно от $\frac{\pi}{2}(2l-1)$ $(l=0, \pm 1, \ldots)$, следва от теорема 1.19 и от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

3°. Като положим в разлагането (1.102) $x=\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}. \tag{1.104}$$

От (1.104) получаваме така наречената **формула на Валис***

* Джон Валис — английски математик (1616—1703)

$$(1.105)\qquad \frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2k}{(2k-1)}\cdot\frac{2k}{(2k+1)}\cdots$$

С прости преобразувания формулата на Валис може да се приведе във вида

$$(1.106)\qquad \frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2.$$

Първоначално формулата на Валис е била използувана за приближено пресмятане на числото π. Понастоящем за пресмятането на π съществуват по-ефикасни методи. Формулата на Валис (1.105) и (1.106) представлява интерес за редица теоретични изследвания*.

3. Разлагане на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение. За удобство ще разделим извода на формула (1.102) на няколко части.

1°. Нека m е произволно положително нечетно число: $m=2n+1$. Преди всичко ще докажем, че за всяка различна от $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \ldots$) стойност на θ** е в сила следното равенство:

$$(1.107)\qquad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right),\quad n=\frac{m-1}{2}$$

За да докажем равенство (1.107), ще използуваме формулата на Муавър***

$$\cos m\theta+i\sin m\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^m.$$

Като представим дясната страна на това равенство по формулата на Нютон и сравним имагинерните части, получаваме

$$\sin m\theta=m\cos^{m-1}\theta\,.\,\sin\theta-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\theta\,.\,\sin^3\theta+\ldots$$

Отчитайки, че $m=2n+1$, намираме

$$(1.108)\qquad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\cos^{2n}\theta-\frac{(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta+\ldots$$

В дясната страна на (1.108) всички степенни показатели на коси-

* В частност тя може да бъде използувана за доказателството на така наречената формула на Стирлинг (вж. § 6, глава 7). Джеймс Стирлинг — английски математик (1692—1770).

** В бъдеще ще разглеждаме само стойности на θ, за които $0<|\theta|<\pi$.

*** Тази формула се получава от определението за произведение на две комплексни числа $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$, (вж. т. I, § 3, гл. 8, част I). Наистина по индукция лесно се доказва чрез това определение, че $(\cos\theta, \sin\theta)^n=(\cos n\theta, \sin n\theta)$.

нусите и синусите са четни. Следователно, ако заменим $\cos^2\theta$ с $1-\sin^2\theta$, то в дясната страна на (1.108) ще се получи *полином от n-та степен* по отношение на $\sin^2\theta$. Полагайки $z=\sin^2\theta$, да означим този полином с $F(z)$, а неговите корени с $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тъй като $z=\sin^2\theta\to 0$ при $\theta\to 0$ и лявата страна на (1.108) клони към единица при $\theta\to 0$, то полиномът $F(z)$ може да се представи във вида

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=F(z)=\left(1-\frac{z}{x_1}\right)\left(1-\frac{z}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{x_n}\right).$$

Остана да намерим корените $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Като забележим, че тези корени съответствуват на нулите на функцията $\sin m\theta$, получаваме

$$x_1=\sin^2\frac{\pi}{m},\quad x_2=\sin^2\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ x_n=\sin^2\frac{n\pi}{m}.$$

И така равенство (1.107) е доказано.

2°. Като положим в (1.107) $\theta=\frac{x}{m}$ и считайки, че $0<|x|<\pi m$, получаваме

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{1.109}$$

Фиксираме произволно (различно от нула) x и избираме произволни естествени числа p и n такива, че $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$. Тогава равенство (1.109) може да се запише във вида

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)\cdot R_p(x), \tag{1.110}$$

където

$$R_p(x)=\prod_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{1.111}$$

Най-напред ще оценим $R_p(x)$. Понеже $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$, то аргументите на всички синуси, намиращи се в равенство (1.111), принадлежат на интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Освен това ясно е, че за

всички k, участвуващи в това равенство, имаме $|x|<\frac{k\pi}{2}$ и следователно

$$0<\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{k\pi}{2m}}<\frac{1}{2}$$

$\left(\text{имаме } \frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \frac{k\pi}{2m}<\frac{\pi}{4} \text{ и затова } \cos^2\frac{k\pi}{2m}>\frac{1}{2}\right)$. Тъй като за всяко β от интервала $0<\beta<\frac{1}{2}$ са в сила неравенствата $1>1-\beta>$ $>e^{-2\beta}$*, то за всички номера k, които надминават p, имаме

$$(1.112)\qquad 1>1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}>e^{-2\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}.$$

Като умножим почленно неравенствата (1.112), записани при $k=p+1,\ p+2,\dots,n$, получаваме следната оценка:

$$(1.113)\qquad 1>R_p(x)>e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}.$$

Знаем, че $\frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}$ и че за всяко β, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, имаме $1>\frac{\sin\beta}{\beta}>\frac{2}{\pi}$ **, поради което

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2}=\frac{m^2}{4k^2}<\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right).$$

Следователно

$$e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}>e^{-\frac{m^2}{2}\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}\geq e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

* Лявото от тези неравенства следва елементарно от формулата на Маклорен: $e^{-2\beta}=1-2\beta+\frac{(2\beta)^2}{2}-\dots<1-2\beta+2\beta^2<1-\beta$, тъй като $2\beta^2<\beta$.

** Тези неравенства следват от факта, че частното $\frac{\sin\beta}{\beta}$ намалява от 1 до $\frac{2}{\pi}$, когато β се мени от 0 до $\frac{\pi}{2}$. От своя страна функцията $\frac{\sin\beta}{\beta}$ намалява, тъй като $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)'=\frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta-\operatorname{tg}\beta)<0$ при $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Последното неравенство позволява да се усили оценка (1.113) по следния начин:

$$1 > R_p(x) > e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}. \tag{1.114}$$

3°. Сега да оставим в равенство (1.110) m да клони към безкрайност при фиксирани стойности на x и номера p. Тъй като $\lim\limits_{m\to\infty} m \cdot \sin\frac{x}{m} = x$, $\lim\limits_{m\to\infty} m^2 \sin^2\frac{k\pi}{m} = (k\pi)^2$, то лявата страна на (1.110) клони към $\frac{\sin x}{x}$, а крайното произведение $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$ клони към $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. По-нататък ще считаме, че последната граница е различна от нула, тъй като, ако тя е равна на нула, то $\sin x = 0$ и разлагането (1.102) е доказано. Но тогава съществува границата $\lim\limits_{m\to\infty} R_p(x)$. Да означим тази граница с $\bar{R}_p(x)$. От неравенствата (1.114), които са в сила за всеки номер m, и от теорема 3.13 от глава 3, част I следва, че

$$1 \geq \bar{R}_p(x) \geq e^{-\frac{x^2}{2p}}. \tag{1.115}$$

От равенство (1.110) при $m \to \infty$ получаваме

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\bar{R}_p(x). \tag{1.116}$$

4°. Да фиксираме x и да оставим номерът p да клони към безкрайност в равенство (1.116). Лявата страна на (1.116) не зависи от p, а границата $\lim\limits_{p\to\infty} \bar{R}_p(x)$ съществува (вземаме под внимание неравенство (1.115) и теорема 3.14 от глава 3) и е равна на единица. Следователно съществува и границата

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

Следователно разлагането (1.102) за $\sin x$ е доказано.

Забележка. Напълно аналогично на разлагането (1.102) за $\sin x$ и (1.103) за $\cos x$ могат да се получат разлагания в безкрайни произведения за хиперболичните функции

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Да отбележим, че от разлаганията на $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ непосредствено се получават разлагания в безкрайни произведения за функциите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$.

§ 7. Обобщени методи за сумиране на разходящи редове

В глава 1 определихме сума на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots \tag{1.117}$$

като границата S на редицата $\{S_n\}$ от частичните суми на този ред (при условие че тази редица е сходяща).

В много задачи от математическия анализ от теоретичен и практически интерес се налага да се използват редове, чиито редици от частични суми не са сходящи и значи сумите на тези редове не съществуват в обичайния смисъл. Естествено възниква въпросът за обобщаване на понятието сума на ред и за сумиране на разходящи в обичайния смисъл редове.

В този параграф ще се спрем на някои обобщени методи за сумиране на разходящи редове.

Най-напред ще дадем обща характеристика на методите за сумиране, с които ще се занимаем. Разумно е да поискаме обобщеното понятие за сума да включва в себе си обичайното понятие за сума на ред. По-точно ред, сходящ в обичайния смисъл със сума S, трябва да има и обобщена сума, при това равна на S. Метод за сумиране, който притежава посоченото свойство, се нарича **регулярен**.

Естествено е да се подчини понятието обобщена сума на условието: ако редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ има обобщена сума U, а редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ има обобщена сума V, то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (Au_k+Bv_k)$, където A и B са произволни константи, да има обобщена сума $AU+BV$. Метод за сумиране, който удовлетворява посоченото свойство, се нарича **линеен**.

В анализа и в неговите приложения обикновено се използуват регулярни линейни методи за сумиране. Ще разгледаме два метода за сумиране, които представляват особен интерес за приложенията.

1. Метод на Чезаро* (или метод на средноаритметичните). Казваме, че редът (1.117) е *сумируем по метода на Чезаро*, ако е сходяща редицата от средноаритметичните на частичните суми на този ред, т. е. съществува границата

(1.118)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1+S_2+\dots+S_n}{n}.$$

При това границата (1.118) се нарича *обобщена сума на реда* (1.117) *в смисъл на Чезаро*.

Методът на Чезаро е очевидно линеен метод за сумиране. Регулярността на метода на Чезаро следва от лема 1, доказана в края на т. 3, § 2. Наистина от посочената лема следва, че ако редицата $\{S_n\}$ от частичните суми на реда (1.117) клони към S, то границата (1.118) съществува и е равна на S.

Ще дадем примери на редове, които не са сходящи в обичайния смисъл, но са сумируеми по метода на Чезаро.

1. Да разгледаме очевидно разходящия ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\dots$$

Понеже всички *четни* частични суми S_{2n} на този ред са равни на нула, а всички нечетни частични суми S_{2n-1} са равни на единица, то границата (1.118) съществува и е равна на $\frac{1}{2}$. Следователно разглежданият ред е сумируем по метода на Чезаро и неговата сума в смисъл на Чезаро е равна на $\frac{1}{2}$.

2. Нека x е произволно фиксирано реално число от интервала $(0, 2\pi)$. Да разгледаме разходящия ред**

(1.119)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$$

Вече пресметнахме частичната сума S_n на този ред в точка 2 в края на § 2. Имаме

* Ернесто Чезаро — италиански математик (1859—1906).

** Разходимостта на реда (1.119) следва непосредствено от дадения по-долу израз за неговата частична сума.

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Да пресметнем средното аритметично на частичните суми:

$$\frac{S_1+S_2+\dots+S_n}{n} = \frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\sum_{m=1}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{m=1}^{n}\left[\cos mx - \cos(m+1)x\right] - \frac{1}{2} = \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Оттук очевидно следва, че

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\dots+S_n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Следователно редът (1.119) е сумируем по метода на Чезаро и сумата му в смисъл на Чезаро е равна на $-\frac{1}{2}$.

2. Метод за сумиране на Поасон* — Абел. Този метод за сумиране се състои в следното. По зададения ред (1.117) съставяме степенния ред

$$(1.120)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots + u_k x^{k-1} + \dots$$

Ако този степенен ред е сходящ за всяко x от интервала $(0,1)$ и ако сумата му $S(x)$ има лява граница $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x)$ в точката $x=1$, то тогава ще казваме, че редът (1.117) е сумируем по метода на Поасон — Абел. При това посочената граница ще наричаме сума на реда (1.117) в смисъл на Поасон — Абел.

Линейността на метода на Поасон — Абел е очевидна. Ще докажем регулярността на този метод. Нека редът (1.117) е сходящ в обичайния смисъл и сумата му е равна на S. Трябва да се докаже:

1) че редът (1.120) е сходящ за всяко x от интервала $(0,1)$,

2) че сумата $S(x)$ на реда (1.120) има в точката $x=1$ лява граница, равна на S.

Най-напред ще докажем твърдение 1). Тъй като редът (1.117) е сходящ, то редицата от членовете му е безкрайно малка и сле-

* Симон Дени Поасон — френски математик (1781—1840).

дователно е ограничена, т.е. съществува число M такова, че за всички номера k е в сила

(1.121) $$|u_k|\leq M.$$

Използуваме неравенство (1.121), за да оценим модула на k-тия член на реда (1.120), като считаме, че x е произволно число от интервала (0,1). Получаваме

$$|u_k x^{k-1}|\leq M|x|^{k-1}.$$

Тъй като $|x|<1$, то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ е сходящ. Като използуваме забележка 2 към теоремата за сравнение 1.3, заключаваме, че е сходящ и редът (1.120).

Сега да докажем твърдение 2). Нека S_n е n-та частична сума на реда (1.117), а S е неговата обичайна сума. Чрез преобразуването на Абел* се убеждаваме, че за всяко x от интервала (0,1) е в сила тъждеството

(1.122) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}.$$

Да извадим почленно (1.122) от следното очевидно равенство:

$$S=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}.$$

Като означим с r_k k-тия остатък на реда (1.117), ще имаме

$$S-\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

или

(1.123) $$S-S(x)=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}.$$

Нашата цел е да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че лявата страна на (1.123) е по-малка от ε за всички x, удовлетворяващи неравенствата $1-\delta<x<1$. Тъй като остатъкът r_k на реда (1.117) клони към нула при $k\to\infty$, то за положителното число $\frac{\varepsilon}{2}$ може да се намери номер k_0 такъв, че $r_k<\frac{\varepsilon}{2}$ при $k\geq k_0$. Следователно

* Преобразованието на Абел (13.82) въведохме в т. 2, § 4. В разглеждания случай трябва да се положи в (1.82) $n=1$, $S_{n-1}=0$ и да се остави след това p да клони към безкрайност.

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Остава да докажем, че за всички x, които са достатъчно близки до единица, имаме

$$(1-x)\left|\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

но това е очевидно, понеже сумата, стояща под знака за модул, е ограничена. Регулярността на метода на Поасон — Абел е доказана.

Като пример да разгледаме отново разходящия ред

(1.124) $$\sum (-1)^{k-1} = 1-1+1-\dots$$

За този ред да построим степенния ред от вида (1.120)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1-x+x^2-x^3+\dots$$

Очевидно този ред е сходящ за всички x от интервала $(0,1)$ и сумата му е равна на $\frac{1}{1+x}$. Тъй като

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

то редът (1.124) е сумируем по метода на Поасон — Абел и неговата сума в смисъл на Поасон — Абел е равна на $\frac{1}{2}$.

Да обърнем внимание на факта, че сумата на реда (1.124) в смисъл на Поасон — Абел съвпада с неговата сума в смисъл на Чезаро. Този факт не е случаен: може да се докаже, че ако един ред е сумируем по метода на Чезаро, то той е сумируем и по метода на Поасон — Абел, при това сумата му в смисъл на Чезаро съвпада със сумата му в смисъл на Поасон — Абел. Освен това съществуват редове, които са сумируеми по метода на Поасон — Абел, но не са сумируеми по метода на Чезаро*. Детайлно изследване на различни методи за обобщено сумиране на разходящи редове е дадено в монографията на Г. Харди «Расходящиеся ряды», ИЛ, Москва, 1951.

* Следователно може да се каже, че методът на Поасон — Абел е «по-силен» метод за сумиране от метода на Чезаро.

§ 8. Елементарна теория на двойни и повторни редове

Да разгледаме изброимо множество от безкрайни числови редици:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots, & a_{1n}, \ldots \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots, & a_{2n}, \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \ldots, & a_{nn}, \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{1.125}
$$

(Първият индекс на числото a_{kl} означава номера на числовата редица, а вторият — номера на елемента.)

Иначе казано, разглеждаме матрицата (1.125), състояща се от безбройно много стълбове и безбройно много редове. Ако формално сумираме елементите на матрицата (1.125), ние можем да съставим от нея различни редове.

Ако отначало сумираме всеки ред на матрицата (1.125), ще получим безкрайна редица от редове от вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{1.126}$$

Като сумираме по-нататък получената редица, ще получим формалната сума

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{1.127}$$

Тази сума е прието да се нарича **повторен ред**.

Друг повторен ред

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{1.128}$$

се получава, ако отначало сумираме поотделно всеки стълб на матрицата (1.125), а след това образуваме сумата на елементите на получената по този начин редица.

Повторният ред (1.127) *се нарича* **сходящ**, *ако всеки от редовете* (1.126) *е сходящ и ако освен това е сходящ редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

където с A_k е означена сумата на k-тия ред (1.126).

Аналогично *повторният ред* (1.128) *се нарича* *сходящ, ако е сходящ всеки от редовете*

$$(1.129)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l=1, 2, \ldots)$$

и ако е сходящ и редът

$$\sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{A}_l ,$$

където $\widetilde{A}_l$ *е сумата на* l*-тия ред* (1.129).

С матрицата (1.125) свързваме освен повторните редове (1.127) и (1.128) още и така наречения **двоен ред**:

$$(1.130)\qquad \sum_{k,\, l=1}^{\infty} a_{kl} ,$$

който се нарича **сходящ**, когато съществува крайната граница

$$(1.131)\qquad \lim_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty}} S_{mn}$$

на така наречените правоъгълни частични суми

$$(1.132)\qquad S_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$$

при m и n, **клонящи независимо** към безкрайност.

В този случай границата (1.131) се нарича **сума** на двойния ред (1.130).

От тази дефиниция веднага следва, че ако двойният ред (1.130) е получен чрез умножаване членовете на два сходящи «обикновени» реда

$$(1.133)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} c_l ,$$

т. е. ако членовете на двойния ред (1.130) са $a_{kl}=b_k c_l$, то този двоен ред е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на редовете (1.133).

По-нататък ще отбележим, че от (1.132) следва, че за произволни $m\geq 2$, $n\geq 2$

$$a_{mn}=S_{mn}-S_{m(n-1)}-\left[S_{(m-1)n}-S_{(m-1)(n-1)}\right].$$

Това равенство означава, че едно *необходимо условие за схо-*

димост на двойния ред (1.130) *е общият му член да клони към нула,* т. е. съществуването на равната на нула граница

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn}$$

при независимо клонене на m и n към безкрайност.

Ще докажем следното твърдение, хвърлящо светлина върху въпроса за връзката между сходимостта на двойния и повторния ред.

Теорема 1.20. *Ако двойният ред* (1.130) *е сходящ и ако са сходящи всички редове* (1.126) *по редовете на матрицата* (1.125), *то и повторният ред* (1.12) *е сходящ, при това има същата сума, както и двойният ред* (1.130).

Доказателство. Извършваме граничен преход по $n\to\infty$ при фиксирано m в равенство (1.132) и вземаме под внимание, че редът (1.126) има сума A_k. Получаваме

$$(1.134)\qquad \lim_{n\to\infty} S_{mn}=\sum_{k=1}^{m} A_k.$$

От съотношение (1.134) е ясно, че сумата на повторния ред (1.127), която е равна на границата при $m\to\infty$ на дясната страна на (1.134), е точно повторната граница

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} S_{mn}).$$

Остава да докажем съществуването на повторната граница при предположение, че съществува границата (1.131) и че за всяко m съществува границата (1.134). Също така трябва да докажем, че указаната повторна граница е равна на границата (1.131).

От това, че границата (1.131) съществува и е равна на S, следва, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват номера m_0 и n_0 такива, че при $m\geq m_0$, $n\geq n_0$ е в сила неравенството

$$|S_{mn}-S|<\varepsilon.$$

Като използваме, че за всеки номер m съществува границата (1.134), ще получим от последното неравенство, че за всяко $m\geq m_0$ е изпълнено неравенството

$$\lim_{n\to\infty}|S_{mn}-S|\leq\varepsilon.$$

Следователно повторната граница $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn})$ съществува и е равна на S. Теоремата е доказана.

Както за обикновените редове с неотрицателни членове, за двойните редове с неотрицателни членове е вярно следното твърдение.

Теорема 1.21. *Ако всички елементи на матрицата (1.125) са неотрицателни, то за сходимостта на съставения от тази матрица двоен ред (1.130) е необходимо и достатъчно да са ограничени частичните му суми (1.132).*

Доказателство. Необходимостта е очевидна. За доказателството на достатъчността ще отбележим, че от ограничеността на множеството от частичните суми S_{mn} следва съществуването на точна горна граница на това множество, която ще означим с S:

$$S=\sup_{\substack{1\le m<\infty\\ 1\le n<\infty}} S_{mn}.$$

Съгласно дефиницията на точна горна граница за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери частична сума $S_{m_0n_0}$ такава, че

$$S-\varepsilon<S_{m_0n_0}\le S. \tag{1.135}$$

Поради това, че елементите са неотрицателни, за всички номера m и n, удовлетворяващи условията $m\ge m_0$, $n\ge n_0$, ще бъде в сила неравенството $S_{mn}\ge S_{m_0n_0}$.

От това неравенство и от (1.135) следва, че

$$S-\varepsilon\le S_{mn}\le S$$

за всички m и n, за които $m\ge m_0$, $n\ge n_0$.

Следователно границата (1.132) съществува и е равна на S, т. е. двойният ред (1.130) е сходящ.

Определение. *Двойният ред (1.130) се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ двойният ред*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}|a_{kl}|, \tag{1.130'}$$

съставен от модулите на елементите на матрицата (1.125).

Теорема 1.22. *Ако двойният ред от модулите (1.130') е сходящ, то и двойният ред (1.130) е сходящ.*

Доказателство. Да положим $p_{kl}=\frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2}$, $q_{kl}=\frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}$. Тогава

$$a_{kl}=p_{kl}-q_{kl}. \tag{1.136}$$

Очевидно p_{kl} и q_{kl} са неотрицателни и двете не надминават $|a_{kl}|$. От сходимостта на двойния ред (1.130') и теорема 1.21 следва, че от частичните суми на този ред е ограничена. Следова- частичните суми на всеки от двойните редове

$$\sum_{k,\,l=1}^{\infty} p_{kl} \quad \text{и} \quad \sum_{k,\,l=1}^{\infty} q_{kl}$$

ограничени. Но тогава съгласно теорема 1.21 тези редове са Да означим сумите им съответно с P и Q. От (1.136) че двойният ред (1.130) е сходящ и сумата му е равна на

да разгледаме обичайния ред

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r,$$

на който са елементите на матрицата (1.125), номери- в произволен ред.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 1.23. *Да разгледаме следните четири реда: двата пов- реда* (1.127) *и* (1.128), *двойния ред* (1.130) *и реда* (1.137). *поне един от посочените четири реда е сходящ при замя- на членовете му с техните абсолютни стойности, то всич- посочени редове са сходящи и имат една и съща сума.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че ако един от осочените четири реда е сходящ при замяната на членовете му с абсолютни стойности, то и останалите три реда са сходящи замяна на членовете им с техните абсолютни стойности.

Тъй като за повторните редове (1.127) и (1.128) разсъжденията напълно аналогични (трябва само да се смени ролята на пър- и втория индекс на членовете), то по-нататък ще разгледаме повторния ред (1.127). Достатъчно е да се докажат следните твърдения:

I) сходимостта на повторния ред (1.127), при който всички са заменени с техните модули, влече абсолютната сходи- на реда (1.137);

II) от абсолютната сходимост на реда (1.137) следва абсолют- сходимост на двойния ред (1.130);

III) от абсолютната сходимост на реда (1.130) следва сходи- на повторния ред (1.127), на който всички членове са за- с техните модули.

да докажем твърдение I, да означим с S^* сумата на пов- ред (1.127), на който всички членове са заменени с тех- модули, т.е. на реда

(1.127) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right).$$

Тогава при произволни m и n имаме

(1.138) $$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\leq S^{*}.$$

Нека $S_r^{*}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_r|$ е произволна частична сума на реда

(1.137′) $$\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|,$$

който се получава при замяната на членовете на реда (1.137) с техните модули. Очевидно съществуват толкова големи номера m и n, че всички членове на реда (1.137), които влизат в частичната му сума с номер r, да влизат в първите m реда и първите n стълба на матрицата (1.125).

Но тогава от (1.138) следва, че

$$S_r^{*}\leq S^{*}.$$

Това неравенство показва, че всички частични суми на реда с неотрицателни членове (1.137) са ограничени. Следователно този ред е сходящ (предвид теорема 1.2).

За да докажем твърдение II, да предположим, че редът (1.137) е сходящ. Тогава от теорема 1.2 следва, че редицата от частичните му суми $\{S_r^{*}\}$ е ограничена. Да фиксираме произволна частична сума S_{mn}^{*} на двойния ред от модулите (1.130′). Ясно е, че съществува толкова голям номер r, че r-тата частична сума на реда (1.137) съдържа всички членове, влизащи в сумата S_{mn} на реда (1.130). Но тогава частичната сума S_{mn}^{*} на реда (1.130′) не надминава частичната сума S_r^{*} на реда (1.137). Следователно множеството на всички частични суми на двойния ред (1.130′) е ограничено и значи този ред е сходящ по теорема 1.21.

Остава да докажем твърдение III. Нека е сходящ двойният ред (1.130′). Предвид теорема 1.20 за доказателството на сходимостта на повторния ред от модулите (1.127) е достатъчно да докажем сходимостта на всеки от редовете

(1.139) $$\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|,\quad k=1,2,\ldots$$

това съгласно теорема 1.2 е достатъчно да се докаже, че ре-
от частичните суми на всеки от тези редове е ограничена.
това е очевидно вярно, тъй като при произволни k и n сумата

$$\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|$$

ограничена от сумата на двойния ред от модулите (1.130').

Сега остана да докажем, че сумите на трите реда (1.127), (1.130) (1.137) съвпадат*. Да означим с S сумата на двойния ред (1.130). е, че сумата на реда (1.137) е равна на S. Наистина от

сходимост на този ред следва, че сумата му не се при смяна на реда на сумиране, а редът на сумиране може се измени така, че частичните му суми след изменението да съ- като подмножество частичните суми S_{mn} на двойния ред

За да се убедим, че и сумата на повторния ред (1.127) е равна S, е достатъчно да забележим, че от сходимостта на реда (1.139) сходимостта на реда (1.126), и да използуваме теорема . Теорема 1.23 е доказана.

* Аналогични разсъждения позволяват да заключим, че и сумата на повторния ред (1.128) съвпада със сумата на посочените три реда.

2. Функционални редици и редове

За представяне на различни функции в анализа широко се използуват редове и редици, чиито членове не са числа, а функции, определени в дадено множество.

В настоящата глава се изучават такива редове и редици, които ще наричаме функционални.

§ 1. Сходимост в точка и равномерна сходимост в множество

1. Функционални редици и функционални редове. Да означим с $\{x\}$ едно подмножество на m-мерното евклидово пространство E^m*.

Ако на всяко естествено число n съпоставим някаква функция $f_n(x)$, дефинирана в множеството $\{x\}$, то множеството на номерираните функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... ще наричаме функционална редица.

Отделните функции $f_n(x)$ ще наричаме членове или елементи на разглежданата редица, а множеството $\{x\}$, в което са дефинирани всички функции $f_n(x)$, ще наричаме дефиниционна област на тази редица.

Ще подчертаем, че ако дефиниционната област $\{x\}$ е подмножество на m-мерното евклидово пространство E^m, то всяка функция $f_n(x)$ е функция на m променливи $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са координати на точките x.

За означаване на функционална редица обикновено ще използуваме символа $\{f_n(x)\}$.

Нека разгледаме функционалната редица $\{u_n(x)\}$, чиято дефиниционна област е дадено множество $\{x\}$.

* Елементите на множеството $\{x\}$ са точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с координати $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Формално написаната безкрайна сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

членовете на посочената функционална редица ще наричаме ред.

При това отделните функции $u_n(x)$ ще наричаме членове на ред, а множеството $\{x\}$, в което са дефинирани тези ще наричаме дефиниционна област на разглеждания ред.

Както в случай на числов ред, сумата на първите n члена на ред (2.1) ще наричаме n-та частична сума на този ред.

Ще отбележим, че изучаването на функционални редове е напълно еквивалентно на изучаването на функционални редици, защото на всеки функционален ред (2.1) еднозначно съответствува функционалната редица

$$S_1(x),\ S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots, \tag{2.2}$$

съставена от неговите частични суми, и, обратно, на всяка функционална редица (2.2) еднозначно съответствува функционалният ред (2.1) с членове $u_1(x) = S_1(x)$, $u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ при $n \geq 2$.

Ще дадем примери на функционални редици и редове.

Пример 1. Да разгледаме редицата от функции $\{f_n(x)\}$, всяка от които е определена в сегмента $0 \leq x \leq 1$ и има вида

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi n x}{2} & \text{при} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

На фиг. 2.1 са дадени графиките на функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$. Дефиниционна област на функционалната редица (2.3) е сегментът $[0, 1]$. Ще отбележим, че всяка функция $f_n(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$.

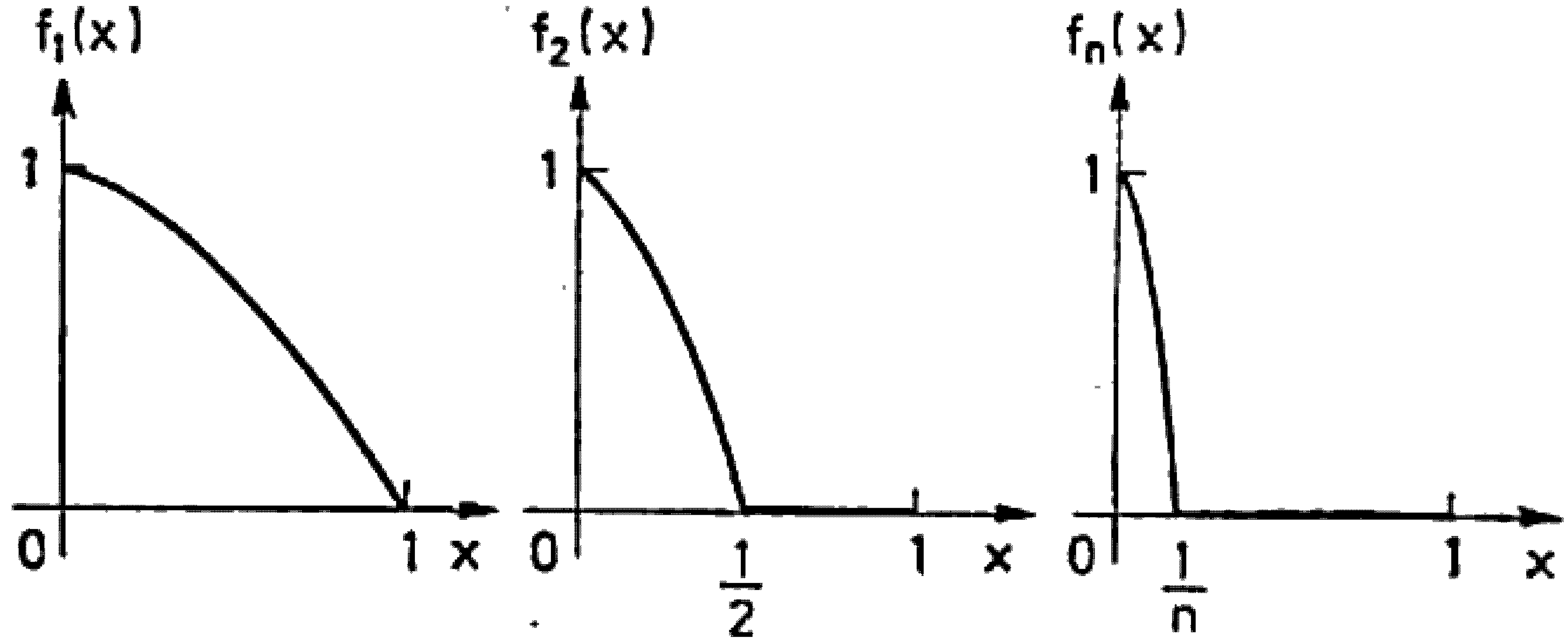
Пример 2. Да разгледаме следния функционален ред:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \cdots, \tag{2.4}$$

чиято дефиниционна област е цялата равнина $E^2 = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$.

Като използуваме развитието по формулата на Маклорен на функцията

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + R_{n+1}(u)$$



Фиг. 2. 1

(гл. п. 2, § 9, глава 6, част I), ще видим, че $n+1$-та частична сума

$$S_{n+1}(x,y)=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\dots+\frac{(x+y)^n}{n!}$$

на реда (2.4) се различава от функцията e^{x+y} с величината $R_{n+1}(x+y)$, където $R_{n+1}(u)$ е остатъчният член във формулата на Маклорен за e^u от ред $n+1$.

2. Сходимост на функционална редица (функционален ред) в точка и в множество. Да предположим, че дефиниционната област на функционалната редица (функционалния ред) е множеството $\{x\}$ в пространство E^m. Да фиксираме произволна точка $x_0=\{\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_m\}$ на множеството $\{x\}$ и да разгледаме всички членове на функционалната редица (функционалния ред) в тази точка x_0. Така ще получим числова редица (числов ред). Ако посочената числова редица (посоченият числов ред) е сходяща (сходящ), то казваме, че функционалната редица (функционалният ред) е сходяща (сходящ) в точката x_0.

Множеството, състоящо се от всички точки x_0, в които дадената функционална редица (даденият функционален ред) е сходяща (сходящ), се нарича област на сходимост на дадената редица (дадения ред), а редицата (редът) се нарича сходяща (сходящ) в това множество.

В конкретните ситуации областта на сходимост може да съвпада с дефиниционната област, да бъде подмножество на дефиниционната област или изобщо да бъде празното множество.

Съответните примери се намират по-долу.

Да предположим, че функционалната редица $\{f_n(x)\}$ има за област на сходимост някакво множество $\{x\}$. За произволна точка x от множеството $\{x\}$ да означим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Очевидно дефиниционната област на така определената функция $f(x)$ съвпада с множеството $\{x\}$. Тази функция наричаме гранична функция на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ или кратко — нейна граница.

Аналогично, ако функционалният ред (2.1) има за област на сходимост някое множество $\{x\}$, то на това множество е определена функцията $S(x)$, която е гранична функция на редицата от частични суми на този ред и се нарича негова сума.

Редицата (2.3) от разгледания в предния пункт пример 1 има за област на сходимост целия сегмент $0\leq x\leq 1$.

Наистина $f_n(0)=1$ за всички номера n, т.е. в точката $x=0$ редицата (2.3) клони към единица. Ако фиксираме произволно x от полусегмента $0<x\leq 1$, то всички функции, започвайки от някакъв номер (зависещ, разбира се, от x), ще бъдат равни на нула в тази точка x. Оттук следва, че във всяка точка x на полусегмента $0<x\leq 1$ редицата (2.3) клони към нула.

И така редицата (2.3) е сходяща на целия сегмент $0\leq x\leq 1$ и клони към граничната функция $f(x)$, която има вида

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x=0, \\ 0 & \text{при} \quad 0<x\leq 1. \end{cases}$$

Графиката на тази функция е дадена на фиг. 2.2. Ще отбележим веднага, че тази функция не е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$ (тя има прекъсване отдясно в точката $x=0$).

Сега ще се убедим, че редът (2.4) от разглеждания в предния пункт пример 2 има за област на сходимост цялата безкрайна равнина $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

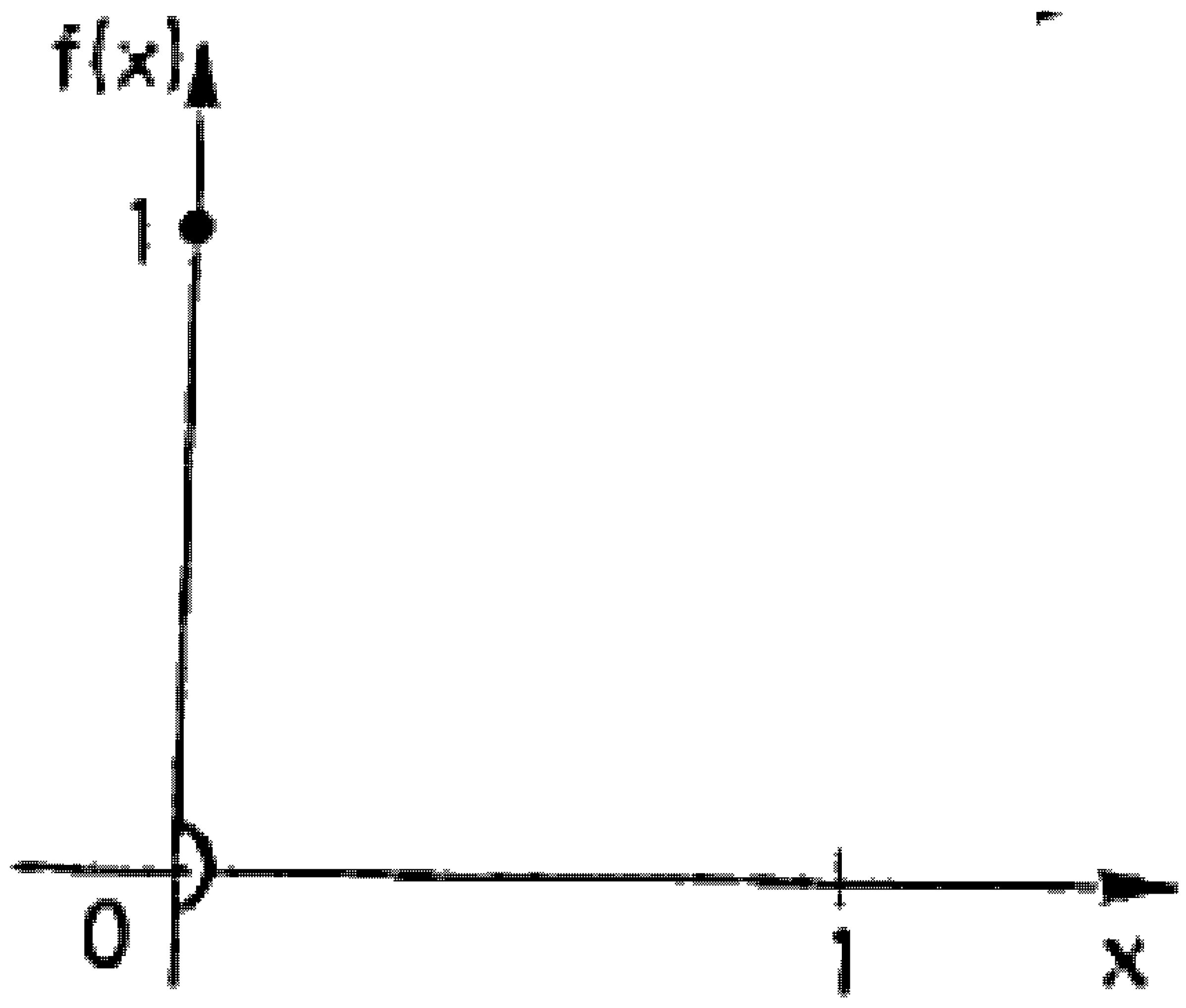
Наистина в п. 2, § 9, глава 6, част I е доказано, че остатъчният член $R_{n+1}(u)$ във формулата на Маклорен за функцията e^u клони към нула при $n\to\infty$ за всяко реално u, а това всъщност означава, че $(n+1)$-та частична сума $S_{n+1}(x, y)$ на реда (2.4) се различава от e^{x+y} с величината $R_{n+1}(x+y)$, която клони към нула при $n\to\infty$ във всяка точка (x, y) от равнината E^2.

И така редът (2.4) е сходящ в цялата равнина E^2 и неговата сума е равна на e^{x+y}.

3. Равномерна сходимост в множество. Нека функционалната редица

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{2.5}$$

е сходяща в множеството $\{x\}$ от пространството E^m и нека $f(x)$ е нейната гранична функция.



Фиг. 2. 2

Определение 1. Ще казваме, че редицата (2.5) клони към $f(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$, и за всички точки x от множеството $\{x\}$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

В този случай ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Забележка 1. В това определение твърде съществено е това, че номерът N зависи само от ε, но не и от x, т. е. твърди се, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери универсален номер $N(\varepsilon)$, започвайки от който неравенството (2.6) да е изпълнено едновременно при всички точки x от множеството $\{x\}$.

Забележка 2. Ще отбележим, че равномерната сходимост на функционалната редица $f_n(x)$ към функцията $f(x)$ в множеството $\{x\}$ е еквивалентна на това числовата редица ε_n, членовете на която са точните горни граници на функцията $|f_n(x)-f(x)|$ в множеството $\{x\}$, да бъде безкрайно малка (в частност тази точна горна граница трябва да съществува).

Забележка 3. От определение 1 непосредствено следва, че ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ в цялото множество $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ и във всяко подмножество на множеството $\{x\}$.

Ще приведем пример, показващ, че от сходимостта на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ в множеството $\{x\}$ не следва, изобщо казано, равномерна сходимост на $\{f_n(x_n)\}$ за това множество.

Да се върнем към редицата (2.3) от пример 1, разгледан в п. 1. В п. 2 беше доказано, че тази редица клони в целия сегмент $[0, 1]$ към граничната функция

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x=0, \\ 0 & \text{при } 0<x\leq 1. \end{cases}$$

че тази редица не е равномерно сходяща в $[0, 1]$.
разгледаме редицата от точки $x_n=\frac{1}{2n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, при-
на сегмента $[0, 1]$. Във всяка от тези точки (т. е. за
номер n) са в сила съотношенията

$$f_n(x_n)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(x_n)=0.$$

Така за всеки номер n имаме

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

означава, че при $\varepsilon\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ неравенството (2.6) не може да
бъде удовлетворено за всички точки x от сегмента $[0, 1]$ едновре-
при никакъв номер n, т. е. означава липса на равномерна
$[0, 1]$ сходимост на разглежданата редица.
Ще отбележим, че разглежданата редица клони към гранич-
функция $f(x)$ равномерно във всеки сегмент $[\delta, 1]$, където δ е
фиксирано число от интервала $0<\delta<1$. Наистина за
дадено δ ще се намери номер, започвайки от който всички
$f_n(x)$ са равни на нула в целия сегмент $[\delta, 1]$. Тъй като
функция $f(x)$ е равна на нула в сегмента $[\delta, 1]$, то
част на (2.6) е равна на нула в целия сегмент $[\delta, 1]$, за-
от посочения номер. По този начин от посочения номер
неравенството (2.6) е изпълнено за всички x от сегмента
1] при произволно $\varepsilon>0$.
Определение 2. Ще казваме, че даден функционален ред е рав-
сходящ в множеството $\{x\}$, ако редицата от частичните му
е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.
Ще отбележим, че функционалният ред (2.4) от пример 2, раз-
в п. 1, е равномерно сходящ в кръга $x^2+y^2\leq r^2$ с произво-
фиксиран радиус r и неговата сума е e^{x+y}.
Наистина навсякъде в посочения кръг имаме $|x|\leq r$, $|y|\leq r$ и
$|x+y|\leq|x|+|y|\leq 2r$, откъдето поради наличието на оценка
от п. 2, §9, глава 6, част I ще получим, че навсякъде в по-
кръг имаме

$$|R_{n+1}(x+y)|\leq\frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{2r}.$$

От последното неравенство следва, че $R_{n+1}(x+y)$ клони към нула
при $n\to\infty$ равномерно в кръга $x^2+y^2\leq r^2$, а това значи, че редът
(2.4) е равномерно сходящ в посочения кръг и сумата му е e^{x+y}.

4. Критерий на Коши за равномерна сходимост на редица (ред). Валидни са следните две фундаментални теореми.

Теорема 2.1. За да бъде функционалната редица $\{f_n(x)\}$ равномерно сходяща в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n>N(\varepsilon)$, всички естествени числа $p(p=1, 2, \ldots)$ и всички точки x от множеството $\{x\}$ е вярно неравенството

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. За да бъде функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.8}$$

равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geqq N(\varepsilon)$, всички естествени числа $p(p=1, 2, \ldots)$ и всички точки x от множеството $\{x\}$ е изпълнено

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon. \tag{2.9}$$

Достатъчно е да докажем само теорема 2.1, тъй като теорема 2.2 е следствие на теорема 2.1 (достатъчно е да отбележим, че в лявата част на (2.9) под знака за абсолютна стойност стои разликата $S_{n+p}(x)-S_n(x)$ на частичните суми с номера $n+p$ и n на функционалния ред (2.8)).

Доказателство на теорема 2.1

Необходимост. Да предположим, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $f(x)$. Тогава, като фиксираме произволно $\varepsilon>0$, ще намерим за него номер $N(\varepsilon)$ такъв, че неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

да е в сила за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и за всички точки x от множеството $\{x\}$.

Ако p е произволно естествено число, то при $n\geqq N(\varepsilon)$ номерът $n+p$ още повече ще удовлетворява условието $n+p\geqq N(\varepsilon)$, а затова за всички n, удовлетворяващи условието $n\geqq N(\varepsilon)$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$, толкова повече ще е в сила неравенството

(2.11) $$|f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тъй като модулът на сума от две величини не надминава сумата на техните модули, то от (2.10) и (2.11) ще получим, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|[f_{n+p}(x)-f(x)]+[f(x)-f_n(x)]|\leq$$
$$\leq|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

(за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geq N(\varepsilon)$, всички естествени числа p и всяко x от множеството $\{x\}$).

Необходимостта е доказана.

Достатъчност. Да предположим, че за произволно $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че неравенството (2.7) да е в сила за всички n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$, за всички естествени p и за всички точки x от множеството $\{x\}$. От неравенството (2.7) и от критерия на Коши за сходимост на числова редица (гл. п. 3, § 3, глава 3, част I) следва сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ във всяка точка x от множеството $\{x\}$ и съществуването на определена във всяка точка x от множеството $\{x\}$ гранична функция $f(x)$.

Като фиксираме произволен номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N(\varepsilon)$, и произволна точка x от множеството $\{x\}$, да направим граничен преход при $p\to\infty$ в неравенството (2.7). Като използваме теорема 3.13 от п. 4, § 1, глава 3, част I, ще получим, че за произволен номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N(\varepsilon)$, и произволна точка x от множеството $\{x\}$ е валидно неравенството

$$|f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon<2\varepsilon.$$

Това всъщност доказва, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към граничната функция $f(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$.

Достатъчността е доказана.

§ 2. Достатъчни условия (признаци) за равномерна сходимост на функционални редици и редове

В п. 1, § 1 се убедихме, че изучаването на функционалните редове е еквивалентно на изучаването на функционални редици. От тази гледна точка всеки признак за равномерна сходимост има две еквивалентни формулировки: една на езика на функционалните редове, друга — на езика на функционалните редици. Ще изразяваме установените признаци на езика на редиците или редовете в по-удобната формулировка, понякога ще привеждаме и двете еквивалентни формулировки.

Теорема 2.3 (признак на Вайерщрас).

Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.12}$$

е дефиниран в множество $\{x\}$ и ако съществува сходящ числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.13}$$

такъв, че за всички точки x от множеството $\{x\}$ и за всички номера k е изпълнено неравенството

$$|u_k(x)| \leq c_k, \tag{2.14}$$

то функционалният ред (2.12) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Тъй като числовият ред (2.13) е сходящ, то по критерия на Коши за сходимост на числови редове (гл. теорема 1.1 от глава 1) ще се намери $N(\varepsilon)$ такова, че

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k<\varepsilon \tag{2.15}$$

за всяко n, удовлетворяващо $n \geq N(\varepsilon)$, и за всички естествени числа p.

От неравенства (2.14) и (2.15) и от това, че модулът на сума от p събираеми не надминава сумата от модулите им, ще получим, че

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k<\varepsilon$$

(за всяко n, удовлетворяващо условието $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени числа p и всички точки x от множеството $\{x\}$).

По критерия на Коши за равномерна сходимост (т. е. по теорема 2.2) следва, че редът (2.12) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Накратко критерият на Вайерщрас може да бъде формулиран така: един функционален ред е равномерно сходящ в дадено множество, ако той може да бъде мажориран в това множество от сходящ числов ред.

Забележка 2. Трябва да се подчертае, че критерият на

Вайерщрас е само достатъчно и не необходимо условие за равномерната сходимост на функционален ред.

Наистина функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

е равномерно сходящ в сегмента $0 \leqq x \leqq 1$ и неговата сума е $\ln(1+x)$, защото, както е показано в п. 2, § 9, глава 6, част I, разликата между $\ln(1+x)$ и n-тата частична сума на този ред е равна на остатъчния член $R_{n+1}(x)$ във формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ и удовлетворява неравенството

$$|R_{n+1}(x)| \leqq \frac{1}{n+1}$$

за всички x от сегмента $0 \leqq x \leqq 1$.

За посочения функционален ред обаче не съществува мажориращ го в сегмента $0 \leqq x \leqq 1$ сходящ числов ред, защото за всеки номер k имаме

$$\sup_{[0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

а числовият ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ е разходящ.

Да приложим признака на Вайерщрас, за да установим равномерната сходимост на функционалния ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x+ky+z)}{k^2}.$$

Може да се твърди, че този ред е равномерно сходящ в цялото тримерно евклидово пространство E^3, защото за всяка точка (x, y, z) от това пространство той се мажорира от сходящия числов ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Теорема 2.4 (признак на Дини*)

Ако за всяка точка x от затвореното ограничено множество $\{x\}$ в пространството E^m редицата $\{f_n(x)\}$ е ненамаляваща (нераստяща) и клони в това множество към граничната функция $f(x)$ и ако всички членове на редицата $\{f_n(x)\}$ и граничната функция

* Улис Дини — италиански математик (1845—1918).

$f(x)$ са непрекъснати в множеството $\{x\}$, то сходимостта на редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерна в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Без да намаляваме общността, ще предположим, че редицата $\{f_n(x)\}$ не намалява в затвореното ограничено множество $\{x\}$ (случаят на нерастяща редица се свежда до този чрез умножаване на всички елементи на редицата с числото -1). Да положим $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$. Редицата $r_n(x)$ има следните свойства:

1) всички $r_n(x)$ са неотрицателни и непрекъснати в множеството $\{x\}$.

2) $\{r_n(x)\}$ не расте в множеството $\{x\}$;

3) във всяка точка x от множеството $\{x\}$ съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Достатъчно е да се докаже, че редицата $\{r_n(x)\}$ клони към функцията, тъждествено равна на нула, равномерно в множеството $\{x\}$, т. е. достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери поне един номер n такъв, че $r_n(x)<\varepsilon$ за всички x от множеството $\{x\}$. (Тогава поради това, че редицата $\{r_n(x)\}$ е нерастяща, неравенството $r_n(x)<\varepsilon$ ще бъде изпълнено и за всички следващи номера.) Да допуснем, че за някое $\varepsilon>0$ не може да се намери нито един номер n такъв, че да имаме $r_n(x)<\varepsilon$ едновременно за всички x от множеството $\{x\}$. Тогава за всеки номер n ще се намери поне една точка x_n от множеството $\{x\}$ такава, че

$$r_n(x_n)\geq\varepsilon. \tag{2.16}$$

Поради ограничеността на множеството $\{x\}$ по теоремата на Болцано–Вайерщрас (гл. теорема 12.1 от глава 12, част I) от редицата от точки $\{x_n\}$ може да се избере подредица $\{x_{n_k}\}$, клоняща към някаква точка x_0, която поради това, че множеството $\{x\}$ е затворено, му принадлежи. Тъй като функцията $r_m(x)$ (с произволен номер m) е непрекъсната в точката x_0, то за всеки номер m имаме

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k})=r_m(x_0). \tag{2.17}$$

От друга страна, като изберем за всеки номер m надминаващ го номер n_k, ще получим (поради това, че редицата $r_m(x)$ е нерастяща), че

$$r_m(x_{n_k})\geq r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Като съпоставим последното неравенство с неравенство (2.16), което е вярно за всеки номер n, ще получим, че

$$r_m(x_{n_k})\geq\varepsilon \tag{2.18}$$

за всеки номер n_k, надминаващ фиксирания от нас произволен номер m).

От (2.17) и (2.18) следва, че

$$r_m(x_0) \geq \varepsilon$$

(за всеки номер m), а това противоречи на условието, че редицата $\{r_m(x)\}$ клони към нула в точка x_0. Полученото противоречие доказва теоремата.

Забележка. В теоремата на Дини изискването за монотонност на редицата $\{f_n(x)\}$ в множеството $\{x\}$ е твърде съществено, защото немонотонна в множеството $\{x\}$ редица от непрекъснати в това множество $\{x\}$ функции може да клони във всяка точка x от множеството $\{x\}$ към непрекъсната в това множество функция $f(x)$, но да не е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Като пример да разгледаме редицата от функции $\{f_n(x)\}$, за която $f_n(x)$ е равна на $\sin x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}$ и е равна на нула при $\frac{\pi}{n} \leq x \leq \pi$. Тази редица клони към $f(x)=0$ във всяка точка на сегмента $0 \leq x \leq \pi$, но не е равномерно сходяща в този сегмент, защото $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$ при $x_n = \frac{\pi}{2n}$ за всички номера n.

Ще приведем еквивалентна формулировка на теоремата на Дини на езика на функционалните редове: ако всички членове на функционалния ред са непрекъснати и неотрицателни (или неположителни) в затвореното ограничено множество $\{x\}$ и ако във всяка точка от множеството $\{x\}$ този ред е сходящ и сумата му е непрекъсната функция, то сходимостта на посочения ред е равномерна в множеството $\{x\}$.

Като пример за използуване на признака на Дини ще изучим въпроса за характера на сходимост на редицата

$$\{(x^2+y^2)^n\}$$

в кръга $x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}$ с радиус $\frac{1}{2}$ и с център в точката (0,0). Тази сходимост е равномерна в посочения кръг, защото разглежданата редица клони във всяка точка на този кръг към граничната функция $f(x, y) = 0$, не расте във всяка точка на кръга и се състои от функции, непрекъснати в посочения кръг.

Преди да формулираме още два признака за равномерна сходимост на функционални редове, ще въведем някои нови понятия.

Определение 1. Ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно ограничена в множеството $\{x\}$, ако съществува такова число $M>0$, че за всяко n и за всички точки x от множеството $\{x\}$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Определение 2. Ще казваме, че функционалната редица $\{v_n(x)\}$ има в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \tag{2.19}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Веднага ще отбележим, че всяка редица, която има в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Наистина от равномерната сходимост на реда (2.19) в множеството $\{x\}$ и от критерия на Коши следва равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)], \tag{2.19*}$$

чиято n-та частична сума $S_n(x)$ има вида $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$. От последното равенство следва, че редицата $\{v_n(x)\}$ е равномерно сходяща и клони към граничната функция $v(x)$, равна на $S(x) + v_1(x)$, където $S(x)$ е сумата на реда (2.19*).

Сега можем да формулираме и да докажем следните два признака.

Теорема 2.5 (първи признак на Абел)

Ако функционалният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.1}$$

има равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ редица от частичните суми, а функционалната редица $v_n(x)$ има равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ вариация и гранична функция, тъждествено равна на нула, то функционалният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) \cdot v_n(x)] \tag{2.20}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. По условие съществува число $M>0$ такова, че редицата $\{S_n(x)\}$ от частичните суми на реда (2.1) удовлетворява неравенството $|S_n(x)| \leq M$ за всички номера n и всички точки x от множеството $\{x\}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и намираме номер N такъв, че за всички $n>N$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$ да са в сила неравенствата

(2.21) $$|v_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3M},$$

(2.22) $$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}(x)-v_k(x)|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тук използувахме това, че редицата $\{v_n(x)\}$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към функция, тъждествено равна на нула, а също така и равномерната сходимост на реда (2.19) в множеството $\{x\}$.

От тъждеството на Абел (1.77) и понеже модулът на сума от три числа не надвишава сумата от модулите им, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[u_k(x)\,.\,v_k(x)]\right|\leq\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(x)\,[v_k(x)-v_{k+1}(x)]\right|+$$
$$+|S_{n+p}(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)|+|S_n(x)|\,.\,|v_{n+1}(x)|\,.$$

Като използуваме условието $|S_n(x)|\leq M$, ще получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[u_k(x)v_k(x)]\right|\leq M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}(x)-v_k(x)|+$$
$$+M|v_{n+p}(x)|+M|v_{n+1}(x)|\,.$$

Съпоставяме последното неравенство с (2.21) и (2.22) и получаваме, че за всеки номер n, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$ имаме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[u_k(x)\,v_k(x)]\right|<\varepsilon,$$

а това означава, че редът (2.20) е равномерно сходящ в множеството (по теорема (2.2).

Теоремата е доказана.

Теорема 2.6 (втори признак на Абел). Ако функционалният ред (2.1) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$ и сумата му $S(x)$ е ограничена в $\{x\}$, а функционалната редица $\{v_n(x)\}$ притежава равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ вариация и граничната ѝ функция $v(x)$ е ограничена в $\{x\}$, то функционалният ред (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Ще започнем от тъждеството на Абел (1.77) от глава 1. Това тъждество може да бъде записано във вида

$$+[S_{n+p}(x)-S_n(x)]\,.\,v_{n+p}(x)+S_n(x)[v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)]\,.$$

(Тук символът $S_k(x)$ означава k-тата частична сума на реда (2.1).)

От последното тъждество следва неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,.\,v_k(x)\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|\,.\,|v_{k+1}(x)-v_k(x)|+ \tag{2.23}$$
$$+|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)|+|S_n(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)|.$$

Тъй като по условие сумата $S(x)$ на реда (2.1) и граничната функция $v(x)$ на редицата $\{v_n(x)\}$ са ограничени в множеството $\{x\}$, то ще се намерят константи M_1 и M_2 такива, че за всички x от множеството $\{x\}$

$$|S(x)|\leqq M_1,\quad |v(x)|\leqq M_2. \tag{2.24}$$

От неравенство (2.24) и от равномерната сходимост на редиците $\{S_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ (клонящи съответно към $S(x)$ и $v(x)$) в множеството $\{x\}$ следва, че съществува такъв номер N_1, че за всички точки x от множеството $\{x\}$ и всички номера $n\geqq N_1$ да бъдат изпълнени неравенствата

$$|S_n(x)|\leqq M_1+1,\quad |v_n(x)|\leqq M_2+1. \tag{2.25}$$

От друга страна, от равномерната в множеството $\{x\}$ сходимост на функционалните редове (2.1) и (2.19) и от критерия на Коши за равномерна сходимост следва, че за произволно $\varepsilon>0$ могат да бъдат намерени номера $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$ такива, че неравенството

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \tag{2.26}$$

да е изпълнено за точките x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geqq N_2(\varepsilon)$, и неравенството

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)|<\frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.27}$$

да е изпълнено за всички точки x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geqq N_3(\varepsilon)$.

Накрая от тъждеството

$$v_{n+p}(x)-v_n(x)=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}[v_{k+1}(x)-v_k(x)],$$

от следващото от него неравенство

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)|$$

и от неравенство (2.27) следва, че

(2.28) $$|v_{n+p}(x)-v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)}$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N_3(\varepsilon)$.

Да означим с $N(\varepsilon)$ най-голямия от трите номера N_1, $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$. Тогава при $n \geq N(\varepsilon)$ за всички точки x от множеството $\{x\}$ и за всички естествени p да бъде изпълнено всяко от четирите неравенства (2.25) — (2.28).

От тези неравенства и от (2.23) следва, че

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\, v_k(x)\right| < \varepsilon$$

при всички $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и за всички точки x от множеството $\{x\}$.

По критерия на Коши редът (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$ Теоремата е доказана.

Следствие от теорема 2.5 — признак на Дирихле — Абел

Ако редицата от частичните суми на функционалния ред (2.1) е равномерно ограничена в множеството, а функционалната редица $\{v_n(x)\}$ е нерастяща във всяка точка от множеството $\{x\}$ и клони към нула равномерно в това множество, то функционалният ред (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Достатъчно е да се отбележи, че нерастяща във всяка точка от множеството $\{x\}$ и клоняща равномерно в това множество към нула редица $\{v_n(x)\}$ притежава в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, защото за нея n-тата частична сума $S_n(x)$ на реда (2.19) е равна на $v_1(x)-v_{n+1}(x)$. Следователно съществува равномерна в множеството $\{x\}$ граница

$$\lim S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x).$$

Като пример да изучим въпроса за равномерната сходимост на реда

(2.29) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k-(1+x^2)^k}.$$

Тъй като редицата

$$v_n(x)=\frac{1}{n+(1+|x|)^n}$$

е нерастяща и равномерно клони към нула върху правата $-\infty<x<\infty$, то по признака на Дирихле—Абел редът (2.29) е равномерно сходящ в произволно множество, в което редицата от частичните суми на реда

(2.30) $$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$$

е равномерно ограничена.

За да пресметнем n-тата частична сума $S_n(x)$ на реда (2.30), сумираме

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

по всички k от 1 до n. При това получаваме съотношението

$$2\sin\frac{x}{2}S_n(x)=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

от което следва равенството

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Значи за всички номера n е вярно неравенството

$$|S_n(x)|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

от което следва, че редицата от частичните суми на реда (2.30) е равномерно ограничена във всеки сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, където $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ (защото във всеки такъв сегмент $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ има положителна точна долна граница).

И така редът (2.29) е равномерно сходящ във всеки фиксиран сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

По втория признак на Абел редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}\right]\cdot\frac{k+1+|x|}{k+|x|}\right\}$$

е равномерно сходящ във всеки сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, $m=0,\pm 1,\ldots$, защото, както вече доказахме, редът (2.29) е равномерно сходящ в такъв сегмент и има ограничена сума, а редицата $v_k=\frac{k+1+|x|}{k+|x|}$ има равномерно ограничена във всеки сегмент вариация, защото редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+|x|)(k+|x|+1)}$$

се мажорира на цялата права от сходящия числов ред $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, следователно е сходящ на цялата права и сумата му е ограничена.

§ 3. Почленен граничен преход

Да разгледаме произволно подмножество $\{x\}$ на пространство E^m и нека $\overset{\circ}{x}$ е точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 2.7. Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x) \tag{2.31}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, сумата му е $S(x)$ и всички членове на този ред имат в точката $\overset{\circ}{x}$ граница

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}}u_k(x)=b_k,\quad k=1,2,\ldots,$$

то и сумата $S(x)$ има в точката $\overset{\circ}{x}$ граница, при това

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}}S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[\lim u_k(x)]=\sum_{k=1}^{\infty}b_k,$$

т. е. символът lim за граница и символът $\sum$ за сумиране могат да си разменят местата (може да се направи почленен граничен преход).

Доказателство. Най-напред ще докажем сходимостта на числовия ред $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$.

По критерия на Коши, приложен към функционалния ред (2.31), за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{2.33}$$

за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$. В неравенството (2.33) фиксираме номерата n и p и правим граничен преход при $x \to \overset{\circ}{x}$ (такъв граничен преход може да се осъществи по произволна редица от точки от множеството $\{x\}$, клоняща към $\overset{\circ}{x}$). Получаваме

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

(за всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p). Съгласно критерия на Коши редът $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ е сходящ.

Да оценим сега разликата

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Тъй като

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, то за всеки номер n е в сила тъждеството

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

от което получаваме неравенството

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|, \tag{2.34}$$

което е вярно за всички точки x от множеството $\{x\}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ е сходящ, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери номер n такъв, че за всички точки x от множеството $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.35}$$

Тъй като границата на крайна сума е равна на сумата от граните на събираемите, то за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ и за избрания номер n може да се посочи $\delta>0$ такова, че

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.36}$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, които удовлетворяват условието $0<\rho(x, \overset{\circ}{x})<\delta$.

От (2.34), (2.35) и (2.36) следва, че

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието $0<\rho(x, \overset{\circ}{x})<\delta$. Това всъщност доказва, че границата на $S(x)$ в точката $\overset{\circ}{x}$ съществува и че е вярно равенството (2.32).

Теоремата е доказана.

На езика на функционалните редици теорема 2.7 звучи така:

Ако функционалната редица $f_n(x)$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $f(x)$ и всички елементи на тази редица имат граница в точката $\overset{\circ}{x}$, то и граничната функция $f(x)$ има граница в точката $\overset{\circ}{x}$ и при това

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} f(x) = \lim_{x\to\overset{\circ}{x}} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} f_n(x)),$$

т. е. символът $\lim\limits_{n\to\infty}$ за граница на редица и символът $\lim\limits_{x\to\overset{\circ}{x}}$ за граница на функция могат да си разменят местата (или както се казва, може да се направи почленен граничен преход при $x\to\overset{\circ}{x}$).

Следствие 1 от теорема 2.7

Ако в условието на теорема 2.7 поискаме допълнително точката $\overset{\circ}{x}$ да принадлежи на множеството $\{x\}$ и всички членове $u_k(x)$ на функционалния ред (2.31) да бъдат непрекъснати в точката $\overset{\circ}{x}$, то и сумата $S(x)$ на този ред ще бъде непрекъсната в точката $\overset{\circ}{x}$.

Наистина в този случай $b_k=u_k(\overset{\circ}{x})$ и равенството (2.32) ще има вида

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\overset{\circ}{x}) = S(\overset{\circ}{x}),$$

а това означава, че сумата $S(x)$ е непрекъсната в точката $\overset{\circ}{x}$.

Следствие 2 от теорема 2.7

Ако всички членове на функционалния ред (функционалната редица) са непрекъснати в гъстото в себе си множество $\{x\}$* и ако този функционален ред (функционална редица) е равномерно сходящ (сходяща) в множеството $\{x\}$, то и сумата на реда (граничната функция на редицата) е непрекъсната в множеството $\{x\}$.

Достатъчно е да се приложи предното следствие във всяка точка $\overset{0}{x}$ от множеството $\{x\}$.

§ 4. Почленно интегриране и почленно диференциране на функционални редици и редове

1. Почленно интегриране

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 2.8. Ако функционалната редица $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$ и ако всяка функция $f_n(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$, то и граничната функция $f(x)$ е интегруема в този сегмент, при това посочената редица може да се интегрира в сегмента $[a, b]$ почленно, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

съществува и е равна на $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че граничната функция $f(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Достатъчно е да се докаже, че за граничната функция $f(x)$ ще се намери поне едно деление на сегмента $[a, b]$, за чиято горна сума S и долна сума S е в сила неравенството $S-s<\varepsilon$ (гл. п. 1, § 3, глава 9, част I).

За целта е достатъчно да се покаже, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ може да се намери номер n такъв, че за всяко деление на сегмента $[a, b]$ горната сума S и долната сума s на функцията $f(x)$ и горната сума S_n и долната сума s_n на функцията $f_n(x)$ са свързани с неравенството

$$S-s\leq(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.37}$$

* Ще напомним, че множеството $\{x\}$ се нарича гъсто в себе си, ако всяка негова точка е точка на сгъстяване за това множество.

Наистина от интегруемостта на функцията $f_n(x)$ в $[a, b]$ следва, че може да се избере деление така, че да бъде вярно неравенството $S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$, от което и от (2.37) ще получим, че $S - s < \varepsilon$, което довършва доказателството на интегруемостта в $[a, b]$ на функцията $f(x)$.

Да разгледаме произволно деление $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ на сегмента $[a, b]$ и да означим със символа $\omega_k(f_n)$ осцилацията* на k-тия частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ на функцията $f_n(x)$, а със символа $\omega_k(f)$ — осцилацията в същия частичен сегмент на граничната функция $f(x)$.

Неравенството 2.27 ще бъде доказано, ако установим, че за достатъчно голям номер е в сила неравенството

$$\omega_k(f) \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.38}$$

(Наистина, като умножим (2.38) с дължината $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ на частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ и като сумираме така полученото неравенство по всички $k = 1, 2, \ldots, m$, ще получим неравенството (2.38).)

Ще установим, че за достатъчно големи номера n неравенството (2.38) е изпълнено във всеки сегмент $[x_{n-1}, x_n]$.

За всеки номер n и за всеки две точки x' и x'' от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ е вярно тъждеството

$$f(x') - f(x'') = [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')],$$

от което следва неравенството

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \tag{2.39}$$

От това, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към функцията $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, следва, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon > 0$ ще се намери номер n такъв, че за всички точки x от сегмента $[a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2.40}$$

Като използуваме в лясната страна на (2.39) неравенството (2.40), взето за точка $x = x'$ и за точка $x = x''$, ще получим от (2.39)

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.41}$$

* Ще напомним, че осцилация на функцията в произволен сегмент се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на тази функция в посочения сегмент.

(за избрания от нас достатъчно голям номер n и за всеки две точки x' и x'' от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$).

Тъй като при произволно разположение на точките x' и x'' в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ е вярно неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')| \leq \omega_k(f_n),$$

то от (2.41) ще получим

$$|f(x')-f(x'')| \leq \omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.42}$$

Ще отбележим, че неравенство (2.42) е вярно при произволно разположение на точките x' и x'' в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

Нека означим точната горна и точната долна граница на функцията $f(x)$ в посочения частичен сегмент съответно с M_k и m_k. От определението на точните граници следва, че можем да намерим две редици от точки $\{x_p'\}$ и $\{x_p''\}$ $(p=1, 2, \ldots)$ от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ такива, че

$$\lim_{p\to\infty} x_p' = M_k, \quad \lim_{p\to\infty} x_p'' = m_k.$$

От (2.42) следва за всеки номер p

$$|f(x_p')-f(x_p'')| \leq \omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.43}$$

Като направим в неравенство (2.43) граничен преход по $p\to\infty$ и като отбележим, че границата на лявата част на (2.43) е равна на $M_k - m_k - \omega_k(f)$, ще получим като граница от (2.43) исканото неравенство (2.38).

По такъв начин доказателството на интегруемостта на граничната функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ е завършено.

Ще отбележим, че ако в условието на теорема 2.8 бяхме поискали допълнително непрекъснатост за всяка от функциите $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$ (което се прави в повечето учебници по математически анализ), доказателството на интегруемостта на граничната функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ би станало съвсем тривиално: от следствие 2 от теорема 2.7 при такова допълнително изискване граничната функция $f(x)$ би била непрекъсната в сегмента $[a, b]$, а следователно и интегруема в този сегмент.

Остава да докажем второто твърдение на теорема 2.8, че редицата $\{f_n(x)\}$ може да се интегрира почленно в сегмента $[a, b]$.

Достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

за всички $n \geq N(\varepsilon)$.

Но $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, следователно съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.44}$$

за всички x от сегмента $[a, b]$ и за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N(\varepsilon)$.

От неравенството (2.44) получаваме*

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left|f_n(x)-f(x)\right| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(за всички $n \geq N(\varepsilon)$).

Доказателството на теорема 2.8 е завършено.

Ще формулираме теорема 2.8 на езика на функционалните редове: Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$ и всеки член $u_k(x)$ е интегруема функция в сегмента $[a, b]$, то сумата му $S(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$, при това редът може да бъде почленно интегриран в $[a, b]$, т. е. числовият ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

е сходящ и сумата му е $\int_a^b S(x)dx$.

Забележка. В следващата глава ще бъде получен аналог

* Използуваме следните установени в п. 2, § 4, глава 9, част I оценки: 1) ако $F(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то и $|F(x)|$ е интегруема в $[a, b]$, като при това $\left|\int_a^b F(x)dx\right| \leq \int_a^b |F(x)|dx$; 2) ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в сегмента $[a, b]$ и навсякъде в този сегмент $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

на теорема 2.8 за случая, когато функционалната редица е определена и интегруема в някаква област на m-мерното евклидово пространство E^m (при $m \geq 2$).

2. Почленно диференциране. Занапред под думите «функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$» ще разбираме, че функцията $f(x)$ има обикновена (двустранна) производна във всяка вътрешна точка от сегмента $[a, b]$, дясна производна $f'(a+0)$ в точката a и лява производна $f'(b-0)$ в точката b.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 2.9. Ако всяка функция $f_n(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$, като при това редицата от производните $f_n'(x)$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$, а самата редица $\{f_n(x)\}$ е сходяща поне в една точка x_0 от сегмента $[a, b]$, то редицата $\{f_n(x)\}$ клони към някаква гранична функция $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, като при това тази редица може да бъде диференцирана почленно, т.е. в сегмента $[a, b]$ граничната функция е диференцируема и производната $f'(x)$ е гранична функция за редицата $\{f_n'(x)\}$.

Доказателство. Ще докажем най-напред, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$. От сходимостта на числовата редица $\{f_n(x_0)\}$ и от равномерната сходимост на $\{f_n'(x)\}$ в сегмента $[a, b]$ следва, че за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$(2.45)\qquad |f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{n+p}'(x)-f_n'(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

за всички $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и за всички x от сегмента $[a, b]$.

Нека x е произволна точка от сегмента $[a, b]$. Тъй като за функцията $[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$ при произволни фиксирани номера n и p в сегмента, ограничен от точките x и x_0, са изпълнени всички условия на теоремата на Лагранж, то между x и x_0 ще се намери точка ξ такава, че

$$[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]=[f'_{n+p}(\xi)-f_n'(\xi)](x-x_0).$$

От последното равенство и от това, че модулът на сумата на две величини не надминава сумата от техните модули, ще получим, като използуваме (2.45) и неравенството $|x-x_0| \leq b-a$, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

за всяко x от $[a, b]$, за всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p.

От критерия на Коши следва, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

Остава да покажем, че граничната функция $f(x)$ има производна във всяка фиксирана точка x от сегмента $[a, b]$ (в крайните точки — едностранна производна) и тази производна е гранична функция на редицата $\{f_n'(x)\}$.

Да фиксираме произволна точка x от сегмента $[a, b]$ и по нея $\delta<0$ такова, че δ-околността на точка x изцяло да се съдържа в $[a, b]$ (ако x е крайна точка на сегмента $[a, b]$, под δ-околност на точка x ще разбираме дясна полуоколност $[a, a+\delta)$ на точката a и лява полуоколност $(b-\delta, b]$ на точката b).

Да означим със символа $\{\Delta x\}$ множеството от всички числа Δx, удовлетворяващи условието $0<|\Delta x|<\delta$ при $a<x<b$, условието $0<\Delta x<\delta$ при $x=a$ и условието $-\delta<\Delta x<0$ при $x=b$, и да докажем, че редицата от функции на аргумента Δx

$$\varphi_n(\Delta x)=\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x} \tag{2.46}$$

е равномерно сходяща в посоченото множество $\{\Delta x\}$.

За произволно $\varepsilon>0$ по критерия на Коши за равномерна сходимост на редицата $\{f_n'(x)\}$ ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon \tag{2.47}$$

за всички x от $[a, b]$, всички $n\geq N(\varepsilon)$ и всички естествени p.

Да фиксираме сега произволно Δx от множеството $\{\Delta x\}$ и при произволни фиксирани номера n и p да приложим теоремата на Лагранж към функцията

$$[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$$

в сегмента, ограничен от точките x и $x+\Delta x$.

Съгласно тази теорема ще се намери число θ от интервала $0<\theta<1$ такова, че

$$\frac{[f_{n+p}(x+\Delta x)-f_n(x+\Delta x)]-[f_{n+p}(x)-f_n(x)]}{\Delta x}=f_{n+p}'(x+\theta\Delta x)-f_n'(x+\theta\Delta x).$$

Като използуваме (2.46), последното равенство може да се препише във вида

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=f'_{n+p}(x+\theta\Delta x)-f_n'(x+\theta\Delta x).$$

От последното равенство и от (2.47) заключаваме, че

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon$$

за всяко Δx от $\{\Delta x\}$, всяко $n\geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p. По критерия на Коши (т. е. теорема 2.1) редицата $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ е равномерно сходяща в множеството $\{\Delta x\}$. Но тогава към тази редица може да се приложи теорема 2.7 за почленния граничен преход в точката $\Delta x=0$ (на езика на функционалните редици).

Съгласно тази теорема функцията

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

която е гранична функция за редицата (2.46), има граница в точката $\Delta x=0$, като при това тази граница може да бъде пресметната почленно, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\lim \varphi_n(\Delta x)]=\lim_{n\to\infty}[\lim \varphi_n(\Delta x)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

Това всъщност доказва, че производната на граничната функция $f(x)$ в точката x съществува и е равна на $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Теоремата е доказана.

На езика на функционалните редове теорема 2.8 се формулира така: ако всяка функция $u_k(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и ако редът от производните $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$, а самият ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ е сходящ поне в една точка x_0 от сегмента $[a, b]$, то този ред е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$, като при това може да бъде диференциран в сегмента $[a, b]$ почленно, т. е. неговата сума $S(x)$ има производна, която съвпада със сумата на реда от производните $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.

Забележка 1. Ще подчертаем, че в теорема 2.9 се предполага само съществуване на производна за всеки член на редицата $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$. Нито ограниченост, нито още повече непрекъснатост на посочената производна (както това се прави в повечето учебници по математически анализ) не се предполага.

Забележка 2. Ако все пак предположим допълнително непрекъснатостта на производната на всеки член на редицата в сегмента $[a, b]$, по следствие 2 от теорема 2.7 и граничната функция $f(x)$ ще има производна, непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

Забележка 3. За функции на m променливи теорема 2.9 може да бъде формулирана в следния вид: ако всяка от функциите $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ има в затворената ограничена област G на пространството E^m частна производна $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$ по променливата x_k и ако редицата от производните $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ е равномерно сходяща в областта G, а самата редица $\{f_n(x)\}$ е сходяща във всяка точка от областта G, то редицата $\{f_n(x)\}$ може да бъде диференцирана почленно по променливата x_k в областта G.

От теорема 2.9 лесно се получава следното твърдение.

Теорема 2.10. Ако всяка функция $f_n(x)$ има примитивна в сегмента $[a, b]$ и ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$, то и граничната функция $f(x)$ има примитивна в сегмента $[a, b]$. Още повече, ако x_0 е произволна точка от сегмента $[a, b]$, то редицата от онези примитивни $\Phi_n(x)$ на функциите $f_n(x)$, които удовлетворяват условието $\Phi_n(x_0)=0$, е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$ и клони към онази примитивна $\Phi(x)$ на граничната функция $f(x)$, която удовлетворява условието $\Phi(x_0)=0$.

Доказателство. За редицата от примитивни $\Phi_n(x)$ на функциите $f_n(x)$, които удовлетворяват условието $\Phi_n(x_0)=0$, са изпълнени всички условия на теорема 2.9. Това осигурява равномерната сходимост на редицата $\{\Phi_n(x)\}$ в $[a, b]$, при това нейната гранична функция $\Phi(x)$ има производна във всяка точка от $[a, b]$, равна на граничната функция на редицата $\{f_n(x)\}$. Теоремата е доказана.

Забележка към теорема 2.10

Ще подчертаем, че в условията на теорема 2.10 не изискваме ограниченост, нито още повече интегруемост на функциите $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$.

Теоремите, доказани в този и предните параграфи, ни позволяват да направим следния забележителен извод: равномерната сходимост не извежда от класа на функциите, които имат граница в дадена точка (теорема 2.7), от класа на непрекъснатите функции (следствие 2 от теорема 2.7), от класа на интегруемите функции (теорема 2.8), от класа на функциите, които имат примитивна (теорема 2.10) и (в случай на равномерна сходимост на производните) от класа на диференцируемите функции (теорема 2.9).

3. Интегрална сходимост. Ще поискаме всяка функция $f_n(x)$ от функционалната редица $\{f_n(x)\}$ и функцията $f(x)$ да бъдат интегруеми в сегмента $[a, b]$.

Тогава (както следва от резултатите в § 4, глава 9, част I) и функцията

$$[f_n(x)-f(x)]^2=f_n^2(x)-2f_n(x)\cdot f(x)+f^2(x)$$

също ще бъде интегруема в сегмента $[a, b]$.

Ще въведем фундаменталното понятие за интегрална сходимост.

Определение 1. Ще казваме, че функционалната редица

$\{f_n(x)\}$ клони интегрално в сегмента $[a, b]$ към функцията $f(x)$, ако съществува и е равна на нула границата

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx. \tag{2.48}$$

Определение 2. Ще казваме, че функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

е интегрално сходящ в сегмента $[a, b]$, ако редицата от частичните му суми клони интегрално към функцията $S(x)$ (която ще наричаме сума на реда).

Забележка. От определение 1 непосредствено следва, че ако функционалната редица клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то тази редица клони интегрално към $f(x)$ и във всеки сегмент $[c, d]$, който се съдържа в $[a, b]$.

Аналогична забележка е валидна за интегралната сходимост на функционалните редове.

Ще изясним въпроса за връзката между интегралната сходимост и равномерната сходимост на редици.

Най-напред ще докажем, че ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони към $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, то тази редица клони към $f(x)$ и интегрално в сегмента $[a, b]$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От равномерната сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ следва, че за положителното число $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че е валидно неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{2.49}$$

за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и всички точки x от сегмента $[a, b]$.

Но тогава от теоремите за определен интеграл (гл. п. 2, § 4, глава 9, част I) следва, че

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx\leqq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

за всички $n\geqq N(\varepsilon)$. Това означава, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$.

Сега ще се убедим, че интегралната сходимост в някакъв сегмент не влече след себе си не само равномерна сходимост в този сегмент, но и сходимост в поне една точка от посочения сегмент.

Да разгледаме редицата от съдържащи се в [0, 1] сегменти $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, които имат следния вид:

$$I_1=[0,1],$$

$$I_2=\left[0,\frac{1}{2}\right],\quad I_3=\left[\frac{1}{2},\ 1\right],$$

$$I_4=\left[0,\frac{1}{4}\right],\quad I_5=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right],\quad I_6=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\quad I_7=\left[\frac{3}{4},\ 1\right],$$

. . . .

$$I_{2^n}=\left[0,\frac{1}{2^n}\right],\quad I_{2^n+1}=\left[\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n}\right],\ldots,\ I_{2^{n+1}-1}=\left[1-\frac{1}{2^n},\ 1\right],$$

Определяме n-тия член $f_n(x)$ на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ по следния начин:

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{на сегмента } I_n,\\ 0 & \text{в останалите точки на } [0,1].\end{cases}$$

Да се убедим, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към граничната функция $f(x)\equiv 0$ интегрално в сегмента [0, 1]. Наистина

$$\int_0^1[f_n(x)-f(x)]^2dx=\int_{I_n}dx=\text{дължината на сегмента } I_n, \text{ така че}$$

съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f_n(x)-f(x)]^2dx=0.$$

Да се убедим накрая, че построената редица не е сходяща нито в една точка на сегмента [0, 1].

Наистина каквато и точка x_0 от сегмента [0, 1] да фиксираме, ще се намерят произволно големи номера n, както такива, за които сегментът I_n съдържа точката x_0 (за тези номера $f_n(x_0)=1$), така и такива, за които сегментът I_n не съдържа точка x_0 (за такива номера $f_n(x_0)=0$). По такъв начин редицата $\{f_n(x_0)\}$ съдържа безброй много членове, равни на единица, и безброй много членове, равни на нула. Такава редица е разходяща.

Оказва се, че интегралната сходимост на една редица осигурява възможност за почленно интегриране на тази редица.

Теорема 2.11. Ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то тази редица може да бъде почленно интегрирана в сегмента $[a, b]$, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

съществува и е равна на $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От интегралната сходимост на $\{f_n(x)\}$ към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ следва, че ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx<\frac{\varepsilon^2}{b-a} \tag{2.50}$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Като запишем очевидното неравенство* $|A|.|B|\leq\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$ за величините

$$A=[f_n(x)-f(x)].\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}},\quad B=\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}},$$

ще получим, че

$$|f_n(x)-f(x)|\leq[f_n(x)-f(x)]^2\frac{b-a}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.51}$$

От (2.51) и от теорията на определения интеграл ще получим

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\leq\frac{b-a}{2\varepsilon}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последното неравенство и от (2.50) ще получим при всички $n\geq N(\varepsilon)$

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{2.52}$$

Тъй като

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right|\leq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx,$$

то от (2.52) ще получим

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Теоремата е доказана.

* Това неравенство е еквивалентно на неравенството $(|A|-|B|)^2\geq 0$.

§ 5. Равностепенна непрекъснатост на редица от функции

Да предположим, че всяка от функциите $f_n(x)$ от една функционална редица $\{f_n(x)\}$ е дефинирана в някакво гъсто в себе си множество $\{x\}$ от пространство E^m.

Определение. Ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в множеството $\{x\}$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon \tag{2.53}$$

да е изпълнено за всички номера n и всички точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, които са свързани с условието $\rho(x', x'')<\delta$.

От това определение е очевидно, че ако цялата редица е равностепенно непрекъсната в множеството $\{x\}$, то и всяка нейна подредица е равностепенно непрекъсната в това множество.

За простота на изложението ще разглеждаме редицата $\{f_n(x)\}$ от функции на една променлива x, равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$. По определение за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери $\delta>0$ такова, че неравенство (2.53) е изпълнено за всички номера n и всички точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$, които са свързани с условието $|x'-x''|<\delta$.

Ще докажем следното твърдение, което може да се разглежда като функционален аналог на теоремата на Болцано–Вайерщрас.

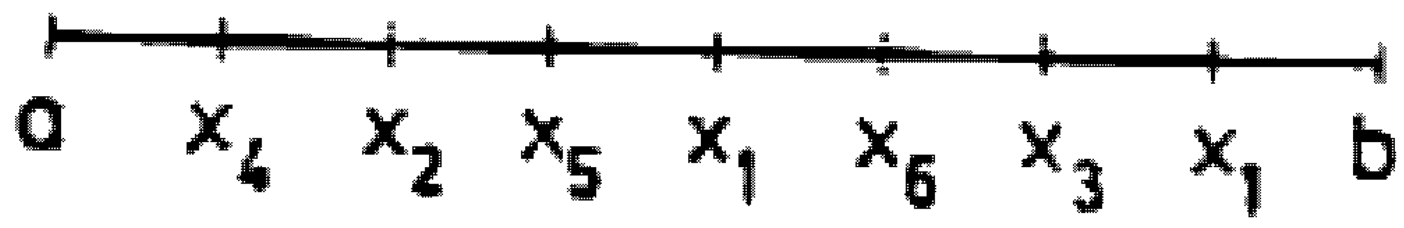
Теорема 2.12 (теорема на Арцела)

Ако функционалната редица $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната и равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$, то от тази редица може да се избере подредица, равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

Доказателство. Да разгледаме в сегмента $[a, b]$ следната специална редица от точки $\{x_i\}$: за x_1 ще вземем тази точка, която дели сегмента $[a, b]$ на две равни части, за x_2 и x_3 ще вземем тези две точки, които заедно с x_1 делят сегмента $[a, b]$ на четири равни части, за x_4, x_5, x_6 и x_7 ще вземем тези четири точки, които заедно с x_1, x_2 и x_3 делят сегмента $[a, b]$ на 8 равни части (гл. рис. 2.3)... Така построената редица има следното свойство: за всяко $\delta>0$ може да се намери номер n_0 такъв, че във всеки принадлежащ на $[a, b]$ сегмент с дължина δ лежи поне един от елементите $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$*.

Сега пристъпваме към избора на редица $\{f_n(x)\}$ на равномерно сходяща в $[a, b]$ подредица. Най-напред да разгледаме редицата $\{f_n(x_1)\}$. Тя е ограничена и на основание на теоремата на Болцано—Вайерщрас (ч. I, гл. 3, § 4) можем да изберем сходяща подредица

* За редица, която има такова свойство, казват, че тя е гъста в сегмента $[a, b]$.



Фиг. 2. 3

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1)\ ,\ \dots\ ,\ f_{1n}(x_1),\ \dots$$

По-нататък разглеждаме числовата редица

$$f_{11}(x_2),\ f_{12}(x_2),\ \dots,\ f_{1n}(x_2),\ \dots .$$

По теоремата на Болцано—Вайерщрас от нея може да се избере сходяща подредица

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \dots\ ,\ f_{2n}(x_2),\ \dots$$

Така функционалната редица

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \dots\ ,\ f_{2n}(x),\ \dots \tag{2.54}$$

е сходяща и в точка x_1, и в точка x_2.

По-нататък разглеждаме функционалната редица (2.54) в точка x_3 и избираме от нея сходяща подредица

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3),\ \dots\ ,\ f_{3n}(x_3),\ \dots$$

С аналогични разсъждения ще получим безброй много подредици:

$$\begin{array}{l}
f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ f_{13}(x),\ \dots\ ,\ f_{1n}(x),\ \dots\\
f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ f_{23}(x),\ \dots\ ,\ f_{2n}(x),\ \dots\\
f_{31}(x),\ f_{32}(x),\ f_{33}(x),\ \dots\ ,\ f_{3n}(x),\ \dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ f_{n3}(x),\ \dots\ ,\ f_{nn}(x),\ \dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{array}$$

при това подредицата, стояща в n-тия ред, е сходяща във всяка от точките $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n$.

Да разгледаме сега така наречената «диагонална» подредица

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ f_{33}(x),\ \dots\ ,\ f_{nn}(x),\ \dots$$

Ще докажем, че тази подредица е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

За краткост на записа по-долу ще означаваме тази диагонална подредица (както и изходната редица) със символа

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \dots\ ,\ f_n(x),\ \dots ,$$

т. е. вместо удвоения индекс ще пишем единичен. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$.

Тъй като диагоналната редица е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то за фиксираното $\varepsilon>0$ ще се намери $\delta>0$ такова, че за всеки две точки x и x_m от сегмента $[a, b]$, свързани с неравенството $|x-x_m|<\delta$, е вярно неравенството

$$|f_n(x)-f_n(x_m)|<\delta \tag{2.55}$$

за всички номера n. Забелязвайки това, делим сегмента $[a, b]$ на краен брой отсечки с дължина, по-малка от δ. От редицата $\{x_n\}$ ще изберем n_0 първи членове $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ така, че във всяка от споменатите отсечки да се съдържа поне една от точките $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$.

Очевидно е, че диагоналната редица е сходяща във всяка от точките $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$. Затова за фиксираното по-горе $\varepsilon>0$ ще се намери номер N такъв, че

$$|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.56}$$

за всички $n\geqq N$, всички естествени p и всички $m=1, 2, \dots, n_0$.

Нека сега x е произволна точка от сегмента $[a, b]$. Тази точка обезателно лежи в една от споменатите по-горе отсечки с дължина, по-малка от δ. Затова за тази точка x ще се намери поне една точка x_m (m е един от номерата, равни на $1, 2, \dots, n_0$), която да удовлетворява условието $|x-x_m|<\delta$.

Поради това, че модулът от сумата на три величини не надминава сумата на техните модули, можем да напишем

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leq |f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_m)|+\\ +|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|+|f_n(x_m)-f_n(x)|.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Вторият член в дясната част на (2.57) ще оценим с помощта на неравенство (2.56), а за оценката на първия и третия член в дясната част ще вземем под внимание, че $|x-x_m|<\delta$, и ще привлечем неравенство (2.55), което е изпълнено за всеки номер n (а значи и за всяко $n+p$).

Окончателно ще получим, че за произволно $\varepsilon>0$ ще се намери номер N такъв, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

за всички $n\geqq N$, всички естествени p и всяка точка x от $[a, b]$. Равномерната сходимост на диагоналната редица е доказана. Теорема 2.12 е доказана.

Забележка 1. В теоремата на Арцела вместо равномерната ограниченост на редицата $\{f_n(x)\}$ в сегмента $[a, b]$ е достатъчно да се поиска ограниченост на тази редица поне в една точка на този сегмент. Наистина вярно е следното твърдение: ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и е ограничена поне в една точка x_0 от този сегмент, то тази редица е равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$. За доказателството на това твърдение ще отбележим, че по определението на равностепенната непрекъснатост за $\varepsilon=1$ ще се намери $\delta>0$ такова, че осцилацията на всяка функция $f_n(x)$ в произволен сегмент с дължина, ненадминаваща δ, не надминава числото $\varepsilon=1$. Тъй като целият сегмент $[a, b]$ може да се покрие с краен брой n_0 сегменти с дължина, ненадминаваща δ, то колебанието на всяка функция $f_n(x)$ в целия сегмент $[a, b]$ не надминава числото n_0. Но тогава от неравенството $|f_n(x_0)|\leq A$, изразяващо ограничеността на редицата $\{f_n(x)\}$ в точка x_0, следва неравенството $|f_n(x)|\leq A+n_0$, което е изпълнено за всяка точка x от сегмента $[a, b]$ и изразява равномерната ограниченост на разглежданата редица в този сегмент.

Забележка 2. Ще установим признак за равностепенна непрекъснатост: ако редицата $\{f_n(x)\}$ се състои от диференцируеми в сегмента $[a, b]$ функции и ако редицата от производните $\{f_n'(x)\}$ е равномерно ограничена в този сегмент, то редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

За доказателство да вземем в сегмента $[a, b]$ две произволни точки x' и x'' и да напишем за функцията $f_n(x)$ в сегмента $[x', x'']$ формулата на Лагранж (гл. част I, глава 6, § 3).

Съгласно теоремата на Лагранж в сегмента $[x', x'']$ ще се намери точка ξ_n такава, че

$$|f_n(x')-f_n(x'')|=|f_n'(\xi_n)|\cdot|x'-x''|. \tag{2.58}$$

Тъй като редицата от производните $\{f_n'(x)\}$ е равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$, то ще се намери константа A такава, че за всички номера n да е изпълнено неравенството

$$|f_n'(\xi_n)|\leq A. \tag{2.59}$$

Като поставим (2.59) в (2.58), ще получим

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\leq A\,|x'-x''|. \tag{2.60}$$

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Тогава, ако вземем $\delta=\frac{\varepsilon}{A}$ и използуваме (2.60), ще получим, че за всички номера n и за всички x' и x'' от $[a, b]$, които са свързани с условието $|x'-x''|<\delta$, ще бъде вярно неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Равностепенната непрекъснатост на редицата $\{f_n(x)\}$ е доказана.

Като пример ще разгледаме редицата $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$. Тази редица непрекъсната във всеки сегмент $[a, b]$, защото във $[a, b]$ редицата от производните $\{\cos nx\}$ е равномерно

3. Понятието равностепенна непрекъснатост може не по отношение на редица от функции, а по отно множество от функции.

§ 6. Степенни редове

Област на сходимост. Степенен ред ще наричаме ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са постоянни реални числа, наречени на реда (2.61).

изясним как е устроена областта на сходимост на произ- ред.

че всеки степенен ред е сходящ в точката $x=0$, при това съществуват степенни редове, които са сходящи само точка (например редът $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$).

С помощта на коефициентите a_n на реда (2.61) съставяме след- редица:

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Възможни са два случая: 1) редицата (2.62) е неограничена; редицата (2.62) е ограничена.

В случай 2) редицата (2.62) има крайна горна точка на сгъ- яване (лимес супериор) (гл. п. 1, § 3, глава 3, част I), която ние означим с L. Ще подчертаем, че посочената горна точка на сигурно е неотрицателна (защото всички елементи на дицата (2.62) са неотрицателни, а следователно и всяка точка на на тази редица е неотрицателна).

Достигаме до извода, че са възможни три случая: I) редицата е неограничена; II) редицата (2.62) е ограничена и има крайна точка на сгъстяване $L>0$; III) редицата (2.62) е ограничена горна точка на сгъстяване $L=0$.

докажем следното забележително твърдение.

Теорема 2.13 (теорема на Коши—Адамар)

I. Ако редицата (2.62) е неограничена, то степенният ред (2.61) е сходящ само при $x=0$.

II. Ако редицата (2.62) е ограничена и има горна точка на сгъстяване $L>0$, то редът (2.61) е абсолютно сходящ за онези значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x|<\frac{1}{L}$, и е разходящ за онези значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x|>\frac{1}{L}$.

III. Ако редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване L е равна на нула, то редът (2.61) е абсолютно сходящ за всички значения на x.

Доказателство

I. Нека редицата (2.62) е неограничена. Тогава при $x\neq 0$ редицата

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|a_nx^n|}$$

също ще бъде неограничена, т. е. тази редица ще има членове с произволно големи номера n, удовлетворяващи неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}<1 \quad \text{или} \quad |a_nx^n|>1.$$

Но това означава, че за реда (2.61) (при $x\neq 0$) е нарушено необходимото условие за сходимост (гл. п. 2, § 1, глава 1), т. е. редът (2.61) е разходящ при $x\neq 0$.

II. Нека редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване L е строго положителна. Ще докажем, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при $|x|<\frac{1}{L}$ и разходящ при $|x|>\frac{1}{L}$.

а) Фиксираме отначало произволно x, удовлетворяващо неравенството $|x|<\frac{1}{L}$. Тогава ще се намери $\varepsilon>0$ такова, че $|x|<\frac{1}{L+\varepsilon}$. От свойствата на горната точка на сгъстяване следва, че всички елементи на $\sqrt[n]{|a_n|}$, като започнем от някакъв номер n, удовлетворяват неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

По такъв начин от посочения номер n нататък е вярно неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{L+\varepsilon/2}{L+\varepsilon}<1,$$

т. е. редът (2.61) е абсолютно сходящ по признака на Коши (гл. п. 3, § 2, глава 1).

б) Сега фиксираме произволно x, удовлетворяващо неравенството $|x|>\frac{1}{L}$.

Тогава ще се намери $\varepsilon>0$ такова, че $|x|>\frac{1}{L-\varepsilon}$. По определението на горната точка на сгъстяване имаме, че от редицата (2.62) може да се избере подредица $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, клоняща към L.

Но това означава, че от някакъв номер k нататък е вярно неравенството

$$L-\varepsilon<\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}<L+\varepsilon.$$

По такъв начин от посочения номер k нататък е изпълнено неравенството

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}\cdot x^{n_k}|}=|x|\cdot\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon}=1$$

или

$$|a^{n_k}\cdot x^{n_k}|>1,$$

т. е. нарушено е необходимото условие за сходимост на реда (2.61) и този ред е разходящ.

III. Нека редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване е $L=0$. Ще докажем, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при всяко x.

Фиксираме произволно $x\neq0$ (при $x=0$ редът (2.61) е абсолютно сходящ). Т. к. горната точка на сгъстяване L е равна на нула и редицата (2.62) не може да има отрицателни точки на сгъстяване, то числото $L=0$ е единствена точка на сгъстяване, а следователно и граница на тази редица, т. е. редицата (2.62) е безкрайно малка.

Но тогава за положителното число $\frac{1}{2}\frac{1}{|x|}$ ще се намери номер, започвайки от който

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2}\frac{1}{|x|}.$$

Значи от посочения номер нататък

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. редът (2.61) е абсолютно сходящ по признака на Коши (гл. п. 3, § 2, глава 1). Теоремата е доказана.

Доказаната теорема води непосредствено до следното фундаментално твърдение.

Теорема 2.14. За всеки степенен ред (2.61) съществува неотрицателно число R (което може да бъде ∞) такова, че този ред е абсолютно сходящ при $|x|<R$ и разходящ при $|x|>R$.

Това число R се нарича радиус на сходимост на разглеждания степенен ред, а интервалът $(-R, R)$ се нарича интервал на сходимост. Радиусът на сходимост се пресмята по формулата

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.63}$$

(в случай на $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ имаме $R = \infty$).

Забележка 1. В краищата на интервала на сходимост, т. е. в точките $x=-R$ и $x=R$, степенният ред може да бъде както сходящ, така и разходящ*.

Тъй като за реда $1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ радиусът на сходимост R е равен на единица, то интервалът на сходимост има вида $(-1, 1)$ и този ред е разходящ в краищата на посочения интервал.

За реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ интервалът на сходимост е същият $(-1, 1)$, но този ред е сходящ в двата края на посочения интервал.

Забележка 2. Всички резултати от настоящия пункт са валидни за реда (2.61), в който реалната променлива x е заменена с комплексната променлива z и коефициентите a_n са произволни комплексни числа.

За такъв ред се установява съществуването на положително число R такова, че редът е абсолютно сходящ при $|z|<R$ и разходящ при $|z|>R$.

За пресмятане на R е валидна формула (2.63). Числото R се

* Ще отбележим следната теорема на Абел: ако степенният ред (2.61) е сходящ при $x=R$, то неговата сума $S(x)$ е непрекъсната в точката R отляво. Без ограничения на общността може да се смята, че $R=1$, но в такъв вид теоремата на Абел (фактически установяваща регулярността на метода за сумиране на Поасон—Абел) е доказана в п. 2, § 7, глава 1.

нарича радиус на сходимост, а областта $|z|<R$ — кръг на сходимост на посочения ред.

2. Непрекъснатост на сумата на степенен ред. Нека степенният ред (2.61) има радиус на сходимост $R>0$.

Лема 2. Ако положителното число r удовлетворява условието $r<R$, то редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[-r, r]$, т. е. при $|x|\leqq r$.

Доказателство. От теорема 2.14 следва, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при $x=r$, т. е. сходящ е редът

$$|a_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot r^n.$$

Но последният числов ред мажорира реда (2.61) при всички x от сегмента $[-r, r]$. По признака на Вайерщрас редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[-r, r]$. Лемата е доказана.

Следствие. В условията на лема 2 сумата на реда (2.61) е непрекъсната функция в сегмента $[-r, r]$ (по теорема 2.7).

Теорема 2.15. Сумата на степенния ред е непрекъсната функция във всички вътрешни точки от неговия интервал на сходимост.

Доказателство. Нека $S(x)$ е сумата на степенния ред (2.61), а R — неговият радиус на сходимост. Фиксираме произволно x от вътрешността на интервала на сходимост, т. е. такова, че $|x|<R$. Винаги ще се намери число r такова, че $|x|<r<R$. Съгласно следствието от лема 2 функцията $S(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-r, r]$. Следователно $S(x)$ е непрекъсната и в точката x. Теоремата е доказана.

3. Почленно интегриране и почленно диференциране на степенен ред

Теорема 2.16. Ако $R>0$ е радиусът на сходимост на степенния ред (2.61), а x удовлетворява условието $|x|<R$, то редът (2.61) може да бъде интегриран почленно в сегмента $[0, x]$. Полученият в резултат на почленното интегриране ред има същия радиус на сходимост R, както и изходният ред.

Доказателство. За всяко x, удовлетворяващо условието $|x|<R$, ще се намери r такова, че $|x|<r<R$. Съгласно лема 2 редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[0, x]$, а значи и в сегмента $[0, x]$. Но тогава от теорема 2.8 следва, че този ред може да бъде интегриран почленно в сегмента $[0, x]$.

В резултат на почленното интегриране ще се получи степенният ред

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\dots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\dots,$$

радиусът на сходимост на който съгласно теорема 2.4 е реципрочната стойност на горната точка на сгъстяване на редицата

$$\text{(2.64)}\qquad \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}=\frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Тъй като горната точка на сгъстяване на редицата (2.64) е същата като тази на редицата (2.62)*, то теоремата е доказана.

Теорема 2.17. Степенният ред (2.61) може да бъде диференциран почленно във всяка вътрешна точка от неговия интервал на сходимост. Редът, получен при почленното диференциране, има същия радиус на сходимост R, както и изходният ред.

Доказателство. Достатъчно е (съгласно теорема 2.9, лема 2) да се докаже само второто твърдение на теоремата.

В резултат на почленното диференциране на (2.61) ще получим реда

$$a_1+2a_2x+\dots+na_{n-1}x^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\dots,$$

чийто радиус на сходимост R съгласно теорема 2.14 е реципрочен на горната точка на сгъстяване на редицата

$$\text{(2.65)}\qquad \left\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\right\}.$$

Тъй като редицата (2.65) има същата горна точка на сгъстяване като (2.62)**, то теоремата е доказана.

Следствие. Степенният ред може да бъде диференциран по-

* Защото $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n-1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{|a_n|}=$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}^{\frac{n}{n+1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$.

** Защото $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n-1]{|a_n|}=$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}^{\frac{n}{n-1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$.

членно във вътрешността на интервала на сходимост произволен брой пъти.

Редът, получен при n-кратното почленно диференциране на изходния ред има същия радиус на сходимост, както изходният ред.

§ 7. Разлагане на функции в степенни редове

1. Разлагане на функция в степенен ред

Определение. Ще казваме, че функцията $f(x)$ може да бъде разложена в степенен ред в интервала $(-R, R)$ (в множеството $\{x\}$), ако съществува сходящ в посочения интервал (посоченото множество) степенен ред, чиято сума е $f(x)$.

В сила са следните твърдения.

1°. Ако една функция $f(x)$ се разлага в степенен ред в интервала $(-R, +R)$, то тя има в този интервал производни от произволен ред*.

Наистина вътре в интервала на сходимост, който съдържа интервала $(-R, +R)$, степенният ред може да бъде диференциран почленно произволен брой пъти, като получените при това редове са сходящи във вътрешността на същия интервал на сходимост (теорема 2.17).

Но тогава сумите на редовете, получени чрез произволен брой диференцирания по теорема 2.15, са непрекъснати функции в интервала $(-R, +R)$.

2°. Ако функцията $f(x)$ може да бъде разложена в интервала $(-R,R)$ в степенен ред, то това може да стане само по един начин.

Наистина нека функцията $f(x)$ се разлага в интервала $(-R,+R)$ в степенен ред (2.61).

Като диференцираме посочения ред почленно n пъти (което със сигурност може да се направи вътре в интервал $(-R, +R)$), ще получим

$$f^{(n)}(x)=a_n\,.\,n!+a_{n+1}\,.\,(n+1)!x+\dots$$

Оттук при $x=0$ ще намерим

* Ще отбележим, че съществуват функции, които имат в даден интервал непрекъснати производни от произволен ред, но не могат да бъдат разложени в този интервал в степенен ред. Такава функция е например

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

$$f^{(n)}(0)=a_n\,.\,n!$$

или

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{2.66}$$

Така коефициентите на степенния ред (2.61), в който може да бъде разложена $f(x)$, се определят еднозначно по формула (2.66).

Да предположим сега, че функцията $f(x)$ има в интервала $(-R, +R)$ непрекъснати производни от произволен ред.

Определение 2. Степенният ред (2.61), коефициентите на който се определят по формула (2.66), се нарича ред на Тейлор за функцията $f(x)$.

Твърдение 2° ни води до следното твърдение.

3°. Ако функция $f(x)$ може да бъде разложена в интервала $(-R, +R)$ в степенен ред, то този ред съвпада с реда на Тейлор за функцията $f(x)$.

В заключение ще формулираме следното твърдение, което следва непосредствено от § 8, глава 6, част I.

4°. За да може функцията $f(x)$ да бъде разложена в ред на Тейлор в интервала $(-R, +R)$ (в множеството $\{x\}$), е необходимо и достатъчно остатъчният член във формулата на Маклорен за тази функция да клони към нула в посочения интервал (посоченото множество).

2. Разлагане на някои елементарни функции в ред на Тейлор. В част I (п. 2, § 9, глава, 6) е доказано, че остатъчните членове във формулата на Маклорен за функциите e^x, $\cos x$ и $\sin x$ клонят към нула на цялата безкрайна права, а остатъчният член във формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ клони към нула в полусегмента $-1<x\leqq+1$.

Като използуваме твърдение 4° от предния пункт, получаваме следните разлагания:

$$e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Първите три разлагания са сходящи за всички значения на x, а последното — за значенията на x от полусегмента $-1<x\leq+1$.

Да се спрем сега на разлагането в степенен ред на функцията $(1+x)^\alpha$ (наречено биномен ред).

Ако $f(x)=(1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Затова формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Коши има вида (гл. част I, глава 6, § 8)

$$(2.67)\qquad (1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_{n+1}(x),$$

където

$$R_{n+1}(x)=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)=$$

$$=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}.\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}=$$

$$(2.68)\qquad =\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}.x^{n+1}$$

(θ — някакво число от интервала $0<\theta<1$).

Най-напред ще се убедим в това, че при $\alpha>0$ навсякъде в интервала $-1<x<1$ остатъчният член $R_{n+1}(x)$ клони към нула (при $n\to\infty$).

Наистина всички членове на редицата $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)\right\}^n$ навсякъде в посочения интервал не надминават единица; редицата $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right\}$ е ограничена, а числото $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ е ограничено при всяко фиксирано $\alpha>0$ и при всяко x от интервала $-1<x<1$; и най-после редицата $\{x^{n+1}\}$ е безкрайно малка за произволно x от интервала $-1<x<1$.

Следователно от (2.67) следва, че при $\alpha>0$ навсякъде в интервала $-1<x<1$ е валидно разлагането

$$(2.69)\qquad (1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k.$$

Сега ще докажем, че при $\alpha>0$ редът, стоящ в дясната част на (2.69), е равномерно сходящ в затворения сегмент $-1\leq x\leq 1$ и неговата сума е $(1+x)^{\alpha}$.

Навсякъде в посочения сегмент този ред се мажорира от следния числов ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha(1-\alpha)\ldots(k-1-\alpha)|}{k!}. \tag{2.70}$$

От признака на Вайерщрас следва, че за установяване на равномерната в сегмента $-1\leq x\leq +1$ сходимост на реда, стоящ в дясната част на (2.69), е достатъчно да се докаже сходимостта на мажориращия ред (2.70).

Да означим k-тия член на реда (2.70) със символа p_k. Тогава за всички достатъчно големи k ще получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k-\alpha}{k+1}=1-\frac{1+\alpha}{k+1}. \tag{2.71}$$

От формула (2.71) следва, че

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=(1+\alpha)\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1+\alpha>1,$$

т. е. редът (2.70) е сходящ по признака на Раабе (глава 1, § 2, п. 5).

С това е доказано, че при $\alpha>0$ редът, стоящ в дясната част на (2.69), е равномерно сходящ в сегмента $-1\leq x\leq +1$. Остава да се покаже, че сумата на посочения ред в сегмента $-1\leq x\leq +1$ съвпада с функцията $(1+x)^{\alpha}$.

От казаното по-горе сумата на посочения ред $S(x)$ и функцията $(1+x)^{\alpha}$ съвпадат навсякъде в интервала $-1<x<+1$. Освен това двете функции $S(x)$ и $(1+x)^{\alpha}$ са непрекъснати в сегмента $-1\leq x\leq +1$ (сумата $S(x)$ като сума на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции; непрекъснатостта на функцията $(1+x)^{\alpha}$ при $\alpha>0$ е очевидна).

Но тогава значенията на функциите $S(x)$ и $(1+x)^{\alpha}$ в точките $x=-1$ и $x=1$ съвпадат, т. е. сумата на реда, стоящ в дясната част на (2.69), е $(1+x)^{\alpha}$ в затворения сегмент.

3. Елементарни понятия за функции на комплексна променлива. По-горе вече бе отбелязано, че за степенен ред относно комплексна променлива z

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

теореми (2.13) и (2.14) (за съществуването и големина радиуса на сходимост). Редове от този тип се използват функции на комплексната променлива z.

e^z, $\cos z$ и $\sin z$ на комплексната променлива z се като суми на следните редове:

$$e^z = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

се проверява, че посочените три реда са абсолютно сходящи значения на z (техният радиус на сходимост е $R=\infty$). ще установим връзка между функциите e^z, $\cos z$ и $\sin z$. заместим във формула (2.72) z с iz, ще получим

$$e^{iz} = 1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\ldots =$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right).$$

Като съпоставим дясната част на равенство (2.75) с разлага- (2.73) и (2.74), стигаме до следната забележителна формула:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

Формула (2.76) играе фундаментална роля в теорията на функ- на комплексна променлива и се нарича формула на Ойлер. Като положим във формулата на Ойлер променливата z, равна на реалното число x, а след това на реалното число $-x$, получим следните две формули:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

и извадим тези две формули, ще получим формули, $\cos x$ и $\sin x$ чрез показателната функция

$$(2.77)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \\[2mm] \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \end{cases}$$

Накрая ще се спрем на определението на логаритмичната функция $w=\ln z$ на комплексната променлива z. Тази функция естествено се определя като функция, обратна на показателната, т. е. от съотношението $z=e^w$. Полагаме $w=u+iv$, $z=x+iy$ и си поставяме за цел да изразим u и v чрез $z=x+iy$.

От съотношението

$$z=x+iy=e^{u+iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$$

ще получим, като използуваме понятията модул и аргумент на комплексното число,

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=e^u, \quad \arg z=v-2\pi k,$$

където

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

От последните равенства намираме, че

$$u=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2},$$

$$v=\arg z+2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или окончателно

(2.78) $\quad \ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$, където $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Формула (2.78) показва, че логаритмичната функция в комплексната равнина не е еднозначна: нейната имагинерна част за едно и също значение на z има безброй много значения, отговарящи на различни $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Лесно се вижда, че аналогична ситуация ще имаме и при определянето даже в реалната област на обратните тригонометрични функции.

4. Равномерно апроксимиране на непрекъсната функция с многочлени (теорема на Вайерщрас). В този пункт ще докажем фундаментална теорема, принадлежаща на Вайерщрас и установена от него в 1895 г.

Теорема 2.18 (теорема на Вайерщрас). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то съществува редица от многочлени $\{P_n(x)\}$, равномерно в сегмента $[a, b]$ клоняща към $f(x)$, т. е. за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери многочлен $P(x)$ такъв, че

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

едновременно за всички x от сегмента $[a, b]$.

С други думи, непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ може равномерно в този сегмент да се апроксимира с многочлен с отнапред зададена точност ε.

Доказателство. Без да ограничаваме общността, можем сегмента $[a, b]$ да разглеждаме сегмента $[0,1]$*. Освен това е да докажем теоремата за непрекъсната функция $f(x)$, става нула в краищата на сегмента $[0,1]$, т. е. удовлетворява $f(0)=0$ и $f(1)=0$. Наистина, ако $f(x)$ не удовлетворява и условия, като положим

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)],$$

получим непрекъсната в сегмента $[0,1]$ функция $g(x)$, удовлетворяваща условията $g(0)=0$ и $g(1)=0$, и от възможността за представяне на $g(x)$ като граница на равномерно сходяща редица от ще следва, че и $f(x)$ е граница на равномерно сходяща от многочлени (защото разликата $f(x)-g(x)$ е многочлен първа степен).

И така нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0,1]$ удовлетворява условията $f(0)=0$, $f(1)=0$. Такава функция можем продължим в цялата безкрайна права, като я положим равна нула извън границите на сегмента $[0,1]$, и можем да твърдим, така продължената функция е равномерно непрекъсната в цялата права.

Да разгледаме следната конкретна редица от неотрицателни от степен $2n$:

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{2.79}$$

всеки от които константата c_n е избрана така, че е изпълнено равенството

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx=1.$$

Без да пресмятаме точното значение на константата c_n, ще я отгоре.

За целта ще отбележим, че за всеки номер $n=1, 2, \ldots$ и за x от сегмента $[0,1]$ е вярно неравенството**

$$(1-x^2)^n \geq 1-nx^2.$$

Като приложим неравенство (2.81) и вземем под внимание, че ≤ 1 при всяко $n \geq 1$, ще имаме

* Тъй като единият от тези сегменти се преобразува в другия посредством линейната смяна $x=(b-a)t+a$.

** Това неравенство следва от това, че при $n \geq 1$ функцията $\varphi(x)=(1-x^2)^n-(1-nx^2)$ е неотрицателна навсякъде в сегмента $0 \leq x \leq 1$, защото тази функция става нула при $x=0$ и има навсякъде в посочения сегмент неотрицателна производна $\varphi'(x)=2nx[1-(1-x^2)^{n-1}]$.

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx=2\int_0^1(1-x^2)^n dx\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx\geq$$

(2.82)
$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)dx=\frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

От (2.79), (2.80) и (2.82) заключаваме, че за всички номера $n=1, 2, \ldots$ е вярна следната оценка отгоре за постоянната c_n:

(2.83)
$$c_n<\sqrt{n}\,.$$

От (2.83) и (2.79) следва, че при всяко $\delta>0$ за всички x от сегмента $\delta\leq|x|\leq 1$ е вярно неравенството

(2.84)
$$0\leq Q_n(x)\leq\sqrt{n}\;(1-\delta^2)^n\,.$$

От (2.84) следва, че при всяко фиксирано $\delta>0$ редицата от неотрицателни многочлени $\{Q_n(x)\}$ клони към нула равномерно в сегмента $\delta\leq|x|\leq 1$*.

Да положим сега за всяко x от сегмента $0\leq x\leq 1$

(2.85)
$$P_n(x)=\int_{-1}^{+1} f(x+t)\,Q_n(t)dt$$

и да се убедим в това, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ функцията $P_n(x)$ е многочлен от степен $2n$ и при това $\{P_n(x)\}$ е търсената редица от многочлени, която клони равномерно в сегмента $[0,1]$ към функцията $f(x)$.

Тъй като изучаваната функция $f(x)$ е равна на нула извън сегмента $[0,1]$, то за всяко x от сегмента $[0,1]$ интегралът (2.85) може да бъде записан във вида

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt.$$

Като заменим в последния интеграл променливата t с $t-x$, ще му придадем следния вид:

(2.86)
$$P_n(x)=\int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt.$$

* Наистина достатъчно е да се докаже, че редицата $a_n=(1-\delta^2)^n\sqrt{n}$ клони към нула, но тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=(1-\delta^2)\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2n}}=(1-\delta^2)<1$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ по признака на Коши (гл. теорема 1.6 от глава 1).

От (2.86) и (2.79) е ясно, че функцията $P_n(x)$ е многочлен от степен $2n$.

Остава да се докаже, че редицата $\{P_n(x)\}$ клони към $f(x)$ равномерно в сегмента $0 \leq x \leq 1$.

Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. За фиксираното ε от равномерната непрекъснатост на $f(x)$ на цялата безкрайна права следва, че ще се намери $\delta > 0$ такова, че

(2.87) $$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x - y| < \delta.$$

Ще отбележим още, че тъй като $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0,1]$, то тя е и ограничена в този сегмент, а следователно и навсякъде в безкрайната права. Това означава, че съществува константа A такава, че за всички x

(2.88) $$|f(x)| \leq A.$$

Като използуваме (2.80), (2.84), (2.87) и (2.88) и като използуваме неотрицателността на $Q_n(x)$, да оценим разликата $P_n(x) - f(x)$.

За всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$ ще имаме

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\, Q_n(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\, dt \leq 2A \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2A \int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \leq 4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

За да завършим доказателството на теоремата, е достатъчно да отбележим, че за всички достатъчно големи номера n е вярно неравенството

$$4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствие. Ако не само функцията $f(x)$, но и нейните производни до някакъв ред k включително са непрекъснати в сегмента $[0,1]$*, то съществува редица от многочлени $\{P_n(x)\}$ такава, че всяка от редиците $\{P_n(x)\}$, $\{P_n'(x)\}, \ldots, \{P_n^{(k)}(x)\}$ е равномерно сходяща и клони съответно към $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$.

Наистина, без да ограничаваме общността, можем да смятаме, че всяка от функциите $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ приема стойност нула

* Разбира се, вместо $[0,1]$ може да се вземе $[a, b]$.

при $x=0$ и при $x=1$*, а при такива условия функцията $f(x)$ може да се продължи в цялата безкрайна права, като я положим равна на нула извън $[0,1]$ така, че продължената функция и всичките ѝ производни до k-тия ред включително ще се окажат равномерно непрекъснати в цялата безкрайна права.

Но тогава, като означим с $P_n(x)$ същия като по-горе многочлен (2.85) и повторим разсъжденията, проведени при доказателството на теорема (2.18), ще докажем, че всяка от разликите

$$P_n(x)-f(x),\ P_n'(x)-f'(x),\ \dots,\ P_n^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)$$

е безкрайно малка равномерно относно x в сегмента $0\leq x\leq 1$.

Забележка 1. Изложеното от нас доказателство лесно се обобщава за случая на функция на m променливи $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, непрекъсната в m-мерния куб $0\leq x_i\leq 1$ $(i=1,2,\dots, m)$. По същия начин, както в теорема 2.18, се доказва, че за всяка функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ съществува равномерно сходяща в m-мерния куб редица от многочлени на m променливи $x_1, x_2, \dots, x_m$, която клони към нея в този куб.

Забележка 2. Ще отбележим, че фигуриращите в теорема 2.18 многочлени може да бъдат заменени с по-общи класове функции, като се запази при това твърдението за възможността за апроксимиране с такива функции на произволна непрекъсната функция f.

Ще се уговорим да наричаме произволна съвкупност A от функции, определени в някакво множество E, алгебра, ако** 1) $f+g\in A$; 2) $f.g\in A$; 3) $\alpha.f\in A$ при произволни $f\in A$ и $g\in A$ и при всяко реално α.

С други думи, алгебрата е съвкупност от функции, затворена относно събирането и умножението на функции и умножението на функции с реални числа.

Ако за всяка точка x от множеството E може да се намери някаква функция $g\in A$ такава, че $g(x)\neq 0$, ще казваме, че алгебрата A не се анулира в нито една точка x от множеството E.

Ще казваме, че съвкупността A от функции, определени в множеството E, разделя точките на множеството E, ако за всеки две различни точки x_1 и x_2 от това множество може да се намери функция f от A такава, че $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Вярно е следното забележително твърдение, наречено теорема на Вайерщрас — Стоун***:

* Ако $f(x)$ удовлетворява тези условия, то ние можем да намерим многочлен $\bar{P}_k(x)$ от степен $2k$ такъв, че за функцията $g(x)=f(x)-P_k(x)$ тези условия да бъдат изпълнени.

** Ще напомним, че символът $f\in A$ означава принадлежността на f към A.

*** М. Стоун — съвременен американски математик.

Нека A е алгебра от непрекъснати в компактното* множество функции, която разделя точките на множеството E и не се ану-ира в нито една точка на това множество. Тогава всяка непре-[illegible] в множеството E функция $f(x)$ може да бъде предста-ена като граница на равномерно сходяща редица от функции от [illegible] A.

* Ще напомним, че компактно се нарича всяко затворено и ограничено подмножество на E^n.

3. Двойни и n-кратни интеграли

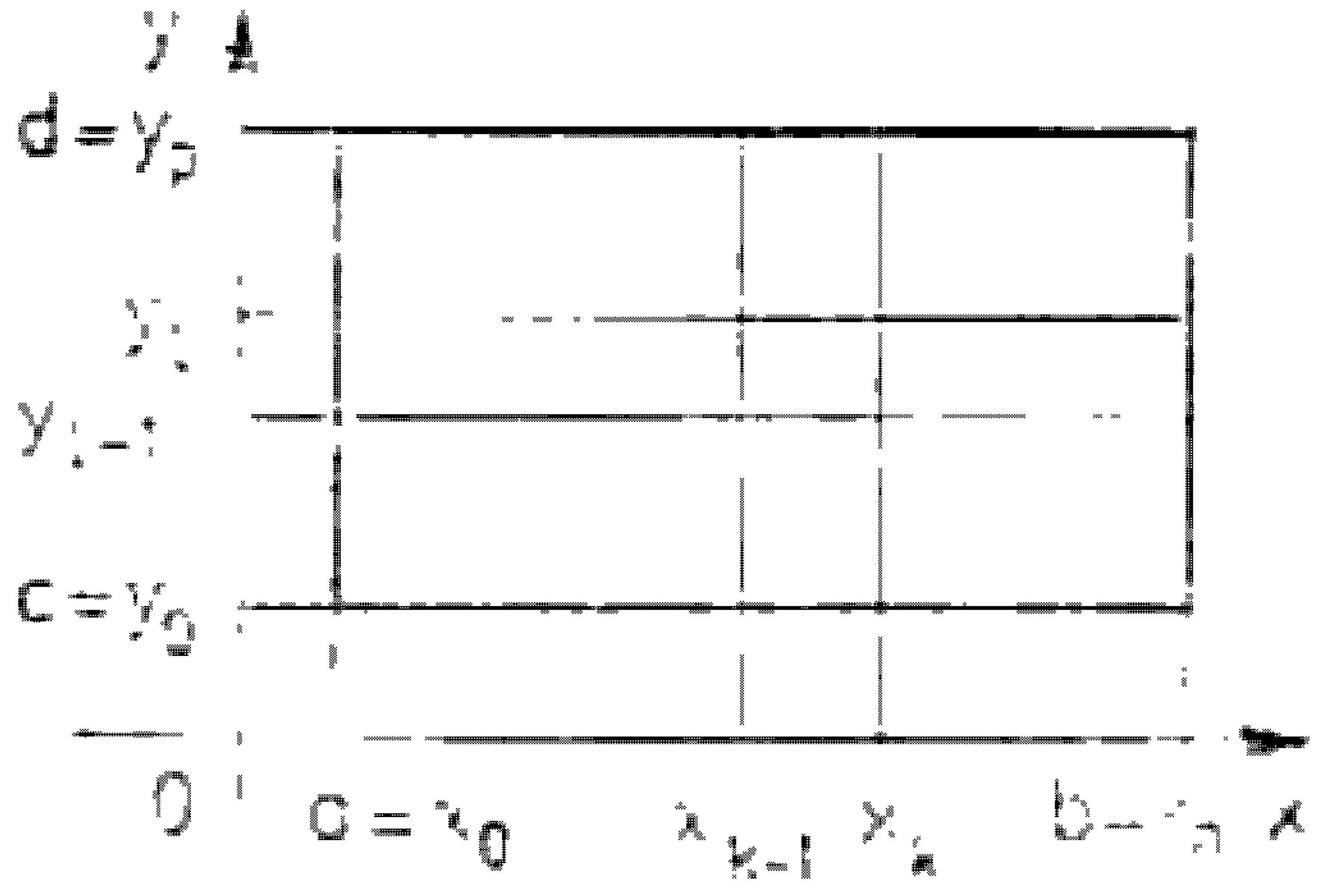
В първата глава на част 1 бяха формулирани важните задачи за пресмятане лицето на криволинеен трапец и на пътя, изминат от материална точка, които водят до понятието определен интеграл. Аналогични «многомерни» задачи, като например задачата за пресмятане на обема или задачата за пресмятане на масата на нееднородно тяло, по естествен начин водят до разглеждането на двойни и тройни интеграли.

В тази глава се излага теорията на n-кратните интеграли ($n \geq 2$). Построяването на теорията на n-кратните интеграли се извършва напълно аналогично на построяването на теорията на еднократните интеграли. За по-ефективно използуване на аналогията с еднократните интеграли отначало се въвежда понятието двоен интеграл върху правоъгълник. След това се въвежда понятието двоен интеграл върху произволна област както с помощта на праволинейно, така и с помощта на произволно разбиване на тази област. Построената теория се пренася за случая на n-кратен интеграл. В края на главата се изучават n-кратни несобствени интеграли.

§ 1. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл

1. Определение на двоен интеграл за правоъгълник. Да разгледаме произволна функция $f(x, y)$, зададена навсякъде в правоъгълника $R=[a, b]\times[c, d]$ (фиг. 3.1). Ще въведем понятието интегрална сума на функцията $f(x, y)$.

Да разделим сегмента $[a, b]$ на n частични сегмента с помощта на точките $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$, а сегмента $[c, d]$ на p частични сегмента с помощта на точките $c=y_0<y_1<y_2<\dots<y_p=d$. На това деление на сегментите съответствува деление на правоъгълника R с прави, успоредни на осите Ox и Oy, на np частични пра-



Фиг. 3. 1

[illegible] $R_{kl}=[x_{k-1}, x_k]\times[y_{l-1}, y_l]$ $(k=1, 2, \dots, n;\ l=1, 2, \dots, p)$.
[illegible] означим построеното деление на правоъгълника R със символа [illegible]. Деление на правоъгълника R, получено от делението T чрез [illegible] на нови прави, успоредни на осите Ox и Oy, наричаме [illegible] на делението T.

[Н]авсякъде в тази глава под термина «правоъгълник» ще раз[бираме] правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси.

Във всеки частичен правоъгълник R_{kl} избираме произволна [illegible] (ξ_k, η_l). Полагаме $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, а с ΔR_{kl} [illegible] площта на правоъгълника R_{kl}. Очевидно $\Delta R_{kl}=\Delta x_k \cdot \Delta y_l$.

[illegible] диаметър на правоъгълника R_{kl} ще разбираме дължината на диагонала, равна на $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_l)^2}$. Най-големия от диаметрите на всички частични правоъгълници ще наричаме **диаметър на делението** T на правоъгълника R и ще означаваме с Δ.

Определение 1. *Числото*

$$\sigma=\sigma(f, T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l)\cdot\Delta R_{kl} \tag{3.1}$$

ще наричаме ***интегрална сума*** *на функцията $f(x, y)$, съответствуваща на делението T на правоъгълника R и дадения избор на междинните точки (ξ_k, η_l) в частичните правоъгълници на делението T.*

Определение 2. *Числото I се нарича* ***граница на интегралните суми*** *(3.1) при $\Delta\to 0$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $\Delta<\delta$ е изпълнено неравенството $|\sigma-I|<\varepsilon$ независимо от избора на междинните точки (ξ_k, η_l) на R_{kl}.*

Определение 3. *Функцията $f(x, y)$ се нарича* ***интегруема***

(по Риман) в правоъгълника R, ако съществува крайна граница на интегралните суми на тази функция при $\Delta \to 0$.

Тази граница I се нарича двоен интеграл на функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R и се означава с един от следните символи:

$$I = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(M)\, d\sigma .$$

Забележка. По същия начин, както и за еднократен интеграл (вж. част I, глава 9, § 1), чрез допускане на противното, се установява, че всяка интегруема върху правоъгълника R функция $f(x, y)$ е ограничена в този правоъгълник. Затова в цялата глава освен в последния параграф ще разглеждаме само ограничени функции, без това да бъде явно споменавано.

2. Условия за съществуване на двоен интеграл за правоъгълник. Теорията на Дарбу, развита в глава 9 от част I за еднократен определен интеграл, напълно се пренася в случая на двоен интеграл за правоъгълника R. Поради пълната аналогия се ограничаваме само със скициране на общата схема на разсъжденията.

За дадено деление T на правоъгълника R съставяме две суми: голяма сума

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta R_{kl} \qquad (M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y))$$

и малка сума

$$s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta R_{kl} \qquad (m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y)).$$

В сила са следните твърдения (доказателствата им са напълно аналогични на доказателствата, дадени в п. 2, § 2, глава 9, част I).

Лема 1. За всяко деление T на правоъгълника R при всеки избор на междинните точки (ξ_k, η_l) в частичните правоъгълници R_{kl} интегралната сума σ удовлетворява неравенствата $s \leq \sigma \leq S$.

Лема 2. За всяко фиксирано деление T и за всяко число $\varepsilon > 0$ междинните точки $(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$ могат да се изберат така, че интегралната сума σ да удовлетворява неравенствата $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$.

Точките (ξ_k, η_l) могат да се изберат и по такъв начин, че интегралната сума да удовлетворява неравенствата $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

Лема 3. Нека T' е дробно на делението T на правоъгълника R и нека s' и S' са съответните малка и голяма сума на делението T'. Тогава са изпълнени неравенствата

$$s \leq s', \qquad S' \leq S.$$

Лема 4. Нека T' и T'' са две произволни деления на право- R; S', s' и S'', s'' са съответните големи и малки суми тези деления. Тогава

$$s' \leq S''.$$

Лема 5. Множеството $\{S\}$ на големите суми на дадена функция $x, y)$ за всевъзможните деления на правоъгълника R е ограничено Множеството от малките суми $\{s\}$ е ограничено отгоре. Следователно съществуват числа

$$\bar{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\},$$

аричани съответно **горен** и **долен интеграл на Дарбу** функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R). Лесно се вижда, $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Лема 6. Нека T' е дробно на делението T на правоъгълни- R, получено от T с добавянето на l нови прави, и нека S', s' и s са съответните голяма и малка интегрална сума на деленията и T. Тогава са верни оценките

$$S - S' \leq (M - m) \,.\, l \,.\, \Delta \,.\, d; \quad s' - s \leq (M - m) \,.\, l \,.\, \Delta \,.\, d,$$

$M = \sup\limits_R f(x, y)$, $m = \inf\limits_R f(x, y)$, Δ е диаметърът на деле- T, d е диаметърът на правоъгълника R.

Аналогично на понятието граница на интегралните суми (§ 1, определение 2) се въвеждат понятията граница на голямата и мал- сума. Например числото $\bar{I}$ се нарича граница на големите S при $\Delta \to 0$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че $|S - \bar{I}| < \varepsilon$ при $\Delta < \delta$.

Лема 7. Горният и долният интеграл на Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ на функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R са съответно границите на големите и малките суми при $\Delta \to 0$.

От леми 1—7 следва

Теорема 3.1. *За да бъде ограничената в правоъгълника R функция $f(x, y)$ интегруема в този правоъгълник, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува такова деление T на правоъгълника R, за което $S - s < \varepsilon$.*

Както и в глава 9 на част I, теорема 3.1 заедно с теоремата за равномерна непрекъснатост ни позволява да намерим много важни класове от интегруеми функции.

Теорема 3.2. *Всяка непрекъсната в правоъгълника R функция $f(x, y)$ е интегруема в този правоъгълник.*

Определение 1. *Елементарна фигура се нарича множе-*

ство от точки, което е обединение на краен брой правоъгълници (със страни, успоредни на координатните оси).

Да отбележим, че правоъгълниците от определение 1 могат да имат или да нямат общи вътрешни точки.

Определение 2. *Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава в правоъгълника R (в произволна затворена област D) I-свойство, ако 1) $f(x, y)$ е ограничена в R (в D); 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарна фигура с лице, по-малко от ε, съдържаща всички точки на прекъсване на функцията $f(x, y)$.*

Теорема 3.3. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава в правоъгълника R I-свойство, то тя е интегруема в този правоъгълник.*

Доказателствата на теореми 3.2 и 3.3 са напълно аналогични на доказателствата на теореми 9.1 и 9.2 от част I.

3. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл за произволна област. В п. 2, § 2, глава 10, част I бяха въведени понятията измеримост и лице на равнинни фигури. Да напомним, че равнинна фигура наричаме част от равнината, заградена от проста затворена крива. Една равнинна фигура се нарича измерима, ако горната и долната мярка на лицето на тази фигура са равни. Това число се нарича лице на фигурата. Тези понятия без изменение се пренасят и в случая на произволно ограничено множество Q от точки в равнината.

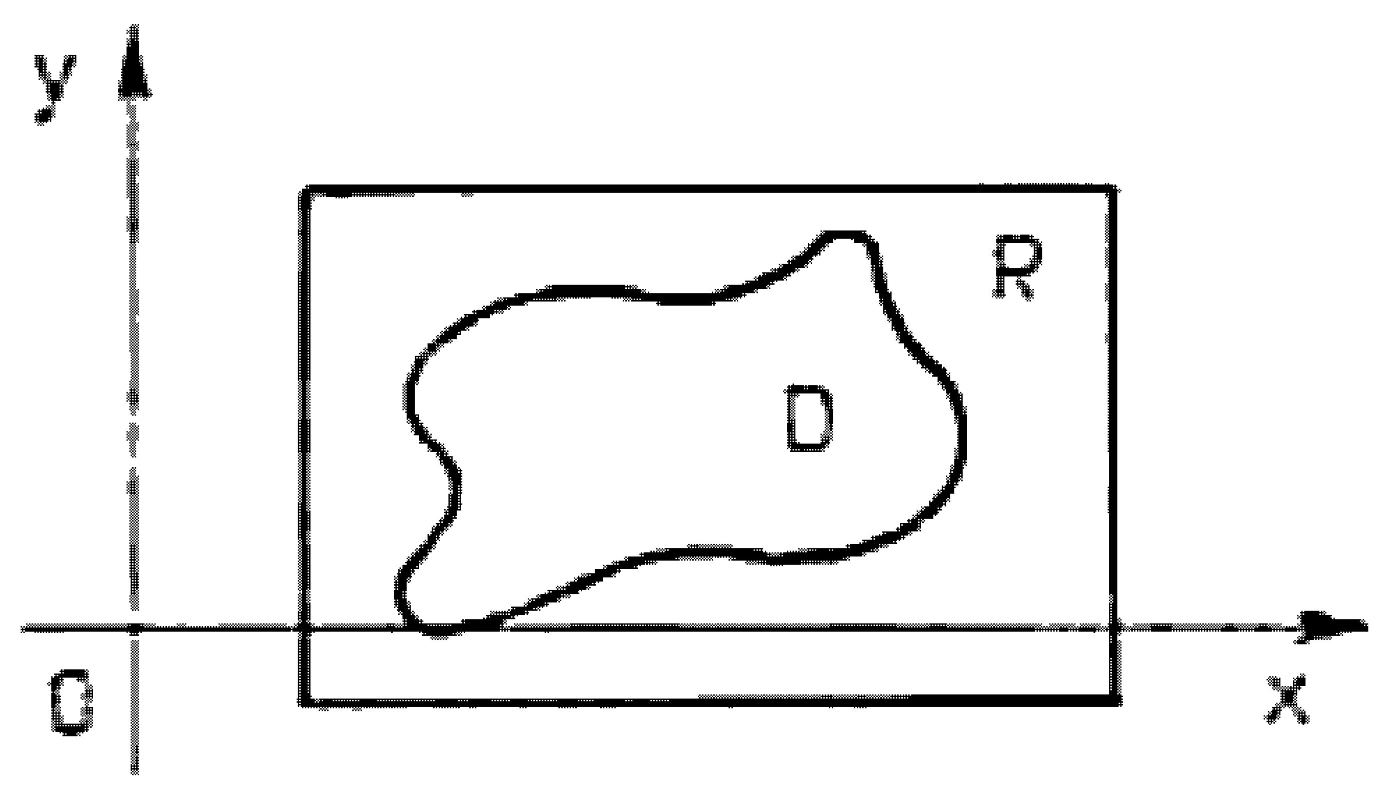
Във всички определения и твърдения на споменатата подточка вместо равнинна фигура може да се постави произволно ограничено множество Q в равнината.

В същата подточка беше дадено определение за крива (или граница на фигура) с нулево лице: казваме, че кривата има лице, равно на нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува многоъгълник, съдържащ Γ, чието лице е по-малко от ε. В това определение терминът «многоъгълник» може да се замени с термина «елементарна фигура». Това е така, защото всяка елементарна фигура е многоъгълник, а всеки многоъгълник с лице, по-малко от ε, се съдържа в елементарна фигура с лице, по-малко от 32ε (вж. теорема 10.2", част I).

В сила е следното твърдение.

Твърдение 1. Нека кривата Γ има лице нула и равнината е покрита с квадратна мрежа със стъпка h. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува $h>0$ такова, че сумата от лицата на всички квадрати, имащи общи точки с Γ, е по-малка от ε.

* Горна мярка на лицето се определя като точната долна граница на лицата на всички многоъгълници, съдържащи фигурата, а долна мярка на лицето — като точната горна граница на лицата на всички многоъгълници, съдържащи се във фигурата.



Фиг. 3. 2

Наистина за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарна фигура Q, съдържаща Γ, и с лице, по-малко от $\varepsilon/4$. При достатъчно малко h всички квадрати, имащи общи точки с Γ, ще се съдържат в елементарна фигура, получаваща се от Q след замяната на всеки правоъгълник с правоъгълник с два пъти по-големи страни и със същия център.

Нека отбележим, че класът на криви с лице нула е много широк. Например в този клас са всички ректифицируеми криви (вж. § 1, глава 10, част I).

Сега ще въведем понятието двоен интеграл за произволна двумерна област D.

Нека D е произволна ограничена затворена област, границата Γ на която има лице нула, а $f(x, y)$ е произволна ограничена функция, дефинирана в областта D.

Нека означим с R някой правоъгълник, съдържащ областта D (фиг. 3.2). Определяме в правоъгълника R следната функция:

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & (x, y)\in D, \\ 0, & (x, y)\in R\setminus D. \end{cases} \tag{3.2}$$

Определение. *Функцията $f(x, y)$ се нарича* ***интегруема*** *в областта D, ако функцията $F(x, y)$ е интегруема в правоъгълника R. Числото $I=\iint\limits_R F(x, y)\, dx\, dy$ се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху областта D и се означава*

$$I=\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy=\iint\limits_D f(M)\, d\tau.$$

От това определение следва

Твърдение 2. *Интегралът $\iint\limits_D 1\, dx\, dy$ е равен на лицето на областта D.*

Наистина, вземайки все по-фини деления на правоъгълника

R, получаваме, че големите интегрални суми за тези деления са равни на лицата на елементарни фигури, съдържащи R, а малките суми са равни на лицата на елементарни фигури, съдържащи се в R. Интегруемостта на функцията $f(x, y)=1$ в областта D следва от теорема 3.3.

Твърдение 3. *Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в ограничената измерима област D, равнината е покрита с квадратна мрежа със стъпка h, $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ са тези квадрати от мрежата, които се съдържат в областта D, (ξ_k, η_k) е произволна точка от квадрата C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x, y)$, $k=1, 2, \ldots, n(h)$. Тогава всяка от сумите*

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k)\, h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k h^2$$

има граница $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ при $h\to 0$.

Доказателството следва непосредствено от факта, че тези суми се отличават от обикновената интегрална сума или от малката сума на функцията $f(x, y)$ в областта D съответно само по липсата на събираеми по квадратите, имащи общи точки с границат Г на областта D, като сумата на всички липсващи събираеми п модул е по-малка от произведението на числото $M=\sup\limits_D |f(x, y)|$ и лицето S на елементарната фигура, състояща се от квадрати, имащи общи точки с Г. Тъй като границата Г има лице нула, то $S\to 0$ при $h\to 0$ поради твърдение 1.

От теорема 3.3 и определението за двоен интеграл, дадено по-горе, получаваме следната основна теорема.

Теорема 3.4. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава I-свойство в областта D, то тя е интегруема в тази област.*

Доказателство. Функцията $F(x, y)$, определена с (3.2), ще притежава I-свойство в правоъгълника R.

Наистина функцията $F(x, y)$ е ограничена в R и всички нейни точки на прекъсване съвпадат или с прекъсванията на $f(x, y)$, или лежат на границата Г на областта D. Но границата Г има лице нула. Така твърдението на теоремата следва от теорема 3.3. С това теорема 3.4 е доказана.

Следствие 1. *Ако функцията $f(x, y)$ е ограничена в областта D и има в тази област прекъсвания само по краен брой ректифицируеми криви, то $f(x, y)$ е интегруема в областта D.*

Следствие 2. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава I-свойство в областта D, а функцията $g(x, y)$ е ограничена и съвпада с $f(x, y)$*

навсякъде в D *освен върху множество с мярка нула, то функцията* $g(x, y)$ *е интегруема в областта* D*, като*

$$\iint_D g(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Не сме изяснили коректно ли е горното определение на понятието двоен интеграл, по-точно зависи ли съществуването на двойния интеграл и големината му от: 1) избора на координатните оси Ox и Oy; 2) избора на правоъгълника R, върху който определяме функцията $F(x, y)$.

В следващата подточка ще бъде дадено друго определение за интегруемост на функцията $f(x, y)$ и двоен интеграл, независещо от избора на координатната система и правоъгълника R, и ще бъде доказана еквивалентността на това определение с даденото по-горе.

4. Общо определение на двоен интеграл. Нека D е затворена ограничена област, чиято граница Γ има лице нула. Разделяме областта D с помощта на краен брой произволни криви с лице нула на краен брой r (не непременно свързани) затворени частични области $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Всяка област D_i има граница с лице нула и затова е измерима. Означаваме лицето на областта D_i със символа ΔD_i.

Във всяка област D_i избираме произволна точка $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 1. *Числото*

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(p_i)\,\Delta D_i \tag{3.3}$$

се нарича ***интегрална сума*** *на функцията* $f(x, y)$*, съответствуваща на даденото деление на областта* D *на частични области* D_i *и на дадения избор на междинните точки* P_i *в частичните области.*

Диаметър на областта D_i се нарича числото $d_i = \sup\limits_{M_1, M_2 \in D_i} \rho(M_1, M_2)$ ($\rho(M_1, M_2)$ е разстоянието между точките M_1 и M_2). **Диаметър на делението** на областта D се нарича числото $\tilde{\Delta} = \max\limits_{1 \le i \le r} d_i$.

Определение 2. *Числото* I *се нарича* ***граница на интегралните суми*** *(3.3) при* $\tilde{\Delta} \to 0$*, ако за всяко положително число* ε *съществува такова положително число* δ*, че при* $\tilde{\Delta} < \delta$ *независимо от избора на точките* P_i *в частичните области* D_i *е изпълнено неравенството* $|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon$.

Определение 3 (общо определение за интегруемост). *Функция-*

та $f(x, y)$ се нарича интегруема (по Риман) върху областта D, ако съществува крайна граница I на интегралните суми $\tilde{\sigma}$ на тази функция при $\tilde{\Delta}\to 0$. Тази граница I се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху областта D.

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 3.5. *Общото определение за интегруемост е еквивалентно на определението, дадено в п. 3.*

Доказателство I. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D съгласно общото определение за интегруемост и двойният ѝ интеграл според това определение е I. Построяваме правоъгълник R, съдържащ D, разделяме го на частични правоъгълници и определяме в R функцията $F(x, y)$ по (3.2). Разглеждаме интегралната сума (3.3) $\tilde{\sigma}$ на функцията $f(x, y)$ и интегралната сума (3.1) σ на функцията $F(x, y)$. Тези суми може да се отличават една от друга само по събираеми, съответствуващи на частични правоъгълници, имащи общи точки с границата Γ на областта D. Тъй като Γ има лице нула, а функцията $f(x, y)$ е ограничена, то тази функция е интегруема съгласно определението от п. 3 и има съгласно това определение същия двоен интеграл I.

II. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D съгласно определението от п. 3 и I е двойният интеграл от $f(x, y)$ върху областта I съгласно това определение. Ще покажем, че за $f(x, y)$ границата на интегралните суми $\tilde{\sigma}$ при $\tilde{\Delta}\to 0$ съществува и е равна на I.

Съставяме за дадено деление на областта D голямата и малката сума

$$\tilde{S}=\sum_{i=1}^{r} \tilde{M}_i \,.\, \Delta D_i \quad \text{и} \quad \tilde{s}=\sum_{i=1}^{r} \tilde{m}_i \,.\, \Delta D_i$$

тук $\tilde{M}_i=\sup\limits_{D_i} f(x, y)$, $\tilde{m}_i=\inf\limits_{D_i} f(x, y)$. Тъй като за всяко деление при всеки избор на междинните точки в интегралната сума $\tilde{\sigma}$ имаме

$$\tilde{s}\le\tilde{\sigma}\le\tilde{S},$$

то е достатъчно да се докаже, че сумите $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ клонят към I при $\tilde{\Delta}\to 0$, т.е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че всяка сума $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ се различава от I по-малко от ε при $\tilde{\Delta}<\delta$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От теорема 3.1 и твърдение 1 за това ε съществува деление T на правоъгълника R $(D\subset R)$ на частични правоъгълници R_k такова, че

$$S-s<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{R_k \cap \Gamma \neq \varnothing} \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{6M_0}, \tag{3.4}$$

където $M_0 = \sup_D |f(x, y)|$.

Нека Q е елементарна фигура с лице, по-малко от $\frac{\varepsilon}{6M_0}$, която съдържа във вътрешността си всички отсечки от правите, определящи делението T, и границата Γ на областта D. Нека δ е положителната точна долна граница на разстоянието между две точки, едната от които принадлежи на границата на Q, а другата на отсечките от правите, определящи делението T, или на границата Γ. Построяването на фигурата Q може да се осъществи по схемата, приложена при доказателството на твърдение 1 от п. 3.

Ще докажем, че сумите $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ за всяко деление на областта D, удовлетворяващо условието $\widetilde{\Delta}<\delta$, изпълняват неравенствата

$$\widetilde{S}<S+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad s-\frac{\varepsilon}{2}<\widetilde{s}. \tag{3.5}$$

Ще докажем само първото от неравенствата (3.5), защото второто се доказва аналогично.

От сумата $\widetilde{S}$ премахваме всички събираеми $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$, съответствуващи на области D_i, всяка от които не лежи изцяло в някой от частичните правоъгълници на делението T. За всички такива области имаме $D_i \subset Q$ (поради $d_i \leq \widetilde{\Delta} < \delta$) и следователно общата сума от лицата на тези области е по-малка от $\frac{\varepsilon}{6M_0}$.

Следователно сумата на всички премахнати събираеми $\widetilde{M}_i . \Delta D_i$ е по-малка от $\frac{\varepsilon}{6}$ и е в сила оценката

$$\widetilde{S}<\sum_i{}' \widetilde{M}_i \Delta D_i+\frac{\varepsilon}{6}, \tag{3.6}$$

където прймът означава, че сумираме само по тези частични области D_i, които изцяло се съдържат в някой от правоъгълниците на делението T.

Нека сега заменим в дясната част на (3.6) точните горни граници $\widetilde{M}_i$ в областите D_i, съдържащи се в частичния правоъгълник R_k, с точната горна граница M_k в правоъгълника R_k. Означаваме $\widetilde{R}_k = \bigcup_{D_i \subset R_k} D_i$ и нека $\Delta\widetilde{R}_k$ означава лицето на областта $\widetilde{R}_k$. Тогава

$$\widetilde{S}<\sum_k M_k \Delta\widetilde{R}_k+\frac{\varepsilon}{6}. \tag{3.7}$$

За правоъгълниците $R_k \subset D$ имаме $R_k \setminus \tilde{R}_k \subset Q$ и затова за тях

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) = \sum_k (\Delta R_k - \Delta \tilde{R}_k) \leq \Delta Q < \frac{\varepsilon}{6M_0},$$

а за правоъгълниците R_k, пресичащи се с Γ, е изпълнено

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) \leq \sum_k \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{6M_0}$$

и следователно

$$\left| S - \sum_k M_k \tilde{\Delta} R_k \right| = \left| \sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta \tilde{R}_k) \right| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3},$$

откъдето

$$\sum_k M_k \Delta \tilde{R}_k < S + \frac{\varepsilon}{3}.$$

От последното неравенство и неравенството (3.7) получаваме

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = S + \frac{\varepsilon}{2},$$

с което първото неравенство (3.5) е доказано. Второто неравенство (3.5) се доказва аналогично.

От (3.5) получаваме

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{s} \leq \tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Поради (3.4) всяка от сумите s и S се различава от I по-малко от $\frac{\varepsilon}{2}$, откъдето поради (3.8) всяка от сумите $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ се отличава от I по-малко от ε. Теоремата е доказана.

§ 2. Основни свойства на двойния интеграл

Свойствата на двойния интеграл са аналогични на свойствата на еднократния определен интеграл.

1°. **Адитивност.** *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D и ако областта D с помощта на крива Γ с лице нула е разделена на две свързани области D_1 и D_2 без общи вътрешни точки, то функцията $f(x, y)$ е интегруема върху всяка от областите D_1 и D_2, като*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

За да докажем това свойство, разделяме областите D_1 и D_2 ... брой измерими области, като по този начин получаваме ... на D. Нека $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$, $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{s}_1$, $\widetilde{S}_2$ и $\widetilde{s}_2$ са големите и мал... на функцията $f(x, y)$ съответно в областите D, D_1, D_2. Тъй като $D_1 \subset D$ и $D_2 \subset D$, то

$$\widetilde{S}_1 - \widetilde{s}_1 \leq \widetilde{S} - \widetilde{s} \text{ и } \widetilde{S}_2 - \widetilde{s}_2 \leq \widetilde{S} - \widetilde{s},$$

... следва интегруемостта на функцията $f(x, y)$ върху всяка ... D_1 и D_2.

Равенството (3.9) следва от равенствата

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2, \quad \widetilde{s} = \widetilde{s}_1 + \widetilde{s}_2.$$

Забележка. Вярно е и обратното твърдение: от интегруемостта ... $f(x, y)$ върху всяка от областите D_1 и D_2 следва ин... на функцията върху областта D и равенството (3.9). ... като разделим областта D на краен брой измерими ... и въведем големите и малките суми за функцията $f(x, y)$ ... областите D, D_1, D_2, получаваме равенствата (3.10) с точ... събираеми, съответстващи на тези области D_i, които имат вътрешни точки с кривата Γ. Кривата Γ има лице нула, функ... $f(x, y)$ е ограничена и затова сумата на тези събираеми ще ... към нула заедно с диаметъра на делението $\widetilde{\Sigma}$.

Доказателството на следващите свойства (както и доказател... на свойство 1°) е напълно аналогично на доказателството ... свойства на еднократния определен интеграл. За... ва ще се ограничим само с формулирането на тези свойства.

2°. **Линейно свойство.** *Нека функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са ин... в областта D, α и β са произволни реални числа. Тогава ... $\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)$ е интегруема в областта D, като*

$$\iint_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]dx\,dy =$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта ... то и произведението им е интегруемо в D.*

4°. *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта ... и навсякъде в тази област е изпълнено $f(x, y) \leq g(x, y)$*, то

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D, то и функцията $|f(x, y)|$ е интегруема в областта D, като*

$$\left|\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

(Обратното твърдение е невярно: от интегруемостта на $|f(x, y)|$ в D, изобщо казано, не следва интегруемостта на $f(x, y)$ в D.)

6°. *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D, и $g(x, y)$ е ограничена и съвпада с $f(x, y)$ навсякъде в D с изключение на множество от точки с мярка нула, то и $g(x, y)$ е интегруема в областта D.*

7°. **Теорема за средните стойности.** *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, като функцията $g(x, y)$ е неотрицателна (неположителна) навсякъде в тази област, $M=\sup_D f(x, y)$, $m=\inf_D f(x, y)$, то съществува число $\mu \in [m, M]$, за което е изпълнено*

$$\iint_D f(x, y)\; g(x, y)\; dx\,dy = \mu \iint_D g(x, y)\; dx\,dy.$$

Ако освен това функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в D, а областта D е свързана, то в тази област съществува такава точка (ξ, η), за която $\mu = f(\xi, \eta)$.

8°. **Геометрично свойство.** $\iint_D 1\,dx\,dy$ *е равен на лицето на областта D* (вж. твърдение 2, п. 3).

§ 3. Свеждане на двоен интеграл към повторен еднократен интеграл

Ефективен начин за пресмятане на двоен интеграл е свеждането му към повторен еднократен интеграл.

1. Случай на правоъгълник. Ще започнем с простия случай, когато областта на интегриране е правоъгълник $R=[a, b]\times[c, d]$.

Теорема 3.6. *Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в правоъгълника R и за всяко $x \in [a, b]$ съществува еднократният интеграл*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3.11}$$

Тогава съществува повторният интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

равенството

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx.$$

Доказателство. Разделяме правоъгълника R с помощта на $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ на $n.p$ частични правоъгълника

$$R_{kl}=[x_{k-1},\ x_k]\times[y_{l-1},\ y_l]$$

$=1, 2, \ldots, n;\ l=1, 2, \ldots, p)$, като $x_0=a$, $x_n=b$, $y_0=c$, $y_p=d$ и $\ldots - x_{k-1}>0$, $\Delta y_l=y_l-y_{l-1}>0$.

както и в § 1, с Δ да означим диаметъра на делението правоъгълника R, $M_{kl}=\sup\limits_{R_{kl}} f(x,y)$, $m_{kl}=\inf\limits_{R_{kl}} f(x,y)$, а S и s да са

и малката сума на функцията $f(x,y)$. Тогава навсякъде правоъгълника R_{kl} е изпълнено

$$m_{kl}\leq f(x,y)\leq M_{kl}.$$

произволно число $\xi_k\in[x_{k-1},\ x_k]$ и интегрираме неравен- ...13) по y в граници от y_{l-1} до y_l, като полагаме в него

$$m_{kl}\cdot\Delta y_l\leq\int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k,y)\,dy\leq M_{kl}\cdot\Delta y_l.$$

(3.14) с Δx_k и сумираме получените неравенства от- по l от 1 до p, а след това по k от 1 до n. Използувайки (3.11), имаме

$$s=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\,\Delta x_k\,\Delta y_l\leq\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\,\Delta x_k\leq \tag{3.15}$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\,\Delta x_k\,\Delta y_l=S'.$$

Нека диаметърът на делението $\Delta\to 0$. Тогава и $\max\limits_k\Delta x_k\to 0$. При това s и S клонят към двойния интеграл $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$. Следователно средният член в (3.15) клони към същия двоен интеграл.

Но тази граница по определението на еднократен интеграл е равна на

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx.$$

По такъв начин е доказано съществуването на повторния интеграл и равенството (3.12). Теоремата е доказана.

Забележка. От доказателството на теорема 3.6 е ясно, че можем да сменим местата на x и y, т.е. можем да предположим съществуването на двойния интеграл и съществуването за всяко $y \in [c, d]$ на еднократния интеграл

$$K(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Тогава теоремата ще твърди съществуването на повторния интеграл

$$\int_c^d K(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right]dy$$

и равенството му с двойния интеграл.

2. Случай на произволна област. Да разгледаме сега произволна ограничена затворена измерима област D с граница Γ.

Теорема 3.7. *Нека са изпълнени следните условия: 1) областта D е такава, че всяка права, успоредна на оста Oy, пресича границата Γ по цяла отсечка $[y_1(x), y_2(x)]$ или в не повече от две точки, ординатите на които са $y_1(x)$ и $y_2(x)$, където $y_1(x) \leq y_2(x)$* (фиг. 3.3); *2) функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D и за всяко $x \in [x_1, x_2]$ съществува еднократният интеграл*

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

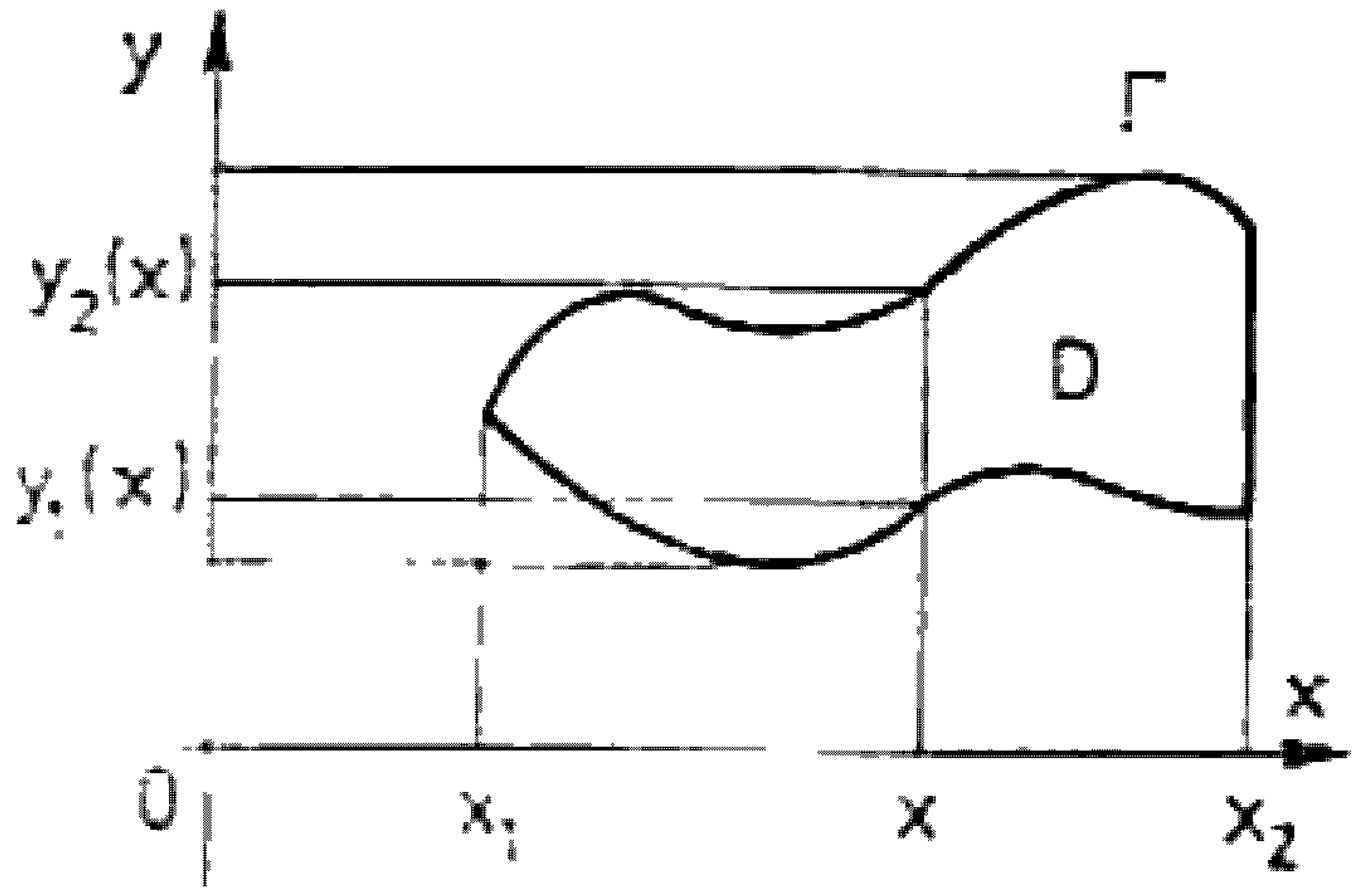
($[x_1, x_2]$ е проекцията на областта D върху оста Ox).

Тогава съществува повторният интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx$$

и е изпълнено равенството

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx. \tag{3.16}$$



Фиг. 3. 3

Доказателство. Нека R е правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ областта D, а $F(x, y)$ е функцията (3.2), съвпадаща с $f(x, y)$ в D и равна на нула в останалите точки на R. За $F(x, y)$ са изпълнени в R всички условия на теорема 3.6 и следователно е вярна формула (3.12), която е еквивалентна на формула (3.16) (поради определението на функцията $F(x, y)$). Теоремата е доказана.

Забележка 1. В теорема 3.7 можем да сменим ролите на x и y, т. е. може да се предположи, че са изпълнени следните условия: 1) областта D е такава, че всяка права, успоредна на оста Ox, пресича границата Γ или по цяла отсечка $[x_1(y), x_2(y)]$, или в не повече от две точки, абсцисите на които са $x_1(y)$ и $x_2(y)$, където $x_1(y) \leq x_2(y)$; 2) функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D и за всяко $y \in [y_1, y_2]$ съществува еднократният интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

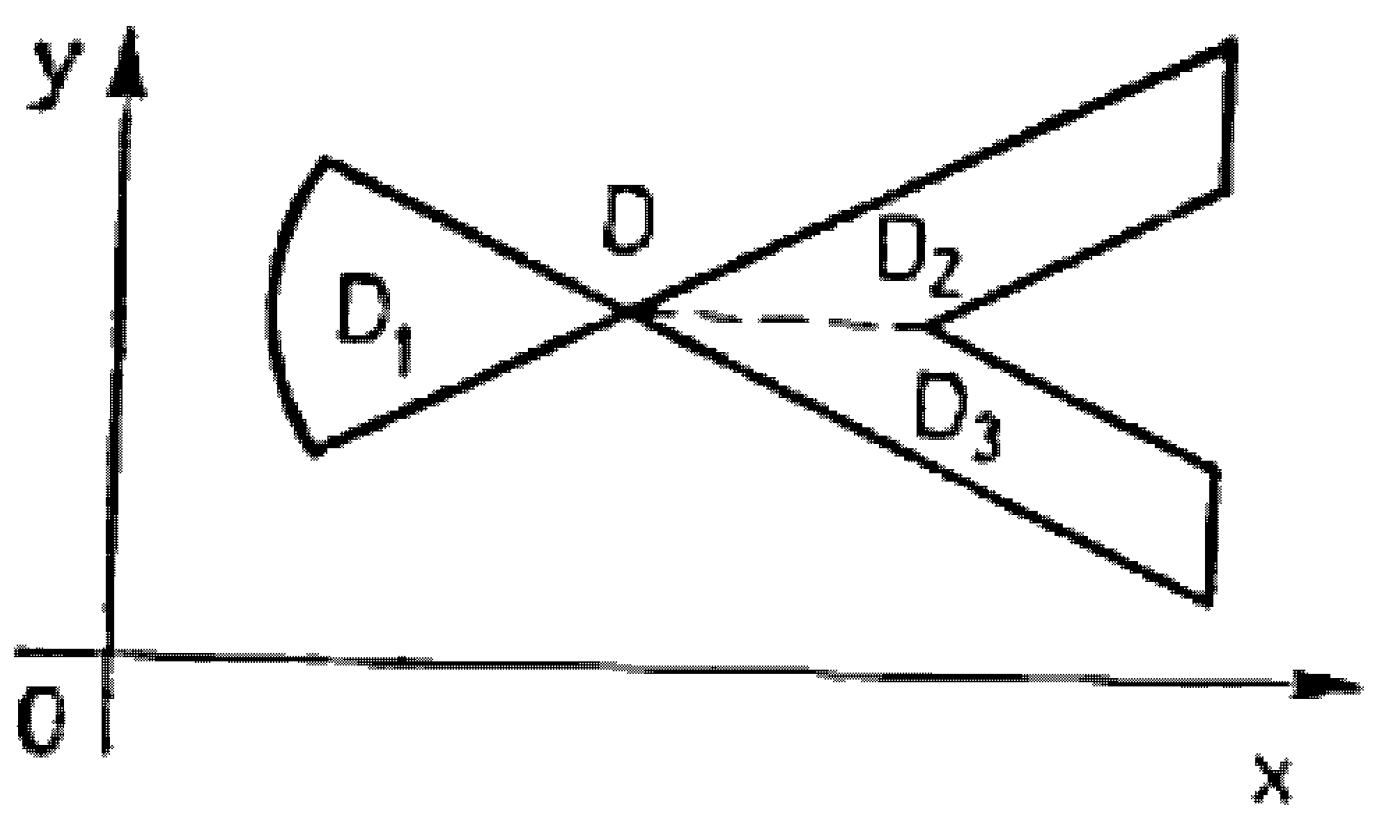
($[y_1, y_2]$ е проекцията на D върху оста Oy).

При изпълняването на тези условия съществува повторният интеграл

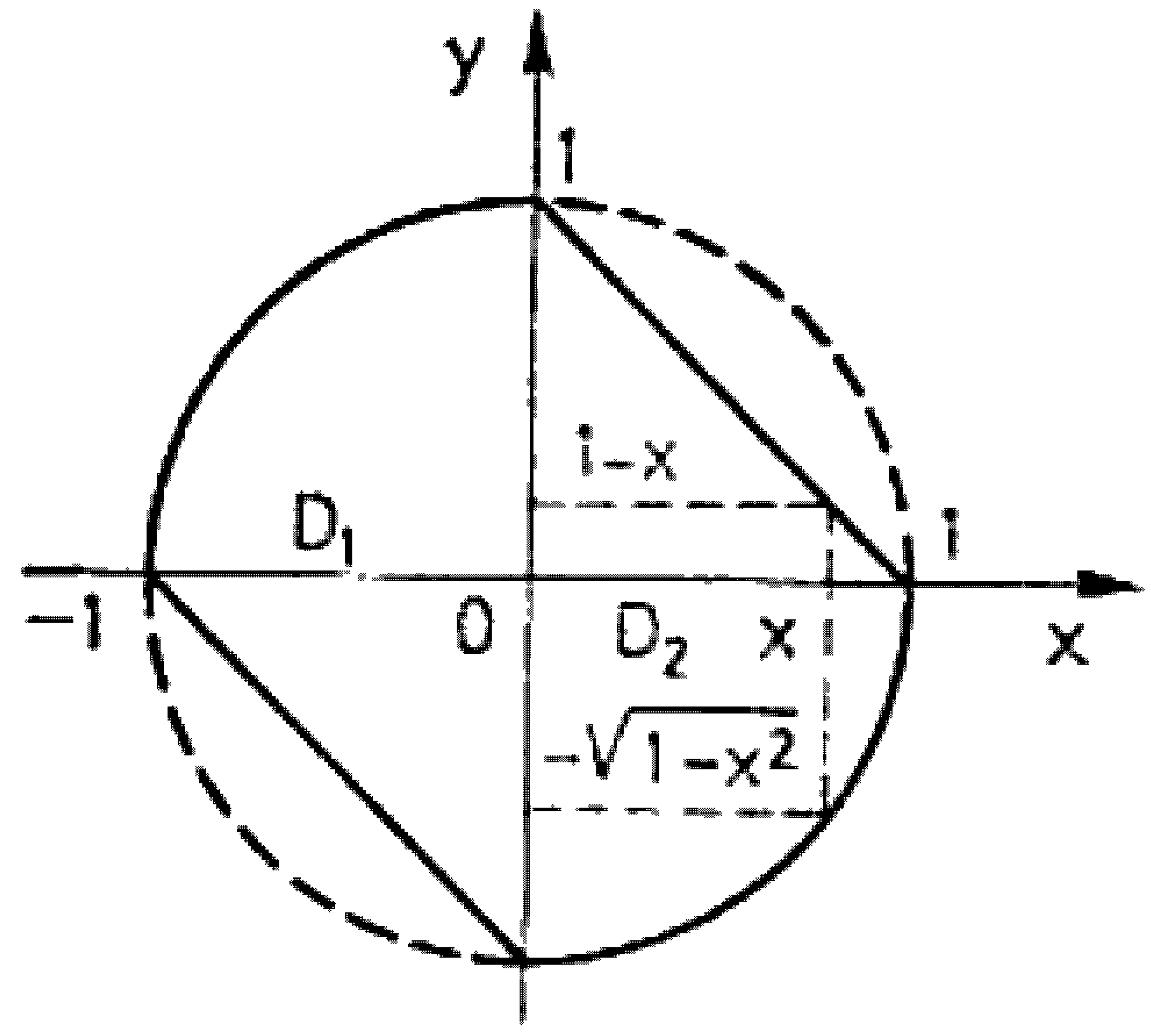
$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

и е в сила равенството

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$



Фиг. 3. 4



Фиг. 3. 5

Забележка 2. Ако областта D не удовлетворява условията на теорема 3.7 или забележка 1 към тази теорема, понякога можем да разделим тази област на сума от краен брой области от този тип, които нямат общи вътрешни точки. Тогава интегралът върху областта D поради свойството адитивност е равен на сумата от интегралите по съответните области. Например областта D от фиг. 3.4 се разделя на сума от три области D_1, D_2, D_3, към всяка от които е приложима или теорема 3.7, или забележка 1.

Пример. Нека областта D е сечение на областите $|x+y|\leq 1$ и $x^2+y^2\leq 1$, а $f(x, y)=x\,.\,y$ (фиг. 3.5). Всяка права, успоредна на оста Oy, пресича границата на D в не повече от две точки. За удобство при записването на повторните интеграли разделяме областта D на две области D_1 и D_2 (както е показано на фиг. 3.5). Прилагайки за всяка от областите формула (3.16), получаваме

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} xy\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0} x\,dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy+\int_{0}^{1} x\,dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} y\,dy=-\int_{-1}^{0} (x^3+x^2)\,dx+$$

$$+\int_{0}^{1} (x^3-x^2)\,dx=-\frac{1}{6}.$$

§ 4. Тройни и n-кратни интеграли

Изложената теория на двойния интеграл без някакви съществени усложнения и нови идеи се пренася за случая на троен или въобще на n-кратен интеграл. Ще се спрем на основните моменти на теорията на n-кратния интеграл.

При определяне на класовете от измерими множества в E^2 или E^3 ние заимствувахме от материала в средното училище понятията лице на многоъгълник и обем на многостен, които притежават свойствата адитивност, инвариантност и монотонност (вж. § 2 и 3, глава 10, част I). В пространствата E^n, $n>3$, положението се усложнява от това, че не ни е известен обемът на множества (тела) в E^n, ограничени от хиперравнини. За да определим класа на измеримите тела в E^n, ще започнем от обема на тяло от специален вид в E^n — n-мерния правоъгълен паралелепипед.

Да припомним (вж. § 1, гл. 13, част I), че множеството $R=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ от всички точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в E^n, за които $a_i\leq x_i\leq b_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, се нарича n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед. Ако $b_i-a_i=h$ за всяко i, то R се нарича n-мерен координатен куб със страна h. Точките $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, където c_i е равно или на a_i, или на b_i, се наричат върхове на R, а сегментите, съединяващи два върха от вида $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ и $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ — ръбове на R. Всички ръбове на R са успоредни на координатните оси.

По аналогия с E^1, E^2 и E^3 е естествено да определим обема на n-мерния правоъгълен паралелепипед R като число, равно на произведението от дължините на всички негови ръбове, излизащи от един връх, т. е. като числото $\mu(R)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

Ще наречем елементарно тяло множество от точки в E^n, представляващо обединение на краен брой n-мерни правоъгълни паралелепипеди, нямащи общи вътрешни точки, с ръбове, успоредни на координатните оси. Обемът на всяко елементарно тяло естествено определяме като сумата от обемите на съставящите го паралелепипеди.

Нека сега D е произволна ограничена област (множество) в E^n. Долна мярка на обема на областта D се нарича точната горна граница $\mu_*=\mu_*(D)$ на обемите на всички елементарни тела, съдържащи се в D, а горна мярка на обема на областта D — точната долна граница $\mu^*=\mu^*(D)$ на обемите на всички елементарни тела, съдържащи областта D.

Лесно се вижда, че $\mu_*\leq\mu^*$.

Областта D се нарича измерима, ако $\mu_* = \mu^*$. При това числото $\mu(D) = \mu_*(D) = \mu^*(D)$ се нарича n-мерен обем на областта D.

Както в случая на равнинна област, се доказва следното твърдение.

Една n-мерна област D е измерима тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват две елементарни тела, едното от които съдържа D, а другото се съдържа в D, разликата от обемите на които по абсолютна стойност не надминава ε.

В частност едно подмножество Γ на E^n има n-мерен обем 0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува елементарно тяло с обем, по-малък от ε, което съдържа Γ.

От приведеното твърдение получаваме, че n-мерната област D е измерима тогава и само тогава, когато границата на тази област е множество с n-мерен обем нула.

Първо ще определим интеграл от функция на n променливи $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ върху n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед R. За тази цел построяваме деление T на паралелепипеда R на краен брой частични n-мерни паралелепипеди чрез краен брой хиперравнини, успоредни на координатните хиперравнини.

За това деление T аналогично на случая $n=2$ се определя интегрална, голяма и малка сума за всяка ограничена в R функция $f(x)$.

n-кратен интеграл от функцията $f(x)$ върху паралелепипеда R определяме като граница (ако съществува) на интегралните суми, когато диаметърът на делението T на паралелепипеда R клони към нула.

Както в случая $n=2$, теорията на Дарбу дава необходимо и достатъчно условие за интегруемост в следната форма: за интегруемост на функцията $f(x)$ върху паралелепипеда R е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува деление T на паралелепипеда R, за което разликата между голямата и малката сума е по-малка от ε.

Нека сега D е произволна затворена ограничена n-мерна област, границата на която има n-мерен обем нула. n-кратен интеграл от функцията f върху областта D се определя като интеграл върху n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед R, съдържащ областта D, от функция F, съвпадаща с f в D и равна на нула извън D.

Ще означаваме n-кратния интеграл от функцията $f(x)$ върху областта D по един от следните начини:

$$(3.17)\qquad \int_D f(x)dx = \int\int_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

отбележим, че произведението $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ обикновено нарича елемент на обема в пространството E^n.

По същия начин, както в случая $n=2$, се доказва интегруемост върху n-мерна област на всяка непрекъсната функция, а също а функция f, притежаваща I-свойство в областта D (т. е. ограничена в D функция, множеството от точки на прекъсване на която има n-мерен обем нула). Въобще изменение на интегруема върху множество от точки с n-мерен обем нула не про- интеграла на тази функция.

За определяне на n-кратен интеграл може да се използува и на областта D с помощта на краен брой произволни с обем нула на краен брой частични области с произ- форма. Напълно аналогично с теорема 3.5 се доказва, че общо определение на n-кратен интеграл е еквивалентно на даденото по-горе определение.

За n-кратен интеграл също са верни осемте основни свойства, формулирани в § 2 за двоен интеграл.

Напълно аналогично на теореми 3.6 и 3.7 се доказва формула за повторно интегриране за интеграла (3.17).

Нека n-мерната област D_n е такава, че всяка права, успоредна на оста Ox_1, пресича границата ѝ в не повече от две точки (или по цял сегмент, ограничен от две точки), проекциите на които по оста Ox_1 са $a(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, където $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в областта D_n и за всяка точка $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ от $(n-1)$-мерната област D_{n-1}, представляваща проекцията на D_n върху координатната хиперравнина $Ox_2x_3\ldots x_n$, съществува еднократният интеграл

$$J(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Тогава съществува $(n-1)$-кратният интеграл

$$\iint\limits_{D_{n-1}}\ldots\int J(x_2, x_3, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{D_{n-1}}\ldots\int \Bigg[\int\limits_{a(x_2, \ldots, x_n)}^{b(x_2, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \Bigg] dx_2 \ldots dx_n$$

върху областта D_{n-1} и е вярна формулата за повторно интегриране

$$\iint\limits_{D_n}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n =$$

(3.18)

$$=\iint\limits_{D_{n-1}}\dots\int\Big[\int\limits_{a(x_2, x_3, \dots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1\Big]\,dx_2dx_3\dots d\dots$$

В горното твърдение ролята на x_1 може да играе всяка о... таналите променливи $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Областта D ще наричаме проста, ако за всяка от коор... натните оси всяка права, успоредна на тази ос, или пресича гр... ницата на областта в не повече от две точки, или има по тази гр... ница цяла отсечка. Пример за проста област е всеки n-мерен пр... воъгълен паралелепипед (с ребра не непременно успоредни на коо... динатните оси).

За проста област формулата за повторно интегриране мож... да се прилага по всяка от променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Нека отбележим накрая, че както и в случая $n=2$, е вярно твърдението:

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в ограничената измерима област D. Нека пространството E^n е покрито с мрежа от n-мерни кубове със страна h, $C_1, C_2, \dots, C_m(h)$ са тези кубове от мрежата, които се съдържат в D, $\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})$ е произволна точк... от куба C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x)$, $k=1, 2, \dots, m(h)$. Тогава всяка от сумите

$$\sum_{k=1}^{m(h)} f(\xi^{(k)})h^n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m(h)} m_k h^n$$

има граница при $h\to 0$, равна на n-кратния интеграл (3.17) от функцията $f(x)$ върху областта D.

Примери. 1) Да се пресметне обемът $T_n(h)$ на n-мерния симплекс

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\in E^n : x_i\geq 0,\ i=1, 2, \dots, n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i\leq h\}.$$

Прилагайки формулата (3.18) за повторно интегриране последователно по променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$, получаваме следния израз за обема

$$T_n(h)=\int\limits_0^h \Big(\int\limits_0^{h-x_1}\Big(\cdots\Big(\int\limits_0^{h-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} 1.dx_n\Big)\dots\Big)dx_2\Big)dx_1. \tag{3.19}$$

Във всеки от интегралите в дясната част на (3.19) правим смяна на променливите $x_1=h\xi_1$, $x_2=h\xi_2, \dots, x_n=h\xi_n$. Получаваме

$$(3.20)\qquad T_n(h)=h^n\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{1-\xi_1}\Big(\dots\Big(\int\limits_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i}d\xi_n\Big)\dots\Big)d\xi_2\Big)d\xi_1.$$

От (3.19) и (3.20) следва, че $T_n(h)=h^nT_n(1)$. За пресмятане на $T_n(1)$ получаваме следната рекурентна формула:

$$T_n(1)=\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{1-\xi_1}\Big(\dots\Big(\int\limits_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i}d\xi_n\Big)\dots\Big)d\xi_2\Big)d\xi_1=\int\limits_0^1T_{n-1}(1-\xi_1)d\xi_1=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\xi_1)^{n-1}T_{n-1}(1)d\xi_1=T_{n-1}(1)\int\limits_0^1(1-\xi_1)^{n-1}d\xi_1=T_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{n}.$$

Следователно $T_n(1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\dots\frac{1}{2}\cdot T_1(1)$ и тъй като $T_1(1)=1$, то $T_n(h)=\frac{h^n}{n!}$.

2) Пресметнете обема $V_n(R)$ на n-мерното кълбо $B(R)$ с радиус R:

$$B(R)=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E^n:\sum_{i=1}^n x_i^2\le R^2\}.$$

Използваме формулата (3.18) и получаваме

$$V_n(R)=\iint\limits_{B(R)}\dots\int 1\,dx_1dx_2\dots dx_n=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}\Big(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}}\Big(\dots\Big(\int\limits_{-\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}}^{\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}}1\cdot dx_n\Big)\dots\Big)dx_2\Big)dx_1.$$

В еднократните интеграли по променливата x_i правим смяна на променливите $x_i=R\xi_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ и получаваме

$$V_n(R)=R^n\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-\xi_1^2}}^{\sqrt{1-\xi_1^2}}\left(\cdots\left(\int\limits_{-\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}}^{\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}}d\xi_n\right)\cdots\right)d\xi_2\right)d\xi_1=R^nV_n(1).$$

За пресмятане на $V_n(1)$, както и в предишния пример, получаваме рекурентното съотношение

$$V_n(1)=\int\limits_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-\xi_1^2}\right)d\xi_1=\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1}(1)d\xi_1=$$

$$=V_{n-1}(1)\;.\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi_1.$$

В последния интеграл правим смяна на променливите $\xi_1=\cos\theta$, въвеждаме означението $I_k=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^k\theta\,d\theta$ и вземаме предвид, че $V_1(1)=2$. Тогава

$$V_n(1)=2V_{n-1}(1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta=2V_{n-1}(1)\;I_n=\cdots=$$

$$=2^{n-1}I_n\,.\,I_{n-1}\ldots I_2\,.\,V_1(1)=2^nI_n\;I_{n-1}\ldots I_2,$$

откъдето обемът $V_n(R)$ на n-мерното кълбо с радиус R се дава от формулата

$$V_n(R)=2^nR^nI_nI_{n-1}\cdots I_2,$$

откъдето, използувайки известните формули за интегралите I_k*, окончателно получаваме

$$V_n(R)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно;}\\[2ex] \dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{ако } n \text{ е четно.}\end{cases}$$

* В п. 4, § 5, глава 9, част I е показано, че

$$I_k=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{ако } k \text{ е нечетно;}\\[2ex] \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{ако } k \text{ е четно.}\end{cases}$$

§ 5. Смяна на променливите в n-кратния интеграл

Формулата за смяна на променливите, която ще бъде доказана в този параграф, е едно от най-важните средства за пресмятане на n-кратни интеграли.

Предполагаме, че функцията $f(y)=f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ е интегруема в някоя затворена, ограничена измерима област D в пространството E^n. Предполагаме също, че от променливите $y_1, y_2, \ldots, y_n$ преминаваме към променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. извършваме преобразуването

$$(3.21)\qquad \begin{cases} y_1=\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2=\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n=\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

което може кратко да бъде записано като

$$(3.21^*)\qquad y=\psi(x),$$

разбирайки под y точка от n-мерното пространство $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, под x — точка от n-мерното пространство $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под ψ — съвкупността от n функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Означаваме с D' тази област в E^n, която при преобразуването (3.21) или (3.21*) преминава в D, т. е. полагаме $D=\psi(D')$. При това винаги ще предполагаме, че преобразуването (3.21) или (3.21*) допуска обратно преобразование, така че $D'=\psi^{-1}(D)$.

Ще докажем, че ако функциите (3.21) имат в областта D' непрекъснати частни производни от първи ред и ако в тази област якобианът

$$(3.22)\qquad \frac{D(y)}{D(x)}=\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

е различен от нула, то за n-кратния интеграл от функцията $f(y)$ върху областта D е вярна следната формула за смяна на променливите:

$$(3.23)\qquad \int\limits_D f(y)dy=\int\limits_{D'} f[\psi(x)]\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx,$$

която в подробен запис има следния вид:

$$\int\int\limits_D\ldots\int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)dy_1dy_2\ldots dy_n=$$

(3.23*)

$$=\int\int_{D'}\dots\int f[\psi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_n)]\left|\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right|dx_1\dots dx_n.$$

По-точно ще докажем следната основна теорема:

Теорема 3.8. *Нека преобразованието (3.21) изобразява взаимно еднозначно околността U' на областта D' в околността U на областта D (съответно D' в D). Ако функциите (3.21) имат в областта D' непрекъснати частни производни от първи ред по всички променливи и различен от нула якобиан (3.22), то за всяка интегруема в D функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите (3.23*).*

Нека отбележим, че при условията на теорема 3.8 съществува преобразованието ψ^{-1}, обратно на ψ.

За доказателството на теорема 3.8 са необходими седем леми. Отначало формула (3.23) ще бъде доказана в случая, когато преобразуването (3.21) е линейно (леми 1—4), а след това общото преобразование (3.21) се свежда към този случай (леми 5—7).

Лема 1. *Ако преобразованието $z=\psi(x)$ е суперпозиция на две преобразования $z=\psi_1(y)$ и $y=\psi_2(x)$, т. е. $z=\psi_1[\psi_2(x)]$, като всички участвуващи в тези преобразования функции имат непрекъснати частни производни от първи ред, то якобианът $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}=(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_n)$, е равен на произведението на якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}$, и якобиана $\frac{D(z)}{D(y)}$, взет в точката $\overset{\circ}{y}=(\overset{\circ}{y}_1,\dots,\overset{\circ}{y}_n)$, където $\overset{\circ}{y}=\psi_2(\overset{\circ}{x})$, т. е.*

$$\frac{D(z)}{D(x)}=\frac{D(z)}{D(y)}\cdot\frac{D(y)}{D(x)} \tag{3.24}$$

или в подробен запис

$$\frac{D(z_1,\dots,z_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}=\frac{D(z_1,\dots,z_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}\cdot\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}.$$

Доказателство на лема 1. За всеки $i=1,2,\dots,n$ и $k=1,2,\dots,n$ елементът $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x})$, стоящ в k-тия ред и i-тия стълб на якобиана $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}=(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_n)$, по правилото за диференциране на сложна функция е равен на

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x})=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial y_l}(\overset{\circ}{y})\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x}), \tag{3.25}$$

където $\overset{\circ}{x}=\psi_2(\overset{\circ}{x})$.

Но по правилото за умножение на детерминанти равенството (3.25) означава, че якобианът $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}$, е равен на произведението на якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}$, и якобиана $\frac{D(z)}{D(y)}$, взет в точката $\overset{\circ}{y}$. Лема 1 е доказана.

Нека напомним, че **линейно преобразование** на координатите се нарича преобразование от вида

$$
(3.26) \qquad \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n, \end{cases}
$$

където a_{ik} $(i, k=1, 2, \dots, n)$ са произволни константи.

За линейното преобразование (3.26) якобианът $\frac{D(y)}{D(x)}$ съвпада с детерминантата на матрицата на това преобразование $T=\|a_{ij}\|$, т. е.

$$
(3.27) \qquad \frac{D(y)}{D(x)}=\det T.
$$

Ако тази детерминанта е различна от нула, то линейното преобразование (3.26) се нарича **неизродено**. В този случай съществува обратното преобразование, също линейно и неизродено, и уравненията (3.26) могат да бъдат решени относно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Линейното преобразование (3.26) накратко ще означаваме със символа $y=Tx$, а обратното му преобразование — със символа $x=T^{-1}y$.

Основната цел на следващите три леми е доказателството на факта, че за неизродено линейно преобразование (3.26) и за всяка непрекъсната функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите (3.23), която поради формула (3.27) може да се представи във вида

$$
(3.28) \qquad \int\limits_D f(y)dy=\int\limits_{D'} f(Tx)\,|\det T|\,dx=|\det T|\cdot\int\limits_{D'} f(Tx)dx,
$$

където $D'=T^{-1}D$.

Отначало ще разгледаме две линейни преобразувания от специален вид:

1) линейното преобразование T_{ij}, което към i-тата координата прибавя j-тата координата, а всички останали координати се запазват:

$$y_k = x_k \quad \text{при} \quad k=1, 2, \ldots, i-1, \; i+1, \ldots, n,$$
$$y_i = x_i + x_j,$$

накратко записано като $y = T_{ij}x$;

2) линейното преобразование T_i^λ, което умножава i-тата координата с число $\lambda \neq 0$, а всички останали координати се запазват:

$$\begin{cases} y_k = x_k & \text{при} \quad k=1, 2, \ldots, i-1, \; i+1, \ldots, n, \\ y_i = \lambda x_i, \end{cases}$$

накратко записане като $y = T_i^\lambda x$.

Лесно се вижда, че

$$\det T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \cdots 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \quad i \quad j \end{array} = 1, \quad \det T_i^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix} = \lambda$$

и следователно преобразованията T_{ij} и T_i^λ са неизродени.

Лема 2. *За преобразованията T_{ij} и T_i^λ и за всяка непрекъснатата в областта D функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите* (3.28).

Доказателство на лема 2. Нека R е n-мерен правоъгълен паралелепипед, съдържащ D, а функцията $F(y)$ е зададена с

$$F(y) = \begin{cases} f(y) & \text{при} \quad y \in D, \\ 0 & \text{при} \quad y \in R \setminus D. \end{cases}$$

Достатъчно е да докажем, че

$$(3.28^*) \qquad \int_R F(y)\, dy = \int_{T^{-1}R} F(Tx)\, |\det T|\, dx,$$

където символът T означава едно от преобразованията T_{ij} или T_i^λ.

Ако R е правоъгълният паралелепипед

$$\{(y_1, \ldots, y_n): \; a_k \le y_k \le b_k, \; k=1, 2, \ldots, n\},$$

то $[T_i^\lambda]^{-1} R$ е отново правоъгълен паралелепипед

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n): a_k\leq x_k\leq b_k,\ k\neq i,\ \frac{a_i}{\lambda}\leq x_i\leq\frac{b_i}{\lambda}\right\} \text{ при } \lambda>0 \text{ или}$$

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n): a_k\leq x_k\leq b_k,\ k\neq i,\ \frac{b_i}{\lambda}\leq x_i\leq\frac{a_i}{\lambda}\right\} \text{ при } \lambda<0.$$

а $[T_{ij}]^{-1}R$ е измеримата област

$$\{(x_1,\ldots,x_n): a_k\leq x_k\leq b_k,\ k\neq i,\ a_i-x_j\leq x_i\leq b_i-x_j\}.$$

От формулата за повторно интегриране (3.18) получаваме

(3.29)
$$\int_R F(y)\,dy=$$
$$=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\left[\int_{a_i}^{b_i}F(y_1,\ldots,y_n)\,dy_i\right]dy_1\ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1}\ldots dy_n.$$

Прилагайки в еднократния интеграл по променливата y_i формулата за смяна на променливите $y_i=\lambda x_i$ за случая на преобразование T_i^λ и $y_i=x_i+x_j$ за случая на преобразование T_{ij} (вж. § 5, глава 9, част I), получаваме:

а) за случая на преобразование T_i^λ

$$\int_{a_i}^{b_i}F(y_1,\ldots,y_n)\,dy_i=$$

(3.30[1])
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda}F(y_1,\ldots,y_{i-1},\lambda x_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\lambda\,dx_i & \text{при } \lambda>0,\\ \displaystyle\int_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda}F(y_1,\ldots,y_{i-1},\lambda x_i,y_{i+1},\ldots,y_n)(-\lambda)\,dx_i & \text{при } \lambda<0;\end{cases}$$

б) за случая на преобразование T_{ij}

(3.30[2])
$$\int_{a_i}^{b_i}F(y_1,\ldots,y_n)dy_i=\int_{a_i-x_j}^{b_i-x_j}F(y_1,\ldots,y_{i-1},x_i+x_j,y_{i+1},\ldots,y_n)dx_i.$$

Замествайки (3.30[1]) (или (3.30[2])) в (3.29), използувайки отново формулата за повторно интегриране (3.18) и отчитайки, че

$$|\det T|=\begin{cases}1, & \text{ако } T=T_{ij},\\ |\lambda|, & \text{ако } T=T_i^\lambda,\end{cases}$$

а също полагайки $y_k = x_k$ при $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, получаваме равенството (3.28*). Лема 2 е доказана.

Лема 3. *Всяко неизродено линейно преобразование (3.26) може да се представи като суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} или T_i^λ за $\lambda \neq 0$.*

Доказателство на лема 3. Ще разделим доказателството на 3 стъпки.

1 стъпка. Ще покажем, че линейното преобразование T', сменящо местата на i-тата и j-тата координата (при запазване на останалите координати), може да се представи като суперпозиция на шест преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ.

Наистина, запазвайки в записа на $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ само i-тата и j-тата координата (останалите се запазват непроменени), имаме

$$(x_i, x_j) \xrightarrow[T_{ij}]{} (x_i + x_j, x_j) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (-x_i - x_j, x_j) \xrightarrow[T_{ji}]{}$$

$$\longrightarrow (-x_i - x_j, -x_i) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (-x_i - x_j, x_i) \xrightarrow[T_{ij}]{}$$

$$\longrightarrow (-x_j, x_i) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (x_j, x_i),$$

т. е. $T' = T_i^{-1} T_{ij} T_i^{-1} T_{ji} T_i^{-1} T_{ij}$.

2 стъпка. С краен брой смени на местата на два реда или стълба (т. е. с краен брой преобразования от вида T') всяко линейно неизродено преобразование може да се доведе до линейно преобразование с матрица $\|a_{ij}\|$, всички главни миньори на която са различни от нула, т. е.

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

3 стъпка. Остава да се докаже, че линейно преобразование с различни от нула главни миньори може да се представи като суперпозиция на линейни преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ. Това ще докажем по индукция.

За $k=1$ разглеждаме преобразование T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = a_{11} \neq 0.$$

Преобразованието $T_1^{a_{11}}$ изобразява $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $(a_{11}x_1, x_2, \ldots, x_n)=Tx$, т. е. $T=T_1^{a_{11}}$ и твърдението е вярно.

Разглеждаме сега преобразования T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Предполагаме, че такива преобразования T могат да се представят като суперпозиция на преобразования от вида T_{ij} и T_i^{λ}, т. е. съществуват краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^{λ}, изобразяващи $x=(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ в

(3.31) $\{a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k, \ldots, a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}=Tx.$

Трябва да докажем, че с помощта на суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^{λ} векторът (3.31) може да се приведе във вида

$$(3.32)\qquad \begin{aligned} &(a_{11}x_1+\cdots+a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1+\cdots+a_{k(k+1)}x_{k+1}, \\ &\quad a_{(k+1)1}x_1+\cdots+a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

т. е. преобразование T с матрица

$$(3.33)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k(k+1)} & & & \\ a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

може да се представи като суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^{λ}.

За да докажем това, отначало за всеки номер $i=1, 2, \ldots, k$, за който елементът $a_{i(k+1)} \neq 0$, извършваме преобразование, което е суперпозиция на три преобразования:

$$T_{k+1}^{1/a_{i(k+1)}}\; T_{i(k+1)}\; T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$$

(за тези i, за които $a_{i(k+1)}=0$, такова преобразование не извършваме). Суперпозицията на всички такива тройки от преобразования за $i=1, 2, \ldots, k$ изобразява вектора (3.31) в

$$[(a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k+a_{1(k+1)}x_{k+1},\ \ldots,\ a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k+ \tag{3.34}$$

$$+a_{k(k+1)}x_{k+1},\ x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n).$$

Тъй като миньорът Δ_k на матрицата (3.33) е различен от нула, то различна от нула е и равната му детерминанта на матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Следователно съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ такива, че сумата на редовете на матрицата (3.35), умножени с тези числа, е

$$(a_{(k+1)1},\ \ldots,\ a_{(k+1)k},\ a_{(k+1)(k+1)}),$$

т. е. е равна на първите $k+1$ елемента на $(k+1)$-вия ред на матрицата (3.33).

Това означава, че ако за всяко $j=1, 2, \ldots, k+1$ такова, че $\lambda_j \neq 0$, извършим суперпозицията от трите преобразования $T_j^{1/\lambda_j} T_{(k+1)j} T_j^{\lambda_j}$ (за тези j, за които $\lambda_j=0$, не извършваме съответната суперпозиция), то суперпозицията на всички тройки преобразования изобразява вектора (3.34) във вектора (3.32).

С това лема 3 е доказана по индукция.

Лема 4. *За всяко неизродено линейно преобразование* (3.26) *и всяка непрекъсната в областта D функция f е вярна формулата за смяна на променливите* (3.28).

Наистина формула (3.28) е вярна за всяко от преобразованията T_{ij} и T_i^λ (лема 2), но всяко неизродено линейно преобразование се представя като суперпозиция на преобразования (лема 3), като якобианът на тази суперпозиция от преобразования е равен на произведението от якобианите им (лема 1).

Следствие от лема 4. *Ако G е произволна измерима област в E^n, T е произволно линейно неизродено преобразование, то n-мерният обем $V(G)$ на областта G и n-мерният обем $V(TG)$ на образа ѝ TG са свързани с равенството*

$$V(TG)=|\det T|\,.\,V(G). \tag{3.36}$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно във формули (3.28) да положим $D=TG$, $D'=T^{-1}D=G$ и $f(y)\equiv 1$ в областта D.

Нека сега е дадено произволно преобразование (3.21) или (3.21*) и са изпълнени условията на теорема 3.8.

При това двата интеграла в (3.23) съществуват, ако $D'=\varphi^{-1}(D)$

е измерима област, така че е необходимо да докажем измеримостта на D' и равенството на интегралите в (3.23).

Нека $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x) = J_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ са елементите на матрицата на Якоби, взети в точката $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а самата матрица на Якоби $\|J_{ij}(x)\|$ означаваме с $J_\psi = J_\psi(x)$. Наричаме **норма на точката** $x = (x_1, \ldots, x_n)$ величината $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, а **норма на матрицата** $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ числото $\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$. Очевидно, че ако $y = Ax$, то

(3.37) $$\|y\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Освен това е ясно, че за единичната матрица имаме $\|E\| = 1$.

Лема 5. Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и C е n-мерен координатен куб, принадлежащ на областта D', то n-мерният обем на куба C и n-мерният обем на образа му $\psi(C)$ са свързани с неравенството

(3.38) $$V(\psi(C)) \le [\max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|]^n \cdot V(C).$$

Доказателство на лема 5. Нека C е n-мерен куб с център в точката $\mathring{x} = (\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$ и със страна $2s$. Тогава кубът C може да се определи с неравенството

(3.39) $$\|x - \mathring{x}\| \le s.$$

От формулата на Тейлър за функцията на n променливи $\psi_i(x)$ (вж. п. 3, § 5, глава 13, част I) съществува число θ_i в интервала $(0, 1)$ такова, че

$$\psi_i(x) - \psi_i(\mathring{x}) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij}[\mathring{x} + \theta_i(x - \mathring{x})](x_j - \mathring{x}_j).$$

Оттук и от формула (3.37) следва

(3.40) $$\|\psi(x) - \psi(\mathring{x})\| \le (\max_{x \in C} \|J_{ij}(x)\|) \cdot \|x - \mathring{x}\|.$$

Полагайки $y = \psi(x)$, $\mathring{y} = \psi(\mathring{x})$, от (3.40) и (3.39) получаваме

$$\|y - \mathring{y}\| \le s \cdot \max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|.$$

По такъв начин, ако точката x принадлежи на куб C със страна $2s$ и с център в точката $\mathring{x}$, то образът $y = \psi(x)$ на точката x принадлежи на куб с център в точката $\tilde{y}=\psi(\tilde{x})$ и със страна $2s.\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|$. Следователно множеството $\psi(C)$ е измеримо и

$$V(\psi(C))\leq[\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|]^n.V(C).$$

С това лема 5 е доказана.

Следствие 1 от лема 5. *Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и областта G е измерима, то и нейният образ $\psi(G)$ е измерим. В частност, ако D е измерима, то и $D'=\psi^{-1}(D)$ е измерима.*

Действително границата на всяко измеримо множество G е множество с n-мерен обем нула, а такова множество съгласно лема 5 се преобразува в множество, чийто n-мерен обем също е нула. Измеримостта на областта $D'=\psi^{-1}(D)$ следва от това, че в условието на теорема 3.8 за преобразованието ψ^{-1} са изпълнени същите условия, както и за ψ.

Следствие 2 от лема 5. *Ако функцията $f(y)$ е интегруема в областта D, $D'=\psi^{-1}(D)$ и са изпълнени условията на теорема 3.8, то $f(\psi(x))$, а следователно и $f(\psi(x)).|\det J_\psi(x)|$ са интегруеми в D'.*

Лема 6. *Нека са изпълнени условията на теорема 3.8 и нека G е произволно измеримо подмножество на D', а $\psi(G)$ е образът му при преобразованието (3.21). Тогава за n-мерния обем на областта $\psi(G)$ е изпълнено неравенството*

$$V(\psi(G))\leq\int_G|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.41}$$

Доказателство на лема 6. Първа стъпка. Ще докажем, че за всяко неизродено линейно преобразование T и за всеки n-мерен куб $C\subset D'$ е изпълнено неравенството

$$V(\psi(C))\leq|\det T|.[\max_{x\in C}\|T^{-1}J_\psi(x)\|]^n.V(C). \tag{3.42}$$

Следствието от лема 4 гласи, че за всяко измеримо множество G и за всяко линейно преобразование T е изпълнено равенството (3.36)

$$V(TG)=|\det T|.V(G).$$

Полагаме $G=T^{-1}\psi(C)$. Тогава $TG=T(T^{-1}\psi(C))=\psi(C)$ и

$$V(\psi(C))=|\det T|.V(T^{-1}\psi(C)). \tag{3.43}$$

Дясната страна на (3.43) оценяваме с помощта на неравенството (3.38), в което вместо преобразованието ψ разглеждаме суперпозицията на преобразованията $T^{-1}\psi$. Получаваме

$$V(\psi(C)) \leq |\det T|.[\max_{x \in C} \| J_{T^{-1}\psi}(x) \|]^n . V(C).$$

1 $J_{T^{-1}\psi} = J_{T^{-1}} J_\psi = T^{-1} J_\psi$, защото матрицата на Якоби
инейно преобразование съвпада с матрицата на това преобра-
Но това означава, че неравенството (3.44) може да бъде
като (3.42). С това неравенството (3.42) е доказано.

Втора стъпка. Сега ще докажем неравенството (3.41). По-
пространството E^n с мрежа от n-мерни кубове със страна
$C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ са тези кубове, които изцяло се съдър-
в G, и нека $G_h = \bigcup_{1 \leq k \leq m(h)} C_k$.

Във всеки от кубовете C_k фиксираме произволна точка x_k и
иеваме за всеки такъв куб C_k неравенството (3.42), като пола-
$T = J_\psi(x_k)$. Получаваме

$$V(\psi(C_k)) \leq |\det J_\psi(x_k)| . \{\max_{x \in C_k} \| [J_\psi(x_k)]^{-1} . J_\psi(x) \| \}^n . V(C_k).$$

като елементите на матрицата на Якоби са непрекъснати
на променливата x в областта D', то функцията
$\| [J_\psi(\xi)]^{-1} J_\psi(x) \|$ е непрекъсната (следователно и равно-
непрекъсната) функция на променливите x и ξ в областта
D'. Поради това за всяко $\varepsilon > 0$ можем да изберем такова $\delta > 0$,
щом $\rho(\xi, \bar{\xi}) < \delta$, $\rho(x, \bar{x}) < \delta$, да имаме $|\varphi(x, \xi) - \varphi(\bar{x}, \bar{\xi})| < \varepsilon$. Тъй ка-
1, полагайки $\bar{x} = \bar{\xi} = \xi$, получаваме, че при $\rho(x, \xi) < \delta$ е
$\varphi(x, \xi) < \varepsilon$. По такъв начин, ако изберем $h < \delta$, то
$\| [J_\psi(x_k)]^{-1} J_\psi(x) \|^n < 1 + \varepsilon$ (за всички k) и оценката (3.45) може
запише във вида

$$V(\psi(C_k)) \leq (1 + \varepsilon) . |\det J_\psi(x_k)| . V(C_k).$$

последното неравенство по всички $k = 1, 2, \ldots, m(h)$,

$$V(\psi(G_h)) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{m(h)} |\det J_\psi(x_k)| . V(C_k).$$

твърдението, формулирано в края на § 4 на тази глава, следва,
границата при $h \to 0$ на дясната част на (3.46) съществува и е
на $(1 + \varepsilon) \int_G |\det J_\psi(x)| \, dx$ (ε е произволно положително число).
това $\lim_{h \to 0} G_h = G$, така че при $h \to 0$ от неравенството (3.46)
неравенството (3.41). Лема 6 е доказана.

Лема 7. *Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и освен* *това предполагаме, че функцията $f(y)$ е неотрицателна в D ... е вярна формулата за смяна на променливите* (3.23).

Доказателство на лема 7. Покриваме пространството E^n с мрежа от n-мерни кубове със страна h и означаваме с $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ тези от кубовете, които изцяло се съдържат в D. Нека $G_k = \psi^{-1}(C_k)$. За всяка от областите G_k записваме неравенството (3.41)

$$V(C_k) \leq \int_{G_k} |\det\ J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.47}$$

Умножаваме двете страни на (3.47) с m_k, където

$$m_k = \inf_{C_k} f(y) = \inf_{G_k} f[\psi(x)],$$

и сумираме получените неравенства по k от 1 до $m(h)$:

$$\sum_{k=1}^{m(h)} m_k V(C_k) \leq \sum_{k=1}^{m(h)} m_k \int_{G_k} |\det\ J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.48}$$

По формулата за средните стойности имаме

$$\int_{G_k} f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|\, dx = \mu_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx,$$

където $\mu_k \in [m_k, M_k]$, $M_k = \sup_{G_k} f[\psi(x)]$. Следователно

$$m_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx \leq \mu_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx = \int_{G_k} f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|\, dx$$

и неравенството (3.48) може да се усили:

$$\sum_{k=1}^{m(h)} m_k V(C_k) \leq \sum_{k=1}^{m(h)} \int_{G_k} f[\psi(x)]\, .\, |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.49}$$

От твърдението, формулирано в края на § 4 на тази глава, получаваме, че лявата страна на (3.49) при $h \to 0$ има граница, равна на $\int_D f(y)dy$, и тъй като $\lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{m(h)} G_k = D' = \psi^{-1}(D)$, то при $h \to 0$ от (3.49) получаваме

$$\int_D f(y)\, dy \leq \int_{D'} f[\psi(x)]\, .\, |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.50}$$

Сменяйки в горните разсъждения ролята на D и D', разглеждайки в D' функцията $g(x) = f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|$, и използвайки лема 1 и за детерминантата на произведение на две матрици, по-обратното неравенство

$$\int_{D'} f[\psi(x)]\,.\,|\det J_\psi(x)|\,dx \leq \int_D f(y)\,dy. \tag{3.51}$$

(3.50) и (3.51) следва формулата за смяна на променливите, с лема 7 е доказана.

Доказателство на теорема 3.8. Нека $f(y)$ е произ- интегруема върху областта D функция и са изпълнени усло- на теорема 3.8. От интегруемостта на функцията $f(y)$ в об- D следва, че съществува константа $M>0$ такава, че $\leq M$ в D. За всяка от неотрицателните функции $f_1(y)\equiv M$ теорема 3.8 е вярна поради лема 7. Тогава от на интеграла следва верността на формулата и за разликата $f_1(y)-f_2(y)=f(y)$. С това теорема 3.8 е до-

Забележка 1. В условията на теорема 3.8 може да се допуска анулирането на якобиана (3.22) върху някое подмножество S' на D' с n-мерен обем нула. Наистина множеството S може да се вложи в елементарна фигура C с произволно малък обем, като съгласно доказания вариант на теорема 3.8 имаме

$$\int_{\psi(D'/C)} f(y)\,dy = \int_{D'/C} f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.52}$$

Извършваме във формулата (3.52) граничен преход по редица от елементарни фигури $\{C_k\}$, $S\subset C_k$, n-мерният обем $V(C_k)$ на които клони към нула, и получаваме, че формула (3.23) е валидна и в разглеждания случай.

Забележка 2. Както се вижда от примера, приведен по-долу, изискването за взаимноеднозначност на преобразованието ψ е съществено дори в случая на свързана област, в която е изпълнено условието $\det J_\psi(x)\neq 0$ за всички $x\in E^n$.

Пример. Нека $D'=\{(x_1,x_2)\in E^2\colon\ x_1\in[0,1],\ x_2\in[-2\pi,2\pi]\}$, а $y=\psi(x)$ е зададено с равенствата

$$y_1=e^{x_1}\cos x_2,$$
$$y_2=e^{x_1}\sin x_2.$$

Тогава $D=\psi(D')=\{(y_1,y_2)\in E^2\colon\ 1\leqq(y_1^2+y_2^2)^{1/2}\leqq e\}$.
Лесно се вижда, че якобианът на преобразованието ψ е $\det J_\psi(x)=e^{2x_1}\neq 0$ за всички $x\in E^2$. Освен това

$$\iint_D dy_1dy_2=\pi(e^2-1);$$

$$\iint\limits_{D'} |\det J_{\psi}(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \left[\int\limits_0^1 e^{2x_1}\, dx_1\right] dx_2 = 2\pi\,(e^2-1),$$

т. е. формулата за смяна на променливите не е валидна.

§ 6. Пресмятане на обеми на n-мерни тела

В § 4 на тази глава отбелязахме, че интегралът

$$(3.53)\qquad I = \iint\limits_{D}\cdots\int 1\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

е равен на n-мерния обем $V(D)$ на областта D. Затова е естествено да наричаме величината $dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$ елементарен обем в разглежданата декартова координатна система $Oy_1 y_2 \ldots y_n$.

С помощта на преобразованието (3.21) преминаваме от декартовите координати $y_1, y_2, \ldots, y_n$ към нови, изобщо казано, криволинейни координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тъй като при такава смяна (съгласно формулата за смяна на променливите (3.23)) интегралът (3.53) се преобразува в

$$I = \iint\limits_{D'}\cdots\int \left|\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\, dx_2 \ldots dx_n ,$$

то е естествено да наричаме величината

$$\left|\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

елементарен обем в криволинейната координатна система $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

И така модулът на якобиана характеризира «разтягането» (или «свиването») на обема при прехода от декартови координати $y_1, y_2, \ldots, y_n$ към криволинейни координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Да пресметнем елементарния обем в сферични и цилиндрични координати.

1°. За сферичните координати в пространството E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geq 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi))$$

якобианът е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta.$$

Следователно елементарният обем е $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

2°. За цилиндричните координати в пространството E^3

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=z\end{cases}\qquad (r\geq 0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in R)$$

якобианът е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

Следователно елементарният обем е $r\,dr\,d\varphi\,dz$. В частност за полярните координати в равнината елементарното лице е $r dr d\varphi$.

3°. В пространството E^n сферичните координати се определят с

$$\begin{cases}x_1=r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1},\\ x_m=r\cos\theta_{m-1}\prod\limits_{k=m}^{n-1}\sin\theta_k, \qquad m=2,3,\ldots,n-1,\\ x_n=r\cos\theta_{n-1}\qquad (r\geq 0,\ \theta_1\in[0,2\pi),\ \theta_m\in[0,\pi],\ m=2,3,\ldots,n-1).\end{cases}$$

Якобианът е

$$\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}=r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k.$$

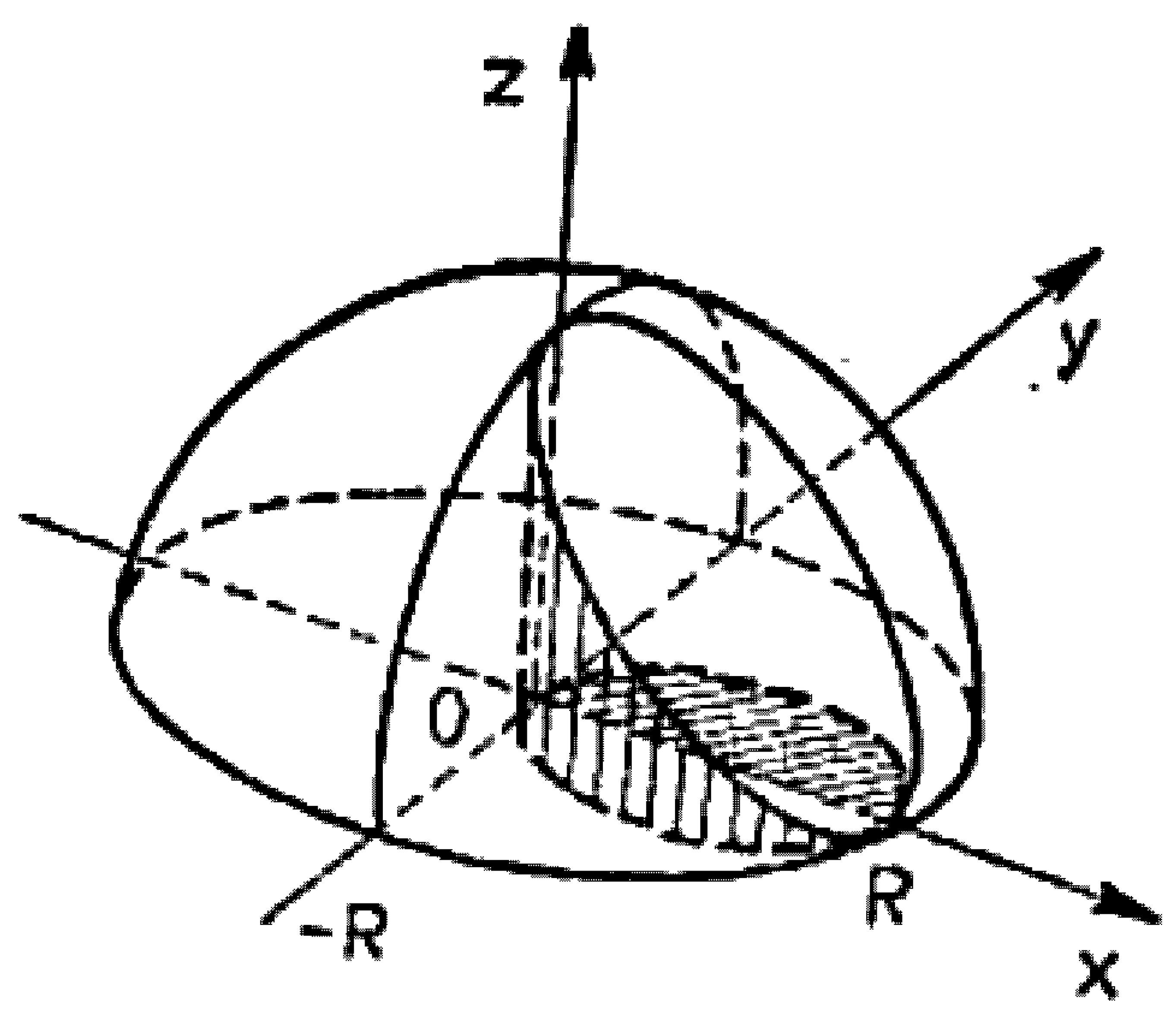
Следователно елементарният обем в n-мерни сферични координати е $r^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k\ d\theta_k\,dr$.

Примери. 1. Да се пресметне обемът V на тялото, което цилиндърът $x^2+y^2=Rx$ изрязва от кълбото $x^2+y^2+z^2\leqq R^2$ (фиг. 3.6)*.

Тялото е симетрично относно координатните равнини Oxy и Oxz и е разположено вдясно от равнината Oyz. Затова е достатъчно да се изчисли обемът на четвъртинката от тялото, лежаща в първи октант, т.е.

$$V=4\iiint\limits_D dx\,dy\,dz.$$

* Тази фигура се нарича «тяло на Вивиани» по името на италиански математик от XVII в.



Фиг. 3. 6

$$D=\{(x,y,z)\in E^3 : x\in[0,R],\ y\in[0,\sqrt{Rx-x^2}],\ z\in[0,\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}]\}.$$

Преминаваме към цилиндрични координати. Областта D' се задава с

$$D'=\{(\varphi,r,z)\in E^3 : \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ r\in[0,\ R\cos\varphi],\ z\in[0,\sqrt{R^2-r^2}]\}.$$

От формулата за смяна на променливите получаваме

$$V=4\iiint\limits_{D'} r\,dr\,d\varphi\,dz=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{R\cos\varphi} r\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} 1\,.\,dz\,dr\,d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} R^3(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Получихме

$$V=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Като запишем резултата във вида $V=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3$, забелязваме, че полученият обем е с $\frac{8}{9}R^3$ по-малък от обема на полукълбото, от което е изрязано тялото.

2. Да се пресметне интегралът

$$I=\iiint\limits_D \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

където D е тялото, ограничено отгоре от повърхността

(3.54) $$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy,$$

а отдолу от равнината $z=0$.

Преминаваме към сферични координати. Уравнението на повърхността (3.54) приема вида

$$r^2=a^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Забелязваме, че $z\geq 0$ за точките от повърхността на D и отчитайки симетричността на тялото относно оста Oz, след смяна на променливите получаваме

$$I=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi\,.\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^4}{144}\cdot$$

3. Да се пресметне интегралът

$$I=\iint\underset{D}{\cdots}\int\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

където D е n-мерното кълбо с радиус R и с център в началото на координатите $D=\{(x_1,\ldots,x_n)\in E^n:\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\leq R^2\}$, $n\geq 2$.

Преминаваме към сферични координати в E^n. Областта е паралелепипедът

$$D'=\{(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\in E^n: r\in[0,R],\theta_1\in[0,2\pi],\theta_k\in[0,\pi],k=2,3,\ldots,n-1\}\cdot$$

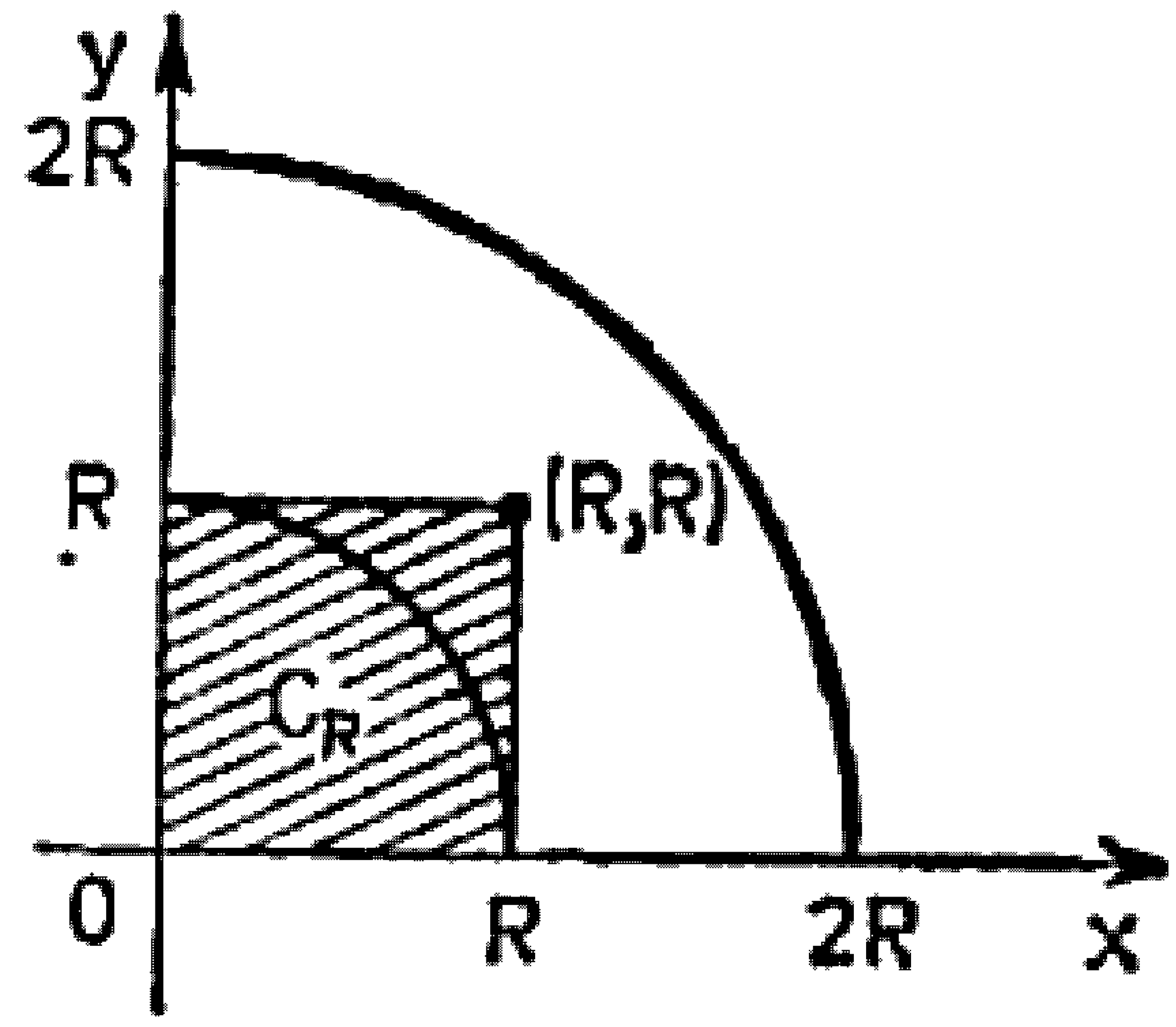
Формулите за смяна на променливите (3.23) и повторно интегриране (3.18) свеждат пресмятането на интеграла до

$$I=\int_0^R r^n dr\,.\int_0^{2\pi}d\theta_1\,.\int_0^{\pi}\sin\theta_2\,d\theta_2\ldots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1}\,.$$

Използувайки формулата за пресмятане на интеграл от степените на синуса (вж. п. 4, § 5, глава 9, част I), получаваме

$$I=2^n\frac{R^{n+1}}{n+1}A(n),$$

където



Фиг. 3. 7

$$A(n)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!}\pi^{\frac{n}{2}} & \text{ако } n \text{ е четно,} \\ \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!}\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

4. Да се пресметне интегралът на Поасон

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Разглеждаме в равнината областите

$$C_R=\{(x, y)\in E^2 : x^2+y^2\leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\},$$
$$K_R=\{(x, y)\in E^2 : 0\leq x\leq R,\ 0\leq y\leq R\}$$

и неотрицателната функция на две променливи $e^{-(x^2+y^2)}$. На фиг. 3.7 са показани областите C_R, C_{2R} — четвъртинки от кръгове с радиуси R и $2R$ в първи квадрант — и областта K_R — защрихованият квадрат.

Тъй като $C_R\subset K_R\subset C_{2R}$, то

$$(3.55)\qquad \iint\limits_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leq\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leq\iint\limits_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

За средния интеграл в (3.55) получаваме

$$\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^R e^{-x^2}\,dx\,.\int_0^R e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

За да пресметнем оставащите два интеграла, правим полярна смяна на координатите. Областта, която при това преобразование преминава в C_R, е

$$C'_R=\{(r,\varphi)\in E^2 : r\in[0,R],\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\}.$$

Прилагаме формулата за смяна на променливите и получаваме

$$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint_{C'_R} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi/2} d\varphi\,.\int_0^R e^{-r^2} r\,dr=\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-R^2}),$$

$$\iint_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-4R^2}).$$

Замествайки получените изрази в (3.55), получаваме

$$\text{(3.56)}\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}}\le\int_0^R e^{-x^2}\,dx\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-4R^2}}\,.$$

Преминавайки към граница в (3.56) при $R\to\infty$, получаваме

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Този елегантен начин за пресмятане принадлежи на Поасон.

§ 7. Теорема за почленно интегриране на редици и редове от функции

В § 4, глава 2 беше доказана теорема 2.8 за почленно интегриране на редица от функции $\{f_n(x)\}$ върху сегмент $[a,b]$ от реалната права. Аналогична теорема е вярна и в случая, когато редицата от функции е зададена и интегруема в някоя област в пространството E^m $(m\ge 1)$.

Теорема 3.9. Нека D е затворена ограничена измерима област в E^m. Ако редицата от функции $\{f_n(x)\}$ клони равномерно в D към функцията $f(x)$ и ако всяка от функциите $f_n(x)$ е интегруема в областта D, то и граничната функция е интегруема в тази област, като редицата може да се интегрира почленно в областта D, т.е.

$$\int_D f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx.$$

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Както при доказателството на теорема 2.8, за доказателството на интегруемостта на f в областта D е достатъчно да се докаже, че съществува цяло число n такова, че за всяко деление на областта D голямата сума S и малката сума s на граничната функция $f(x)$ и голямата сума S_n и малката сума s_n на интегруемата в D функция $f_n(x)$ са свързани с неравенството

$$S-s\leqq(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.57}$$

Разглеждаме произволно деление на областта D на краен брой частични области D_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ с произволна форма без общи вътрешни точки. Означаваме със символа $\omega_i(f_n)$ осцилацията на функцията $f_n(x)$ в областта D_i $(\omega_i(f_n)=\sup\limits_{D_i} f_n(x)-\inf\limits_{D_i} f_n(x))$, а със символа $\omega_i(f)$ — осцилацията в D_i на граничната функция $f(x)$.

Ще докажем, че за всяко достатъчно голямо n е изпълнено неравенството

$$\omega_i(f)\leqq\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2\Delta D}, \quad i=1, 2, \ldots, r, \tag{3.58}$$

където ΔD означава n-мерния обем на областта D (можем да считаме $\Delta D_i\neq0$). Като умножим (3.58) с обемите ΔD_i на частичните области D_i и сумирайки получените неравенства по i, получаваме (3.57).

За всяко цяло n и за всеки две точки x' и x'' от областта D_i е в сила тъждеството

$$f(x')-f(x'')=[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')]. \tag{3.59}$$

Поради равномерната сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ към функцията $f(x)$ в D за всяко фиксирано $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че за всяко $n>n_0$ и всяка точка $x\in D$ е изпълнено

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4\Delta D}. \tag{3.60}$$

Прилагайки в дясната страна на (3.59) неравенството (3.60) за точките $x=x'$ и $x=x''$ съответно, получаваме

$$|f(x')-f(x'')|\leqq|f_n(x')-f_n(x'')|+\frac{\varepsilon}{2\Delta D} \tag{3.61}$$

за всяко $n>n_0$ и за всеки две точки $x', x''\in D_i$.

От неравенството (3.61) следва

$$|f(x')-f(x'')|\leqq\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2\Delta D},$$

от където получаваме неравенството (3.58).

С това доказателството на интегруемостта на граничната функция е завършено.

Възможността на почленно интегриране на редицата $\{f_n(x)\}$ следва от неравенството (3.60), изпълнено за всяко $x \in D$, и от отбелязания в § 4 факт: стойността на интеграла $\int_D 1\,dx$ е равна на n-мерния обем ΔD на областта D. С това теорема 3.9 е доказана.

Ще приведем формулировката на теорема 3.9 на езика на редове от функции.

Ако редът от функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (x=(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m)$$

е сходящ равномерно към сумата си $S(x)$ в някоя ограничена затворена измерима област $D \subset E^m$ и ако всеки член на реда $u_k(x)$ е интегруема в областта D функция, то и сумата $S(x)$ е интегруема в областта D, като редът може да се интегрира почленно в областта D, т. е.

$$\int_D S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D u_k(x)dx.$$

§ 8. n-кратни несобствени интеграли

В този параграф понятието n-кратен интеграл се обобщава за случаите на неограничена област и неограничена подинтегрална функция. Понятието несобствен n-кратен интеграл е формулирано така, че да обхваща и двата отбелязани случая.

1. Понятие за n-кратни несобствени интеграли.

Нека D е отворено свързано множество в пространството E^m. Със символа $\bar{D}$ означаваме затворената обвивка на D, която се получава, като прибавим към множеството D неговата граница.

Определение 1. *Ще казваме, че редицата $\{D_n\}$ от отворени свързани множества* м о н о т о н н о з а п ъ л в а м н о ж е с т в о т о *D, ако: 1) за всяко цяло n е изпълнено $D_n \subset D_{n+1}$; 2) обединението на всички множества D_n съвпада с D.*

Нека върху множеството D е дефинирана функция $f(x)$, интегруема по Риман върху всяко затворено измеримо подмножество на множеството D. Ще разглеждаме всевъзможни редици $\{D_n\}$ от отворени множества, монотонно запълващи множеството D, и такива, че затворената обвивка $\bar{D}_n$ на всяко множество D_n е измеримо множество (оттук в частност следва, че всяко от множествата D_n е ограничено).

Определение 2. *Ако за всяка такава редица $\{D_n\}$ съществува границата на числовата редица*

(3.63)
$$a_n = \int_{\overline{D}_n} f(x)dx$$

и тази граница не зависи от избора на редицата $\{D_n\}$, то тази граница се нарича н е с о б с т в е н и н т е г р а л *от функцията $f(x)$ върху областта D и се означава с един от следните символи:*

(3.64)
$$\int_D f(x)dx \quad \text{или} \quad \int \ldots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dx_1dx_2 \ldots dx_m.$$

При това несобственият интеграл (3.64) се нарича с х о д я щ.

Нека отбележим, че символите (3.64) се използуват и в случая, когато границата на редицата (3.63) не съществува. В този случай интегралът (3.64) се нарича р а з х о д я щ.

2. Два признака за сходимост на несобствени интеграли от неотрицателни функции

Теорема 3.10. *За сходимостта на несобствения интеграл (3.64) от неотрицателната в областта D функция $f(x)$ е необходимо и достатъчно да съществува редица от измерими области $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, за която числовата редица (3.63) е ограничена.*

Д о к а з а т е л с т в о. Н е о б х о д и м о с т. Сходимостта на несобствения интеграл (3.64) по определение означава, че редицата $\{a_n\}$, зададена с равенството (3.63), е сходяща за всяка редица от области $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, и следователно редицата $\{a_n\}$ е ограничена за всяка такава редица $\{D_n\}$.

Д о с т а т ъ ч н о с т. Нека редицата (3.36) е ограничена. Следователно тя е сходяща, защото е ненамаляваща ($\overline{D}_n \subset \overline{D}_{n+1}$ и $f(x) \geq 0$). Означаваме границата ѝ с I. Остава да се докаже, че ако изберем друга редица от измерими области $\{D_n'\}$, монотонно запълващи D, то редицата

$$a_n' = \int_{\overline{D}_n'} f(x)dx$$

има за граница същото число I. Нека n_0 е фиксирано. Разглеждаме множеството $\overline{D}_{n_0}'$. Ще докажем, че съществува такова n_1, че $\overline{D}_{n_0}' \subset D_{n_1}$. Ако допуснем противното, то за всяко k съществува точка $M_k \in \overline{D}'_{n_0}$ такава че $M_k \overline{\in} D_k$. Поради затвореността и ограничеността на множеството $\overline{D}'_{n_0}$ от редицата $\{M_k\}$ може да се избере подредица, сходяща към някоя точка M, принадлежаща на $\overline{D}'_{n_0}$. Точката M заедно с някоя своя околност принадлежи на някое множество D_{k_1}. Но тогава на това множество D_{k_1} (и на всички множества D_k с $k>k_1$) ще принадлежат точки от редицата $\{M_k\}$ с произволно големи индекси. А това противоречи на избора на точките M_k.

И така съществува индекс n_1 такъв, че $\overline{D}'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Следователно

$$a'_{n_0} \leq a_{n_1} \leq I,$$

откъдето следва, че редицата $\{a'_n\}$ има за граница някое число $I' \leq I$. Сменяйки в горните разсъждения местата на редиците $\{a'_n\}$ и $\{a_n\}$, достигаме до неравенството $I \leq I'$. Следователно $I' = I$ и теоремата е доказана.

В края на § 6 на тази глава бе даден пример (пример 4) за пресмятане на несобствения интеграл

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4},$$

където
$$C_n = \{(x, y) \in E^2,\ x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad D = \{(x, y) \in E^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(в пример 4, § 6 трябва само да се смени означението R с n).

Теорема 3.11 (общ признак за сравнение). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ навсякъде в отвореното множество D удовлетворяват условието

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Тогава от сходимостта на несобствения интеграл $\int_D g(x)dx$ следва сходимостта на несобствения интеграл $\int_D f(x)dx$, а от разходимостта на $\int_D f(x)dx$ следва разходимостта на $\int_D g(x)dx$.

Доказателство. Нека $\{D_n\}$ е редица от измерими области, монотонно запълващи областта D. Поради очевидните неравенства

$$a_n = \int_{D_n} f(x)dx \leq \int_{D_n} g(x)dx = b_n$$

от ограничеността на $\{b_n\}$ следва ограничеността на $\{a_n\}$ и от неограничеността на $\{a_n\}$ следва неограничеността на $\{b_n\}$ (за всяка редица от области $\{D_n\}$). Оттук и от теорема 3.10 получаваме теорема 3.11.

Обикновено за проверка на сходимостта на несобствени интеграли се използуват стандартни (еталонни) функции за сравнение. Най-често употребяваните такива функции са $g(x)=|x|^{-p}$, $p>0$, $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$. Лесно проверяваме, че ако областта D е кълбо с радиус R ($R>0$) и с център в началото на координатната система, то несобственият интеграл от функцията $|x|^{-p}$ върху областта D е сходящ при $p<m$ и разходящ при $p\geq m$. Ако D е външността на горното кълбо, то несобственият интеграл от функцията $|x|^{-p}$ върху областта D е сходящ при $p>m$ и разходящ при $p\leq m$.

3. Несобствени интеграли от знакопроменливи функции

В тази подточка изучаваме връзките между сходимост и абсолютна сходимост на m-кратни несобствени интеграли. Както и в едномерния случай, несобственият интеграл $\int_D f(x)dx$ се нарича **абсолютно сходящ**, ако е сходящ интегралът $\int_D |f(x)|dx$. За разлика от едномерния случай от сходимостта на един m-кратен интеграл ($m\geq 2$) следва неговата абсолютна сходимост.

Теорема 3.12. За несобствените m-кратни интеграли понятията сходимост и абсолютна сходимост са еквивалентни при $m\geq 2$, при условие че собствените интеграли, чиято граница търсим, са добре дефинирани.

Доказателство. 1. Ще докажем, че от абсолютната сходимост на m-кратния несобствен интеграл в областта D следва неговата обикновена сходимост в тази област. Разглеждаме двете неотрицателни функции

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2} \tag{3.65}$$

и ги представяме в следния вид:

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ако } f(x)\geq 0;\\ 0, & \text{ако } f(x)<0;\end{cases}\qquad f_-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{ако } f(x)\leq 0;\\ 0, & \text{ако } f(x)>0.\end{cases} \tag{3.66}$$

Следните съотношения се получават непосредствено от определението на функциите f_+ и f_-:

(3.67) $$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|,$$

(3.68) $$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

От интегруемостта в собствен смисъл на функцията $f(x)$ върху всяка измерима подобласт на областта D следва интегруемостта върху всяка такава подобласт и на функцията $|f(x)|$, а следователно и на функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$ (чрез формулите (3.65)). От сходимостта на интеграла $\int_D |f(x)|\, dx$, току-що показаното свойство на функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$, неравенствата (3.67) и теорема 3.11 получаваме, че несобствените интеграли $\int_D f_+(x)dx$ и $\int_D f_-(x)dx$ са сходящи в несобствен смисъл. От определението за несобствен интеграл следва, че ако са сходящи несобствените интеграли от функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$ върху областта D, то върху тази област са сходящи сумата и разликата на тези функции. От първото равенство в (3.68) следва сходимостта на интеграла $\int_D f(x)dx$. Първата част на теоремата е доказана.

2. Нека многократният несобствен интеграл $\int_D f(x)dx$ е сходящ. Ще покажем, че той е абсолютно сходящ. Допускаме, че това не е вярно. Тогава от теорема 3.10 следва, че редицата от интеграли от функцията $|f(x)|$ върху всяка редица от измерими множества $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, е монотонно растяща към безкрайност редица. В частност редицата $\{D_n\}$ може да бъде избрана така, че за всяко $n = 1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството

(3.69) $$\int_{D_{n+1}} |f(x)|dx > 3 \int_{D_n} |f(x)|\, dx + 2n + 4$$

(достатъчно е да се вземе коя да е редица $\{D_n\}$ и да се «разреди» така, че неравенството (3.69) да е изпълнено за получената подредица). Означаваме с p_n множеството $D_{n+1} \setminus D_n$. Тогава от (3.69) получаваме, че за всяко n е в сила

(3.70) $$\int_{p_n} |f(x)|\, dx > 2 \int_{D_n} |f(x)| + 2n + 4.$$

От второто равенство в (3.68) следва, че

(3.71) $$\int_{p_n} |f(x)|\, dx = \int_{p_n} f_+(x)dx + \int_{p_n} f_-(x)dx.$$

Фиксираме произволно цяло n. Нека за това n първият интеграл в дясната част на (3.71) е по-голям от втория. Тогава от (3.70) и (3.71) получаваме

$$\int_{\bar{P}_n} f_+(x)dx > \int_{\bar{D}_n} |f(x)|dx + n + 2. \tag{3.72}$$

Разделяме областта P_n на краен брой области P_n^i така, че малката сума $\sum_i m_i \Delta P_n^i$ на функцията $f_+(x)$ (тук $m_i = \inf_{P_n^i} f_+(x)$ и ΔP_n^i е m-мерният обем на P_n^i) за това деление да удовлетворява неравенството

$$0 \leq \int_{\bar{P}_n} f_+(x)dx - \sum_i m_i \Delta P_n^i < 1.$$

Тогава, замествайки в лявата част на (3.72) интеграла с малката сума, получаваме неравенството

$$\sum_i m_i \Delta P_n^i > \int_{\bar{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{3.73}$$

Тъй като $m_i \geq 0$, то в сумата $\sum_i m_i \Delta P_n^i$ можем да оставим само тези членове, за които $m_i > 0$, като неравенството (3.73) продължава да е в сила. Означаваме с $\tilde{P}_n$ обединението на областите P_n^i, съответствуващи на останалите в сумата събираеми.

В областта $\tilde{P}_n$ функцията $f_+(x)$ е положителна и затова $f_+(x) = f(x)$ в тази област (вж. (3.66)). Следователно от (3.73) получаваме неравенството

$$\int_{\tilde{P}_n} f(x)dx > \int_{\bar{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{3.74}$$

Означаваме с D_n^* обединението на D_n и $\tilde{P}_n$. Тогава, събирайки неравенството (3.74) и тривиалното неравенство

$$\int_{\bar{D}_n} f(x)dx \geq -\int_{\bar{D}_n} |f(x)|dx,$$

получаваме

$$\int_{\bar{D}_n^*} f(x)dx > n + 1. \tag{3.75}$$

Ако за фиксираното n от двата интеграла в дясната страна на (3.71) по-голям беше вторият, провеждайки подобни разсъждения и отчитайки, че в областта $\widetilde{P}_n$ е вярно $f_-(x)=-f(x)$, получаваме

(3.76) $$\int_{\bar{D}_n^*} f(x)dx<-n-1.$$

От неравенствата (3.75) и (3.76) следва, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ е в сила

(3.77) $$\Big|\int_{\bar{D}_n^*} f(x)dx\,\Big|>n+1.$$

Редицата от области $\{D_n^*\}$ удовлетворява всички условия в определение 1 освен може би условието за свързаност на областите D_n^* (свързаността на областта D_n^* може да бъде нарушена, когато от областта P_n изваждаме тези области P_n^i, в които $m_i=0$). *С малка деформация ще направим тези области свързани**.

Съединяваме всяка от областите P_n^i от $\widetilde{P}_n$ с областта D_n с m-мерна измерима свързана област K_n^i (която ще наричаме **канал**) така, че полученото множество да бъде свързано. Тъй като броят на областите P_n^i в $\widetilde{P}_n$ е краен, то и броят на каналите е краен. Означаваме обединението на всички канали с K_n. Ще наложим ограничение на m-мерния обем на каналите $V(K_n)$.

Тъй като функцията $f(x)$ е интегруема, а следователно и ог- в P_n, то

$$\Big|\int_{K_n} f(x)dx\Big|\leq\int_{K_n} |f(x)|\,dx\leq M\,.\,V(K_n),$$

където $M=\sup\limits_{\bar{P}_n}|f(x)|$. Ще искаме m-мерният обем на каналите $V(K_n)$ да удовлетворява условието $V(K_n)<\frac{1}{M}$. Тогава

(3.78) $$\Big|\int_{\bar{K}_n} f(x)\,dx\Big|<1.$$

От неравенствата (3.77) и (3.78) получаваме, че за всяко n е в сила неравенството

* Именно в този момент от доказателството съществено се използува, че $m\geq2$. При $m=1$ горните разсъждения не могат да бъдат проведени.

$$(3.79)\qquad \Big|\int\limits_{D_n^* \cup K_n} f(x)dx\,\Big| > n.$$

Ако $K_n \subset P_n$, което винаги може да бъде удовлетворено, то редицата от свързани измерими области $\{D_{2n}^* \cup K_{2n}\}$ монотонно запълва областта D, защото

$$\overline{D_{2n}^*} \cup \overline{K_{2n}} \subset D_{2n+1} \subset D_{2(n+1)} \subset D_{2(n+1)}^* \cup K_{2(n+1)}.$$

От неравенствата (3.79) следва, че редицата от интеграли в лявата част на това неравенство е разходяща, т. е. несобственият интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ е разходящ. Но по условие този интеграл е сходящ. Полученото противоречие доказва нашето твърдение. Теоремата е доказана напълно.

4. Главна стойност на n-кратен несобствен интеграл

Означаваме с $B(R, x_0)$ m-мерното кълбо с радиус R и с център в точката x_0 и нека началото на координатната система е точката $0 \in E^m$.

Определение. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко $x \in E^m$ и интегруема върху всяко кълбо $B(R, 0)$, $R>0$. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема по Коши в E^m, ако съществува границата*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{B(R,\,0)} f(x)dx.$$

Тази граница ще наричаме главна стойност в смисъл на Коши на несобствения интеграл от функцията $f(x)$ и ще означаваме с

$$V.p\int\limits_{E^m} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{B(R,\,0)} f(x)dx.$$

Пример. Не е трудно да се пресметне, че за функцията $f(x, y) = x$ в E^2 имаме

$$\int\limits_{B(R,\,0)} x\,dx\,dy = 0$$

и следователно функцията $f(x, y) = x$ е интегруема по Коши в E^2 и

$$V.p\int\limits_{E^2} x\,dx\,dy = 0.$$

Трябва да се отбележи, че несобственият интеграл $\int\limits_{E^2} x dx dy$ е разходящ.

В случай че функцията $f(x)$ има особеност в някоя точка x_0 в областта $D \subset E^m$ и $f(x)$ е интегруема във всяка област $D_R = D \setminus B(R, x_0)$, където $B(R, x_0) \subset D$ и $R > 0$, то главна стойност на интеграл в смисъл на Коши се въвежда като

$$V.p \int\limits_D f(x)dx = \lim_{R \to 0} \int\limits_{D_R} f(x)dx.$$

4. Криволинейни интеграли

В тази глава ще разширим понятието едномерен определен интеграл по праволинеен сегмент в случая, когато областта на интегриране е сегмент от някаква равнинна или пространствена крива. Интеграли от този вид се наричат криволинейни.

§ 1. Понятие за криволинейни интеграли от първи и втори род

Нека разгледаме в равнината Oxy някаква ректифицируема крива L, която няма точки на самопресичане и повтарящи се участъци. Да предположим, че тази крива се определя от параметричните уравнения

$$(4.1)\qquad \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (a\leq t\leq b),$$

и в началото ще смятаме, че тя не е затворена и има за краища точките A и B с координати $A(\varphi(a), \psi(a))$, $B(\varphi(b), \psi(b))$.

Нека върху кривата $L=AB$ са дефинирани три функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, всяка от които е непрекъсната (а следователно и равномерно непрекъсната) по тази крива (за функцията $f(x, y)$ например това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$ за всички точки M_1, $M_2\in L$, разстоянието между които е по-малко от δ).

Да разделим сегмента $[a, b]$ с помощта на точките $a=t_0<t_1<t_2<$ $<\ldots<t_n=b$ на n сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. При това кривата L се разпада на n дъги M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, където точките $M_k(x_k, y_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$, имат координати $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$.

Избираме на всяка от дъгите $M_{k-1}M_k$ произволна точка $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координатите на която съответстват на някаква стойност τ_k на параметъра t, принадлежаща на сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ и такава, че $\xi_k=\varphi(\tau_k)$, $\eta_k=\psi(\tau_k)$. Дължината на дъгата $M_{k-1}M_k$ $(k=1, 2,\ldots,n)$ означаваме с Δl_k. В § 1 на глава 10 от част I е доказана следната формула за Δl_k*:

(4.2) $$\Delta l_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Числото $\Delta=\max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$ ще наричаме диаметър на деление на кривата L.

Образуваме следните три интегрални суми:

(4.3¹) $$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta l_k,$$

(4.3²) $$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta x_k,$$

(4.3³) $$\sigma_3=\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta y_k,$$

където $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$.

Определение 1. *Числото I ще наричаме граница на интегралната сума σ_s $(s=1, 2, 3)$, когато диаметърът на деление Δ клони към нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че (независимо от избора на точките N_k от дъгите $M_{k-1}M_k$) $|\sigma_s-I|<\varepsilon$, когато $\Delta<\delta$.*

Определение 2. *Ако съществува границата на интегралната сума σ_1 при $\Delta\to 0$, то тази граница се нарича криволинеен интеграл от първи род от функцията $f(x, y)$ по кривата L и се означава с един от символите*

(4.4¹) $$\int_L f(x, y)dl, \qquad \int_{AB} f(x, y)dl.$$

Определение 3. *Ако съществува границата на интегралната сума σ_2 [съответно σ_3] при $\Delta\to 0$, то тази граница се нарича криволинеен интеграл от втори род от функцията $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривата $L=AB$ и се означава със символа*

(4.4²) $$\int_{AB} P(x, y)dx \left[\text{съответно} \int_{AB} Q(x, y)\,dy\right].$$

Сумата

* При условие че кривата (4.1) е гладка (т. е. φ и ψ имат непрекъснати производни).

$$\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)\,dy$$

е прието да се нарича ***пълен криволинеен интеграл от втори род*** *и се означава със символа*

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{4.4³}$$

От определението на криволинейните интеграли следва, че:

1) криволинейният интеграл от първи род не зависи от това, в каква посока (от A към B или от B към A) се обхожда кривата L, а за криволинейния интеграл от втори род изменението на посоката води до смяна на знака, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

2) физически криволинейният интеграл от първи род (4.4¹) може да се представи като масата на кривата L с линейна плътност $f(x,y)$, а общият криволинеен интеграл от втори род (4.4³) — като работата по преместването на материална точка от A до B по кривата L под действието на сила с проекции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в точката (x, y).

Забележка. За пространствената крива $L = AB$ аналогично се определят криволинеен интеграл от първи род —

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl,$$

и три криволинейни интеграла от втори род —

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)dz.$$

Сумата от трите последни интеграла е прието да се нарича **пълен криволинеен интеграл от втори род** и да се означава със символа

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

§ 2. Условия за съществуване на криволинейни интеграли

Определение. *Кривата L се нарича гладка, ако функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ от определящите я параметрични уравнения (4.1) имат в сегмента $[a, b]$ непрекъснати производни $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ (т.е. производните са непрекъснати в интервала $a<t<b$ и имат крайни гранични стойности в точката a отдясно и в точката b отляво).*

Ще напомним, че в глава 13 на първа част нарекохме особени точки на кривата L точките, съответствуващи на такива стойности на параметъра t от $[a, b]$, за които $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2=0$, т.е. в които двете производни се анулират. Точките от кривата L, за които $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$, нарекохме обикновени точки.

Теорема 4.1. *Ако кривата $L=AB$ е гладка и няма особени точки и ако функциите $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати върху тази крива, то криволинейните интеграли (4.4¹), (4.4²) съществуват и могат да се пресметнат по следните формули, които свеждат тези интеграли до обикновени определени интеграли:*

$$(4.5^1)\qquad \int_{AB} f(x, y)\,dl=\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$(4.5^2)\qquad \int_{AB} P(x, y)\,dx=\int_a^b P(\varphi(t), \psi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

$$(4.5^3)\qquad \int_{AB} Q(x, y)\,dy=\int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt.$$

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че определените интеграли в десните части на формулите (4.5¹), (4.5²), (4.5³) съществуват, тъй като при направените предположения подинтегралните функции във всеки от тези интеграли са непрекъснати в сегмента $a\leq t\leq b$.

Ще отбележим също така, че формулите (4.5²) и (4.5³) се доказват по един и същ начин, и затова ще изведем само равенствата (4.5¹) и (4.5²) и ще докажем съществуването на интегралите (4.4¹) и (4.4²).

Както в § 1, да разделим сегмента $[a, b]$ на n сегмента $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, и да съставим интегралните суми (4.3¹), (4.3²). Като вземем предвид (4.2) и равенството

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt,$$

да представим интегралните суми (4.3¹), (4.3²) във вида

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \right\},$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt \right\}.$$

Нека означим определените интеграли от десните части на формулите (4.5¹), (4.5²) съответно с I_1 и I_2 и да представим тези интеграли по сегмента $[a, b]$ във вида на сума от n интеграла по сегментите $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Да разгледаме и да оценим разликите

$$(4.6^1)\quad \sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big\{ f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \Big\} \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$(4.6^2)\quad \sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big\{ P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t)) \Big\} \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

При направените предположения функциите $f(\varphi(t), \psi(t))$ и $P(\varphi(t), \psi(t))$ като сложни функции на аргумента t са непрекъснати в сегмента $a \leq t \leq b$, а следователно и равномерно непрекъснати в този сегмент.

Ще отбележим, че когато диаметърът на деление Δ на кривата L клони към нула, тогава клони към нула и най-голямата от разликите $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Наистина, тъй като функциите $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и не се анулират едновременно, то числото $m =$

$$= \min_{a \leq t \leq b} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0 \text{ и } \Delta l_k \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \cdot \Delta t_k, \text{ т. е. } \Delta t_k \leq \frac{1}{m} \cdot \Delta l_k$$

(тук използувахме формулата (4.2) за дължината Δl_k).

По този начин за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$ такова, че при $\Delta < \delta$ изразът във фигурни скоби от формулата (4.6¹) по модул да бъде по-малък от ε / l, където l е дължината на кривата L, а изразът във фигурни скоби от (4.6²) по модул да бъде по-малък от $\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, където $M=\max\limits_{a\leq t\leq b}|\varphi'(t)|$.

След като предположим, че за диаметъра на делеиие е изпълнено $\Delta<\delta$, получаваме следните оценки за разликите (4.6¹) и (4.6²):

$$|\sigma_1-I_1|\leq\frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k=\varepsilon,$$

$$|\sigma_2-I_2|\leq\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi'(t)|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot M\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon.$$

С това доказахме, че интегралните суми σ_1 и σ_2 имат граници при $\Delta\to 0$ съответно равни на I_1 и I_2. С това е доказано съществуването на криволинейните интеграли (4.4¹), (4.4²) и верността на формулите (4.5¹), (4.5²). Ще отбележим, че при извеждането на формулата (4.5²) никъде не използувахме условието за непрекъснатост на функцията $\psi'(t)$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Кривата L ще наричаме **частично гладка**, ако тя е непрекъсната и се разпада на краен брой части, които нямат общи вътрешни точки и всяка от тях е гладка крива. За частично гладка крива L е естествено криволинейните интеграли по тази крива да се дефинират като сума от съответните криволинейни интеграли по всички гладки части, съставящи кривата L. При това равенствата (4.5¹), (4.5²), (4.5³) ще бъдат в сила и за частично гладка крива L. Тези равенства са верни и в случая, когато функциите $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са само частично непрекъснати по кривата L (т. е. когато кривата L се разпада на краен брой части, нямащи общи вътрешни точки, във всяка от които дадените функции са непрекъснати).

Забележка 2. Аналогични резултати и формули са в сила и за криволинейни интеграли по пространствената крива

$$L=AB=\{(x, y, z): x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ x=\chi(t);\ a\leq t\leq b\}.$$

Така например формулите за пресмятане на тези интеграли са:

$$\int\limits_{AB}f(x, y, z)dl=\int\limits_{a}^{b}f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt,$$

$$\int\limits_{AB}P(x, y, z)\,dx=\int\limits_{a}^{b}P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\,dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} R(x, y, z)\,dz = \int_a^b R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t)\,dt.$$

Забележка 3. По-горе беше отбелязано, че криволинейният интеграл от втори род зависи от посоката на описване на кривата $L = AB$. Затова трябва да бъде направена специална уговорка за това, какво ще разбираме под символа

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{4.7}$$

в случая, когато L е затворена крива (т. е. в случая, когато точката B съвпада с точката A).

От двете възможни посоки на описване на затворения контур L ще наричаме положителна тази посока, при движението по която областта, лежаща във вътрешността на контура, остава от лявата страна (т. е. движение, «обратно на часовниковата стрелка»).

Ще смятаме, че в интеграла (4.7) *по затворения контур L този контур винаги се описва в положителна посока.*

В случая, когато е необходимо да се подчертае, че контурът L е затворен, ще използуваме следното означение за интеграла (4.7):

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Забележка 4. Криволинейните интеграли имат същите свойства, както обикновените определени интеграли (доказателствата са аналогични на изложените в § 4, глава 9 на част I). Ще отбележим, че при по-силни предположения тези свойства следват непосредствено от формулите (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3).

Ще формулираме тези свойства за криволинейните интеграли от първи род.

1. Линейно свойство. Ако за функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ съществуват криволинейни интеграли по кривата AB и ако α и β са произволни константи, то за функцията $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ съществува криволинейният интеграл по кривата AB и при това

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,dl = \alpha \int_{AB} f(x, y)\,dl + \beta \int_{AB} g(x, y)\,dl.$$

2. Адитивност. Ако дъгата AB се състои от две дъги AC и CB, нямащи общи вътрешни точки, и ако за функцията $f(x, y)$ съществува криволинеен интеграл по всяка от дъгите AC и CB,

за тази функция съществува криволинеен интеграл по дъгата и при това

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{AC} f(x, y)\, dl + \int_{CB} f(x, y)\, dl.$$

3. Оценка на модула на интеграла. Ако съществува интеграл по кривата AB от функцията $f(x, y)$, то и криволинейният интеграл по кривата AB от функ- (x, y) и при това

$$\left|\int_{AB} f(x, y)\, dl\right| \leq \int_{AB} |f(x, y)|\, dl .$$

4. Формула за средните стойности. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по кривата AB, то може да се намери точка M от тази крива такава, че

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = l f(M) ,$$

където l е дължината на кривата.

Забележка 5. Аналогично на изложената тук теория на криволинейния интеграл в равнината се изгражда и теорията на криволинейния интеграл в пространството E^n ($n>2$).

Примери. 1°. Да се намери дължината на пространствената крива L, зададена с параметричните уравнения

$$x = e^{-t} \cos t,\ y = e^{-t} \sin t,\ z = e^{-t} \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Задачата се свежда до пресмятането на криволинейния интеграл от първи род $\int_L 1\, dl$.

От формулата за изчисляване на криволинейния интеграл от първи род, дадена в забележка 2, получаваме

$$\int_L 1\, dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(e^{-t} \cos t)']^2 + [(e^{-t} \sin t)']^2 + [(e^{-t})']^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{-2t}(2\sin^2 t + 2\cos^2 t) + e^{-2t}}\, dt = \sqrt{3}\,(1 - e^{-2\pi}).$$

2°. Да се изчисли криволинейният интеграл от втори род

$$I = \int_{AB} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy,$$

където AB е част от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $x, y\geqq 0$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$. Тази крива може да се зададе и с параметричните уравнения

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t \quad \text{при } 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Така от формулите (4.5[2]), (4.5[3]) получаваме

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(a\cos t+b\sin t)\,.\,(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)\,b\cos t]\,dt=$$

$$=\left[\frac{ab}{2}\sin(2t)+\frac{a^2+b^2}{4}\cos(2t)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ще отбележим, че изразът под знака на интеграла $(x+y)dx+$ $+(x-y)\,dy$ е пълният диференциал на функцията

$$u(x, y)=\frac{x^2-y^2}{2}+xy.$$

Както ще бъде доказано в глава 6, от този факт следва, че стойността на интеграла I не зависи от избора на частично гладкия път на интегриране, който свързва точките A и B (разгледаната част от елипса е само една от тези криви), и е равен на разликата

$$u(B)-u(A)=u(0, b)-u(a, 0)=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

5. Повърхнинни интеграли

В тази глава ще бъде разгледан въпросът за интегриране на функции, дефинирани върху повърхнини от тримерното евклидово пространство E^3. Обект на изследване са и понятията повърхнина и лице на повърхнина.

§ 1. Понятие за повърхнина и лице на повърхнина

1. Понятие за повърхнина

Определение 1. Изображение f на област G от равнината върху множество G^* от тримерното пространство се нарича хомеоморфно, ако това изображение осъществява взаимно еднозначно съответствие между точките на G и G^*, при което всяка сходяща редица от точки от G се изобразява в сходяща редица от точки в G^* и, обратно: всяка сходяща редица от точки от G^* е образ на сходяща редица от точки от G.

Тук под сходяща редица от точки на G (съответно G^*) разбираме такава сходяща редица, която принадлежи на G (съответно G^*) заедно с границата си. Множествата G и G^* се наричат хомеоморфни, ако между тях съществува хомеоморфизъм.

Определение 2. Изображение f на област G върху G^* се нарича локално хомеоморфно, ако за всяка точка от G съществува околност, която се изобразява хомеоморфно върху своя образ.

Определение 3. Областта G от равнината T се нарича елементарна, ако тази област е образ на някакъв отворен кръг D при хомеоморфно изображение на този кръг върху равнината T.

Определение 4. Свързаната област G от равнината T се нарича проста, ако всяка точка от G има околност, която е елементарна област.

Определение 5. Множество Φ от точки в пространството се нарича повърхнина, ако е образ на проста равнинна област

G при локално хомеоморфно изображение f на областта G в пространството E^3.

По-нататък под **околност на точката** M **от повърхнината** Φ ще разбираме подмножеството от точки на Φ, принадлежащи на околност на точката M в E^3.

Да разгледаме един пример. Нека G е проста област в равнината Oxy (например кръг), (x, y) са координатите на точката $M \in G$, $z = z(M)$ е непрекъсната функция в G, а G^* е графиката на тази функция. Очевидно изображението f на областта G върху G^*, зададено с равенствата

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v),$$

е хомеоморфно изображение на тази област върху множеството G^*, а $\Phi = G^*$ е повърхнина.

Нека в равнината (u, v) е дадена проста област G и за всички точки от тази област са дефинирани три функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{5.1}$$

или, което е същото, една векторна функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \tag{5.1*}$$

където $\mathbf{r}(u, v)$ е вектор с компоненти $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Ще смятаме, че са изпълнени следните две условия А:

1) функциите (5.1) имат непрекъснати частни производни от първи ред в областта G;

2) навсякъде в областта G матрицата

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

има ранг, равен на две.

Ще докажем, че *ако са изпълнени тези две условия А, то множеството* Φ *от точки, определени от уравненията* (5.1), *е повърхнина*, т.е. то е област на равнинна област G при локално хомеоморфно изображение от G в E^3.

Нека $N_0(u_0, v_0)$ е произволна точка от G. Ясно е, че малка околност на тази точка се изобразява в малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ (за това е достатъчно функциите (5.1) да са непрекъснати в G, което е изпълнено в нашия случай).

Очевидно, ако $N_n(u_n, v_n)$ е фундаментална редица от точки в малка околност на точката N_0, то редицата от образите на тези точки $M_n(x_n, y_n, z_n)$, където $x_n = x(N_n)$, $y_n = y(N_n)$, $z_n = z(N_n)$, е също фундаментална във Ф: това следва непосредствено от непрекъснатостта на функциите (5.1); например разликата $|x_{n+p}-x_n|=$ $=|x(N_{n+p})-x(N_n)|$ може да бъде направена по-малка от произволно число $\varepsilon>0$ при $\rho(N_{n+p}, N)<\delta=\delta(\varepsilon)$.

Остава да се докаже, че при изображението, определено от уравненията (5.1), на всяка точка от множеството Ф от достатъчно малка околност на точката M_0 съответствува определена точка от малка околност на точката N_0 в областта G, при това на всяка сходяща редица от точки $\{M_n\}$ от тази околност на точката M_0 съответствува сходяща редица $\{N_n\}$ от точки на G.

Тъй като във всяка точка $N_0(u_0, v_0)\in G$ рангът на матрицата (5.2) е равен на две, то в тази точка е различен от нула поне един минор от втори ред на матрицата (5.2).

Нека този минор е

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{в точката } N_0.$$

След като обединим това условие с първото условие от двете условия А, получаваме, че за системата

$$\text{(5.3)} \qquad \begin{cases} x(u, v)-x=0 \\ y(u, v)-y=0 \end{cases}$$

в околност на точката M_0 са изпълнени всички условия на теоремата за обратната функция (вж. § 2, глава 14 на първа част). Затова системата (5.3) има в околност на точката M_0 единствено непрекъснато и диференцируемо решение

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \end{cases}.$$

Това означава, че съществува хомеоморфно изображение на малка околност на точката $N_0\in G$ върху малка околност на точката $P_0(x, y)$ от равнината Oxy. (В едната посока това изображение се задава с непрекъснатите функции (5.4), а в другата — с първите две равенства на (5.1), в които функциите $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ са също непрекъснати; непрекъснатостта и на едните, и на другите функции осигурява изобразяването на сходяща редица от околността на едната от точките N_0 или P_0 в сходяща редица в околност на другата от тези точки.)

Като заместим функциите (5.4) в третата функция на (5.1), получаваме непрекъсната в околност на точката функция

$$\text{(5.5)} \qquad z=z(u(x, y), v(x, y))=\varphi(x, y).$$

Тази функция осъществява хомеоморфно изображение на малка околност на точката $P_0(x_0, y_0)$ от равнината Oxy върху малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$. Може да се каже, че (5.5) представя Φ в малка околност на точката M_0 като графика на функция на x, y.

Тъй като суперпозиция на хомеоморфни изображения е също хомеоморфно изображение, то изображението на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $M_0 \in \Phi$ е хомеоморфно.

От това множество от точки Φ, определено от уравненията (5.1), е повърхнина, ако са изпълнени двете условия А.

Забележка 1. Повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1), е прието да се нарича *гладка*, когато е изпълнено първото от двете условия А, а когато е изпълнено второто от условията А — *повърхнина без особени точки*.

И така може да се каже, че повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1) при изпълнени и двете условия А, е гладка и няма особени точки.

Забележка 2. Между другото установихме, че всяка гладка и без особени точки повърхнина в достатъчно малка околност на всяка от своите точки може еднозначно да се проектира на поне една от трите координатни равнини.

Да разгледаме повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1), за които са изпълнени двете условия А.

След като запишем уравненията (5.1) във векторния вид (5.1*), да видим какъв е геометричният смисъл на векторната функция $\mathbf{r}(u, v)$. Ако фиксираме някоя стойност на $v=v_0=\text{const}$ от областта G, то уравнението $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v_0)$ ще определя крива върху повърхнината Φ, наричана *координатна линия*, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ ще се допира до тази линия. Аналогично при $u=u_0=\text{const}$ уравнението $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0, v)$ ще определя друга координатна линия, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ ще се допира до нея. През точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$, ще минават и двете координатни линии.

Второто от условията А, т. е. условието за липса на особени точки, изисква рангът на матрицата (5.2) да бъде равен на две. Това означава, че векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, координатите на които съставят редовете на матрицата (5.2), са линейно независими, т. е. неколинеарни, и следователно определят равнина, е допирателна равнина на повърхнината Ф в точ- M_0. Вектор, който е перпендикулярен към тази допирателна се нарича **нормален вектор** (или **нормала**) на Ф в точката M_0. Такъв вектор може да се определи векторно произведение на векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Така век-

$$\mathbf{n} = \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|} \tag{.6)}$$

е **единичен нормален вектор** към повърхнината Ф. По силата на условията, наложени на функциите (5.1), този вектор е непрекъснат по u и v в някаква околност на произволна точка от повърхнината, т. е. *в околността на всяка точка от гладка повърхнина без особени точки съществува непрекъснато векторно поле от нормали.*

Изобщо върху цялата повърхнина такова непрекъснато векторно поле от нормали може и да не съществува.

Пример. Лист на Мьобиус. Ако залепим правоъгълника $ABB'A'$ така, че A да съвпада с B' и B да съвпада с A', то ще се получи повърхнина, която се нарича **лист на Мьобиус***. След като направи една обиколка, нормалата сменя посоката си с противоположната (вж. фиг. 5.1).

Ще разглеждаме само такива повърхнини Ф, за които съществува непрекъснато векторно поле от нормали върху цялата повърхнина. Прието е такива повърхнини да се наричат **двустранни**.

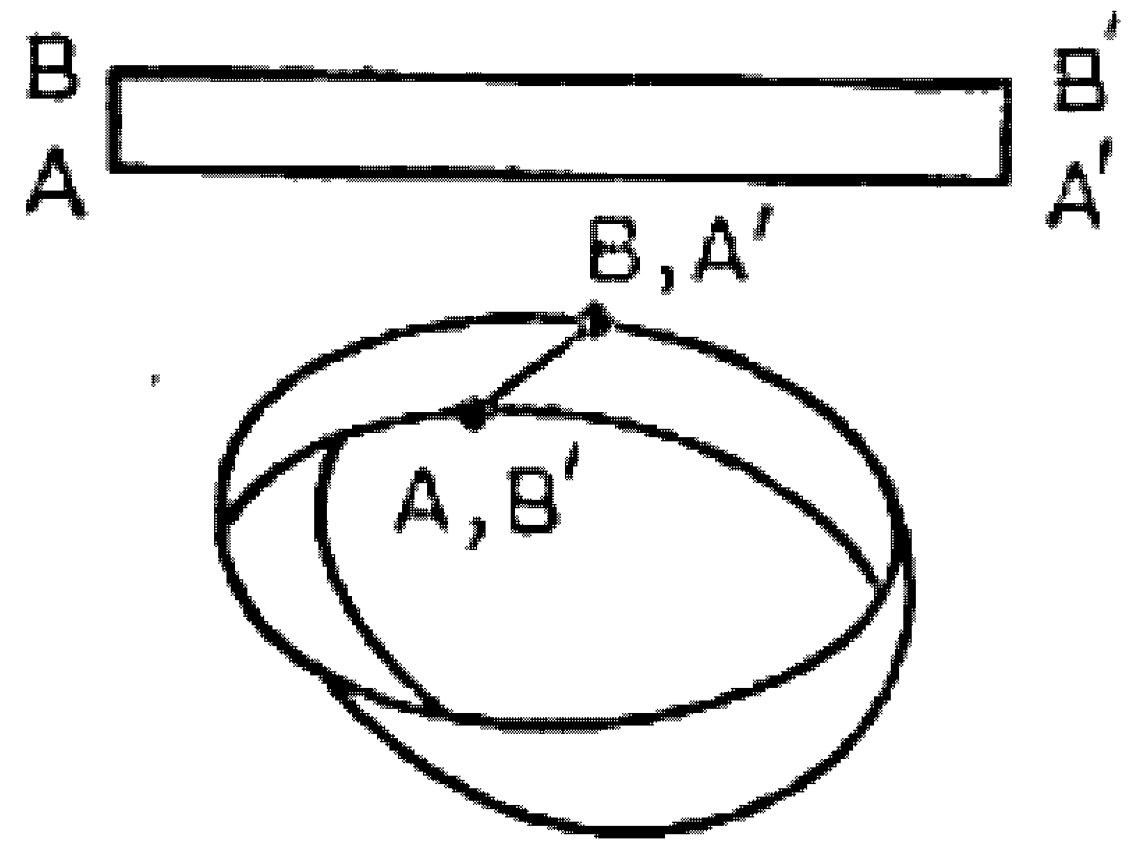
Повърхнината Ф се нарича **пълна**, ако всяка фундаментална редица от точки от тази повърхнина има за граница точка от тази повърхнина.

Повърхнината Ф се нарича **ограничена**, ако съществува тримерно кълбо, съдържащо всички точки от тази повърхнина.

Примери за пълни повърхнини са равнината, сферата, елипсоидът, простият хиперболоид. При това сферата и елипсоидът са ограничени повърхнини. Кръгът без границата си, както и всяко отворено свързано множество върху сферата (което не съвпада с цялата сфера) не са пълни повърхнини.

По-нататък ще разглеждаме повърхнина Ф, определена от уравненията (5.1), която притежава следните пет свойства: 1) гладка; 2) без особени точки; 3) двустранна: 4) пълна и 5) ограничена.

* А. Мьобиус — немски математик (1790—1868).



Фиг. 5. 1

2. Помощни леми

Лема 1. *Ако Φ е гладка повърхнина и M_0 е нейна неособена точка, то достатъчно малка околност на точката M_0 еднозначно се проектира върху допирателната равнина за която и да е точка от тази околност.*

Доказателство. Нека околността $\hat{\Phi}$ на точката M_0 е такава, че 1) нормалата във всяка точка от тази околност сключва с нормалата в точката M_0 ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{4}$; 2) околността $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху някакъв кръг в една от координатните равнини (например Oxy). Възможността за избора на такава околност $\hat{\Phi}$ следва от установеното в предната точка съществуване на околност на разглежданата точка със следните две свойства: 1) в тази околност съществува непрекъснато векторно поле от нормали; 2) тази околност еднозначно се проектира върху една от координатните равнини (очевидно има част от тази околност, която се проектира върху някакъв кръг в координатната равнина).

Ще отбележим, че кои да е две нормали от непрекъснатото векторно поле в точки от $\hat{\Phi}$ сключват ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{2}$.

Да допуснем, че разглежданата околност $\hat{\Phi}$ не се проектира еднозначно върху допирателната равнина в някоя точка $M \in \hat{\Phi}$. Тогава в тази околност ще има две точки P и Q такива, че хордата PQ ще е успоредна на нормалата на Φ в точката M. Да разгледаме линията, получена от пресичането на $\hat{\Phi}$ с равнината, успоредна на оста Oz и минаваща през хордата PQ (предполагаме, че $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху равнината Oxy). Върху тази линия според теоремата на Лагранж може да се намери точка N, допирателната в която е успоредна на хордата PQ, а от това е успоредна и на нормалата в точката M. Това означава, че норв точките M и N сключват ъгъл $\frac{\pi}{2}$, което противоречи на на $\hat{\Phi}$. Полученото противоречие ни убеждава във верността Лемата е доказана.

Ще казваме, че част от повърхнина има размери, по- от δ ($\delta>0$), ако тази част е във вътрешността на някакво с радиус $\delta/2$.

Лема 2. *За всяка гладка, ограничена, пълна и без особени точ- повърхнина Φ може да се намери число $\delta>0$ такова, че за част от Φ с размери, по-малки от δ, еднозначно се проек- а) на една от координатните равнини; б) на допирателната в произволна точка от тази част.*

Доказателство. По-горе в забележка 2 и в лема 1 доказахме, че за всяка точка от повърхнината Φ може да се намери малка околност $\hat{\Phi}$, която еднозначно се проектира на една от координатните равнини; б) на допирателната рав- в произволна точка от $\hat{\Phi}$.

Да допуснем, че твърдението на лемата не е вярно, т. е. не да се намери числото $\delta>0$ от формулировката на лемата за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ще се намери част $\hat{\Phi}_n$ с размери, по-малки от δ_n, и такава, че не се проектира еднозначно на никоя от координатните равнини или на допирателната равнина в някоя точка $M_n\in\hat{\Phi}_n$. Да изберем във всяка част $\hat{\Phi}_n$ точка $\hat{M}_n$ и да изберем от редицата $\{\hat{M}_n\}$ от точки от ограничената и пълна повърхнина Φ подредица $\{M_{k_n}\}$, която има за граница някоя точка $M_0\in\Phi$.

От забележка 2 и лема 1 имаме, че може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$ на точката M_0, която еднозначно се проектира върху една от координатните равнини и върху допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$. Всички $\hat{\Phi}_{k_n}$, започвайки от някакъв номер k_n, ще бъдат вътре във $\hat{\Phi}$, а това противоречи на избора на частите $\hat{\Phi}_n$. Лемата е доказана.

Лема 3. *Нека Φ е гладка, без особени точки, двустранна, пълна, ограничена повърхнина, определена от уравненията* (5.1). *Тогава за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всяка част от повърхнината Φ с размери, по-малки от δ, ъгълът γ между нормалите в кои да е две точки от тази част удовлетворява условието*

$$\cos\gamma=1-\alpha, \tag{5.7}$$

където $\qquad 0\leqq\alpha<\varepsilon.$

Доказателство. Повърхнината Ф е двустранна и затова векторното поле от нормали е непрекъснато, а следователно и равномерно непрекъснато върху цялата повърхнина Ф. Това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за произволни две точки M_1 и M_2, за които $\rho(M_1, M_2)<\delta$, е вярно неравенството

$$|\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)|<\sqrt{2\varepsilon} \tag{5.8}$$

($\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата).

Тъй като

$$\cos\gamma=(\mathbf{n}(M_1),\ \mathbf{n}(M_2)),$$

а числото

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)\right)^2=\frac{1}{2}\left|\mathbf{n}(M_2)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\mathbf{n}(M_1)\right|^2-$$

$$-(\mathbf{n}(M_1),\ \mathbf{n}(M_2))=1-\cos\gamma,$$

то

$$\cos\gamma=1-\alpha$$

и за α поради (5.8) са в сила неравенствата $0\leq\alpha<\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2=\varepsilon$. Лемата е доказана.

3. Лице на повърхнина. Нека Ф е повърхнина, определена от уравненията (5.1) и притежаваща отбелязаните по-горе пет свойства (гладка, без особени точки, ограничена, пълна, двустранна). С помощта на гладки криви да разбием Ф на краен брой гладки части Φ_i с размери, по-малки от δ, където δ е достатъчно малко (и се определя от условията на лема 2). Да означим с Δ максималния размер на частите Φ_i (диаметър на деление). Върху всяка част Φ_i да изберем произволна точка M_i и да проектираме Φ_i върху допирателната равнина в точката M_i. Нека σ_i е лицето на проекцията на Φ_i върху допирателната равнина. Да съставим сумата от лицата на проекциите на всички части

$$\sum_i \sigma_i . \tag{5.9}$$

Определение 1. *Числото σ се нарича* **граница на сумите** *(5.9) при $\Delta\to 0$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всички разбивания на Ф с гладки криви на краен брой части Φ_i, за които $\Delta<\delta$ независимо от избора на точките M_i върху частите Φ_i, е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum_i \sigma_i \quad \sigma\right| < \varepsilon .$$

Определение 2. *Ако за повърхнината Ф съществува границата сумите* (5.9) *при* $\Delta \to 0$, *то повърхнината Ф се нарича* *к в а- р у е м а, и числото* σ *се нарича л и ц е на Ф.*

З а б е л е ж к а. Не може лицето на повърхнината да бъде по- като се апроксимира повърхнината с вписани многостени намаляване размерите на стените, като за лице се взема точ- горна граница на лицата на вписаните многостени (както при намиране на дължината на крива). Има класи- пример на Шварц* (така нареченият «ботуш на Шварц»), че лицата на вписаните в цилиндрична повърхнина мно- тени нямат крайна точна горна граница.

Теорема 5.1. *Всяка гладка, ограничена, пълна, двустранна и особени точки повърхнина Ф, определена с уравненията* (5.1), *и за лицето ѝ е в сила равенството*

$$\sigma = \iint_G \left|\left[\frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}\right]\right| du\, dv. \tag{.10}$$

З а б е л е ж к а. Формулата (5.10) е инвариантна относно из- на координатните оси.

Д о к а з а т е л с т в о н а т е о р е м а т а. При условията на тео- подинтегралната функция в (5.10) е непрекъсната в G и ітегралът (5.10) съществува.

Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и в зависимост от него да из- $\delta > 0$ така, че да са изпълнени двете условия: 1) всяка част $_i$ от повърхнината Ф с размери, по-малки от δ, еднозначно се върху допирателната равнина в произволна точка на Φ_i; на ъгъла γ между две нормали от всяка част Φ_i с по-малки от δ, може да се представи във вида $\cos\gamma = 1 - \alpha_i$ ъдето $\alpha_i < \frac{\varepsilon}{\sigma}$ и $\alpha_i \leq 1$ (σ е стойността на интеграла (5.10)).

Поради лема 2 и лема 3 такъв избор на $\delta > 0$ е възможен.

Да разбием с помощта на гладки криви повърхнината Ф на Φ_i с размери, по-малки от δ, и след като изберем във всяка тях по една произволна точка M_i, да проектираме Φ_i върху равнина в точката M_i. Да означим със σ_i лицето на и да съставим сумата (5.9).

За да пресметнем лицето σ_i на плоска област, ще използуваме за смяна на променливите при двойни интеграли.

* Г. А. Шварц — немски математик (1843—1921). [По-подробно за при- мера на Шварц вж. края на т. 1. § 2, глава 5 на книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк «Основы математического анализа. Часть 2».

то, тъй като за всички вектори **a** и **b** е в сила равенството $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$, получаваме, че

$$\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right| = ED - F^2, \tag{5.16}$$

и изразът за лицето на повърхнина (5.10) може да се запише и в следната форма:

$$\sigma = \iint_G \sqrt{ED - F^2}\; du\, dv. \tag{5.17}$$

Забележка 4. Лицето на повърхнина притежава свойството адитивност: ако повърхнината Φ е разделена от частично гладка крива на две части Φ_1 и Φ_2, които нямат общи вътрешни точки, то лицето на повърхнината Φ е равно на сумата от лицата на частите Φ_1 и Φ_2.

Това свойство следва от представянето на лицето на повърхнина с помощта на интеграл и от адитивността на интеграла.

§ 2. Повърхнинни интеграли

Нека Φ е гладка, двустранна, пълна, ограничена и без особени точки повърхнина, определена от уравненията (5.1) (или което е все същото, от (5.1*)) в областта G.

Нека върху Φ са дефинирани четири функции $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, всяка от които е непрекъсната (а следователно и равномерно непрекъсната) в множеството от точки на повърхнината Φ.

Да разделим повърхнината Φ с помощта на гладки или частично гладки криви на краен брой части Φ_i и да означим с Δ максималния размер на частите Φ_i (диаметър на деление на повърхнината). Да изберем от всяка част Φ_i по една произволна точка M_i.

Нека $\mathbf{n}(M_i)$ е единичната нормала в точката M_i, а $(\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i)$ са координатите на тази единична нормала (или, както ги наричат, директорните косинуси). Да означим със σ_i лицето на частта Φ_i. Тогава, както е показано по-горе (вж. (5.17)),

$$\sigma_i = \iint_{G_i} \sqrt{ED - F^2}\, du\, dv,$$

където G_i е подобластта на G, образът на която е Φ_i.

Да съставим четирите суми

(5.18¹) $$\sum_1 = \sum_i f(M_i)\sigma_i\,,$$

(5.18²) $$\sum_2 = \sum_i P(M_i)\,.\,\sigma_i\,.\cos X_i\,,$$

(5.18³) $$\sum_3 = \sum_i Q(M_i)\,.\,\sigma_i\,.\cos Y_i\,,$$

(5.18⁴) $$\sum_4 = \sum_i R(M_i)\,.\,\sigma_i\,.\cos Z_i\,.$$

Определение 1. *Числото* I_k $(k=1, 2, 3, 4)$ *се нарича граница на сумите* $\sum_k$ *при* $\Delta\to 0$, ако за всяко $\varepsilon>0$ *може да се намери* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *такова, че при* $\Delta<\delta$ (независимо от избора на точките $M_i\in\Phi_i$) *е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum_k - I_k\right| < \varepsilon\,.$$

Определение 2. *Ако съществува граница при* $\Delta\to 0$ *на сумите* $\sum_1$, *то тази граница се нарича повърхнинен интеграл от първи род от функцията* $f(x, y, z)$ *по повърхнината* Φ *и се означава със символа*

(5.19¹) $$I_1 = \iint_\Phi f(M)\,d\sigma\,.$$

Определение 2*. *Ако съществуват граници при* $\Delta\to 0$ *на сумите* $\sum_k$, *където* $k=2, 3$ *или* 4, *то тези граници се наричат повърхнинни интеграли от втори род и се означават съответно със символите*

(5.19²) $$I_2 = \iint_\Phi P(M)\cos X\,d\sigma,$$

(5.19³) $$I_3 = \iint_\Phi Q(M)\cos Y\,d\sigma\,,$$

(5.19⁴) $$I_4 = \iint_\Phi R(M)\cos Z\,d\sigma\,.$$

Сумата на последните три интеграла се нарича пълен повърхнинен интеграл от втори род. Този интеграл може да бъде записан във вида

(5.19⁵) $$\iint_\Phi (\mathbf{A},\ \mathbf{n})\,d\sigma\,,$$

Следствие. Ако повърхнината Ф е зададена с уравнението $z=z(x, y)$ (т. е. $x=u$, $y=v$, $z=z(u, v)$), където $z(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в областта G от равнината Oxy функция, след като изберем тази страна от повърхнината Ф, за която векторът на нормалата на повърхнината сключва остър ъгъл с оста Oz, можем да запишем формулата (5.20') във вида

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos z\, d\sigma=\iint_{G} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy .$$

Наистина достатъчно е да вземем предвид равенствата

$$d\sigma=\sqrt{ED-F^2}\, dx\, dy, \quad ED-F^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\cos z=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} .$$

Това е причината за въвеждането на следното означение за повърхнинния интеграл от втори род:

(5.23) $$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos Z\, d\sigma=\iint_{\Phi} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Ще отбележим, че означението (5.23) се използува и в случая, когато Ф не е графика на функцията $z=z(x, y)$.

За пълния повърхнинен интеграл от втори род също се използува и следното означение:

$$\iint_{\Phi}(P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)\, d\sigma=$$

$$=\iint_{\Phi} P\, dy\, dz+Q\, dz\, dx+R\, dx\, dy.$$

З а б е л е ж к а. Понятието повърхнинен интеграл от първи и втори род естествено се разширява и в случая, когато повърхнината Ф е частично гладка. За такива повърхнини очевидно е вярна и доказаната в този параграф теорема за съществуване.

6. Теория на полето. Основни интегрални формули на анализа

В тази глава ще бъдат разгледани скаларните и векторните полета, а също така основните понятия и операции, свързани със скаларно и векторно поле. Особено важна за анализа формула е известната ни вече формула на Нютон—Лайбниц. В тази глава ще бъдат получени формулите на Грийн, Остроградски—Гаус и Стокс, които са обобщение на формулата на Нютон—Лайбниц в многомерния случай.

§ 1. Означения. Биортогонални базиси. Инварианти на линеен оператор

1. Означения. По-долу ще се налага често да записваме суми от известен брой събираеми. Да поясним означенията, които ще използваме. Ще имаме работа със системи величини, белязани с няколко индекса, например a^i_k. Обикновено в такива случаи единият индекс се пише долу, а другият — горе. Ако индексите се менят независимо, те се означават с различни букви. Ако индексите са много, те се означават с една буква с подиндекс. Например $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ или $\xi^{i_1}_1 \ldots \xi^{i_p}_p$. В някои случаи за означаване на сумиране ще се използва символиката: $\sum\limits_{\sigma} A(\sigma)$, където сумирането се извършва по някое множество от величини σ. Ако индексите на сумиране $i_1, i_2, \ldots, i_p$ се менят така, че $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, то ще пишем

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} B_{i_1 i_2 \ldots i_p} .$$

Накрая да сключим следното съглашение за сумиране. Нека ни е даден израз, представляващ произведение. Ако в този израз се срещат два еднакви буквени индекса, от които единият е горен, а другият — долен, то ще смятаме, че по тези индекси се извършва сумиране. При това индексите вземат последователно стойностите 1, 2, ..., а получените произведения се събират.

Например, ако $i, j=1, 2, \ldots, n$, то

$$a_i e^i = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n,$$

$$a_{ij} e^i e^j = a_{1j} e^1 e^j + a_{2j} e^2 e^j + \cdots + a_{nj} e^n e^j =$$

$$= a_{11} e^1 e^1 + a_{12} e^1 e^2 + \cdots + a_{1n} e^1 e^n + a_{21} e^2 e^1 + a_{22} e^2 e^2 + \cdots +$$

$$+ a_{2n} e^2 e^n + \cdots + a_{n1} e^n e^1 + a_{n2} e^n e^2 + \cdots + a_{nn} e^n e^n.$$

При тези означения например разлагането на вектора $\mathbf{a}$ по базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ на пространството E^n се записва така:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

където a^i са коефициентите в разлагането на този вектор. Последният запис означава, че

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i.$$

Със символа δ_i^j ще означаваме величината, приемаща само две стойности:

$$\delta_i^i = 1, \quad \delta_i^j = 0 \quad \text{при } i \neq j;$$

δ_i^j е така нареченият символ на Кронекер*.

Скаларното произведение на два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в пространството E^n ще означаваме с $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. Биортогонални базиси в пространството E^n. Нека $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, е базис** в n-мерното пространство E^n. Очевидно $\mathbf{e}_i$ са линейно независими вектори.

Определение 1. Базисът e^j (индексът е горен), $j=1, 2, \ldots, n$, се нарича биортогонален базис за базиса $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, ако са в сила съотношенията

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вярно е следното твърдение.

Твърдение. За всеки базис $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, на пространст-

* Л. Кронекер — немски математик (1823—1891).

** Векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуват базис в E^n, ако всеки вектор $\mathbf{a}$ от E^n се представя по единствен начин във вида

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a^n \mathbf{e}_n = a^i \mathbf{e}_i.$$

вото E_n съществува единствен биортогонален базис $\mathbf{e}^j$, $j=1, 2, \ldots, n$, т. е. такъв базис, че

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j)=\delta_i^j, \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Доказателство. Да означим линейната обвивка (т. е. множеството от всички линейни комбинации) на векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ с M_i. Избираме от ортогоналното допълнение на M_i* вектор $\mathbf{e}^i$, нормиран с условието

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i)=1.$$

Очевидно ще имаме

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j)=\delta_i^j, \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Векторите $\mathbf{e}^j$, $j=1, 2, \ldots, n$, също образуват базис на пространството E^n. Наистина, ако това не е така, то би съществувал вектор от пространството, който се разлага нееднозначно по системата $\mathbf{e}^j$, т. е. нулевият вектор би имал разлагане по базиса с коефициенти, които не са всичките равни на нула. Тогава някой вектор $\mathbf{e}^k$ от системата $\mathbf{e}^j$ ще принадлежи на линейната обвивка** M^k на векторите $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^{k-1}, \mathbf{e}^{k+1}, \ldots, \mathbf{e}^n$. Но това не е възможно, тъй като в този случай $\mathbf{e}^k$ би бил ортогонален на вектора $\mathbf{e}^k$ (поради $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^p)=0$ при $k \neq p$). Но векторът $\mathbf{e}^k$ не може да бъде ортогонален на $\mathbf{e}_k$, понеже по построение $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^k)=1$.

По такъв начин за произволен базис $\mathbf{e}_i$ е построен биортогонален базис $\mathbf{e}^j$, всички вектори на който се определят по единствен начин. Наистина, ако наред с $\mathbf{e}^j$ би съществувал още един биортогонален базис $\tilde{\mathbf{e}}^j$, то бихме имали $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j-\tilde{\mathbf{e}}^j)=0$ за всички $i, j=1, 2, \ldots, n$. Оттук следва, че $\mathbf{e}^j=\tilde{\mathbf{e}}^j$. Действително, ако един вектор е ортогонален на всички вектори от даден базис, то той е ортогонален и на себе си, поради което той е нулевият вектор.

Твърдението е доказано.

Ще отбележим, че ако базисът $\mathbf{e}^i$ е ортонормиран, то биортогоналният му базис съвпада с него.

3. Смяна на базиси. Ковариантни и контравариантни координати на вектор. Често ще използваме преход от биортогонални базиси $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ към нови биортогонални базиси $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$.

Да запишем разлаганията на базисните вектори, използвайки нашето съглашение за сумиране:

* Т. е. от подпространството $E^n \ominus M_i$ — подпространството от всички вектори, ортогонални на M_i.

** Т. е. векторът $\mathbf{e}^k$ би бил линейна комбинация на векторите $\mathbf{e}^p$ с $p \neq k$.

(6.1) $$\mathbf{e}_{i'} = b_{i'}^{i}\,\mathbf{e}_i\,,\ \ \mathbf{e}_i = b_i^{i'}\,\mathbf{e}_{i'}\,,\ \ i,\ i' = 1, 2, \ldots, n,$$

(6.2) $$\mathbf{e}^{i'} = \tilde{b}_i^{i'}\,\mathbf{e}^i,\ \ \mathbf{e}^i = \tilde{b}_{i'}^{i}\,\mathbf{e}^{i'}\,,\ \ i,\ i' = 1, 2, \ldots, n.$$

Тук $(b_{i'}^{i})$ е матрицата на прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$, а $(b_i^{i'})$ — матрицата на обратния преход — от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ към $\mathbf{e}_i$.

Аналогично матриците $(\tilde{b}_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_{i'}^{i})$ са матриците на правия и обратния преход от базиса $\mathbf{e}^i$ към базиса $\mathbf{e}^{i'}$.

Формулите (6.1) са формули за прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$ и формули за обратния преход.

Формули (6.2) са формули за прехода от стария базис $\mathbf{e}^i$ към новия $\mathbf{e}^{i'}$ и формули за обратния преход.

Трансформациите (6.1) са взаимнообратни, поради което и матриците $(b_{i'}^{i})$ и $(b_i^{i'})$ са обратни една на друга. Наистина да умножим първото от равенствата (6.1) скаларно с $\mathbf{e}^{i'}$, а второто [от равенствата (6.1) — с $\mathbf{e}^j$. Използувайки биортогоналността на базисите, ще получим

$$\delta_{i'}^{i'} = b_{i'}^{i}\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{i'}),\quad \delta_i^j = b_i^{i'}\ (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j).$$

Обаче, както това следва от същите формули (6.1),

(6.3) $$(\mathbf{e}_i\,, \mathbf{e}^{i'}) = b_i^{i'}\,\delta_{i'}^{i'} = b_i^{i'},\ \ (\mathbf{e}_{i'}\,, \mathbf{e}^j) = b_{i'}^{i}\,\delta_i^j = b_{i'}^{j}\,.$$

По такъв начин

$$\delta_{i'}^{i'} = b_{i'}^{i}\ b_i^{i'}\,,\quad \delta_i^j = b_i^{i'}\,.\,b_{i'}^{j}\,.$$

т. е. матриците $(b_{i'}^{i})$ и $(b_i^{i'})$ са взаимнообратни.

Аналогично следва, че и матриците $(\tilde{b}_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_{i'}^{i})$ са взаимнообратни.

Вярно е следното твърдение за връзката между матриците $(b_{i'}^{i})$ и $(\tilde{b}_{i'}^{i})$, $(b_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_i^{i'})$.

Твърдение. Матрицата $(b_{i'}^{i})$ съвпада с матрицата $(\tilde{b}_{i'}^{i})$; матрицата $(b_i^{i'})$ съвпада с матрицата $(\tilde{b}_i^{i'})$.

Доказателство. Очевидно поради взаимната обратност на матриците $(b_{i'}^{i})$ и $(b_i^{i'})$ и на матриците $(\tilde{b}_{i'}^{i})$ и $(\tilde{b}_i^{i'})$ е достатъчно да се докаже, че съвпадат $(b_{i'}^{i})$ и $(\tilde{b}_{i'}^{i})$.

От (6.3) получаваме, че

(6.4) $$b_{i'}^{i} = (\mathbf{e}_{i'}\,, \mathbf{e}^i).$$

Аналогично с помощта на (6.2) ще получим, че

(6.4′) $$\tilde{b}_{i'}^{i} = (\mathbf{e}_{i'}\,, \mathbf{e}^i).$$

Десните страни на равенствата (6.4) и (6.4') са равни, поради което $b_{i'}^{i}=\widetilde{b}_{i'}^{i}$, което и трябваше да се докаже.

Следствие. За прехода от базисите $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ към базисите $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$ е достатъчно да се знае само матрицата $(b_{i'}^{i})$ на прехода от базиса $\mathbf{e}_i$ към базиса $\mathbf{e}_{i'}$. (Матрицата $(b_i^{i'})$ е обратна на $(b_{i'}^{i})$ и се пресмята от нея.)

По такъв начин стигаме до следните формули за смяна на базисите:

$$
(6.5)\qquad \begin{aligned} \mathbf{e}_{i'}&=b_{i'}^{i}\,\mathbf{e}_i, & \mathbf{e}_i&=b_i^{i'}\,\mathbf{e}_{i'}\,,\\ \mathbf{e}^{i'}&=b_i^{i'}\,\mathbf{e}^i, & \mathbf{e}^i&=b_{i'}^{i}\,\mathbf{e}^{i'}\,. \end{aligned}
$$

Да намерим сега формули за смяната на координатите на вектор при преход към нов базис. Отначало ще направим следните разсъждения.

Нека $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ са биортогонални базиси, а $\mathbf{a}$ произволен вектор. Тогава, разлагайки вектора $\mathbf{a}$, ще получим

$$
(6.6)\qquad \mathbf{a}=a^i\,\mathbf{e}_i\,,\quad \mathbf{a}=a_i\,\mathbf{e}^i\,.
$$

Биортогоналният базис дава много удобен начин за пресмятане на коефициентите a^i и a_i в разлаганията (6.6). Наистина, умножавайки първото равенство скаларно с $\mathbf{e}^j$, а второто с $\mathbf{e}_j$, получаваме

$$
(6.7)\qquad a^j=(\mathbf{a},\mathbf{e}^j)\,,\quad a_j=(\mathbf{a},\mathbf{e}_j)\,,\quad j=1,2,\ldots,n.
$$

Следователно, като се вземат предвид равенствата (6.7), формулите (6.6) добиват вида

$$
(6.8)\qquad \mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{e}^i)\,\mathbf{e}_i\,,\quad \mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}^i\,.
$$

В частност, ако заместим вектора $\mathbf{a}$ в първото равенство (6.8) с вектора $\mathbf{e}^j$, а във второто равенство (6.8) с вектора $\mathbf{e}_j$, ще получим

$$
(6.9)\qquad \begin{aligned} \mathbf{e}^j&=(\mathbf{e}^j,\mathbf{e}^i)\ \mathbf{e}_i=g^{ji}\mathbf{e}_i,\\ \mathbf{e}_j&=(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i)\ \mathbf{e}^i=g_{ji}\,\mathbf{e}^i\,, \end{aligned}
$$

където $g^{ji}=(\mathbf{e}^j,\mathbf{e}^i)$, $g_{ji}=(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i)$.

Ако умножим първото от съотношенията (6.9) скаларно с $\mathbf{e}_k$, а второто — с $\mathbf{e}^k$, ще получим

$$
g^{ji}g_{ik}=\delta_k^j\,,\quad g_{ji}g^{ik}=\delta_j^k\,,\quad j,k=1,2,\ldots,n,
$$

т.е. матриците (g^{ji}) и (g_{ji}) са взаимнообратни и поради симетричността на скаларното произведение — симетрични.

Сега ще получим формули за смяната на координатите на вектор при преход към нов базис. Ако $\mathbf{e}_i$ е старият базис, а $\mathbf{e}_{i'}$ — новият, $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}^{i'}$ — съответните биортогонални базиси и ако

$$\mathbf{a}=a_{i'}\,\mathbf{e}^{i'},$$

то, както знаем, от формулите (6.7) следва, че

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\ \mathbf{e}_{i'}).$$

Замествайки в дясната част на това съотношение $\mathbf{e}_{i'}$ с израза за него от (6.5), ще получим

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\ b^i_{i'}\,\mathbf{e}_i)=b^i_{i'}\,(\mathbf{a},\ \mathbf{e}_i)=b^i_{i'}\,a_i\,.$$

И така координатите $a_{i'}$ на вектора $\mathbf{a}$ в разлагането му по базиса $\mathbf{e}^{i'}$ (биортогонален към новия базис $\mathbf{e}_{i'}$) при прехода към този нов базис $\mathbf{e}^{i'}$ имат вида

(6.10) $$a_{i'}=b^i_{i'}\,a_i\,,$$

тук $(b^i_{i'})$ е матрицата на прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия базис $\mathbf{e}_{i'}$, a_i са координатите на вектора $\mathbf{a}$ в разлагането му по биортогоналния базис $\mathbf{e}^i$:

$$\mathbf{a}=a_i\,\mathbf{e}^i\,.$$

По такъв начин координатите a_i при прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$ се преобразуват с помощта на матрицата $(b^i_{i'})$ на прехода от стария базис към новия по формулата (6.10).

Ето защо казваме, че координатите a_i се преобразуват «съгласувано», и наричаме тези координати ковариантни (което означава съгласувано изменящи се) координати на вектора $\mathbf{a}$.

Ако сега съгласно формули (6.7) запишем, че

$$a^{i'}=(\mathbf{a},\ \mathbf{e}^{i'})$$

и заместим $\mathbf{e}^{i'}$ с израза му от (6.5), ще получим

(6.11) $$a^{i'}=(\mathbf{a},\ b^{i'}_i\,\mathbf{e}^i)=b^{i'}_i\,(\mathbf{a},\ \mathbf{e}^i)=b^{i'}_i\,a^i.$$

От формула (6.11) виждаме, че при прехода към новия базис координатите a^i в разлагането на вектора $\mathbf{a}$ по стария базис $\mathbf{e}_i$ $(\mathbf{a}=a^i\,\mathbf{e}_i)$ се преобразуват с помощта на матрицата $(b^{i'}_i)$ на прехода от новия базис към стария.

Затова казваме, че координатите $\mathbf{a}^i$ се преобразуват «несъгласувано» и наричаме тези координати контравариантни (което означава противоположно изменящи се) координати на вектора $\mathbf{a}$.

4. Инварианти на линеен оператор. Дивергенция и ротор. Навсякъде по-нататък ще предполагаме, че се разглежда тримерното пространство E^3. Да разгледаме произволен линеен оператор A

в това пространство. Ще припомним, че операторът A се нарича линеен, ако за всеки два вектора **a** и **b** и за всеки две реални числа λ и μ е в сила равенството

$$A(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda A\mathbf{a}+\mu A\mathbf{b}.$$

Нека $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ са биортогонални базиси в E^3. По-долу ще имаме нужда от две равенства, които са в сила за произволен линеен оператор A:

1) $$(\mathbf{e}_i,\ A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i,\ A\mathbf{e}_i)^*,$$

2) $$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$$

(с $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ е означено векторното произведение на векторите **a** и **b**).

Да докажем тези съотношения. Съгласно формули (6.9) имаме $\mathbf{e}^i=g^{ik}\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i=g_{ip}\mathbf{e}^p$. Поради това $(\mathbf{e}_i,\ A\mathbf{e}^i)=(g_{ip}\mathbf{e}^p,\ Ag^{ik}\mathbf{e}_k)=$

$$=g_{ip}g^{ik}(\mathbf{e}^p,\ A\mathbf{e}_k)=\delta^k_p(\mathbf{e}^p,\ A\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}^k,\ A\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}^i,\ A\mathbf{e}_i).$$

Тук използувахме това, че матриците (g_{ip}) и (g^{ik}) са взаимнообратни и симетрични.

Съотношение 1) е доказано. Ще преминем към доказателството на 2). Използувайки същите равенства за $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}_i$ и свойствата на матриците (g_{ip}) и (g^{ik}), имаме

$$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=g_{ip}\mathbf{e}^p\times Ag^{ik}\mathbf{e}_k=g_{ip}\cdot g^{ik}\mathbf{e}^p\times A\mathbf{e}_k=$$
$$=\delta^k_p\,\mathbf{e}^p\times A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}^k\times A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i\,.$$

Един израз се нарича инвариант (инвариантен), ако не се изменя при смяна на базиса на пространството. Например инварианти са скаларното произведение на два вектора, стойността на скаларна функция в дадена точка от пространството.

Сега ще изучим някои инварианти, свързани с даден оператор A. Нека $\mathbf{e}_i$ е базис в пространството E^3, а $\mathbf{e}^i$ — биортогоналният му базис.

Твърдение. Величината $(\mathbf{e}_i,\ A\mathbf{e}^i)$ (или което е същото $(\mathbf{e}^i,\ A\mathbf{e}_i)$) е инвариант.

Доказателство. Трябва да се докаже, че при преминаване към друг базис $\mathbf{e}_{i'}$ (с биортогонален базис $\mathbf{e}^{i'}$) ще бъде изпълнено равенството

$$(\mathbf{e}_i,\ A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}_{i'},\ A\mathbf{e}^{i'}).$$

Да запишем, използувайки формули (6.5),

$$\mathbf{e}_i=b^{i'}_i\mathbf{e}_{i'},\quad \mathbf{e}^i=b^i_{p'}\mathbf{e}^{p'},$$

* Да напомним, че ако в множителите на даден израз се срещат повтарящи се индекси, единият от които е горен, а другият — долен, то по тези индекси се извършва сумиране.

където $(b_i^{i'})$ е матрицата на прехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ към базиса $\mathbf{e}_i$, а $(b_{p'}^{i})$ е обратната ѝ.

Следователно можем да запишем

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = b_i^{i'} \cdot b_{p'}^{i} (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'}) =$$
$$= \delta_{p'}^{i'} (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'}) = (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Доказателството на твърдението получаваме, като сравним първия и последния член в тази верига от равенства.

Определение 2. Инвариантът $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ (или $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$) на линейния оператор A се нарича дивергенция на този оператор и се бележи с $\operatorname{div} A$.

Следователно

$$\operatorname{div} A = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

Забележка 1. Всеки линеен оператор може да бъде зададен еднозначно относно даден базис с помощта на матрица, наречена матрица на линейния оператор. Затова очевидно е достатъчно да се зададе операторът в базисните вектори, т. е. да се зададат векторите $A\mathbf{e}_i$. Разлагайки тези вектори по базиса $\mathbf{e}_i$, получаваме

(6.12) $$A\mathbf{e}_i = a_i^k \mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{e}^l, A\mathbf{e}_i) = a_i^k (\mathbf{e}^l, \mathbf{e}_k) = a_i^l.$$

Матрицата (a_i^k) е точно матрицата на линейния оператор A относно базиса $\mathbf{e}_i$.

Дивергенцията на оператора A може сега да се изрази чрез елементите на матрицата (a_i^k):

$$\operatorname{div} A = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i) = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3.$$

Забележка 2. В линейната алгебра сумата от диагоналните елементи $a_1^1 + a_2^2 + a_3^3$ се нарича следа на оператора A. Припомняме, че уравнението за собствените стойности на оператора A има вида

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - (a_1^1 + a_2^2 + a_3^3)\lambda^2 + \dots = 0.$$

От формулите на Виет получаваме

$$a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

където λ_1, λ_2, λ_3 са всички собствени стойности на оператора A. Тъй като собствените стойности на един оператор не зависят от избора на координатната система, получаваме ново доказателство за инвариантността на дивергенцията.

Ще въведем и един векторен инвариант.

Твърдение. Величината $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ (или което е същото $\mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i$) е инвариант.

Доказателство. Нека $\mathbf{e}_{i'}$ е новият базис ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогоналният базис на $\mathbf{e}_{i'}$). Да запишем съгласно формули (6.5)

$$\mathbf{e}_i = b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i = b_{p'}^i\mathbf{e}^{p'}.$$

Да заместим тези величини в израза $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$. Получаваме

$$\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = b_i^{i'} b_{p'}^i \mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{p'} = \delta_{p'}^{i'} \mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{p'} =$$
$$= \mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{i'}.$$

Следователно инвариантността на величината $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ е доказана.

Ще дадем следното определение.

Определение 3. Инвариантът $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ (или $\mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i$) на линейния оператор A се нарича ротор на този оператор и се означава с $\operatorname{rot} A$.

Така

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \times A\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \times A\mathbf{e}^2 +$$
$$+ \mathbf{e}_3 \times A\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \times A\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2 \times A\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3 \times A\mathbf{e}_3.$$

5. Изрази за дивергенцията и ротора на линеен оператор относно ортонормиран базис. Нека в пространството E^3 е избран ортонормиран базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. В този случай, както вече отбелязахме, биортогоналният базис на избрания съвпада с него (вж. т. 2).

Съгласно формули (6.12) получаваме

$$\begin{aligned} &a_1^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}), \quad a_2^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{j}), \quad a_3^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{k}),\\ (6.13)\qquad &a_1^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{i}), \quad a_2^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{j}), \quad a_3^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{k}),\\ &a_1^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{i}), \quad a_2^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{j}), \quad a_3^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Поради това

$$(6.14)\qquad \operatorname{div} A = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}) + (\mathbf{j}, A\mathbf{j}) + (\mathbf{k}, A\mathbf{k}).$$

Да намерим израз за $\operatorname{rot} A$. Имаме

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{i} \times A\mathbf{i} + \mathbf{j} \times A\mathbf{j} + \mathbf{k} \times A\mathbf{k}.$$

Остава да пресметнем чрез елементите на матрицата на оператора векторните произведения в събираемите отдясно. По формула (6.12) ще запишем

$$A\mathbf{i} = a_1^1\mathbf{i} + a_1^2\mathbf{j} + a_1^3\mathbf{k}.$$

Ето защо

$$\mathbf{i} \times A\mathbf{i} = a_1^1\, \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1^2\, \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1^3\, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -a_1^3\mathbf{j} + a_1^2\mathbf{k}.$$

Аналогично

$$\mathbf{j}\times A\mathbf{j}=a_2^3\mathbf{i}-a_2^1\mathbf{k},\quad \mathbf{k}\times A\mathbf{k}=-a_3^2\mathbf{i}+a_3^1\mathbf{j}.$$

Поради това

$$\operatorname{rot} A=(a_2^3-a_3^2)\mathbf{i}+(a_3^1-a_1^3)\mathbf{j}+(a_1^2-a_2^1)\mathbf{k}. \tag{6.15}$$

§ 2. Скаларни и векторни полета. Диференциални оператори на векторния анализ

1. Скаларни и векторни полета. В теорията на полето се разглеждат функции, които на всяка точка M от фиксирана област D съпоставят един специален обект $a(M)$, наречен тензор. В този случай казваме, че в областта D е зададено тензорно поле. Ще изучаваме само два най-прости случая на тензорно поле, а именно — скаларно и векторно поле.

Ще казваме, че в областта D е зададено скаларно поле, ако на всяка точка M от тази област по някакъв закон е съпоставено определено число $u(M)$, т. е. понятията скаларно поле и скаларна функция, дефинирана в областта D, съвпадат.

Аналогично казваме, че в областта D е зададено векторно поле, ако на всяка точка от M от тази област е съпоставен по някакъв закон вектор $\mathbf{a}(M)$, т. е. понятията векторно поле и векторна функция, дефинирана в бластта D, съвпадат.

Нека например $\mathbf{E}(M)$ е векторът напрежение на електричното поле, породено от единичен отрицателен товар, разположен в началото на координатната система на тримерното пространство E^3. Тогава в точката $M(x, y, z)$ векторът $\mathbf{E}(M)$ има, както е известно, дължина $1/\rho^2$, където $\rho=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, и е насочен от точката към началото на координатната система. Ето защо формулата, задаваща векторното поле $\mathbf{E}(M)$, е

$$\mathbf{E}(M)=\left(-\frac{x}{\rho^3}, -\frac{y}{\rho^3}, -\frac{z}{\rho^3}\right).$$

Други примери на векторни полета са полето на температурите във вътрешността на нагрято тяло, полето на скоростите на стационарен флуиден поток и др.

Ще приведем още примери на скаларни и векторни полета, които играят важна роля в анализа и физиката. За целта ще трябва да изучим понятието диференцируемост на скаларно и векторно поле.

Понеже скаларното поле представлява числова функция, зададена в област D, понятието диференцируемост на скаларното поле (на тази числова функция) ни е вече известно (вж. определение т. 2, § 4, глава 12, част I).

Ще припомним това определение, заменяйки думата «функция» с думите «скаларно поле». Нека в областта D на E^3 е зададено скаларното поле $u=f(x, y, z)$.

Определение 1. Скаларното поле $u=f(x, y, z)=f(M)$ се нарича диференцируемо в дадена точка $M(x, y, z)$ на областта D, ако пълното нарастване $\Delta u(M)$ в тази точка може да се представи във вида

$$\Delta u(M)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+A_3\Delta z+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+\alpha_3\Delta z,$$

където A_1, A_2, A_3 са числа, независещи от Δx, Δy, Δz, а α_1, α_2, α_3 са безкрайно малки функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, равни на нула при $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$.

Условието за диференцируемост на скаларното поле $u=f(x, y, z)$, както е показано на същото място в част I, може да се запише във вида

$$\Delta u(M)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+A_3\Delta z+o(\rho),$$

където $\rho=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$, като това представяне е единствено.

Тази формула може да се запише в по-компактна форма:

$$\Delta u(M)=(A, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.16}$$

където $(A, \mathbf{h})$ е скаларното произведение на векторите

$$A=(A_1, A_2, A_3),\ \mathbf{h}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z),\ \|\mathbf{h}\|=\rho.$$

Следователно горното определение може да се запише и така:

Определение 1'. Скаларното поле $u(M)$ е диференцируемо в точката M, ако в тази точка за пълното нарастване е вярно съотношението

$$\Delta u(M)=(A, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Скаларното поле $u(M)$ е диференцируемо в областта D, ако то е диференцируемо във всяка точка на тази област.

Ще припомним, че (вж. т. 8, § 4, глава 12, част I) условието за диференцируемост (6.16) може да се запише във вида

$$\Delta u(M)=(\operatorname{grad} u, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.17}$$

където векторът $\operatorname{grad} u(M)=\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)$.

Формула (6.17) ни дава още един пример на векторно поле, а именно градиента на диференцируемо в областта D скаларно поле $u(M)$. Определението на градиента не зависи от избора на координатната система и поради това представлява инвариант.

Съгласно разглежданията в т. 8, § 4, глава 12, част I в случая на диференцируемо поле $u(M)$ може да се въведе производна на $u(M)$ по посока на вектор $\mathbf{e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (\mathbf{e}, \operatorname{grad} u). \tag{6.18}$$

Производната по посока очевидно задава някакво ново скаларно поле в областта D.

Понятието градиент дължи появата си на бял свят на изтъкнатия физик Джеймс Клерк Максуел* и произлиза от латинската дума gradior, означаваща «раста». Както знаем от част I, главното свойство на градиента е, че той определя посоката на най-бързото спускане. Максуел възнамерявал отначало да нарече този вектор slope — «наклон». Уилям Роуен Хамилтън** създал за този вектор специално означение ∇ — обърнатата гръцка буква Δ (делта). И така, ако $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ е фиксиран ортонормиран базис, то

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Отначало и наименованието на знака ∇ било «атлед» — прочетена отзад напред думата делта. По-късно английските учени (О. Хевисайд, Р. Смит) започнали по-често да употребяват думата «набла», която и влязла трайно в литературата. Знакът ∇ бил наречен набла поради сходството му с рамката на древноасирийския музикален инструмент набла. Набла е много удобно означение във физиката — много формули силно се опростяват при неговото използуване. Самият Максуел посветил на означението набла специална ода в осем части.

Да преминем към изучаването на диференцируемото векторно поле. Понятието диференцируемост на векторно поле се определя в пълна аналогия с понятието диференцируемост на скаларно поле и това понятие беше дадено още в допълнението 2 към глава 12, част I.

Нека в областта D на пространството E^3 е зададено векторното поле $\mathbf{a}(M)$ (векторната функция $\mathbf{a}(M)$ на точките M, принадлежащи на D). Ще поясним, че $\mathbf{a}(M)$ на всяка точка $M(x, y, z)$ съпоставя вектор $\mathbf{a}(M)$.

Формулираме следното определение.

Определение 2. Векторното поле $\mathbf{a}(M)$ се нарича диференци-

* Д. К. Максуел — шотландски физик, създател на математическата теория на електромагнитното поле (1831—1879).

** У. Р. Хамилтън — ирландски математик и механик (1805—1865).

руемо в точката M на областта D, ако пълното нарастване $\Delta \mathbf{a}(M)$ се представя във вида

$$\Delta \mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

където A е линеен оператор в E^3:

$$\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \|\mathbf{h}\| = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2},$$

а $o(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, дължината на който клони към нула при $\|\mathbf{h}\| \to 0$.

Ако векторното поле е диференцируемо, то представянето (6.19) е единствено.

Наистина (вж. и допълнение 2 към глава 12, част I), ако съществуват две представяния от вида (6.19), т. е.

$$\Delta \mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + o_1(\|\mathbf{h}\|), \quad \Delta \mathbf{a}(M) = B\mathbf{h} + o_2(\|\mathbf{h}\|),$$

то

$$(A - B)\mathbf{h} = o(\|\mathbf{h}\|),$$

където $o(\|\mathbf{h}\|) = o_1(\|\mathbf{h}\|) - o_2(\|\mathbf{h}\|)$.

Разделяйки на $\|h\|$ двете части на полученото равенство, получаваме

$$(A - B)\mathbf{e} = \frac{o(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|},$$

където $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ е вектор с дължина единица. Отдясно стои безкрайно малък вектор (неговата дължина клони към нула при $\|\mathbf{h}\| \to 0$), и следователно за произволен единичен вектор е величината в лявата страна е равна на нула:

$$(A - B)\mathbf{e} = 0.$$

Но щом два линейни оператора A и B съвпадат върху единичната сфера, то те са равни очевидно за произволен вектор, т. е. те съвпадат навсякъде. Следователно $A = B$.

Също както в случая на скаларно поле, векторното поле е диференцируемо в областта D, ако то е диференцируемо във всяка точка на областта D.

Както и при скаларното поле, възниква въпросът за дефиниране на производна по посока за векторно поле $\mathbf{a}(M)$.

Нека M е точка от областта D, $\mathbf{e}$ — единичен вектор с координати $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, определящ някаква посока.

Нека M' е произволна точка от D, различна от M и такава, че векторът $\overline{MM'}$ е колинеарен с вектора $\mathbf{e}$. Да означим разстоянието между M и M' с ρ.

Определение 3. Производна по посоката $\mathbf{e}$ на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M се нарича границата на отношението

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$$

(когато тази граница съществува).

Тук $\Delta\mathbf{a}(M)=\mathbf{a}(M')-\mathbf{a}(M)$.

Ще докажем следното твърдение.

Твърдение. Нека $\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо векторно поле, а A — линейният оператор, определен от съотношението за диференцируемост (т. е. от съотношението $\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|)$). Тогава производната $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$ на полето в точка M по произволна посока $\mathbf{e}$ съществува и се определя с равенството

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}=A\mathbf{e}. \tag{6.20}$$

Интересно е да сравним тази формула с формула (6.18). Във формула (6.18) вдясно стои също резултатът от прилагането на оператора $A=(A_1, A_2, A_3)$ към вектора $\mathbf{e}$. Резултатът от това прилагане е точно скаларното произведение на градиента на полето и вектора $\mathbf{e}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\mathbf{e}$ е фиксиран вектор. Избираме точката M' така, че $\mathbf{h}=\rho\mathbf{e}$. Тогава съгласно (6.19) получаваме

$$\Delta\mathbf{a}(M)=\rho A\mathbf{e}+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Понеже $\|\mathbf{h}\|=\rho$, то

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=A\mathbf{e}+\frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Извършвайки граничен преход при $\rho\to 0$ в това съотношение, получаваме формула (6.20), т. е. това, което трябваше да докажем.

Да се върнем отново към разглеждане на формула (6.19):

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Тук A е линеен оператор, приложен към вектора $\mathbf{h}$ от E^3. Както знаем, относно фиксиран базис всеки линеен оператор се определя от своята матрица. Да намерим матрицата на линейния оператор A относно ортонормирания базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, с който е свързана правоъгълната декартова координатна система $Oxyz$. Нека векторът $\mathbf{a}(M)$ има относно този базис координати P, Q, R. Съгласно формули (6.20)

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{i}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}=A\mathbf{i},\quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{j}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}=A\mathbf{j},\quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{k}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}=A\mathbf{k}. \tag{6.21}$$

Елементите на матрицата $\overset{\circ}{A}$ на оператора A пресмятаме по формули (6.13):

$$\overset{\circ}{A}=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

2. Дивергенция, ротор и производна по посока на векторно поле. Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, диференцируемо в областта D. Тогава съгласно (6.19)

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

където A е линеен оператор, зависещ от точката M, векторът $\mathbf{h}$ е нарастването на аргумента на $\mathbf{a}(M)$, а $o(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, клонящ към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$.

Определение 4. Дивергенция на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M се нарича дивергенцията на линейния оператор A от условието за диференцируемост (6.19):

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A.$$

Определение 5. Ротор на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M наричаме ротора на линейния оператор A от условието за диференцируемост (6.19):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=\operatorname{rot}A.$$

Ще отбележим, че $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ са дефинирани във всяка точка M от областта D. Тези величини са инвариантни по определение, т.е. не зависят от избора на базиса. Ето защо $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ представлява скаларно поле, а $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — векторно поле.

Да изберем ортонормиран базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и да означим с $Oxyz$ свързаната с него ортогонална декартова координатна система. Нека координатите на полето $\mathbf{a}(M)$ относно базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ са P, Q, R.

Матрицата на оператора A относно този базис е вече намерена (вж. формула (6.22)). Понеже $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A$, по формула (6.14) веднага получаваме

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{a}(M)&=(\mathbf{i},A\mathbf{i})+(\mathbf{j},A\mathbf{j})+(\mathbf{k},A\mathbf{k})=\\ &=a_1^1+a_2^2+a_3^3=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(\nabla,\mathbf{a}(M)),\end{aligned} \tag{6.23}$$

където

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{a}(M) = \mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

По-нататък поради $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} A$ чрез формули (6.16) и (6.22) получаваме

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{6.24}$$

$$= \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Последната детерминанта представлява удобен за запомняне символичен запис на ротора.

Да пресметнем производната на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ по посоката $\mathbf{e}$. Ще се възползуваме от формула (6.20):

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = A\mathbf{e}.$$

Понеже единичният вектор $\mathbf{e}$ има координати $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = A\mathbf{e} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) =$$

$$= \cos\alpha A\mathbf{i} + \cos\beta\, A\mathbf{j} + \cos\gamma A\mathbf{k}.$$

По-нататък по формули (6.21)

$$A\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \quad A\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \quad A\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z},$$

поради което

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = \cos\alpha\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}.$$

Като вземем предвид, че $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, можем да напишем и следния израз за производната по посока

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{k}.$$

3. Някои други формули на векторния анализ. Да предположим, че в областта D са зададени скаларното поле $u(M)$ и векторното поле $\mathbf{a}(M)$, като всички частни производни от втори ред на функциите $u(M)$ и $a(M)$ са непрекъснати в областта D. Тогава векторното поле $\operatorname{grad} u$ е диференцируемо, а $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо скаларно поле; $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо векторно поле. Следователно диференциалните оператори grad, div, rot могат да се приложат още веднъж и имат смисъл следните операции:

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$,

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Нека $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ е фиксиран ортонормиран базис, а $Oxyz$ е свързаната с него правоъгълна декартова координатна система.

Твърдение. В сила са следните съотношения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\nabla u = 0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla(\nabla\times\mathbf{a}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a},$$

където

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Доказателство. Всичките формули се доказват по обща схема: последователно се прилагат към скаларното или векторното поле съответните диференциални оператори. Да докажем например първото равенство. Векторът $\operatorname{grad} u = \nabla u$ има координати $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, поради което за $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\operatorname{grad} u$ получаваме по формули (6.24) израза

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Да докажем второто съотношение (вж. формула (5.23)):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u.$$

Символът Δ (делта) има специално име — оператор на Лаплас*. По такъв начин символно можем да запишем $\Delta=\nabla^2$.

Ще докажем и третото съотношение, предоставяйки доказателството на останалите две равенства на читателя. Да запишем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}=\nabla(\nabla,\mathbf{a})=\nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\nabla \mathbf{b},$$

където

$$\mathbf{b}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

По-нататък

$$\nabla \mathbf{b}=\frac{\partial b}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial b}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial b}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

и замествайки $\mathbf{b}$ с неговия израз, получаваме дясната страна на третото съотношение. Твърдението е доказано.

Забележка. Както вече нееднократно отбелязахме, величините $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} u$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ са инвариантни. Тогава са инвариантни и величините $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Следователно относно всяка ортогонална координатна система имаме например

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=0,\quad \operatorname{div}\operatorname{grad} u=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0.$$

4. Заключителни забележки. Да обсъдим физическия смисъл на разгледаните понятия дивергенция и ротор. Дивергенцията на векторна функция $\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla,\mathbf{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ се определя от скоростта на изменение на всички компоненти на вектора в «собственото» им направление. Ако векторното поле описва флуиден поток, то положителност на дивергенцията ($\operatorname{div}\mathbf{a}>0$) в дадена точка означава, че от тази точка изтича повече течност, отколкото се влива в нея. Казваме, че такава точка представлява извор. Ако $\operatorname{div}\mathbf{a}<0$, то наблюдаваме обратния баланс и точката представлява бездна, т. е. в нея се влива повече, отколкото изтича. Ако $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, то съществува баланс — влива се толкова течност, колкото и изтича.

Величината ротор на векторно поле

* П. С. Лаплас — изтъкнат френски астроном, математик и физик (1749—1827).

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

се нарича още вихър. Това название е свързано с това, че той като че «смесва» производните и компонентите. Той като че «следи» как се изменят компонентите на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в «чуждите» направления. По такъв начин ротор представлява мярка на «въртенето» на векторното поле. Впрочем, ако $\mathbf{v}$ е линейна скорост, то векторът ω на ъгловата скорост на въртене е $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Този вектор е насочен по оста на въртене. Оттук е дошло и названието ротор.

В заключение ще приведем системата от уравнения на Максуел за електромагнитното поле във вакуум.

$$1.\ \operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad 2.\ \operatorname{div} B = 0.$$

$$3.\ \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad 4.\ \operatorname{rot} B = \frac{j}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Тук $\rho(M, t)$ е плътността на електрическия товар (количеството на товара в единица обем), $\mathbf{j}(M, t)$ е векторът плътност на електричния ток (скоростта на протичане на товара през единично сечение), $E(M, t)$ и $B(M, t)$ са съответно векторите напрежение на електричното и магнитното поле, ε_0 и c са размерни константи, а c — скоростта на светлината във вакуум.

§ 3. Основни интегрални формули на анализа

В този параграф ще бъдат доказани основните интегрални формули на анализа — формулата на Грийн*, формулата на Остроградски—Гаус** и формулата на Стокс***. Тези формули представляват, от една страна, отиващи далече обобщения на формулата на Нютон—Лайбниц основната формула на интегралното

* Дж. Грийн — английски математик (1793—1841).
** М. В. Остроградски — руски математик (1801—1861).
К. Ф. Гаус — немски математик (1777—1855).
*** Дж. Г. Стокс — английски физик и математик (1819—1903).

смятане, а, от друга — особено важни формули на математическия анализ и математическата физика.

1. Формула на Грийн. Нека π е равнина в пространството E^3, **k** — единичен нормален вектор към π, а D — едносвързана област в π (ще напомним, че областта D се нарича едносвързана, ако всяка частично гладка затворена крива без самопресичания, разположена в D, огражда област, всичките точки на която принадлежат на D). Нека областта D удовлетворява следните две условия:

1) границата C на областта D представлява затворена частично гладка крива без особени точки;

2) в равнината π може да се избере такава правоъгълна декартова координатна система, че всички прави, успоредни на координатните оси, пресичат C в не повече от две точки.

Нека накрая **t** е единичният вектор, допирателен към кривата C, съгласуван с **k**, т. е. положителната посока на обхождане на кривата C съвпада в приложната точка на вектора **t** с посоката на този вектор, и ако гледаме от края на нормалата **k**, контурът C е положително ориентиран (обхождането му се осъществява в посока, обратна на часовниковата стрелка). Казваме, че ориентацията на кривата C е съгласувана с нормалата «по правилото на тирбушона».

В сила е следната теорема.

Теорема 6.1 (формула на Грийн). Нека **a** е векторно поле, диференцируемо в областта D, удовлетворяваща условията 1), 2), и нека производната на **a** по всяка посока е непрекъсната в обединението $D\cup C=\bar{D}$. Тогава е вярна формулата

$$\iint_D (\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\,d\sigma=\oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl. \tag{6.25}$$

Интегралът отдясно обикновено се нарича циркулация на векторното поле **a** по кривата C, а този отляво — поток на векторното поле $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ през областта D.

Дадената формула допуска следната физическа трактовка: потокът на векторното поле $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ през областта D (потокът топлина, течност и др.) е равен на циркулацията на векторното поле **a** по затворения контур C (на работата на силите на полето **a** за преместване на точката по C).

Доказателство. Тъй като всички влизащи във формула (6.25) функции са непрекъснати, то двата интеграла съществуват.

Ще отбележим също така, че интегралите в лявата и дясната страна на формула (6.25) са инвариантни относно избора на правоъгълна координатна система, понеже величините $(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$

са инвариантни, елементарните лице $d\sigma$ и дължина на дъгата dl не зависят от избора на декартовата координатна система.

Ще изберем ортогонална декартова координатна система $Oxyz$ така, че да е изпълнено условие 2) и оста Oz да е насочена в посоката на $\mathbf{k}$. Понеже векторното поле $\mathbf{a}=P(x, y)\,\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}+R(x, y)\mathbf{k}$ е равнинно, то $R(x, y)\equiv 0$, $\mathbf{t}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ 0)=(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$.

Следователно можем да запишем, че

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

По-нататък

$$(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},\quad (\mathbf{a},\ \mathbf{t})=P\cos\alpha+Q\sin\alpha.$$

Понеже за области в равнината $d\sigma=dxdy$, то формула (6.25) добива вида

$$\iint_D (\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})\,d\sigma=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

(6.25′)

$$=\oint_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,dl=\oint_C Pdx+Qdy.$$

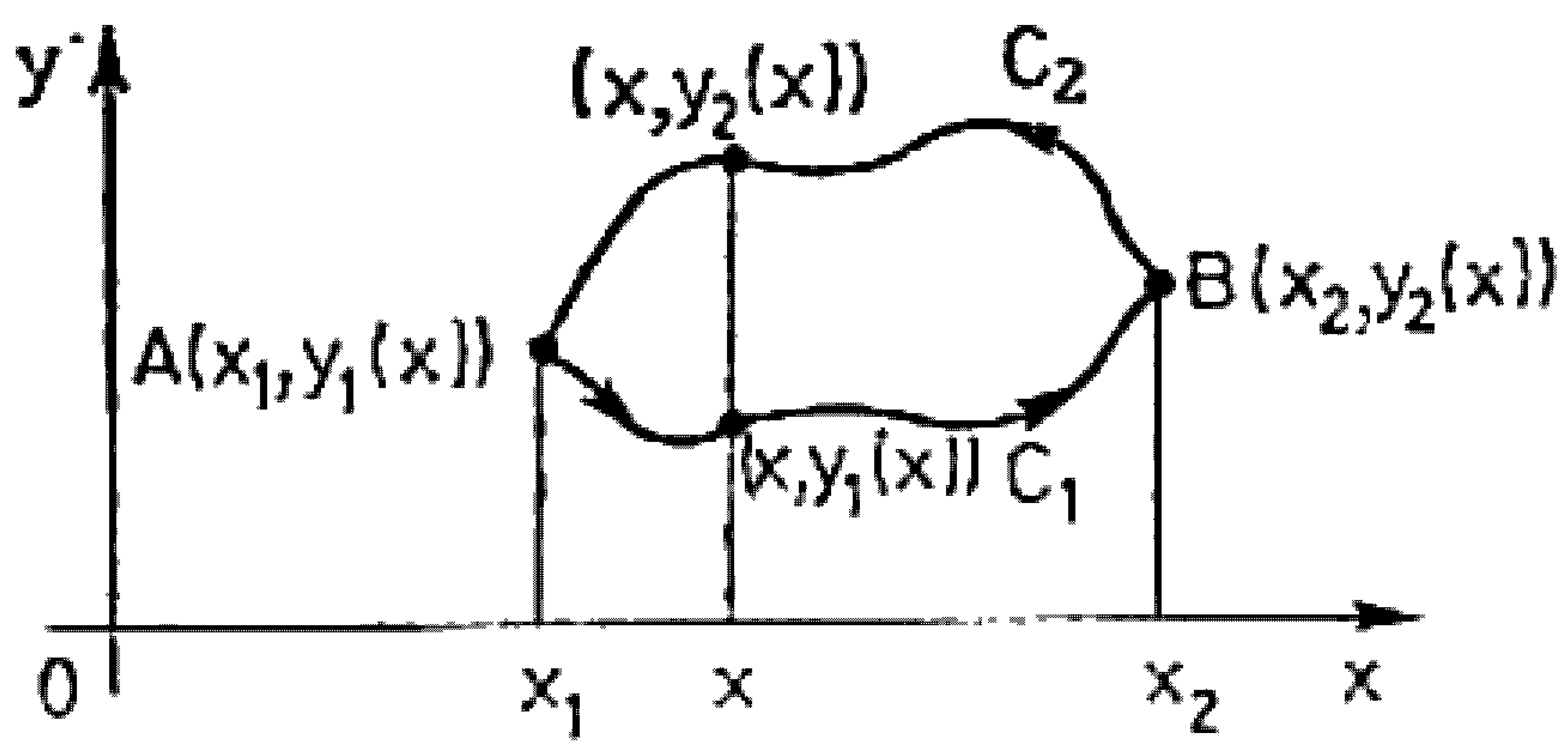
(Тук използувахме, че $dx=\cos\alpha\,dl$, $dy=\sin\alpha\,dl$, l е дължината на дъгата по C, избрана като параметър, чието нарастване е съгласувано с направлението на описване на C.)

За да докажем формулата на Грийн, е достатъчно да докажем двете равенства:

$$I=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy=\oint_C Pdx,$$

$$J=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy=\oint_C Qdy.$$

Да разгледаме фиг. 6.1. Нека права, успоредна на оста Oy, пресича C в точки с ординати $y_1(x)$ и $y_2(x)$, $y_1(x)\le y_2(x)$. Нека x_1 и x_2 са най-малката и най-голямата абсциса на точки от областта D, кривата C_1 съединява точката $(x_1, y(x_1))$ с точката $(x_2, y(x_2))$, а кривата C_2 – точката $(x_2, y(x_2))$ с точката $(x_1, y(x_1))$, така че $C=C_1\cup C_2$ и C_1, C_2 са ориентирани съгласувано с C. Тогава по формулата за изразяване на двойния интеграл чрез повторен получаваме



Фиг. 6. 1

$$I = -\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x))\, dx -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x))\, dx = \int_{C_1} P\, dx - \left(-\int_{C_2} P dx\right) = \oint_C P dx.$$

Аналогично се пресмята интегралът J. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 6.1 е вярна и за по-общи области D с граница C, които с помощта на краен брой частично гладки криви могат да се разделят на краен брой подобласти D_i с граници C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяващи условията 1) и 2). Наистина за всяка от областите D_i съгласно доказаното е вярна формула (6.26). Събирайки получените равенства, поради адитивността на двойния интеграл в лявата страна $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i}$ можем да заменим с $\iint\limits_{D}$, а отдясно $\sum\limits_{i=1}^{n} \oint\limits_{C_i} = {}^{*}\oint\limits_{C}$, понеже интегралите по «вътрешните» криви се унищожават поради интегриране в противоположни посоки.

Забележка 2. Можем да се откажем във формулировката на теорема 6.1 от условието 2), т. е. да смятаме, че границата на областта D е затворена частично гладка крива C без особени точки. Доказателството на този вариант на теоремата обаче малко се усложнява.

Забележка 3. Условието за гладкост на векторното поле може също малко да се отслаби. Достатъчно е да поискаме полето

* Т. е. по помощните частично гладки криви, разделящи областта D.

а да бъде непрекъснато в $D \cup C = \overline{D}$, а диференцируемо само в D, като производната му по всяка посока да бъде непрекъсната в D. Формула (6.25) се запазва, обаче влизащите в нея интеграли са, изобщо казано, несобствени.

Забележка 4. Теорема 6.1, т. е. формулата на Грийн, е вярна и в общия случай, когато областта D има граница C, която е само ректифицируема крива*.

Забележка 5. Формулата на Грийн (6.25) може да се запише, както това следва от доказателството, във вида (6.25′)

$$(6.25') \qquad \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{C} Pdx + Qdy.$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна на равенството имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се изменят при преминаване към нова декартова координатна система. Наистина стойностите на подинтегралните изрази отляво и отдясно на формула (6.25′) са съответно равни на $(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, които са инвариантни величини. Формата на подинтегралните изрази във формула (6.25′) също очевидно не се изменя при преминаване към нова декартова координатна система $Ox'y'$ ако векторното поле $\mathbf{a}$ има относно новия базис координати P' и Q', то

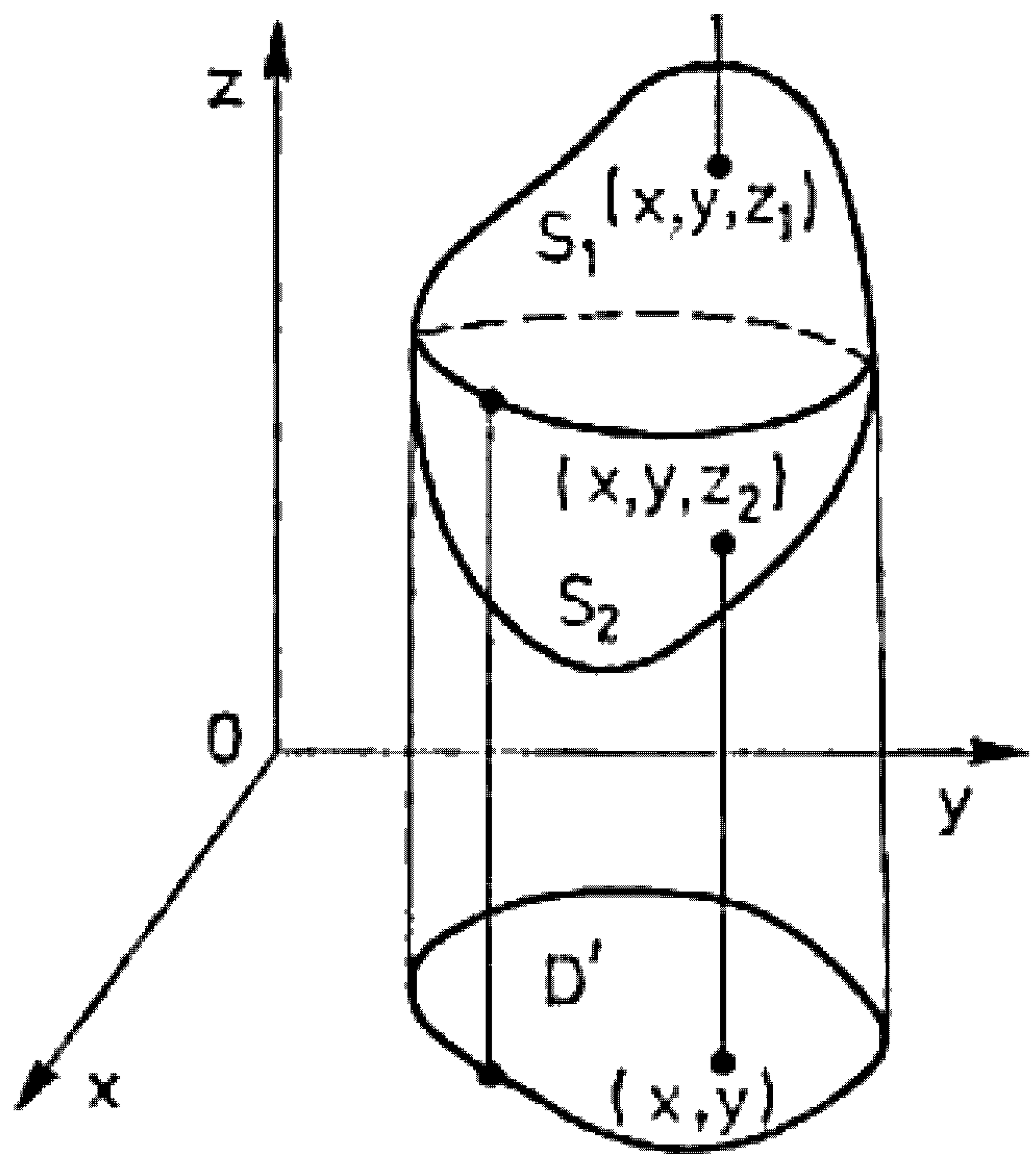
$$(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\mathbf{k}, \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'}\right) \mathbf{k}\right) = \frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = Pdx + Qdy = (P' \cos \alpha' + Q' \sin \alpha')dl = P'dx' + Q'dy'.$$

Остава да отбележим, че якобианът на трансформацията при преминаване към новата координатна система е равен по абсолютна стойност на единица, а параметризацията с помощта на дължината на дъгата като параметър не зависи от координатната система. Ето защо интегралите в лявата и дясната страна на (6.25′) не менят стойността и формата си.

2. Формула на Остроградски — Гаус. Нека D е едносвързана област в E^3, т. е. за всяка частично гладка затворена крива C, лежаща в D, може да се намери ориентируема частично гладка повърхнина G, която лежи в D и има граница C. Нека границата S на областта D удовлетворява следните две условия:

* Виж статията на Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин в ДАН СССР, 1980, т. 253, № 1, 42—44.



Фиг. 6. 2

интеграла в лявата страна ще получим интеграл върху D, а в дясната страна поради това, че външните нормали към границите на подобластите D_i в точки, принадлежащи на границите на две такива подобласти, са противно насочени, интегралите по повърхнините, които са общи части от границите на две подобласти, имат сума нула. Следователно остават само интеграли по повърхнини, които са части от границите на D_i и които имат обединение точно границата S на областта D.

Забележка 2. Във формулировката на теорема 6.2 можем да се откажем от изискването на условието 2) и да смятаме, че повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, затворена и без особени точки. Доказателството на теоремата в този случай е по-сложно.

Забележка 3. Можем да смятаме, че векторното поле a съществува в $D \cup S - \bar{D}$ и е непрекъснато диференцируемо само в отворената област D. Тогава тройният интеграл във формула (6.26) трябва да се разбира като несобствен.

• Забележка 4. Формулата на Остроградски — Гаус може да се запише, както това следва от доказателството, във вида

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

(6.26′)

$$=\oiint\limits_S (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy).$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се менят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се уверим в това, е достатъчно да направим разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

3. Формула на Стокс. Нека S е едносвързана повърхнина в E^3 (т. е. всяка частично гладка затворена крива без точки на самопресичане, която лежи в S, огражда множество от S, хомеоморфно на кръг), удовлетворяваща следните условия:

1) повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, без особени точки и има граница затворен частично гладък контур C;

2) може да се избере декартова координатна система такава, че S се проектира еднозначно върху всяка от координатните равнини.

Нека $\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата към S, $\mathbf{t}$ — единичният вектор, допирателен към C, съгласуван с $\mathbf{n}$ (вж. т. 1 на този параграф).

В сила е следната теорема.

Теорема 6.3 (формула на Стокс). Нека $\mathbf{a}$ е векторно поле, непрекъснато диференцируемо в околност на повърхнината S (т. е. в отворено множество, от E^3, съдържащо S). Тогава е изпълнена формулата

$$\oiint\limits_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\,ds=\oint\limits_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl. \tag{6.27}$$

Теорема 6.3 допуска и такава формулировка: потокът на вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ през повърхнината S е равен на циркулацията на вектора $\mathbf{a}$ по затворения контур C.

Доказателство. При условията на теоремата интегралите във формула (6.27) имат смисъл. Формула (6.27) очевидно е инвариантна относно избора на базис. Да изберем правоъгълна декартова координатна система $Oxyz$ такава, че S се проектира еднозначно върху трите координатни равнини. Нека

$$\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k},\quad \mathbf{n}=(\cos X,\ \cos Y,\ \cos Z),$$
$$\mathbf{t}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

Ориентираме координатната система така, че нормалният вектор $\mathbf{n}$ да образува остри ъгли с координатните оси.

Използувайки израза за $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ спрямо декартова правоъгълна координатна система, можем да запишем:

$$\oiint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, ds =$$

$$(6.27') \quad = \oiint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right\} ds$$

$$= \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = \oint_C (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma)\, dl = \oint_C (P\, dx + Q\, dy + R\, dz).$$

Очевидно достатъчно е да докажем, че

$$I = \oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) ds = \oint_C P\, dx.$$

Доказателството за останалите събираеми:

$$J = \oiint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X \right) ds = \oint_S Q\, dy,$$

$$L = \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y \right) ds = \oint_C R\, dz,$$

е аналогично.

Ще отбележим, че S е частично гладка и се проектира еднозначно в Oxy. Нека D е нейната проекция, а Γ — проекцията на C в равнината Oxy (вж. фиг. 6.3). Поради това S се задава с уравнение от вида $z = z(x, y)$, където $z(x, y)$ е диференцируема функция. Имаме

$$\cos Y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$$

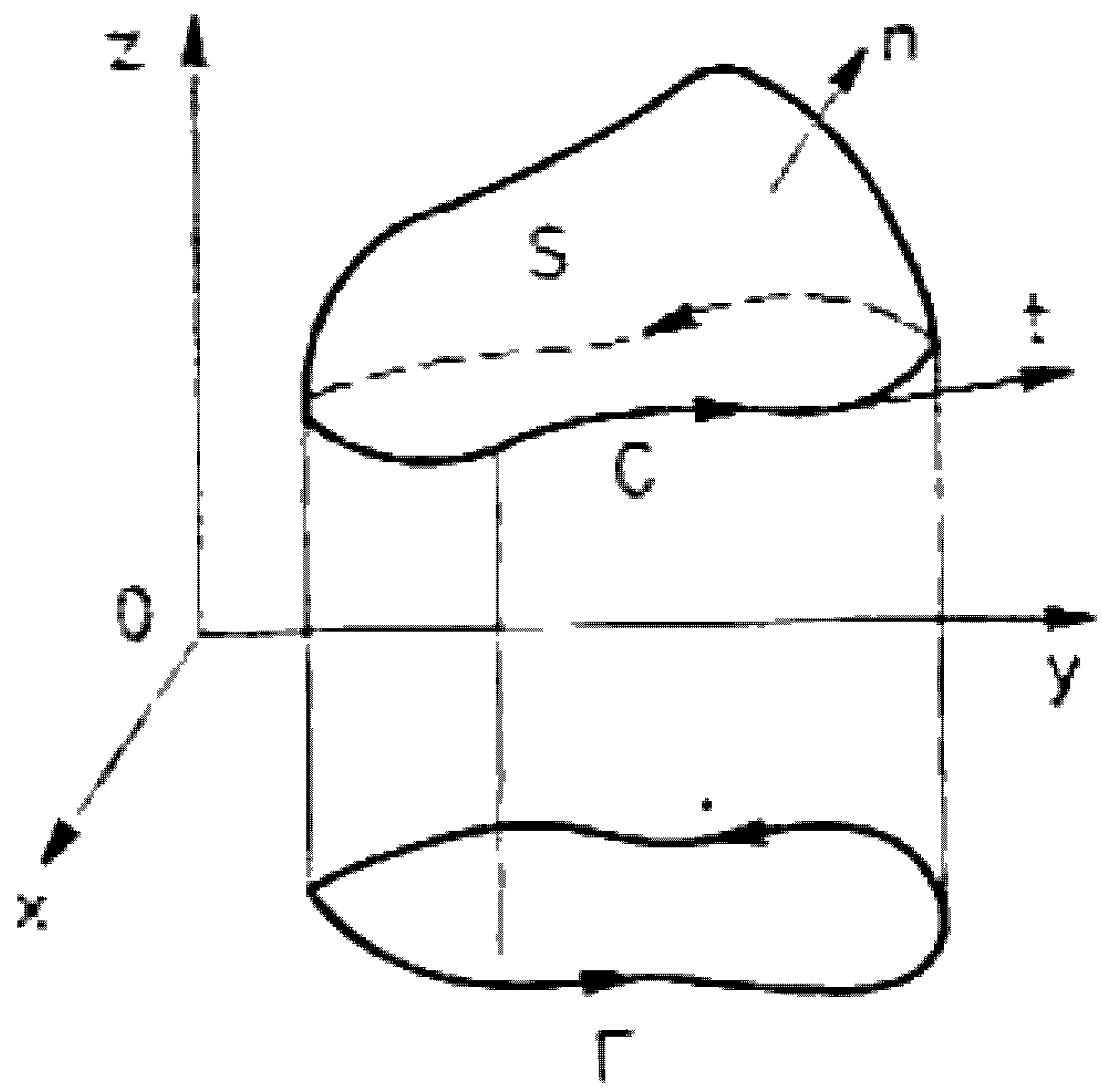
Аналогично $\cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$.

Тогава, вземайки предвид тези формули, получаваме

$$I = -\oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z\, ds$$

$$= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y} \Big[P(x, y, z(x, y)) \Big] dx\, dy,$$

понеже върху повърхнината S функцията $P(x, y, z)$ е равна на



Фиг. 6. 3

$P(x, y, z(x, y))$ и $\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}$, а интегралът по повърхнината S е равен на двоен интеграл върху D.

Сега, като използуваме формулата на Грийн, имаме

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big[P(x, y, z(x, y))\Big]dx\,dy = \oint_\Gamma P(x, y, z(x, y))\,dx = \oint_C P(x,y,z)dx.$$

Тук използувахме, че ако една точка (x, y) лежи на кривата Γ, то точката $(x, y, z(x, y))$ очевидно принадлежи на кривата C. Теоремата е доказана.

Формулата на Стокс е вярна и за по-общи ограничени, пълни, частично гладки, двустранни повърхнини с частично гладка граница.

Забележка 1. Преди всичко ще покажем, че формулата на Стокс е в сила за повърхнини S, които удовлетворяват условието 1), но, изобщо казано, не удовлетворяват условието 2) за еднозначно проектиране на S във всяка от координатните равнини.

Оказва се, че съществува число $\delta>0$ такова, че за всяка част Φ на повърхнината S с размери по-малки от δ*, може да се избере координатна система такава, че Φ се проектира еднозначно във всички координатни равнини. Наистина нека M_0 е фиксирана точка от S. Прекарваме допирателната равнина през точката M_0 и нека n_{M_0} е единичен нормален вектор към повърхнината в точката M_0. Избираме координатна правоъгълна система такава, че

* Такава част от повърхнината се съдържа в кълбо с радиус δ.

векторът $\mathbf{n}_{M_0}$ сключва остри ъгли с координатните оси. Понеже полето от нормалите $\mathbf{n}$ е непрекъснато, то съществува околност на точката M_0, нормалите във всички точки на която сключват остри ъгли с координатните оси. Но тогава съгласно доказателството на първото твърдение от глава 5 и забележка 2 към него можем да твърдим, че съществува околност на точката M_0 с радиус δ, която еднозначно се проектира върху всички координатни равнини.

Ще подчертаем, че числото δ изобщо зависи от точката M_0: $\delta=\delta(M_0)$. Ще докажем, че може да се избере универсално, независещо от точката число δ с указаното свойство. Да допуснем противното, т. е. че такова число не съществува. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, може да се намери част Φ_n на повърхнината S с размери, по-малки от δ_n, която не се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на произволна декартова координатна система. Избираме във всяка част Φ_n по една точка M_n и от получената редица избираме подредица, клоняща към точка M от повърхнината S. Съгласно предишните разглеждания съществува околност на точката M, която се проектира еднозначно в координатните равнини на подходящо избрана правоъгълна координатна система. Но тази околност за някой номер n съдържа частта Φ_n от S, която поради това също ще се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на координатната система. Получи се противоречие с избора на Φ_n, което и трябваше да се докаже.

Сега вече не е трудно да заключим, че формулата на Стокс е вярна за повърхнини, които удовлетворяват условието 1), но не удовлетворяват в общия случай условието 2). За тази цел ще раздробим повърхнината S на краен брой гладки части Φ_n с размери, по-малки от указаното по-горе число δ. Формулата на Стокс е вярна за всяка от частите Φ_n, понеже Φ_n се проектира еднозначно върху всички координатни равнини на подходяща декартова координатна система. Сумираме левите и десните страни на получените формули. Интегралите по общите участъци от границите на частите Φ_n се вземат в противоположни посоки и поради това се унищожават. По тази причина отляво ще получим интеграл по повърхнината S от величината $(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$, а отдясно — интеграл по границата C на повърхнината S от величината $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т. е. формулата на Стокс за разглежданата повърхнина от по-общ вид.

З а б е л е ж к а 2. Формулата на Стокс е вярна и за повърхнини S, които с помощта на частично гладки криви могат да се раздробят на краен брой едносвързани повърхнини, удовлетворяващи условието 1). Доказателството на този факт е очевидно: достатъчно е да сумираме интегралите от лявата и дясната страна на формулите на Стокс за указаните повърхнини и да отчетем, че интегралите по кривите, осъществяващи раздробяването, се вземат в различни посоки и поради това се унищожават.

Забележка 3. Както следва от доказателството, формулата на Стокс (6.27) може да се запише във вида (6.27')

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y \right.$$

(6.27')

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right\} ds = \oint_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Ще отбележим, че интегралите отляво и отдясно имат инвариантен характер, т.е. стойността и формата им не се променят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се убедим в това, е достатъчно да проведем разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

§ 4. Условия за независимост на криволинейния интеграл в равнината от пътя на интегриране

Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, дефинирано в свързана област D в равнината.

Определение 1. Функцията $U(M)$ се нарича потенциал на полето $\mathbf{a}(M)$ в областта D, ако в тази област

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} U(M).$$

Поле $\mathbf{a}$, което притежава потенциал, се нарича потенциално поле.

Теорема 6.4. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. Стойността на интеграла

$$\int_{\widetilde{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

за произволни точки $A \in D$, $B \in D$ не зависи от частично гладката крива $\widetilde{AB} \subset D$, съединяваща точките A и B, тогава и само тогава, когато полето

$$\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))$$

е потенциално. В този случай

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=U(B)-U(A),$$

където $U(x, y)$ е потенциал на полето $\mathbf{a}(x, y)$.

Доказателство. **Достатъчност.** Нека

$$\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))=\operatorname{grad} U(x, y)$$
$$=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Да съединим точките A и B, избрани произволно в D, с гладка крива $\overset{\frown}{AB}\subset D$ и нека $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\leqq t\leqq b$ е параметричното представяне на тази крива. От непрекъснатостта на $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ заключаваме, че функцията $U(x, y)$ е диференцируема в D. Тогава по формулата на Нютон—Лайбниц получаваме

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_a^b P(x(t),\ y(t))\,x'(t)$$
$$+Q(x(t),\ y(t))(y'(t))\,dt=\int\limits_a^b U'_t\,dt$$
$$=U(x(b),\ y(b))-U(x(a),\ y(a))=U(B)-U(A).$$

Необходимост. Фиксираме произволно в D точка $M_0(x_0, y_0)$ и нека $M(x, y)$ е произволна точка от областта D.

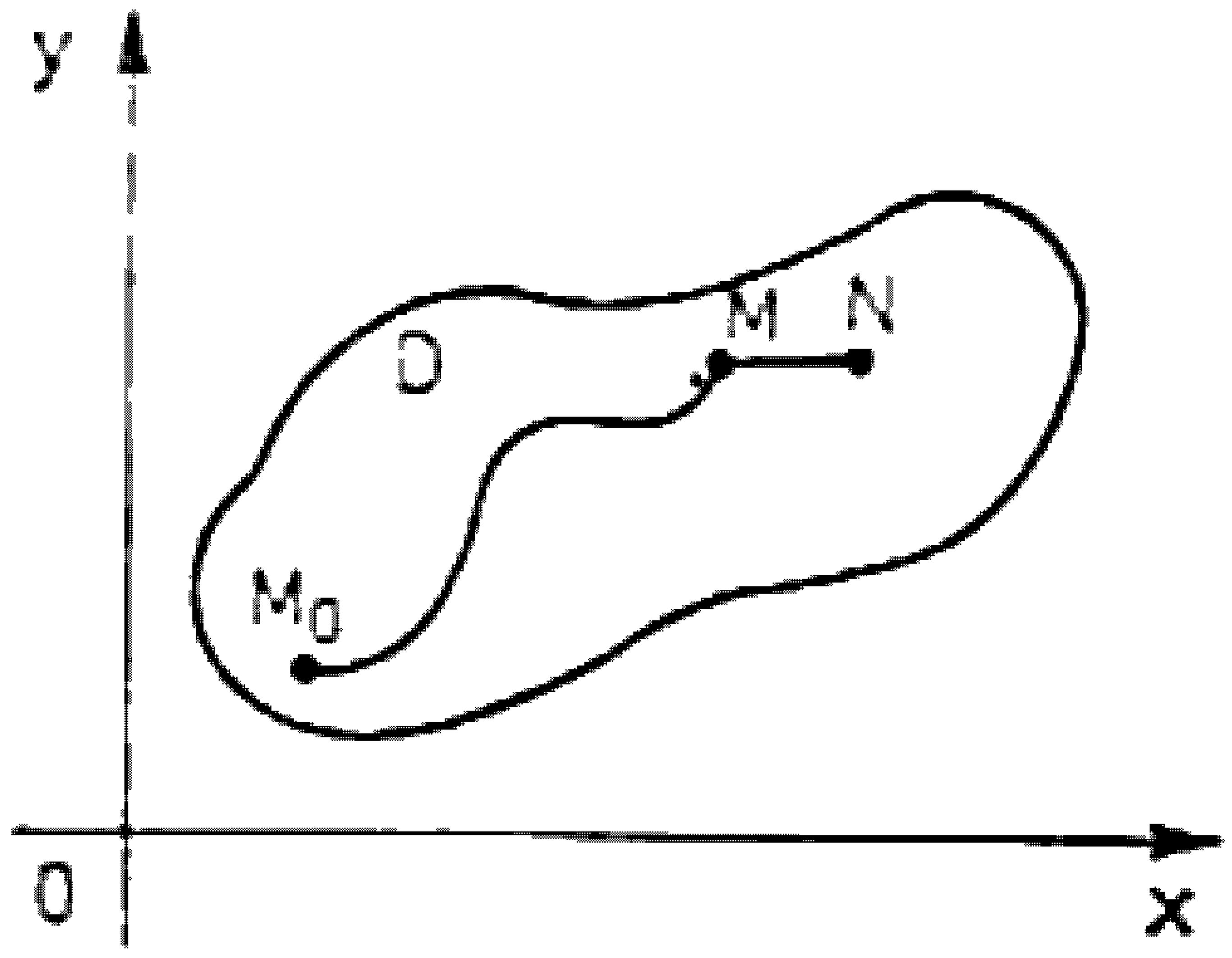
Полагаме

$$U(M)=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx+Q\,dy,$$

където интегралът е взет върху произволна частично гладка крива, съединяваща точките M_0 и M (вж. фиг. 6.4).

Ще покажем, че така дефинираната функция $U(x, y)$ е търсеният потенциал на полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))$. Да докажем например съществуването на $\frac{\partial U}{\partial x}$ и равенството $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$.

Да се преместим от точката $M(x, y)$ в точката $N(x+\Delta x, y)$, така че отсечката MN да се съдържа в D. Това може да се направи за всички достатъчно малки нараствания Δx, тъй като D е отворено множество. При такова преместване функцията $U(x, y)$ ще получи нарастване



Фиг. 6. 4

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\widetilde{M_0MN}} P\,dx+Q\,dy$$

$$-\int\limits_{\widetilde{M_0M}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\widetilde{MN}} P\,dx+Q\,dy.$$

Координатата y е константа по отсечката MN и следователно

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\widetilde{MN}} P\,dx=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt.$$

Поради непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$ съгласно теоремата за крайните нараствания имаме

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=P(x+\theta\Delta x, y)\,\Delta x,$$

където $0<\theta<1$.

Оттук $\dfrac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x, y)$.

Използвайки непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$, след граничен преход при $\Delta x\to 0$ получаваме

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y).$$

Съвършено аналогично се доказва и равенството

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}=Q(x, y).$$

Теорема 6.4 е доказана.

Ако полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$ е потенциално и функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати заедно с частните си производни в областта D, то трябва да е в сила равенството

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

което означава равенство на смесените производни:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.$$

Съгласно теорема 6.4 едно необходимо условие за независимост на криволинейния интеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

от пътя на интегриране в случая, когато функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и техните частни производни са непрекъснати в областта D, е да бъде в сила лесно проверяемото равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ако областта е едносвързана, то това условие е и достатъчно за независимостта на интеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ от избора на кривата, съединяваща дадените точки A и B. За да избегнем използването на недоказаната в общия случай формула на Грийн (за бележка 2 към теорема 6.1), отначало ще разгледаме случая, когато областта D е кръг.

Теорема 6.5. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и техните частни производни са непрекъснати в кръга K. Тогава полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$ е потенциално в този кръг тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{в } K.$$

Доказателство. Нужно е да докажем само достатъчността на условието. През центъра M_0 на кръга прекарваме правите M_0x' и M_0y', успоредни съответно на осите Ox и Oy. От произволна точка $M(x, y)\in K$ спускаме перпендикуляри MM_1 и MM_2 към M_0x' и M_0y' съответно. Точката M_0 съединяваме с точките M_1 и M_2 с помощта на отсечките M_0M_1 и M_0M_2.

Прилагайки формулата на Грийн (6.25') за правоъгълника, получаваме

$$\int\limits_{\overbrace{M_0M_1MM_2}} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy=0,$$

откъдето следва, че

$$\int\limits_{\overbrace{M_0M_1M}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overbrace{M_0M_2M}} P\,dx+Q\,dy,$$

т.е. интегралът $\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy$ не зависи от начупената γ от две отсечки, успоредни на координатните оси, свързваща фиксираната точка M_0 с точката M. Тогава дефинираме функцията

$$U(M)=\int\limits_{\overbrace{M_0M}} P\,dx+Q\,dy,$$

където M_0M е начупена от две отсечки, успоредни на координатните оси. Проверката, че така определената функция $U(x, y)$ представлява потенциал на даденото поле $\mathbf{a}(x, y)$, се извършва аналогично на проверката, извършена при доказателството на теорема 6.4.

Теорема 6.5 е доказана.

З а б е л е ж к а. Теорема 6.5 е в сила за произволна едносвързана област D. За целта трябва да се докаже, че условието

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в областта } D$$

е достатъчно за независимостта на криволинейния интеграл

$$\int\limits_{\overbrace{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

от избора на кривата $\overbrace{AB}$, съединяваща точките A и B. Да докажем това.

Нека L е произволна затворена частично гладка крива, лежаща в D. Да означим с D^* областта, оградена от кривата L. Поради едносвързаността на областта D всяка точка от областта D^* принадлежи на D. Прилагайки за областта D^* формулата на Грийн (6.25′) (вж. забележка 2 към теорема 6.1), имаме

$$\int\limits_{L} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{D^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

откъдето следва, че за произволно фиксирани точки A и B от областта D и за всеки две частично гладки криви $\overbrace{ACB}$ и $\overbrace{AC'B}$, съединяващи тези точки, са в сила равенствата

$$0=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}\cup\overset{\frown}{BC'A}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{\overset{\frown}{BC'A}} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{\overset{\frown}{AC'B}} P\,dx+Q\,dy.$$

Поради това

$$\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{AC'B}} P\,dx+Q\,dy.$$

Следователно стойността на интеграла

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

не зависи от частично гладката крива $\overset{\frown}{AB}$, съединяваща точките A и B.

§ 5. Някои приложения

1. Изразяване лицето на област в равнината чрез криволинеен интеграл. Нека едносвързаната област D с граница C удовлетворява условията от теорема 6.1. Полагайки във формулата на Грийн (формула (6.25′)) $P=-y$, $Q=x$, ще получим

$$\iint\limits_{D} 2\,dx\,dy=\oint\limits_{C} -y\,dx+x\,dy.$$

За лицето $\sigma(D)$ на областта D в равнината имаме следното изразяване с помощта на криволинеен интеграл по ориентираната граница на тази област:

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_{C} -y\,dx+x\,dy.$$

С получената формула ще намерим лицето на областта, ограничена от кривата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqq t\leqq 2\pi$, $a>0$, (циклоида) и правата $y=0$. Понеже интегралът

$$\int\limits_{\gamma} -y\,dx+x\,dy=0,$$

където γ е отсечката $0\leqq x\leqq 2\pi$, $y=0$, то съответно на положителната ориентация на контура имаме

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(-a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)\sin t)\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=2\pi a^2-\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}t\sin t\,dt$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t\cos t)\Big|_{0}^{2\pi}=3\pi a^2.$$

2. Изразяване на обеми с помощта на интеграл по повърхнина. Нека D е едносвързана област в E^3 с граница S, удовлетворяваща условията на теорема 6.2 (формулата на Остроградски — Гаус). Нека в областта D

$$P(x, y, z)=x,\ Q(x, y, z)=y,\ R(x, y, z)=z.$$

Тези функции удовлетворяват условията, при които е в сила формулата на Остроградски — Гаус, и затова

$$\iint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz=3V(D),$$

където $V(D)$ е обемът на областта D.

3. Да разгледаме векторното поле, породено от електричен товар с големина q. Разполагаме този товар в началото на координатната система. Силата, която действа на единичен товар, разположен в точката $M(x, y, z)$, се пресмята съгласно закона на Кулон по формулата

$$E(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

където $\mathbf{r}$ е радиус-векторът на точката M, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 е константа.

Електростатичното поле E е потенциално в $E^3\setminus\{0\}$. Ще напомним, че полето $\mathbf{a}(M)$ се нарича потенциално в областта D, ако съществува функция $U(M)$, дефинирана в областта D, такава, че

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad} U(M).$$

Потенциал за полето E е функцията

$$\Phi(M)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Полето F, породено от материална точка с маса m, разположена в началото на координатната система, се нарича гравитационно и също е потенциално.

По закона на Нютон силата $F(M)$, с която полето действува на маса с големина единица, разположена в точката $M(x, y, z)$, се пресмята по формулата

$$F(M) = -gm \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

За потенциал на полето F в цялото пространство E^3 с изключение на началото на координатнатната система служи функцията

$$U(M) = gm \frac{1}{r}.$$

За потенциалното поле

$$\mathbf{a}(M) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)),$$

дефинирано в областта D, лежаща в E^3, независимостта на интеграла

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

от пътя на интегриране (интегралът зависи само от началото и края на пътя) се доказва по същия начин, както и в теорема 6.4, третираща случая на област D, лежаща в E^2.

Ето защо работата, извършвана от всяко поле за преместване на единична пробна частица от точката A до точка B, не зависи от пътя, по който се извършва преместването. Ако разстоянията от началото на координатната система до точките A и B са съответно r_1 и r_2, то тази работа за полето E е равна на

$$\Phi(B) - \Phi(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а за полето F — на

$$U(B) - U(A) = gm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Допълнение към глава 6*

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ФОРМИ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Антисиметрични полилинейни форми

1. Линейни форми. Нека V е произволно n-мерно векторно пространство, чиито елементи ще означаваме със символите $\xi, \eta, \ldots$. Предмет на нашето изучаване ще бъдат функциите, които на всеки елемент $\xi \in V$ съпоставят някакво реално число.

Определение 1. Функцията $\mathbf{a}(\xi)$ се нарича линейна форма, ако за всички $\xi \in V$, $\eta \in V$ и всяко реално число λ са изпълнени равенствата

1) $\mathbf{a}(\xi+\eta)=\mathbf{a}(\xi)+\mathbf{a}(\eta)$,

2) $\mathbf{a}(\lambda\xi) \;=\lambda\,\mathbf{a}(\xi)$.

Определение 2. Сума на две линейни форми $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ще наречем линейната форма $\mathbf{c}$, която на всеки вектор $\xi \in V$ съпоставя числото

$$\mathbf{c}(\xi)=\mathbf{a}(\xi)+\mathbf{b}(\xi).$$

Произведение на линейната форма $\mathbf{a}$ с реалното число λ ще наричаме линейната форма $\mathbf{b}$, която на всеки вектор $\xi \in V$ съпоставя числото

$$\mathbf{b}(\xi)=\lambda\,\mathbf{a}(\xi).$$

По такъв начин множеството на всички линейни форми образува векторно пространство, което ще означим със символа $L(V)$**. Ще намерим представяне на линейната форма $\mathbf{a}$ спрямо даден базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{n}$. Нека

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\mathbf{e}_i.$$

Ако означим $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}(\mathbf{e}_i)$, то търсеното представяне ще има вида

$$\mathbf{a}(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\mathbf{a}_i$$

Ще докажем, че размерността $\dim L(V)$ на линейното простран-

* Текстът на това допълнение е взет от книгата на В. А. Илин, Е. Г. Позняк «Основи на математическия анализ», част II, М., Наука, 1973.

** Пространството $L(V)$ се означава също така и със символа V^* и се нарича спрегнато (или дуално) на V.

ство $L(V)$ е равна на n. За това е достатъчно да намерим някакъв базис в $L(V)$, съдържащ точно n елемента, т. е. n линейни форми. Да фиксираме произволен $\{e_k\}$ на пространството V и да разгледаме следните линейни форми:

$$e^k(\xi)=\xi^k \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

където $\{\xi^k\}$ са коефициентите на разлагането на вектора ξ по елементите на базиса $\{e_k\}$. С други думи, линейната форма e^k действува върху елементите на базиса $\{e_i\}$ по правилото

$$e^k(e_i)=\delta_{ik}=\begin{cases} 1 & \text{при } i=k, \\ 0 & \text{при } i\neq k. \end{cases}$$

В такъв случай спрямо дадения базис $\{e_i\}$ линейната форма a има вида

$$a(\xi)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, e^i(\xi), \quad a_i=a(e_i),$$

т. е. линейните форми $e^1(\xi), e^2(\xi), \ldots, e^n(\xi)$ образуват базис в $L(V)$. Този базис се нарича спрегнат (или дуален) на базиса $\{e_i\}$.

2. Билинейни форми. Да означим с $V\times V$ множеството на всички наредени двойки (ξ_1, ξ_2), където $\xi_1\in V$, $\xi_2\in V$, и да разгледаме функциите $a(\xi_1, \xi_2)$, които съпоставят на всеки елемент от $V\times V$ (т. е. на всеки два елемента $\xi_1\in V$ и $\xi_2\in V$) някое реално число.

Определение. Функцията $a(\xi_1, \xi_2)$ се нарича билинейна форма, ако за всяка фиксирана стойност на едната променлива тя е линейна форма относно другата променлива.

С други думи, за произволни вектори $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ и произволни реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ е изпълнено равенството

$$a(\lambda_1\xi_1+\mu_1\eta_1,\ \lambda_2\xi_2+\mu_2\eta_2)=$$
$$=\lambda_1\lambda_2\, a(\xi_1, \xi_2)+\lambda_1\mu_2\, a(\xi_1, \eta_2)+\mu_1\lambda_2\, a(\eta_1, \xi_2)+\mu_1\mu_2\, a(\eta_1, \eta_2).$$

Множеството на всички билинейни форми лесно може да се превърне в линейно пространство, като се въведат в него по естествен начин операциите събиране и умножение с реално число. Полученото пространство от билинейни форми ще означим с $L_2(V)$.

Ще намерим представянето на билинейната форма $a(\xi_1, \xi_2)$ спрямо някакъв базис $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ на пространството V. Нека $\xi_k=\sum_{j=1}^{n}\xi_k^j\, e_j$, $k=1, 2$. Като положим $a(e_i, e_j)=a_{ij}$, ще получим търсеното представяне

$$a(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_1^i \xi_2^j .$$

За да определим размерността на пространството $L_2(V)$, ще с помощта на линейните форми $e^i(\xi)$, представляващи базис, спрегнат на базиса $\{e_i\}$, следните билинейни форми:

$$e^{ij}(\xi_1, \xi_2) = e^i(\xi_1)e^j(\xi_2).$$

Тогава произволна билинейна форма се представя еднозначно

$$a(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e^{ij}(\xi_1, \xi_2).$$

Това означава, че формите $e^{ij}(\xi_1, \xi_2)$ образуват базис в $L_2(V)$ размерността на $L_2(V)$ е равна на n^2.

Полилинейни форми. Нека p е естествено число. Да означим символа $V^p = V \times V \times \cdots \times V$ множеството на всички наредени $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ от p вектора, всеки от които принадлежи , и да разгледаме функциите, които на всеки такъв набор поставят някое реално число.

Определение. Функцията $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ се нарича полили- форма от степен p (или p-форма), ако тя е линейна форма всеки аргумент при фиксирани стойности на останалите.

Като въведем линейните операции в множеството на всички ще получим линейно пространство, което ще означим със $L_p(V)$.

Ще намерим представянето на произволна полилинейна форма $\xi_2, \ldots, \xi_p)$ относно някакъв базис $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ на пространството . Да означим

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}).$$

огава, ако $\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i e_i$, то

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p}.$$

Ако $e^k(\xi)$ е базис в $L(V)$, спрегнат на $\{e_i\}$, то е очевидно, че

$$e^{i_1 i_2 \dots i_p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = e^{i_1}(\xi_1)\, e^{i_2}(\xi_2) \dots e^{i_p}(\xi_p)$$

образуват базис в $L_p(V)$ и следователно $L_p(V)$ има размерност n^p.

4. Антисиметрични полилинейни форми

Определение. Полилинейната форма $a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ се нарича антисиметрична, ако при разместване на произволни два аргумента тя сменя знака си*. С други думи,

$$a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_p) = -a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_p).$$

Очевидно множеството на всички полилинейни антисиметрични форми от степен p образуват подпространство на линейното пространство $L_p(V)$, което ще означим със символа $A_p(V)$**. Елементите на пространството $A_p(V)$ ще означаваме със символа $\omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$.

Да забележим, че ако $\{e_i\}$ е произволен базис във V и

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 \dots i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p},$$

то числата $\omega_{i_1 \dots i_p}$ сменят знака си при разместване на два индекса. Това следва от факта, че

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Естествено е да считаме, че $A_1(V) = L_1(V)$, а $A_0(V)$ се състои от всички константи, т. е. съвпада с реалната права.

5. Външно произведение на антисиметрични форми. Да разгледаме две антисиметрични форми $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$. В тази точка ще въведем основната операция в теорията на антисиметричните форми — операцията външно умножение.

Нека

$$\omega^p = \omega^p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p), \quad \eta_i \in V,$$
$$\omega^q = \omega^q(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q), \quad \zeta_j \in V.$$

Да разгледаме следната полилинейна форма: $a \in L_{p+q}(V)$

(6.1.1) $$a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+q}) = \omega^p(\xi_1, \dots, \xi_p) \cdot \omega^q(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q}).$$

Тази форма, изобщо казано, не е антисиметрична. Именно при разместване на аргументите ξ_i и ξ_j, където $1 \leq i \leq p$ и $p+1 \leq j \leq p+q$, формата (6.1.1) може да не смени знака си. От това обстоятелство

* Антисиметричните полилинейни форми се наричат също знакопроменливи или външни.

** Това пространство се означава също и със символа A^pV^* и се нарича p-та външна степен на пространството V^*.

редизвикана необходимостта от въвеждане на външно произение.

За да въведем външно произведение, ще ни потрябват някои от теорията на пермутациите.

Да напомним, че пермутация на числата $\{1, 2, \ldots, m\}$ се нафункция $\sigma=\sigma(k)$, дефинирана върху множеството на тези която го изобразява взаимноеднозначно върху себе си. на всички такива пермутации се означава със сим- $\sum_m$. Очевидно съществуват $m!$ различни пермутации от $\sum_m$. две пермутаци $\sigma \in \sum_m$ и $\tau \in \sum_m$ се определя по естествен насуперпозиция $\sigma\tau \in \sum_m$. Пермутацията σ^{-1} се нарича обратна σ, ако $\sigma^{-1}\sigma=\sigma\sigma^{-1}=\varepsilon$, където ε е тъждествената пермутация (т. е. $k=1, 2, \ldots, m$).

Пермутацията σ се нарича транспозиция, ако тя размества две като запазва местата на останалите. С други думи, същедвойка числа i и j ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$) такава, че $\sigma(i)=j$, и $\sigma(k)=k$ за $k \neq i$ и $k \neq j$. Очевидно, ако σ е транспози-, то $\sigma^{-1}=\sigma$, т. е. $\sigma\sigma=\varepsilon$.

Известно е, че всяка пермутация σ се разлага на суперпози- от транспозиции, при това четността на броя на транспози- в такова разлагане не зависи от неговия избор и се нарича на пермутацията σ.

Да въведем следното означение:

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases} 1, & \text{ако пермутацията } \sigma \text{ е четна,} \\ -1, & \text{ако пермутацията } \sigma \text{ е нечетна.} \end{cases}$$

Забелязваме, че формата $a \in L_p(V)$ принадлежи на $A_p(V)$, ако за пермутация $\sigma \in \sum_p$

$$\mathbf{a}(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)})=\operatorname{sgn}\sigma \,.\, \mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Да разгледаме отново полилинейната форма (6.1.1). За всяка $\sigma \in \sum_{p+q}$ ще положим

$$\sigma\mathbf{a}(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})=\mathbf{a}(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}).$$

Лесно можем да се убедим, че ако $\tau \in \sum_{p+q}$ и $\sigma \in \sum_{p+q}$, то $(\tau\sigma)\mathbf{a}=\tau(\sigma\mathbf{a})$.

Ще въведем следното определение.

Определение. Външно произведение на формата $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$ се нарича формата $\omega \in A_{p+q}(V)$, определена е

(6.1.3) $$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \, . \, \sigma \mathbf{a},$$

където сумата се взема по всички пермутации $\sigma \in \sum_{p+q}$, удовлетворяващи условието

(6.1.4) $$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q),$$

а величината $\sigma \mathbf{a}$ се определя от равенствата (6.1.1) и (6.1.2).

Външното произведение на формите ω^p и ω^q се означава със символа $\omega = \omega^p \wedge \omega^q$.

Ще илюстрираме например как действува пермутация σ, удовлетворяваща условието (6.1.4). Да предположим, че по някакъв път се движат успоредно две автомобилни колони, в първата от които има p, а във втората q коли. След известно време пътят се стеснява и двете колони в движение се престрояват в една. При това автомобилите от първата колона заемат места някъде между автомобилите на втората, като вътре във всяка от двете колони се запазва редът на следване. Като резултат получаваме пермутация, която удовлетворява условието (6.1.4). Лесно се вижда, че е вярно и обратното, всяка такава пермутация може да се реализира в нашия модел.

За да се убедим, че даденото от нас определение е коректно, е необходимо да докажем, че $\omega = \omega^p \wedge \omega^q \in \Lambda_{p+q}(V)$. Очевидно от доказателство се нуждае само антисиметричността на формата ω.

Ще покажем, че при разместване на два аргумента ξ_i и ξ_{i+1} формата ω сменя знака си. Оттук лесно следва, че $\omega \in \Lambda_{p+q}(V)$. Нека $\tau \in \sum_{p+q}$ е такава пермутация. Да се убедим, че

(6.1.5) $$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn} \tau)\, \omega.$$

От равенството (6.1.3) получаваме

$$\tau\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \, . \, (\tau \sigma)\mathbf{a}.$$

Да разбием тая сума на две:

(6.1.6) $$\tau\omega = \sum_{\sigma}{}' \, (\operatorname{sgn} \sigma)(\tau \sigma)\, \mathbf{a} + \sum_{\sigma}{}'' \, (\operatorname{sgn} \sigma)(\tau \sigma)\, \mathbf{a}.$$

Към първата сума ще отнесем онези пермутации σ, за които или $\sigma^{-1}(i) \leq p$, $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$, или $\sigma^{-1}(i) \geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \geq p+1$. За всяка такава пермутация

$$(\tau \sigma)\, \mathbf{a} = -\sigma\, \mathbf{a}.$$

За да направим това твърдение очевидно, да означим $k = \sigma^{-1}(i)$,

1), т. е. $i=\sigma(k)$, $i+1=\sigma(l)$. Формата σa представлява произ-
на формите ω^p и ω^q, като аргументи на ω^p са векторите $\xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}$, а аргументи на ω^q — векторите $\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots,$
Ако $k\leq p$ и $l\leq p$, то $\xi_i=\xi_{\sigma(k)}$ и $\xi_{i+1}=\xi_{\sigma(l)}$ са аргументи на ω^p, която по условие е антисиметрична. Тогава при раз-
на ξ_i и ξ_{i+1} формата ω^p, а следователно и σa сменя
сн. Аналогично се разглежда случаят, когато $k\geq p+1$ и
$+1$.

И така за първата сума е изпълнено равенството

$$\sum_\sigma{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\mathbf{a}=-\sum_\sigma{}' (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\mathbf{a}.$$

Към втората сума ще отнесем онези пермутации σ, за които $\sigma^{-1}(i)\leq p$, $\sigma^{-1}(i+1)\geq p+1$, или $\sigma^{-1}(i)\geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1)\leq p$.
покажем, че множеството от пермутациите $\{\sigma\}$, които удовле-
това условие (а също, разбира се, и условието (6.1.4)),
е множеството от пермутациите от вида $\tau\sigma$, където $\sigma\in\{\sigma\}$.
се върнем на нашия модел с двете автомобилни колони. Твър-
приема следната очевидна форма.

Ако при някакво пренареждане автомобилът с номер k от първата колона се окаже непосредствено пред автомобила с номер l от втората колона, то лесно може да се посочи друго пренареждане, в резултат на което тези автомобили ще си сменят местата, а редът на движение на останалите ще се запази.

Тъй като $\operatorname{sgn}\tau\sigma=-\operatorname{sgn}\sigma$, получаваме

$$\sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\mathbf{a}=-\sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)\mathbf{a}=-\sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\mathbf{a}. \tag{6.1.8}$$

Като заместим (6.1.7) и (6.1.8) в (6.1.6), ще получим (6.1.5).

Пример 1. Да разгледаме две линейни форми $\mathbf{f}(\xi)\in A_1(V)$ и $\mathbf{g}(\xi)\in A_1(V)$. Външно произведение ще бъде формата

$$\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}=\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,.\,\sigma\,\mathbf{f}(\xi_1)\mathbf{g}(\xi_2)=\mathbf{f}(\xi_1)\,\mathbf{g}(\xi_2)-\mathbf{g}(\xi_1)\,\mathbf{f}(\xi_2).$$

Пример 2. Нека $\mathbf{f}(\xi)\in A_1(V)$, $\mathbf{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)\in A_q(V)$. Външно произведение $\omega=\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}$ е $(q+1)$-форма, аргументите на която ще означим с $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q$.

$$\omega=\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\,\mathbf{f}(\xi_0)\,\mathbf{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)=$$

$$-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f(\xi_i)g(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_q).$$

6. Свойства на външното произведение на антисиметрични форми. 1) Очевидно свойство на външното произведение е линейността:

а) ако $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, то за всяко реално число λ

$$(\lambda\omega^p)\wedge\omega^q=\omega^p\wedge(\lambda\omega^q)=\lambda(\omega^p\wedge\omega^q);$$

б) ако $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$(\omega_1^p+\omega_2^p)\wedge\omega^q=\omega_1^p\wedge\omega^q+\omega_2^p\wedge\omega^q.$$

2) Антикомутативност. Ако $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$\omega^p\wedge\omega^q=(-1)^{pq}\omega^q\wedge\omega^p.$$

Доказателство. Нека

$$\omega^p\wedge\omega^q=\omega=\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+q}).$$

Лесно се вижда, че

$$\omega^q\wedge\omega^p=\omega(\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_{p+q}, \xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Ще се убедим в това, че пермутацията $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ може да се получи от векторите $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ чрез pq последователни транспозиции. Векторът ξ_{p+1} може да се придвижи на първо място, като се използват p транспозиции. След това с помощта на същия брой транспозиции ще придвижим на второ място вектора ξ_{p+2} и т. н. Ще придвижим всичко q вектора, като всеки път използваме p транспозиции, т. е. общият брой на транспозициите е равен на pq. В такъв случай антикомутативността ще следва от антисиметричността на външното произведение.

3) Асоциативност. Ако $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, то $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r=\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Доказателство. Нека $\sigma \in \sum_{p+q+r}$. Да разгледаме следната величина:

(6.1.9) $$\omega=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[\omega^p(\xi_1,\ldots,\xi_p)\omega^q(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q})\omega^r(\xi_{p+q+1},\ldots,\xi_{p+q+r})].$$

Сумата (6.1.9) ще бъде равна на $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r$, ако отначало изпълним сумирането по всички пермутации, които оставят числата $p+q+1$, $p+q+2$, ..., $p+q+r$ без промяна и удовлетворяват условието (6.1.4), а след това да сумираме по всички пермутации, които запазват получения ред на първите $p+q$ аргумента и реда на аргументите $\xi_{p+b+1}, \ldots, \xi_{p+q+r}$.

Аналогично можем да получим величината $\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Ще покажем, че и в двата случая се получава сума по всички
удовлетворяващи условията

$$
.1.10) \qquad \begin{cases} \sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p), \\ \sigma(p+1)<\sigma(p+2)<\cdots<\sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1)<\cdots<\sigma(p+q+r). \end{cases}
$$

За целта ще се върнем отново на нашия модел с автомобил-
колони. Да предположим, че по пътя се движат три автомо-
колони, в първата от които има p, във втората q, а в тре-
r коли. Един от начините за престрояване на трите колони
една се състои в това, че отначало се сливат първата и втората
а след това така получената колона се съединява с тре-
При другия начин отначало се сливат втората и третата
а към тях се присъединява първата. Очевидно е, че пер-
σ, която се получава в резултат на всяко едно от тези
удовлетворява условието (6.1.10) и, обратно, всяка
която удовлетворява условието (6.1.10), може да се
както с помощта на първия, така и с помощта на втория
за пренареждане. Това означава съвпадане на $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$
$\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Асоциативността на външното умножение дава възможност да
е разглежда произволно крайно произведение

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m, \text{ където } \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

Пример 1. Нека $\mathbf{a}_1(\xi), \mathbf{a}_2(\xi), \ldots, \mathbf{a}_m(\xi)$ са линейни форми. Тогава

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_m = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[\mathbf{a}_1(\xi_1)\mathbf{a}_2(\xi_2)\ldots\mathbf{a}_m(\xi_m)],$$

сумирането се извършва по всички пермутации $\sigma \in \sum_m$.
Това равенство лесно се проверява по индукция. Забелязваме,
ако въведем матрицата $\{\mathbf{a}_i(\xi_j)\}$, то равенството (6.1.11) може да
запише в следния вид:

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_m)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \det\{\mathbf{a}_i(\xi_j)\}.$$

. Базис в пространството на антисиметричните форми. Да избе-
някакъв базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ в пространството V и да означим с
$\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n$ спрегнатия му базис в пространството $L(V)$. Ще напомним,
$\mathbf{e}^i(\xi)$ е линейна форма, която в елементите на базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ приема
стойностите $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$.

В точка 3 показахме, че всевъзможните произведения

$$\mathbf{e}^{i_1}(\xi_1)\,\mathbf{e}^{i_2}(\xi_2)\ldots\mathbf{e}^{i_p}(\xi_p)$$

образуват базис в $L_p(V)$. Тъй като $A_p(V) \subset L_p(V)$, то всяка антисиметрична p-форма може да се разложи по естествен начин като линейна комбинация на посочените произведения. Тези произведения обаче не образуват базис в $A_p(V)$, тъй като не са антисиметрични p-форми, т. е. не принадлежат на $A_p(V)$. Въпреки това чрез тях може да се конструира с помощта на външно произведение базис в $A_p(V)$.

Теорема 6.6. Нека $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ е базис в пространството V, а $\{e^i\}_{i=1}^{n}$ е спрегнатият му базис в пространството $L(V)$. Всяка антисиметрична p-форма $\omega \in A_p(V)$ може да се представи, и то по единствен начин, във вида

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \tag{6.1.13}$$

Всяко събираемо в сумата от дясната част на (6.1.13) представлява произведение на константата $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ с антисиметричната p-форма $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$.

Доказателство. Съгласно резултатите от точка 4 можем да запишем

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \tag{6.1.14}$$

където числата $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_p})$ са определени еднозначно.

Тъй като формата $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ е антисиметрична, то за всяка пермутация $\sigma \in \sum_p$

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Следователно

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \tag{6.1.15}$$

Групираме събираемите в сумата (6.1.14), различаващи се с пермутация на индекса $i_1 i_2 \ldots i_p$, и се възползуваме от равенството (6.1.15). Получаваме

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} = \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} \Big[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} \Big]. \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

С примера от точка 6 сумата в квадратните скоби е $\wedge \ldots \wedge e^{i_p}$. Теоремата е доказана.

Следствие 1. Елементите $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n)$ базис в пространството $A_p(V)$. Този базис е празен за и се състои от един елемент, ако $p = n$.

Следствие 2. Размерността на пространството $A_p(V)$ е равна на C_n^p.

По-нататък обикновено ще считаме, че сме фиксирали избрабазис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и ще означаваме линейните форми $e^i(\xi)$ символа $e^i(\xi) = \xi^i$. Тогава всяка форма $\omega \in A_p(V)$ приема вида

$$\omega = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}.$$

Пример 1

$$\xi^1 \wedge \xi^2 = (e^1 \wedge e^2) = (\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma\, [e^1(\xi_1)\, e^2(\xi_2)] =$$

$$e^1(\xi_1)\, e^2(\xi_2) - e^1(\xi_2)\, e^2(\xi_1) = \xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_2^1 \xi_1^2,$$

където ξ_i^j е j-тият коефициент в разлагането на вектора ξ_i по базиса $\{e_j\}$.

Пример 2

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^n = \det\{\xi_i^j\},$$

където $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^j e_j$.

§ 2. Диференциални форми

1. Определение. Да разгледаме произволна отворена област G в n-мерното евклидово пространство E^n. Точките в областта G ще означаваме със символите $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ и т. н.

Определение. Диференциална (външна) форма от степен p, дефинирана в областта G, ще наричаме функция $\omega(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, стойността на която за всяко фиксирано $x \in G$ представлява антисиметрична p-форма от $A_p(E^n)$.

Множеството на всички диференциални p-форми в областта G ще означим с $\Omega_p(G) = \Omega_p(Q, E^n)$.

Ще считаме, че при фиксирани $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E^n$ p-формата ω е безкрайно диференцируема в G функция. Като използваме резултатите от § 1, можем да запишем всяка p-форма ω във вида

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\,\xi^{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi^{i_p}. \tag{6.1.18}$$

Навсякъде по-нататък ще означаваме вектора ξ със символа $dx=(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, а векторите ξ_k — със символите $d_kx=(d_kx^1, d_kx^2, \ldots, d_kx^n)$. За базис в E^n ще изберем векторите $\mathbf{e}_k=\{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, където единицата стои на k-то място. Елементи на спрегнатия базис ще бъдат функциите $\mathbf{e}^k(\xi)=\mathbf{e}^k(dx)$, определени от равенствата $\mathbf{e}^k(dx)=dx^k$.

Тогава диференциалната форма (6.1.18) приема вида

$$\omega(x, d_1x, \ldots, d_px)=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Диференциална 0-форма — това е произволна функция, дефинирана в областта G (и съгласно нашите предположения безкрайно диференцируема в G).

Пример 2. Всяка диференциална 1-форма има вида

$$\omega(x, dx)=\sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\,dx^k.$$

В частност, когато $n=1$, $\omega(x, dx)=f(x)dx$. Диференциалните форми от степен 1 се наричат също така линейни диференциални форми.

Пример 3. Всяка диференциална 2-форма има вида

$$\omega(x, d_1x, d_2x)=\sum_{i<k} \omega_{ik}(x)dx^i\wedge dx^k.$$

По определение

$$\begin{aligned} dx^i\wedge dx^k&=(\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^k)(d_1x, d_2x)=\\ &=\mathbf{e}^i(d_1x)\,\mathbf{e}^k(d_2x)-\mathbf{e}^i(d_2x)\,\mathbf{e}^k(d_1x)=\\ &=d_1x^id_2x^k-d_2x^id_1x^k=\begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^k\\ d_2x^i & d_2x^k\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

В частност при $n=2$ получаваме

$$\omega(x, d_1x, d_2x)=f(x)\begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2\\ d_2x^1 & d_2x^2\end{vmatrix}.$$

Детерминантата е равна на елементарното лице, съответствуващо на векторите d_1x и d_2x.

В случая, когато $n=3$, означавайки $\omega_{12}=R$, $\omega_{23}=P$, $\omega_{13}=-Q$, получаваме

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Всяка диференциална 3-форма в тримерното пространство има вида

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x) = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата е равна на елементарния обем, отговарящ на векторите d_1x, d_2x, d_3x.

2. Външен диференциал

Определение. Външен диференциал на p-линейна диференциална форма $\omega \in \Omega(G)$ ще наричаме формата $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$, определена от съотношенията

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} d\omega_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

където

$$d\omega_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k.$$

По такъв начин, ако

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Диференциалът на форма от нулева степен (т. е. функция $f(x)$) има вида

$$df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

Пример 2. Да изчислим диференциала на линейната форма

$$\omega=\omega(x,\,dx)=\sum_{i=1}^{n}\ \omega_i(x)\,dx^i.$$

Ще получим

$$d\omega=d\omega(x,\,d_1x,\,d_2x)=\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_i(x)}{\partial x^k}\ dx^k\wedge dx^i.$$

Тъй като $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$ и $dx^k\wedge dx^k=0$, то

$$d\omega=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\ dx^k\wedge dx^i+\sum_{i<k}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\ dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\ dx^k\wedge dx^i-\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\ dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\right)dx^k\wedge dx^i.$$

В частност, когато $n=2$, за $\omega=Pdx^1+Qdx^2$ получаваме

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx^1\wedge dx^2.$$

3. Свойства на външния диференциал. Непосредствено от определението получаваме следните свойства:

1) ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_p(G)$, то $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$;

2) ако $\omega\in\Omega_p(G)$ и λ е реално число, то $d(\lambda\omega)=\lambda d\omega$;

3) ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, то

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Ще докажем свойство 3). Нека

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\ dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Ще въведем следното означение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\ dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогава $d\omega$ може да се запише във вида

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\ dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}.$$

Да си припомним, че

$$\omega=\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{pq}\omega_2\wedge\omega_1.$$

По-нататък

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+(-1)^{pq}\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1.$$

Тогава

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{k=1}^{n}dx^k\wedge\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+$$

$$+(-1)^{pq}\sum_{k=1}^{n}dx^k\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1=$$

$$=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{pq}d\omega_2\wedge\omega_1.$$

Тъй като $d\omega_2$ е $(q+1)$-форма, то

$$d\omega_2\wedge d\omega_1=(-1)^{p(q+1)}\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Оттук $d\omega=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$.

В сила е следното важно свойство на диференциала.

Основно свойство на външния диференциал:

$$d(d\omega)=0.$$

Доказателство. Да предположим отначало, че ω е форма от нулева степен, т. е. $\omega(x)=f(x)$. Тогава

$$d(df)=d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}dx^k\wedge dx^i.$$

Тъй като $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$, това равенство може да се препише във вида

$$d(df)=\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^k,$$

откъдето следва, че $d(df)=0$.

Нека сега

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогава

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_p}d\omega_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Забелязваме, че всеки член на сумата представлява външно произведение на диференциали на форми от нулева степен, именно на формите $\omega_{i_1 \ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx), \ldots, e^{i_p}(dx)$. Остава да приложим свойство 3) и да се възползуваме от това, че за форми от нулева степен основното свойство е доказано.

§ 3. Диференцируеми изображения

1. Определение за диференцируеми изображения. Да разгледаме произволна m-мерна област D в евклидовото пространство E^m и n-мерна област $G \subset E^n$. Точките от областта D ще означаваме със символите $t=(t^1, t^2, \ldots, t^m)$, а точките от областта G – със символите $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Ще казваме, че φ изобразява D в G, ако

$$\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

където $\varphi^k(t)$ са дефинирани в областта D, а векторите x с координати $x^k=\varphi^k(t)$ лежат в областта G.

Ще дефинираме изображение φ^*, което преобразува $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ за всяко p, $0 \leq p \leq n$. При това ще считаме, че всеки компонент $\varphi^k(t)$ на изображението φ е безкрайно диференцируем.

Определение. Нека φ е изображение на $D \subset E^m$ в $G \subset E^n$. Ще означим с φ^* изображението, което за всички $0 \leq p \leq n$ действува от $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ по следното правило: ако

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(\varphi(t))\varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}),$$

където

$$\varphi^*(dx^i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k.$$

Пример 1. Нека ω е форма от нулева степен, т. е. $\omega = f(x)$. Тогава

$$\varphi^*(f) = f(\varphi(t)).$$

Пример 2. Нека φ изобразява n-мерната област $D \subset E^n$ в n-мерна област $G \subset E^n$ и нека ω е следната n-форма:

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Тогава

$$\varphi^*(\omega)=\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}dt^{k_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{k_n}}dt^{k_n}\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial t^{k_n}}\,dt^{k_1}\wedge\ldots\wedge dt^{k_n}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\ \det\left\{\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right\}.$$

По такъв начин

$$\varphi^*(dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n)=\frac{D(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n)}{D(t^1,t^2,\ldots,t^n)}dt^1\wedge dt^2\wedge\ldots\wedge dt^n.$$

Забележка. Формата $\varphi^*(\omega)$ се нарича диференциална форма, получена от формата ω със смяна на променливите φ.

2. Свойства на изображението φ^*. Изображението φ^* има следните свойства:

1) Ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, то

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

Доказателство. Нека

$$\omega_1=\sum_{i_1<\ldots<i_p}a_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2=\sum_{k_1<\ldots<k_q}b_{k_1\ldots k_q}(x)\,dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}.$$

Тогава

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\ \sum_{k_1<\ldots<k_q}a_{i_1\ldots i_p}(x)\,b_{k_1\ldots k_q}(x)\times$$
$$\times dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}$$

и следователно

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\sum_i\sum_k a_i(\varphi(t))b_k(\varphi(t))\,\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})=$$

$$=\sum_i a_i(\varphi)\,\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p})\wedge\Big[\sum_k b_k(\varphi)\,\varphi^*(dx^{k_1})\wedge$$

$$\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})\Big]=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

2) Ако $\omega\in\Omega_p(G)$, то $\varphi^*(d\omega)=d\varphi^*(\omega)$.

Доказателство. Отначало ще докажем това равенство за $p=0$, т. е. за $\omega=f(x)$. Получаваме

$$d\omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i,\quad \varphi^*(\omega)=f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t^k}f(\varphi(t))\,dt^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^k}dt^k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\varphi^*(dx^i)=\varphi^*(d\omega).$$

За произволно p ще проведем доказателството по индукция. Нека $\omega=f_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$. Тогава $d\omega=df_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$. От свойство 1) и от току-що доказаното съотношение имаме

$$\varphi^*(d\omega)=\varphi^*(df)\wedge\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p}).$$

От друга страна,

$$d\varphi^*(\omega)=d\varphi^*[(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge dx^{i_p}]=$$
$$=d[\varphi^*(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge\varphi^*(dx^{i_p})].$$

По-нататък съгласно свойство 3) на външния диференциал

$$d\varphi^*(\omega)=d\varphi^*(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge\varphi^*(dx^{i_p})+$$
$$+(-1)^{p-1}\varphi^*(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge d\varphi^*(dx^{i_p}).$$

Забелязваме, че от горното следва $\varphi^*(dx^{i_p})=d\varphi^*(x^{i_p})$, и тогава от основното свойство на външния диференциал имаме

$$d\varphi^*(dx^{i_p})=0.$$

Съгласно индуктивното предположение за $p-1$

$$d\varphi^*(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})=\varphi^*(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}}).$$

Оттук получаваме

$$d\varphi^*(\omega)=\varphi^*(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge\varphi^*(dx^{i_p})$$

и съгласно свойство 1)

$$d\varphi^*(\omega)=\varphi^*(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}).$$

Следното важно свойство се нарича транзитивност.

3) Да разгледаме отворените области $U\subset E^l$, $V\subset E^m$, $W\subset E^n$, точките на които са съответно $u=(u^1, u^2, \ldots, u^l)$, $v=(v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $w=(w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Нека φ изобразява $U\to V$, а ψ изобразява

. С $\psi \circ \varphi$ ще означим изображението, наречено композиция, действува по правилото

$$(\psi \circ \varphi)(u)=\psi[\varphi(u)].$$

ще въведем композицията $\varphi^* \circ \psi^*$, която за всяко p $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т.е.

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\omega)=\varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Вярно е следното равенство:

$$(\psi \circ \varphi)^*=\varphi^* \circ \psi^*.$$

Доказателство. Да означим $\beta=\psi \circ \varphi$. Това означава, че $, \beta^2, \dots, \beta^n)$, където $\beta^k=\psi^k(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$.

ще извършим доказателството за линейната форма . Получаваме $\beta^*(dw^k)=d\beta^*(w^k)=$

$$=d\beta^k(u)=\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i}\, du^i=\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}\, du^i .$$

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k)=\varphi^*[\psi^*(dw^k)]=\varphi^*[d\psi^*(w^k)]=$$

$$=\varphi^*(d\psi^k)=\varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j}\, dv^j\right)=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j}\, \varphi^*(dv^j).$$

Но

$$\varphi^*(dv^j)=d\varphi^*(v^j)=d\varphi^j=\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}\, du^i;$$

тогава

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k)=\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}\, du^i$$

и равенството е доказано. Оттук следва верността на свойство 3) за произволна линейна форма. По-нататък ще проведем доказателството по индукция. Нека

$$\omega=f(w)\, dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_p} \in \Omega(W).$$

Тогава

$$\beta^*(\omega)=\beta^*(f dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge \beta^*(dw^{i_p})=$$

$$=(\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge (\varphi^* \circ \psi^*)(dw^{i_p})=$$

$$=(\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_p})=(\varphi^* \circ \psi)(\omega).$$

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge ds^2 \wedge \ldots \wedge ds^p =$$

$$= \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^p)}{D(s^1, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int_{C_1} \omega.$$

Аналогично може да се покаже, че ако $C_1 = C_2$, то

$$\int_{C_1} \omega = -\int_{C_2} \omega.$$

2. Диференцируеми вериги. Ще ни потрябват повърхности, които се разпадат на няколко парчета, всяко едно от които е образ на някой m-мерен куб. За пример на такава повърхност може да служи състоящата се от две окръжности граница на пръстен, лежащ в двумерната равнина. При това ще различаваме ориентациите на тези окръжности. Във връзка с това много полезно се оказва въвеждането на линейни комбинации с реални коефициенти на сингулярни кубове.

Определение 1. Ще наричаме p-мерна верига C произволен набор

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, C_1, C_2, \ldots, C_k\},$$

където λ_i са реални числа, а C_i са p-мерни сингулярни кубове. Ще използуваме означението

$$C = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_k C_k.$$

Ще казваме, че C принадлежи на G, ако всичките C_i принадлежат на G.

Множеството на всички p-мерни вериги образува линейно пространство, ако въведем по естествен начин операциите събиране и умножение с реални числа.

Определение 2. Интеграл от формата ω по p-мерна верига C, съдържаща се в G, се нарича числото

$$\int_C \omega = \lambda_1 \int_{C_1} \omega + \lambda_2 \int_{C_2} \omega + \cdots + \lambda_k \int_{C_k} \omega.$$

Сега можем да дефинираме граница на произволен сингулярен куб. За целта ще дефинираме най-напред граница на единичен куб.

Определение 3. Граница на куба I^p ще наречем $(p-1)$-мерната верига

$$\partial I^p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [I_0^p(i) - I_1^p(i)],$$

където $I^p_\alpha(i)$ е сечението на куба I^p с хиперравнината

$$x^i=\alpha \quad (\alpha=0,1).$$

За да бъде коректно това определение, е необходимо да се разясни какъв смисъл сме вложили в твърдението, че $I^p_\alpha(i)$ е $(p-1)$-мерен сингулярен куб.

Да построим каноничното изображение $\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_i^{\alpha,p}$ на куба I^{p-1} върху $I^p_\alpha(i)$. Нека $s=(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})\in I^{p-1}$. Полагаме

$$\tilde{\varphi}^k(s)=\begin{cases} s^k, & \text{ако } 1\leq k<i,\\ \alpha, & \text{ако } k=i,\\ s^{k-1}, & \text{ако } i<k\leq p.\end{cases}$$

Очевидно $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \ldots, \tilde{\varphi}^p)$ изобразява взаимноеднозначно I^{p-1} върху $I^p_\alpha(i)$. В частност за $\alpha=0$ и $i=p$ изображението φ е рестрикция върху $I^p_0(p-1)$ на тъждественото изображение на пространството E^p върху себе си.

Определение 4. Граница на p-мерния сингулярен куб $C=\varphi: I^p\to E^n$ се нарича $(p-1)$-мерната верига

$$\partial C=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,[\varphi(I^p_0(i))-\varphi(I^p_1(i))].$$

По този начин границата на образа на куба I^p е образ на границата на I^p с естествената ориентация.

Пример 1. Да разгледаме в равнината квадрата I^2. Очевидно можем да разглеждаме този квадрат като сингулярен куб, където φ е тъждественото изображение. На фиг. 6.5 е показана границата на този квадрат, като посоката на стрелките съвпада с посоката на нарастване на параметъра t^k, по който се извършва интегрирането, в случая, когато тази страна на квадрата влиза във веригата ∂I^2 със знак $+$ и посоката на стрелките е противоположна, ако страната се взема със знак —. Виждаме, че нашето договаряне за знаците води до обичайното обхождане на границата обратно на часовниковата стрелка.

Пример 2. Да разгледаме сингулярния куб $C=\varphi: I^2\to R^2$, където φ има вида

$$\varphi^1=(a+Rt^1)\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2=(a+Rt^1)\sin 2\pi t^2.$$

Лесно се вижда, че $\varphi(I^2)$ е пръстен, границата на който е съставена от окръжности с радиуси a и $a+R$. Ще изясним какво

$$\int\limits_{I^p_\alpha(i)} \omega\,, \quad \text{където} \quad i=1,2,\ldots,p, \quad \alpha=0,1.$$

Разглеждаме каноничното изображение $\tilde{\varphi}: I^{p-1} \to I^p_\alpha(i)$. Съгласно резултатите от точка 1 на този параграф

$$\int\limits_{I^p_\alpha(i)} \omega = \int\limits_{I^{p-1}} f[\tilde{\varphi}(s)] \frac{D(\tilde{\varphi}^2,\ldots,\tilde{\varphi}^p)}{D(s^1,\ldots,s^{p-1})}\, ds^1\wedge\ldots\wedge ds^{p-1}.$$

По определението за канонично изображение $\tilde{\varphi}_i^{\alpha,p}$ якобианът има вида

$$J=\frac{D(s^2,\ldots,s^{i-1},\alpha,s^i,\ldots,s^{p-1})}{D(s^1,s^2,\ldots,s^{p-1})}=0, \quad \text{ако} \quad i\neq 1,$$

и

$$J=\frac{D(s^1,s^2,\ldots,s^{p-1})}{D(s^1,s^2,\ldots,s^{p-1})}=1, \quad \text{ако} \quad i=1.$$

По такъв начин само интегралите по $I^p_\alpha(i)$ могат да бъдат различни от нула. Получаваме

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = (-1)\Bigl(\int\limits_{I^p_0(1)} \omega - \int\limits_{I^p_1(1)} \omega\Bigr) = \int\limits_{I^{p-1}} f(1,s^1,s^2,\ldots,s^{p-1})\,ds^1\wedge\ldots\wedge ds^{p-1} -$$

$$-\int\limits_{I^{p-1}} f(0,s^1,\ldots,s^{p-1})\,ds^1\wedge\ldots\wedge ds^{p-1}.$$

По определението за интеграл по куба I^{p-1}

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \int_0^1\ldots\int_0^1 [f(1,s^1,\ldots,s^{p-1}) - f(0,s^1,\ldots,s^{p-1})]\,ds^1 ds^2\ldots ds^{p-1} =$$

$$=\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0}\,ds^0\,ds^1\ldots ds^{p-1} = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0}\,ds^0\wedge\ldots\wedge ds^{p-1}.$$

От друга страна,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1}\,dt^1\wedge dt^2\wedge\ldots\wedge dt^p.$$

Следователно

$$\int\limits_{I^p} d\omega = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1}\,dt^1\wedge\ldots\wedge dt^p.$$

Равенството (6.1.19) е доказано.

Доказателство на теоремата на Стокс. По определението за интеграл по сингулярен куб

$$\int_C d\omega = \int_{I^p} \varphi^*(d\omega).$$

Съгласно свойство 2) на диференцируемите изображения (вж. точка 2, § 3)

$$\int_{I^p} \varphi^*(d\omega) = \int_{I^p} d\varphi^*(\omega).$$

По-нататък ще използваме вече доказаната формула на Стокс за куба I^p

$$\int_{I^p} d\varphi^*(\omega) = \int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Остава да забележим, че от свойството на интегралите по границата на сингулярен куб (вж. края на точка 2 от настоящия параграф)

$$\int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega) = \int_{\partial C} \omega.$$

Теоремата окончателно е доказана.

4. Примери. 1) Да разгледаме случая $p=1$. Едномерен сингулярен куб C в E^n — това е някаква крива, чиито граници ще означим с a и b. Формулата на Стокс приема вида

$$\int_C df = \int_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

В частност, когато $n=1$, получаваме формулата на Нютон — Лайбниц

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

2) Нека сега $p=2$. Двумерен сингулярен куб C — това е двумерна повърхност, формата $\omega \in \Omega_1$ има вида

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\,dx^k.$$

Като използваме пример 2 от точка 2, § 2, получаваме

$$\int\limits_{C} \sum_{k<i} \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i = \int\limits_{\partial C} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^k .$$

Ако $n=2$, като означим $\omega = P dx^1 + Q dx^2$, получаваме формулата на Грин

$$\int\limits_{C} \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \int\limits_{\partial C} P dx^1 + Q dx^2 .$$

Ако $n=3$, получаваме обичайната формула на Стокс.

3) Нека $p=n$. Тогава $\omega \in \Omega_{n-1}$ има вида

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

По-нататък

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

В частност при $n=3$

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 ,$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

и получаваме формулата на Остроградски—Гаус.

7. Интеграли, зависещи от параметри

Тази глава е посветена на изучаването на функции, представени във вид на собствени или несобствени интеграли от функции, които освен от интеграционната променлива зависят и от още една променлива, която се нарича параметър. Функции, които се представят чрез такива интеграли, е прието да се наричат интеграли, зависещи от параметър.

Естествено възниква въпросът за непрекъснатост, интегруемост и диференцируемост на такива функции по параметъра.

§ 1. Равномерна сходимост по едната променлива на функции на две променливи

1. Връзка между равномерната сходимост по едната променлива на функции на две променливи с равномерната сходимост на редици от функции. Нека ни е дадена функция на две променливи $f(x, y)$, където двойката (x, y) принадлежи на подмножеството Z на пространството E^2, а x принадлежи на някакво подмножество на числовата ос $\{x\}-X$ и y принадлежи на някакво подмножество на числовата ос $\{y\}=Y$. Например Z може да бъде правоъгълникът $\prod -\{a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$, където $\{x\}=X=[a, b]$, $y-Y=[c, d]$, а $f(x, y)$ е функция, зададена в правоъгълника $\prod$.

Нека по-нататък y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}$.

Ако за всяко x от множеството $\{x\}$ съществува крайна граница

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y)-g(x),$$

то ще казваме, че функцията $f(x, y)$ поточково клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$ при y, клонящо към y_0, и ще пишем

$$f(x, y) \to g(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Понятието поточкова сходимост на функцията $f(x, y)$ към $g(x)$ обобщава понятието сходимост в точка на редици от функции (вж. § 11, глава 2).

Действително в частния случай, когато множеството $\{y\}$ е редицата $\{y_n\}$ и $y_n \to y_0$, то функцията $f(x, y)$ може да се разглежда като редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$, зададени в множеството $\{x\}$.

Сега ще дефинираме понятието равномерна сходимост по едната променлива x на функцията $f(x, y)$ на двете променливи към граничната функция $g(x)$ при $y \to y_0$.

Дефиниция. Функцията $f(x, y)$ клони равномерно относно x в множеството $\{x\}$ към функцията $g(x)$ при y, клонящо към y_0, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всяко $y \neq y_0$ от множеството $\{y\}$, за което $|y-y_0|<\delta$, и за всички x от множеството $\{x\}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Ще докажем едно твърдение, което дава връзка между равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на функцията $f(x, y)$ към $g(x)$ при $y \to y_0$ и равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$ при $y_n \to y_0$, където $y_n \neq y_0$ за всяко n и y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}$.

Твърдение 1. Функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ относно x в множеството $\{x\}$ при $y \to y_0$ тогава и само тогава, когато редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$ е сходяща равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $g(x)$ за всяка редица $\{y_n\}$, $y_n \to y_0$, където y_n принадлежат на $\{y\}$ и $y_n \neq y_0$.

Необходимост. Нека $f(x, y)$ клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$ при $y \to y_0$. Да вземем произволна редица $\{y_n\}$, където y_n принадлежат на $\{y\}$, $y_n \neq y_0$ и $y_n \to y_0$. Ще покажем, че редицата $f_n(x)$, където $f_n(x)=f(x, y_n)$, клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$.

За произволно число $\varepsilon>0$ съществува число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всички y от множеството $\{y\}$, за които $0<|y-y_0|<\delta$, и за всички x от $\{x\}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Тъй като $y_n \to y_0$, то съществува такъв номер $N=N(\delta)$, че за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|y_n-y_0|<\delta,$$

откъдето следва, че

$$|f(x, y_n)-g(x)|<\varepsilon$$

за всички x, принадлежащи на $\{x\}$, и при всяко $n \geq N$. Това означава, че $f_n(x)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$.

Достатъчност. Нека за всяка редица $\{y_n\}$, сходяща към y_0, където y_n принадлежат на $\{y\}$, $y_n \neq y_0$, съответната редица $f_n(x) = f(x, y_n)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$. Ще докажем, че функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ в множеството $\{x\}$. Допускаме противното, т. е. че съществува число $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $\delta > 0$ може да се намери $y_\delta \neq y_0$, $|y_\delta - y_0| < \delta$ и точка x_δ от $\{x\}$, за които е изпълнено неравенството

$$|f(x_\delta, y_\delta) - g(x_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Нека δ_n е редица от положителни числа, клоняща към 0. Тогава за съответните редици y_n и x_n ще имаме $y_n \to y_0$, $|y_n - y_0| > 0$ и $|f(x_n, y_n) - g(x_n)| \geq \varepsilon$. Следователно редицата от функции $f(x, y_n)$ не клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$. Стигнахме до противоречие. С това твърдение 1 е доказано.

2. Критерий на Коши за равномерна сходимост на функция. Вярна е следната теорема.

Теорема 7.1. *Необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост на функцията $f(x, y)$ в множеството $\{x\}$ към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ е за всяко число $\varepsilon > 0$ да съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че за всеки две точки y', y'' от множеството $\{y\}$, за които $0 < |y' - y_0| < \delta$, $0 < |y'' - y_0| < \delta$, и за всяко x от $\{x\}$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon.$$

Доказателство. Съгласно твърдение 1 е достатъчно да разгледаме редицата от функции $\{f(x, y_n)\}$, съответствуваща на редицата $\{y_n\}$, където $y_n \to y_0$, $0 < |y_n - y_0|$, $y_n \in \{y\}$, и да използваме критерия на Коши за равномерна сходимост на редица от функции (вж. § 1, глава 2).

2. Приложения на понятието равномерна сходимост на функция. Нека множеството $\{x\} = X$ съвпада със сегмента $[a, b]$ и y_0 е гранична точка на множеството $\{y\} = Y$. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, където x принадлежи на $[a, b]$, а y е от множеството Y. Ще формулираме няколко твърдения, произтичащи от съответните твърдения за равномерна сходимост на редица от функции (вж. глава 2). Тези твърдения се доказват чрез преминаване към произволна редица $\{y_n\}$, където $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Твърдение 2. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$ при всяко фиксирано y от Y и равномерно в $[a, b]$ клони към $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогава функцията $g(x)$ е интегруема в $[a, b]$ и са верни равенствата

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \left[\lim_{y\to y_0} f(x,y) \right] dx.$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно да се приложи теорема 2.8 от § 4, глава 2.

Твърдение 3. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по x, $x \in [a, b]$ при всяко фиксирано y от множеството Y и $f(x, y)$ равномерно в $[a, b]$ клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$, то $g(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$.

Доказателството се получава от следствие 1 на теорема 2.7, глава 2.

Твърдение 4. Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по x в $[a, b]$ при всяко фиксирано y от Y и при $y \to y_0$ тази функция монотонно клони към непрекъснатата функция $g(x)$ във всяка фиксирана точка x от $[a, b]$. Тогава $f(x, y)$ клони към $g(x)$ равномерно в $[a, b]$.

Това твърдение е аналог на теорема 2.4 от глава 2 (признак на Дини).

При прехода към редицата $\{y_n\}$ е необходимо тя да се избере монотонна такава, че $y_n \to y_0$.

Твърдение 5. Ако при всяко фиксирано y от множеството Y функциите на x: $f(x, y)$ и $f'_x(x, y)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$ клони към $g(x)$, а функцията $f'_x(x, y)$ клони към $h(x)$ равномерно в $[a, b]$, то функцията $g(x)$ е диференцируема в $[a, b]$ и при това

$$g'(x) = h(x)$$

или

$$\{\lim_{y\to y_0} f(x, y)\}'_x = \lim_{y\to y_0} f'_x(x, y).$$

За доказателството на това твърдение е необходимо да използуваме теорема 2.9, глава 2.

Твърдение 6. Нека функцията $f(x, y)$ е зададена и непрекъсната в правъгълника $\Pi = \{a \le x \le b,\ c \leqq y \leqq d\}$. Тогава за всяко y_0 от сегмента $[c, d]$ при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$ клони равномерно по x в $[a, b]$ към функцията $f(x, y_0)$.

Доказателство. Тъй като непрекъснатата функция $f(x, y)$ в правоъгълника Π е и равномерно непрекъсната в него, то за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че за всеки две точки (x', y'), (x'', y'') от Π, за които $|x'-x''|<\delta$, $|y'-y''|<\delta$, е вярно неравенството

$$|f(x', y')-f(x'', y'')| <\varepsilon.$$

Нека $x'=x''=x$, $y'=y$, $y''=y_0$. Тогава за всички $y\in[c, d]$ и такива, че $|y-y_0|<\delta$, и за всички x от $[a, b]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-f(x, y_0)|<\varepsilon.$$

Това доказва твърдението.

§ 2. Собствени интеграли, зависещи от параметър

1. Свойства на интегралите, зависещи от параметър. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за x, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, и y, принадлежащи на някакво множество $\{y\}=Y$. Да допуснем, че при всяко фиксирано y от Y функцията $f(x, y)$ е интегруема в $[a, b]$. Тогава в множеството Y е дефинирана функцията

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{7.1}$$

която се нарича интеграл, зависещ от параметъра y.

Ще изучим свойствата на интеграли, зависещи от параметър.

Да отбележим най-напред, че съгласно твърдение 2 от § 1, ако функцията $f(x, y)$ клони равномерно в $[a, b]$ към функцията $g(x)$ при $y\to y_0$, то в интеграла (7.1) може да се извърши граничен преход под знака на интеграла.

Теорема 7.2 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\Pi=\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$. Тогава интегралът $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ е непрекъсната функция на параметъра y в $[c, d]$.*

Доказателство. От твърдение 6 на § 1 следва, че функцията $f(x, y)$ клони равномерно към функцията $f(x, y_0)$ при $y\to y_0$ в сегмента $[a, b]$. Следователно, както беше отбелязано по-горе, може да се извърши граничен преход под знака на интеграла и да се получи

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx=I(y_0),$$

което и трябваше да се докаже.

Теорема 7.3 (за интегриране на интеграла по параметъра). *Ако функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\Pi=\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$, то функцията $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ е интегруема в сегмента $[c,d]$. Освен това е вярна формулата*

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(y,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx.$$

С други думи, ако са изпълнени условията на теоремата, то и интеграла, зависещ от параметъра, може да се интегрира по този параметър под знака на интеграла.

Доказателство. Съгласно предходната теорема 7.2 функцията $I(y)$ е непрекъсната в Π. Затова тя е интегруема в този сегмент. Верността на формулата следва от равенството на повторните интеграли, тъй като те са равни на двойния интеграл $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dx\,dy$(вж. глава 3).

Теоремата е доказана.

Теорема 7.4 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в правоъгълника Π и има в него непрекъсната производна $f'_y(x,y)$. Тогава функцията, определена от* (7.1), *е диференцируема в* $[c,d]$ и

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx. \tag{7.2}$$

С други думи, ако са изпълнени условията на теоремата, то можем да диференцираме под знака на интеграла.

Доказателство. Да разгледаме равенството

$$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=f'_y(x,y+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

което следва от формулата на Лагранж, и да забележим, че $f'_y(x,y+\theta h)$ клони равномерно в $[a,b]$ към $f'_y(x,y)$ при $h\to 0$.

Следователно можем да направим граничен преход под знака на интеграла в равенството

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x, y+\theta h)dx$$

$h\to 0$. Оттук получаваме формула (7.2), което доказва тео-

Случай, когато границите на интегриране зависят от параме-
Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в правоъгълника
$= a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$, а зададените в $[c, d]$ функции $a(y)$ и $b(y)$
$[c, d]$ в сегмента $[a, b]$.

Ако за всяко фиксирано y от $[c, d]$ функцията $f(x, y)$ е интег-
по x в сегмента $[a(y), b(y)]$, то очевидно в $[c, d]$ е дефини-
функцията

$$I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx. \qquad \text{.1*)}$$

Вярна е следната теорема.

Теорема 7.5 (за непрекъснатост на интеграл по параметър).
функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника Π, *а* $a(y)$ *и* $b(y)$ *са непрекъснати в сегмента* $[c, d]$. *Тогава*

$$I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx \text{ е непрекъсната в } [c, d].$$

Доказателство. Да фиксираме произволно y_0 от сегмента
$d]$. Тогава от свойството за адитивност на интеграла полу-

$$I(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx+\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y)dx.$$

интеграл на равенството представлява интеграл, зави-
от параметър, с постоянни граници на интегриране. Следова-
той е непрекъсната функция по y и затова при $y\to y_0$ той
към $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx$. За другите два интеграла получаваме

$$\left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx\right|\leq M|b(y)-b(y_0)|,$$

$$\left|\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y)dx\right|\leq M|a(y_0)-a(y)|,$$

където $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)|$. От непрекъснатостта на функциите $a(y)$ и $b(y)$ следва, че при $y \to y_0$ и двата интеграла клонят към нула. Следователно $I(y) \to I(y_0)$ при $y \to y_0$. Теоремата е доказана.

Сега ще докажем теорема за диференцируемост на интеграла $I(y)$, определен от равенството (7.1).

Теорема 7.6 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната заедно с производната си $f'_y(x, y)$ в правоъгълника Π, а функциите $a(y)$ и $b(y)$ са диференцируеми в $[c, d]$. Тогава интегралът $I(y)$, определен от равенството (7.1), е диференцируема функция по y в $[c, d]$ и е вярно равенството*

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx + f[b(y), y]\,b'(y) - f[a(y), y]\,a'(y). \tag{7.3}$$

Доказателство. Фиксираме произволно y_0 от сегмента $[c, d]$ и записваме диференчното частно във вида

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\,dx\right] \tag{7.4}$$

(h е избрано така, че $y_0+h \in [c, d]$). Тъй като

$$\int_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx = \int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx,$$

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h}\,dx + \frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx + \frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx.$$

В първото събираемо на това равенство съгласно теорема 7.4 можем да направим граничен преход под знака на интеграла при $h \to 0$.

Използувайки първата формула за средните стойности за интеграли, представяме второто и третото събираемо във вида

$$\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx = f(\xi, y_0+h)\,\frac{a(y_0) - a(y_0+h)}{h},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx = f(\eta, y_0+h)\ \frac{b(y_0+h)-b(y_0)}{h},$$

$\xi \in [a(y_0), a(y_0+h)]$ и $\eta \in [b(y_0), b(y_0+h)]$.

От тези равенства и от непрекъснатостта на функциите $a(y)$ получаваме

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx \to -f[a(y_0), y_0]a'(y_0) \text{ при } h\to 0,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx \to f[b(y_0), y_0]b'(y_0) \text{ при } h\to 0.$$

в равенството (7.4) може да се направи граничен при $h\to 0$ и е вярна формулата (7.3). Теоремата е дока-

§ 3. Несобствени интеграли, зависещи от параметри

параграф ще изучим случая на равномерната относно сходимост на функция на две променливи $F(x, y)$ към гра- функция $G(y)$ при $x\to\infty$.

функцията $F(x, y)$ е дефинирана в множеството Z, съ- се от двойките числа (x, y), където x принадлежи на мно- $\{x\}=X$, а y принадлежи на множеството $\{y\}=Y$, X и Y множества от числовата ос. Да предположим, че $+\infty$ е гра- точка на множеството X (т. е. за всяко число a множеството $+\infty$) съдържа поне една точка от множеството X).

Определение 1. Функцията $F(x, y)$ клони към функцията $G(y)$ x, клонящо към $+\infty$ равномерно относно y в множеството Y, за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери число x_0 такова, че ако принадлежи на множеството X и удовлетворява условието то за всички y от Y е изпълнено неравенството

$$|F(x, y)-G(y)|<\varepsilon.$$

Несобствени интеграли от първи род, зависещи от параметър. ека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за всички $x\geqq a$ при всички от някакво множество $\{y\}=Y$ и при всяко фиксирано y от Y е нтегруема в $[a, +\infty)$, т. е. за всяко y от Y е сходящ интегралът

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx. \tag{7.5}$$

Определение 2. Несобственият интеграл (7.5) се нарича равномерно сходящ по параметъра y в множеството Y, ако функцията

$$F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx \tag{7.6}$$

клони към граничната функция $I(y)$ при $t\to+\infty$ равномерно в множеството Y.

Следващата теорема се нарича критерий на Коши за равномерна сходимост на несобствен интеграл, зависещ от параметър.

Теорема 7.7. *Необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост в множеството Y на несобствения интеграл (7.5) е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува число $t_0\geqq a$ такова, че за всички t', t'', по-големи от t_0, и при всички y от Y да бъде изпълнено неравенството*

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|<\varepsilon.$$

Верността на този критерий следва от теорема 7.1, приложена за функцията

$$F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx.$$

От критерия на Коши в частност следва следният признак за сравняване:

Теорема 7.8 (признак на Вайерщрас). *Нека за всички y от Y и всички x от $[a_1,+\infty)$, където $a_1\geqq a$, е изпълнено неравенството*

$$|f(x, y)|\leqq\varphi(x),$$

където $\varphi(x)$ е интегруема (в несобствен смисъл) функция в $[a,+\infty)$. Тогава интегралът (7.5) е равномерно сходящ по y.

Доказателство. Тъй като интегралът $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ е сходящ, то за за всяко число $\varepsilon>0$ съществува число $t_0\geqq\alpha$ такова, че за всички t', t'', за които $t_0\leqq t'\leqq t''$, е изпълнено неравенството $\int_{t'}^{t''}\varphi(x)dx<\varepsilon$. Тогава

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right| \leqq \int_{t'}^{t''} |f(x, y)|\, dx \leqq \int_{t'}^{t''} \varphi(x)dx < \varepsilon,$$

което и трябваше да се докаже.

Забележка 1. От критерия на Коши за равномерна сходимост на несобствени интеграли следва, че интегралът (7.5) и неговият «остатък» (т. е. интегралът $\int_{a'}^{\infty} f(x, y)dx$, където $a' > a$) имат еднакъв характер на равномерна сходимост.

Забележка 2. Аналогично на доказателството на признака на Дирихле — Абел за несобствени интеграли (вж. част I, допълнение I към глава 9) се доказва следното твърдение (признак на Дирихле — Абел).

Ако интегралът $F(t, y) = \int_a^t f(x, y)dx$ е равномерно ограничен, т. е. за всички $t > a$ и y от Y е изпълнено неравенството $|F(t, y)| \leq M$ и функцията $g(x)$ е ограничена и монотонно клони към нула при $x \to +\infty$, то интегралът $\int_a^{\infty} f(x, y)\, g(x)dx$ е равномерно сходящ.

Преминаваме към изучаването на свойствата на несобствени интеграли, зависещи от параметър.

Теорема 7.9. *Нека за всяко b, по-голямо от a, функцията $f(x, y)$ клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ равномерно в сегмента $[a, b]$, където y_0 е гранична точка на множеството Y и интегралът $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)dx$ е равномерно сходящ в множеството Y. Тогава*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{\infty} f(x, y)dx = \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Доказателство. Ще докажем, че функцията $g(x)$ е интегруема в интервала $[a, \infty)$. За произволно число $\varepsilon > 0$ съществува число $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ такова, че за всеки t', t'', по-големи от t_0, и за всяко y от Y е изпълнено неравенството

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon.$$

Ако в горното неравенство оставим y да клони към y_0 при фиксирани t', t'', то ще получим

$$\left| \int_{t'}^{t''} g(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Това доказва сходимостта на интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$.

Нека $\{t_n\}$ е произволна редица, клоняща към $+\infty$. Да разгледаме функционалната редица

$$I_n(y) = \int_a^{t_n(y)} f(x, y)dx,$$

която равномерно в множеството Y клони към $I(y)$, определена в равенството (7.5). Поради твърдение 2 от § 1 всяка от функциите $I_n(y)$ има крайна граница при $y \to y_0$. Освен това

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{t_n} f(x, y)dx = \int_a^{t_n} [\lim_{y\to y_0} f(x, y)]dx = \int_a^{t_n} g(x)dx.$$

Но тогава съществува и границата

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{t_n\to\infty} \int_a^{t_n} g(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx,$$

тъй като съгласно теорема 2.7 от глава 2 символът $\lim\limits_{t_n\to\infty}$ за равномерно сходяща редица $I_n(y)$ и символът $\lim\limits_{y\to y_0}$ за граница на функциите $I_n(y)$ може да си разменят местата.

Теоремата е доказана.

В частност, ако точката y_0 принадлежи на множеството Y и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката y_0, т. е. за всяко $b>a$ функцията $f(x, y)$ в сегмента $[a, b]$ равномерно клони към функцията $f(x, y_0)$ при $y\to y_0$, то $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. $I(y)$ е непрекъсната в точката y_0.

По-точно вярна е следната теорема.

Теорема 7.9* **(за непрекъснатост на равномерно сходящ несобствен интеграл по параметър).** *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната за $x\geq a$ и $y\in[c, d]$ и интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ е равномерно сходящ в $[c, d]$. Тогава функцията $I(y)$ е непрекъсната в $(c, d]$.*

Доказателство. Във всеки правоъгълник $\Pi = \{a\leq x\leq t,$

$\leq y \leq d\}$ функцията $f(x, y)$ равномерно в сегмента $[a, t]$ клони към $f(x, y_0) - g(x)$ при $y \to y_0$ (вж. твърдение 6 от § 1). За- при $t = t_n$ за интегралите $I_n(y)$, въведени при доказателството теорема 7.9, са изпълнени условията за граничен преход под нака на интеграла. Оттук и от равномерната сходимост в $[c, d]$ $I_n(y)$ към $I(y)$ получаваме, че $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. функцията $y)$ е непрекъсната. Теоремата е доказана.

Теорема 7.10. *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е и неотрицателна за $x \in [a, \infty)$ и $y \in [c, d]$. Нека по- интегралът $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ е непрекъснат по y в $[c, d]$. този интеграл е равномерно сходящ по y в $[c, d]$.*

Доказателство. Да разгледаме редицата $I_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x, y)dx$ непрекъснати в $[c, d]$ функции и нека t_n монотонно клони към Тогава редицата $\{I_n(y)\}$, монотонно не намаляваща, клони непрекъснатата функция $I(y)$. Следователно можем да прило- признака на Дини (теорема 2.4, глава 2).

Теоремата е доказана.

Теорема 7.11. *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е и неотрицателна за x и y, принадлежащи съответно интервалите $[a, \infty)$ и $[c, d]$. Нека освен това функцията $f(x, y)$ за всяка точка x от $[a, \infty)$, монотонно не намаляваща, клони към функция $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогава от сходимостта интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следва, че може да се направи граничен пре- под знака на интеграла (7.5) при $y \to y_0$.*

Доказателство. От признака на Вайерщрас (теорема 7.8) че интегралът (7.5) е равномерно сходящ в $[c, d]$, тъй като $y) \leq g(x)$ и $g(x)$ е интегруема в $[a, \infty)$. Затова от теорема 7.9* че може да се направи граничен преход под знака на ин-

Да преминем сега към въпроса за интегриране на несобствен по параметър.

еорема 7.12 (за интегриране на несобствен интеграл по па- *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е дефинирана непрекъсната за x и y, принадлежащи съответно на интерва- $[a, \infty)$ и $[c, d]$, и нека интегралът $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ е равно-*

мерно сходящ. Тогава функцията $I(y)$ е интегруема в $[c, d]$ и е вярна формулата

$$(*)\quad \int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^\infty f(x, y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x, y)dy.$$

Доказателство. Съгласно теорема 7.9* функцията $I(y)$ е непрекъсната в $[c, d]$, а следователно и интегруема в този интервал. Да докажем сега формулата (*). Ще разгледаме функциите $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x, y)dx$ при $t_n\to\infty$. За всяка функция $I_n(y)$ от теорема 7.3 получаваме

$$(7.7)\qquad \int_c^d I_n(y)dy=\int_a^{t_n} dx\int_c^d f(x, y)dy.$$

Тъй като в интервала $[c, d]$ редицата $\{I_n(y)\}$ равномерно клони към $I(y)$, то в лявата страна на равенството (7.7) може да се направи граничен преход под знака на интеграла при $n\to\infty$. Следователно при $n\to\infty$ съществува и границата на редицата от интеграли, стоящи в дясната страна на (7.7). Така получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^d I_n(y)dy=\int_c^d I(y)dy=\lim_{n\to\infty}\int_a^{t_n}dx\int_c^d f(x, y)dy=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x, y)dy,$$

което трябваше да се докаже.

Ще докажем сега теорема за интегриране на несобствен интеграл (7.5) по параметър, който се изменя в безкраен интервал.

Теорема 7.13. *Нека $f(x, y)$ е функция, непрекъсната и неотрицателна в областта $a\leq x<\infty$, $c\leq y<\infty$, интегралът $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$ е непрекъснат в интервала $[c, \infty)$, а интегралът $K(x)=\int_c^\infty f(x, y)dy$ е непрекъснат в интервала $[a, \infty)$. Тогава от сходимостта на единия от интегралите $\int_c^\infty I(y)\,dy$ и $\int_a^\infty K(x)\,dx$ следва сходимостта на другия и са верни равенствата*

$$\int_c^\infty I(y)\,dy=\int_a^\infty K(x)\,dx$$

или

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\, dy.$$

По такъв начин, ако са изпълнени условията на теорема 7.13, може да се интегрира по параметъра в безкраен интервал под знака на несобствения интеграл.

Доказателство. От условията на теоремата и от теорема 7.10 интегралите $I(y)$ и $K(x)$ са равномерно сходящи съответно първият в сегмента $[c, d]$ при всяко $d>c$, а вторият в сегмента $[a, b]$ при всяко $b>a$. Нека например е сходящ повторният интеграл $\int_c^\infty I(y)\, dy$. Да разгледаме ненамаляваща редица $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$. Тогава

$$\int_a^{t_n} K(x)\, dx = \int_a^{t_n} dx \int_0^\infty f(x, y)\, dy = \int_c^\infty dy \int_a^{t_n} f(x, y)\, dx.$$

Редицата $I(y, t_n) = \int_a^{t_n} f(x, y)\, dx$, $n=1, 2, \ldots$, за всяко d, по-голямо от c, клони равномерно в сегмента $[c, d]$ към $I(y)$. При това редицата $\{I(y, t_n)\}$ не намалява в $[c, d]$. Оттук и от теорема 7.11 следва равномерната сходимост на интеграла $\int_c^\infty I(y, t)\, dy$. Но тогава съгласно теорема 7.9 може да се направи граничен преход под знака на интеграла, т. е. имаме

$$\int_a^\infty K(x)\, dx = \lim_{t_n\to\infty} \int_a^{t_n} K(x) dx = \lim_{t_n\to\infty} \int_c^\infty I(y, t_n)\, dy = \int_c^\infty I(y)\, dy,$$

което трябваше да се докаже.

Да разгледаме сега въпроса за диференциране по параметър на несобствен интеграл.

Теорема 7.14 (за диференциране на несобствен интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ и нейната производна $f'_y(x, y)$ са непрекъснати в областта $a \leq x < \infty$, $c \leq y \leq d$. Нека по-нататък интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$ е сходящ във всяка точка y от сегмента $[c, d]$, а интегралът $\int_a^\infty f'_y(x, y)\, dx$ е равномерно сходящ в* *сегмента* $[c, d]$. *Тогава функцията* $I(y)$ *има производна* за всяко* y *от* $[c, d]$, *при това*

$$I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

Доказателство. Нека $t_n \to \infty$ и $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$. Редицата от непрекъснати функции $I_n(y)$ е сходяща във всяка точка от $[c, d]$ към функцията $I(y)$, а редицата от производни $I'_n(y)$ е равномерно сходяща в сегмента $[c, d]$. Тогава съгласно твърдение 5 от § 1 за всяка точка y от сегмента $[c, d]$ съществува $I'(y)=\lim_{n\to\infty} I'_n(y)$. Но $I'_n(y)=\int_a^{t_n} f'_y(x, y)\,dx$. Следователно

$$I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

2. Несобствени интеграли от втори род, зависещи от параметри. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за x, принадлежащо на $[a, b]$, и y, принадлежащо на Y. Нека за всяко фиксирано y от Y функцията $f(x, y)$ е неограничена при $x \to a$, но такава, че интегралът

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{7.8}$$

е сходящ.

Определение 3. Несобственият интеграл от втори род (7.8) се нарича *равномерно сходящ по параметъра* y в множеството Y, ако за всяко t, удовлетворяващо неравенството $a<t<b$, функцията

$$F(t, y)=\int_t^b f(x, y)\,dx$$

при $t \to a+0$ равномерно клони относно $y \in Y$ към функцията $I(y)$.

Ще отбележим, че с помощта на смяна на променливата x, приведена в допълнение 2 към глава 9, част I, несобственият интеграл от втори род се свежда към несобствен интеграл от първи род. Затова за интеграла (7.8) могат да бъдат формулирани ос-

* При $y=c$ $I(y)$ има дясна производна $I'(c+0)$, а при $y=d$ — лява производна $I'(d-0)$.

новните теореми за граничен преход под знака на несобствения интеграл от първи род, за непрекъснатост по параметъра, за интегриране и диференциране по параметъра под знака на интеграла.

Накрая ще отбележим, че интеграл от вида

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y)\,dx + \int_b^\infty f(x, y)\,dx,$$

където първото събираемо е интеграл от неограничена функция, а второто събираемо — интеграл с неограничени граници, се нарича равномерно сходящ, ако и двата интеграла в дясната част са равномерно сходящи.

§ 4. Приложение на теорията на интегралите, зависещи от параметър, за пресмятане на някои несобствени интеграли

Описаните в предишните параграфи методи позволяват да се пресметнат някои несобствени интеграли.

1°. Да пресметнем интеграла

$$Q = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Сходимостта на този интеграл беше установена по-рано (вж. допълнение 2, глава 9, част I).

Ще разгледаме помощната функция

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-yx}\dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Функцията $f(x, y)$ и нейната производна $f'_y(x, y) = e^{-yx}\sin x$ са непрекъснати в областта $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $f(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$. Нека

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty f(x, y)\,dx.$$

докажем равномерната сходимост на този интеграл при $y \geqq 0$. това е достатъчно да установим равномерната сходимост на интеграла $\int\limits_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$. За този интеграл ще приложим признака на Дирихле — Абел от § 3. Интегралът

$$\int\limits_1^t e^{-yx}\sin x\,dx=-\frac{e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\Bigg|_1^t$$

е ограничен, тъй като

$$\left|\int\limits_1^t e^{-yx}\sin x\,dx\right|\leq\left|\frac{e^{-yt}(y\sin t+\cos t)}{1+y^2}\right|+$$

$$\left|-\frac{e^{-1}(y\sin 1+\cos 1)}{1+y^2}\right|\leq\frac{2(1+y)}{1+y^2}\leq 3.$$

Функцията $\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ монотонно клони към нула.

От равномерната сходимост на интеграла и непрекъснатостта на подинтегралната функция съгласно теорема 7.9 от § 3 следва непрекъснатостта на функцията $I(y)$ в $[0,\infty)$, т. е. вярно е равенството

$$\lim_{y\to 0+0} I(y)=I(0)=I.$$

Да намерим стойността на $I(y)$. Ще разгледаме спомагателния интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx.$$

Съгласно признака на Дирихле — Абел, който очевидно е приложим за този интеграл, заключаваме, че този интеграл е равномерно сходящ в областта $[y_0,\infty)$, ако $y_0>0$. Оттук съгласно теорема 7.14, § 3 следва, че интегралът $I(y)$ може да се диференцира по параметъра y във всяка точка $y>0$. Така за всяко $y>0$ получаваме

$$I'(y)=-\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx=\frac{e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\Bigg|_0^\infty=-\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрираме това равенство в граници $[y,\infty)$ и получаваме

$$I(\infty)-I(y)=-\operatorname{arc\,tg} t\,\Big|_y^\infty=-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}(y).$$

Тъй като $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq 1$, то при $y\geq y_0$ имаме

$$I(y)\leq\int_0^\infty e^{-y_0x}\,dx=-\frac{1}{y_0}\,e^{-y_0x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{y_0}\to 0$$

при $y_0\to\infty$. Оттук получаваме, че $I(\infty)=0$, и следователно за всяко $y>0$ имаме

$$I(y)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y.$$

Преминаваме към граница в последното равенство при $y\to 0+0$ и получаваме

$$I(0)=I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot$$

2°. Да разгледаме интеграла

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx.$$

Ще намерим неговото значение за $y>0$, $y<0$ и $y=0$. При $y>0$ в интеграла $I(y)$ правим смяна на променливата, полагайки $yx=t$. Тогава

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\cdot$$

При $y<0$ правим смяна на променливата $yx=-t$, $(t>0)$. Имаме

$$I(y)=-\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=-\frac{\pi}{2}\cdot$$

При $y=0$ интеграла $I(y)$ е очевидно равен на нула. Следователно

$$I(y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad y>0,\\ 0 & \text{при} \quad y=0,\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad y<0.\end{cases}$$

Този интеграл понякога се нарича прекъснат множител на Дирихле. В частност с помощта на прекъснатия множител на Дирихле получаваме представяне на функцията $\operatorname{sgn} y$, т. е. на функцията

$$\operatorname{sgn} y=\begin{cases}1 & \text{при} \quad y>0,\\ 0 & \text{при} \quad y=0,\\ -1 & \text{при} \quad y<0\end{cases}$$

във вида

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x}\, dx.$$

3°. Да пресметнем интеграла на Поасон $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ (вж. също § 6, гл. 3). Нека

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

За пресмятането на този интеграл полагаме $x = yt$, където $y>0$, и разглеждаме интеграла

$$I = I(y) = \int_0^{\infty} ye^{-y^2t^2}\,dt.$$

Да умножим двете части на горното равенство с e^{-y^2} и да интегрираме в граници $[0, \infty)$. Получаваме

$$I\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I^2 = \int_0^{\infty} e^{-y^2}\cdot y\left\{\int_0^{\infty} e^{-y^2t^2}\,dt\right\}dy.$$

Да разгледаме функцията $f(y, t) = ye^{-(1+t^2)y^2}$. В областта $y\geqq 0$, $t\geqq 0$ тази функция е непрекъсната, ограничена и неотрицателна. Интегралите

$$\int_0^{\infty} f(y, t)\,dt = ye^{-y^2}\int_0^{\infty} e^{-y^2t^2}\,dt = e^{-y^2}\cdot I$$

и

$$\int_0^{\infty} f(y, t)\,dy = \int_0^{\infty} ye^{-(1+t^2)y^2}\,dy = -\frac{1}{2(1+t^2)}\,e^{-(1+t^2)y^2}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

са непрекъснати функции в областта на изменение на параметъра, т. е. съответно в областите $y\geqq 0$ и $t\geqq 0$. Освен това

$$\int_0^{\infty} dt\int_0^{\infty} f(y, t)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Следователно са изпълнени всички условия на теорема 7.13 от § 3. Затова

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-y^2}y\left\{\int_0^{\infty} e^{-y^2t^2}\,dt\right\}dy = \int_0^{\infty} dt\int_0^{\infty} f(y, t)\,dy = \frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{и} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

§ 5. Ойлерови интеграли

В този параграф ще изучим някои свойства на един важен клас неелементарни функции, наречени ойлерови интеграли*.

Ойлеров интеграл от първи род или «бетафункция» (B-функция) се нарича интегралът

$$B(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

В този интеграл α и β са параметри. Ако тези параметри удовлетворяват условията $\alpha<1$ и $\beta<1$, то интегралът $B(\alpha, \beta)$ е несобствен интеграл, зависещ от параметри, при това подинтегралната функция има особености в точките $x=0$ и $x=1$.

Ойлеров интеграл от втори род или «гамафункция» (Г-функция) се нарича интегралът

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Ще отбележим, че областта на интегриране е $[0, \infty)$ и при $\alpha<1$ точката $x=0$ е особена точка за подинтегралната функция.

1. Г-функция. Интегралът

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е сходящ за всяко $\alpha>0$, тъй като $0\le x^{\alpha-1}e^{-x}\le x^{\alpha-1}$, и интегралът $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ е сходящ при $\alpha>0$.

В областта $\alpha\ge\alpha_0$, където α_0 е произволно положително число, този интеграл е равномерно сходящ, тъй като $0\le x^{\alpha-1}e^{-x}\le x^{\alpha_0-1}$ и може да се приложи признакът на Вайерщрас (теорема 7.8, § 3). И при всички $\alpha>0$ е сходящ интегралът

* По-подробно теорията на интегралите на Ойлер е изложена в книгата на Е. Г. Унтъкер и Д. Н. Уотсън «Курс современного анализа», т. II, Физматгиз, 1963.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

тъй като второто събираемо в дясната част е очевидно сходящ интеграл при $\alpha>0$. Лесно се вижда, че този интеграл е равномерно сходящ в областта $0<\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0<\infty$, където числото A_0 е произволно. Действително за всички такива α и за всички $x>0$ $x^{\alpha-1}e^{-x}\leqq e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]$ и тъй като $\int\limits_0^\infty e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]\,dx$ е сходящ интеграл, то може да се приложи признакът на Вайерщрас. По такъв начин в областта $0<\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0<\infty$ интегралът $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ. Оттук следва непрекъснатост на функцията $F(\alpha)$ в областта $\alpha>0$. Да докажем сега диференцируемостта на тази функция при $\alpha>0$. Да забележим, че функцията $f'_\alpha(x,\alpha)=\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}$ е непрекъсната за $\alpha>0$ и $x>0$, и да покажем, че интегралът

$$\int_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=\int_0^\infty \ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ по α във всеки сегмент $[\alpha_0, A_0]$, $0<\alpha_0<A_0<\infty$. Да изберем число ε_0 такова, че $0<\varepsilon_0<\alpha_0$. Имаме $\lim\limits_{x\to0}x^{\varepsilon_0}\ln x=0$. Затова съществува число δ такова, че $|x^{\varepsilon_0}\ln x|\leq1$ за $x\in(0,\delta]$. тогава в $(0,\delta]$ е вярно неравенството

$$|\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}|\leqq x^{\alpha_0-\varepsilon_0-1}$$

и тъй като интегралът $\int\limits_0^\delta\frac{dx}{x^{1-(\alpha_0-\varepsilon_0)}}$ е сходящ, то интегралът $\int\limits_0^\delta \ln x\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$. Аналогично за $\alpha<A_0$ съществува такова число $\delta_1>1$, че за всички $x\geqq\delta_1$ е изпълнено неравенството $\left|\frac{\ln x}{x}\,.\,\frac{x^{A_0+2}}{e^x}\right|\leqq1$. За тези x и всички $\alpha\leqq A_0$ получаваме $\left|\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}\right|\leqq\frac{1}{x^2}$. Оттук и от признака за сравнение следва, че интегралът $\int\limits_{\delta_1}^\infty \ln x\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$. Накрая интегралът

$$\int_{\delta}^{\delta_1} \ln x \; x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$, тъй като подинтегралната функция е непрекъсната в областта $\delta \leq x \leq \delta_1$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq A_0$. Следователно интегралът

$$\int_0^{\infty} \ln x \,.\, x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

е равномерно сходящ в областта $[\alpha_0, A_0]$ относно α и следователно функцията $\Gamma(\alpha)$ е диференцируема при всяко $\alpha > 0$ и е вярно равенството

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{\infty} \ln x \; x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

За интеграла $\Gamma'(\alpha)$ може да се повторят същите разсъждения, откъдето следва

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{\infty} \ln^2 x \;\; x^{\alpha-1} \; e^{-x}\, dx.$$

По индукция се доказва, че Γ-функцията е безкрайно диференцируема за $\alpha > 0$ и за n-тата производна е вярно равенството

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} \ln^n x \,.\, x^{\alpha-1} \,.\, e^{-x}\, dx.$$

Да интегрираме по части функцията $\Gamma(\alpha+1)$. Имаме

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x}\, dx = -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Следователно

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha).$$

Горното равенство се нарича функционално уравнение на Γ-функцията. Ако $\alpha > 1$, като приложим функционалното уравнение на $\Gamma(\alpha)$, ще получим

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1).$$

Ако $n-1 < \alpha < n$, то в резултат на последователно прилагане на функционалното уравнение ще получим

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,\Gamma(\alpha-n+1).$$

Последното равенство показва, че е достатъчно да знаем $\Gamma(\alpha)$ в интервала $(0, 1]$, за да пресметнем нейното значение за всяко $\alpha > 0$. Например, ако $\alpha = n$, получаваме

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2 . 1\,\Gamma(1).$$

$$\text{Тъй като } \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \text{ то}$$

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

От тази формула например получаваме

$$\Gamma(1) = 1 = 0!\,,$$

което отговаря на приетото означение $0! = 1$.

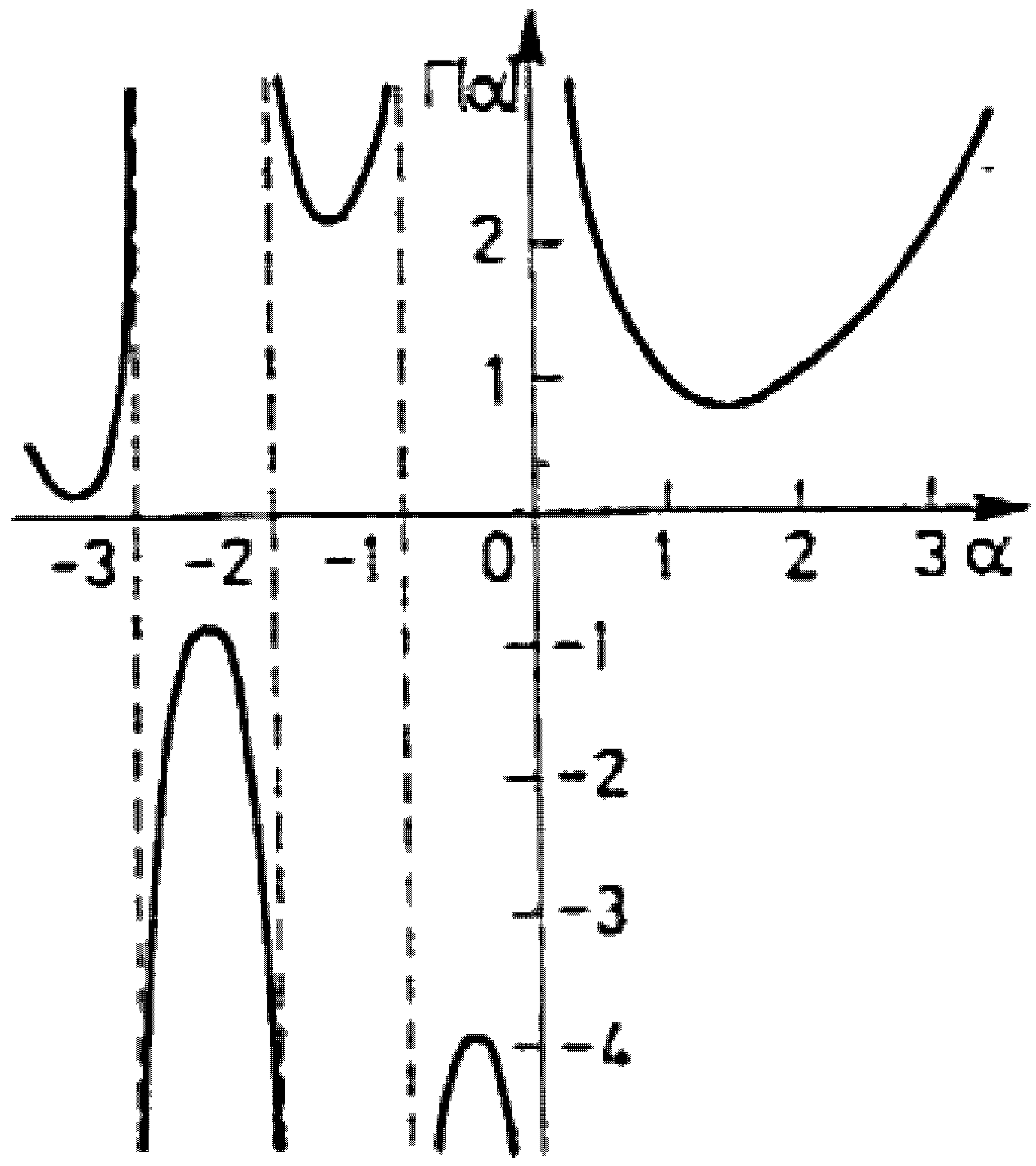
Сега ще изучим поведението на Γ-функцията и ще построим нейната графика.

От израза за втората производна на Γ-функцията се вижда, че $\Gamma''(\alpha) > 0$ за всички $\alpha > 0$. Следователно $\Gamma'(\alpha)$ е растяща функция. Тъй като $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(1) = 1$, то от теоремата на Рол следва, че в сегмента $[1,2]$ производната $\Gamma'(\alpha)$ има единствена нула в някоя точка α_1. Следователно $\Gamma'(\alpha) < 0$ при $\alpha < \alpha_1$ и $\Gamma'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_1$, т. е. $\Gamma(\alpha)$ монотонно намалява в интервала $(0, \alpha_1)$ и монотонно расте в интервала (α_1, ∞). По-нататък, тъй като $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, то $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to 0+0$. При $\alpha > 2$ от формулата $\Gamma(\alpha) = \alpha\,\Gamma(\alpha-1) > \alpha\,\Gamma(1) = \alpha$ следва, че $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$.

Равенството $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ може да се използва за продължаване на Γ-функцията и за отрицателни значения на α.

Полагаме за $-1 < \alpha < 0$, че $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Дясната страна на това равенство е определена за всички α от $(-1, 0)$. Получаваме, че така определената функция $\Gamma(\alpha)$ приема отрицателни значения в интервала $(-1, 0)$ и при $\alpha \to -1+0$, а също така и при $\alpha \to 0-0$ функцията $\Gamma(\alpha)$ клони към $-\infty$.

След като сме дефинирали по такъв начин функцията $\Gamma(\alpha)$ в интервала $(-1, 0)$, ние можем по същата формула да я продължим и в интервала $(-2, -1)$. В този интервал продължението на Γ-функцията ще се окаже функция, която приема положителни значения и такава, че $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to -2+0$ и $\alpha \to -1-0$. Продължавайки този процес, ще определим функцията $\Gamma(\alpha)$, която ще има прекъсвания от втори род в целочислените точки $\alpha = -k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ (вж. фиг. 7.1). Да подчертаем още веднъж, че интегралът



Фиг. 7. 1

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

дефинира Γ-функцията само за положителни значения на α. Продължението на тази функция за отрицателни значения на α е осъществено с помощта на функционалното уравнение $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

2. B-функция. Да разгледаме интеграла, определящ B-функцията

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Интегралът $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ е сходящ за $\alpha>0$ и за всяко β, тъй като за $0<x\leq\frac{1}{2}$ е вярно неравенството $0\leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\leqq Cx^{\alpha-1}$ за някакво $C>0$ и интегралът $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}\,dx$ е сходящ за $\alpha>0$.

Този интеграл е равномерно сходящ относно α и β в областта $\alpha\geqq\alpha_0>0$, $\beta\geqq0$, тъй като

$$0\leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\leqq Cx^{\alpha_0-1}$$

за всички $\alpha\geqq\alpha_0$ и $\beta\geq0$ и за всички $x\in[0,1/2]$.

Аналогично се проверява сходимостта на интеграла

$$\int_{1/2}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

за $\alpha \geqq 0$ и $\beta > 0$, а така също неговата равномерна сходимост в областта $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq \beta_0$, където β_0 е произволно число, по-голямо от нула.

По такъв начин интегралът

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

е сходящ за всички $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и е равномерно сходящ по α и β в областта $\alpha \geqq \alpha_0$, $\beta \geqq \beta_0$, където α_0 и β_0 са произволни положителни числа.

Както и за Г-функцията, може да се покаже, че В-функцията е безкрайно диференцируема за $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$. Но ние ще установим това по-нататък, използувайки представяне на В-функцията чрез Г-функцията. Затова няма да показваме непосредствено диференцируемост на В-функцията.

Ще докажем някои свойства на В-функцията.

1°. Симетричност на В-функцията. Ще покажем, че при всички $\alpha > 0$, $\beta > 0$ е изпълнено равенството

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha),$$

т. е. В-функцията е симетрична относно своите аргументи.

В интеграла, определящ В-функцията, правим смяна на променливата $t = 1 - x$. Получаваме

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = B(\beta, \alpha).$$

2°. Функционално уравнение на В-функцията. Ще покажем, че за всички $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ е вярно следното функционално уравнение:

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, B(\alpha, \beta).$$

Наистина имаме

$$B(\alpha+1, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\frac{1}{\beta}\, x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 +$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx-\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)-\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{B}(\alpha+1,\beta).$$

Следователно получаваме

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)-\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{B}(\alpha+1,\beta),$$

т. е.

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

От свойството симетричност за всички $\alpha>0$ и $\beta>0$ получаваме също така формулата

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

Последователното прилагане на тази формула ни дава въз... да изразим всяко значение на $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ чрез стойностите на тази функция в правоъгълника $\prod=\{0<\alpha\leq 1, 0<\beta\leq 1\}$.

3. Връзка между Г-функцията и В-функцията. В интеграла, определящ Г-функцията, да направим смяна на променливата, полагайки $x=ut$, където $u>0$, а в интеграла, определящ В-функцията — $x=\frac{t}{1+t}$. Получаваме

$$\Gamma(\alpha)=u^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ut}\,dt,\quad \mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

След заменяне в първия интеграл u с $1+v$, а α с $\alpha+\beta$ получаваме

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta-1}\,e^{-(1+v)t}\,v^{\alpha-1}\,dt.$$

Да предположим, че $\alpha>1$, $\beta>1$, и да разгледаме в областта $t\geq 0$, $v\geq 0$ функцията

$$f(t,v)=t^{\alpha+\beta-1}\cdot v^{\alpha-1}\cdot e^{-(1+v)t}.$$

Очевидно, че $f(t,v)\geq 0$ в тази област. Интегралът

$$I(v)=\int_0^\infty f(t,v)\,dt=\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

е непрекъсната функция по v на полуправата $v\geqq 0$. Интегралът по другата променлива от тази функция е също непрекъсната функция на полуправата $t\geqq 0$, тъй като

$$K(t)=\int_0^\infty f(t,v)\,dv=t^{\alpha+\beta-1}\,e^{-t}\int_0^\infty e^{-tv}\,v^{\alpha-1}\,dv=\Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}\,e^{-t}\;.$$

И накрая съществува повторният интеграл

$$\int_0^\infty K(t)\,dt=\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(t,v)\,dv=\int_0^\infty \Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}\,e^{-t}\,dt=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Следователно от теорема 7.13, § 3 следва равенството

$$=\int_0^\infty \Gamma(v)\,dv=\int_0^\infty K(t)\,dt$$

или

$$\int_0^\infty I(v)\,dv=\int_0^\infty \Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=$$

$$\int_0^\infty K(t)\,dt=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

По такъв начин получаваме

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\Gamma(\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta),$$

като се възползувахме от установената по-горе формула

$$\int_0^\infty\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

Получихме, че за всички $\alpha>1$ и $\beta>1$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,.$$

Да разпространим тази формула за $\alpha>0$, $\beta>0$. Да запишем установената формула за значения на α и β такива, че $\alpha+1>1$, $\beta+1>1$:

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,.$$

Като използуваме функционалните уравнения, получаваме

$$B(\alpha+1, \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1} B(\alpha, \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Заместваме тези изрази във формулата за $B(\alpha+1, \beta+1)$. Получаваме формулата

$$B(\alpha, \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

вярна за всички α и β, за които $\alpha>0$, $\beta>0$.

4. Примери за пресмятане на интеграли с помощта на ойлеровите интеграли. Ще посочим някои примери за пресмятане на интеграли, които се свеждат към ойлеровите интеграли.

1°. Да пресметнем интеграла

$$I=\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Очевидно е, че

$$I=B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2°. Да пресметнем стойността на интеграла:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} t\cos^{\beta-1} t\,dt.$$

Полагаме $x=\sin^2 t$. Получаваме

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

3°. Да пресметнем интеграла

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1} t\,dt.$$

Като използуваме пример 2° (при $\beta=1$), получаваме

$$I_{\alpha-1}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Тъй като

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}\,d\sqrt{t}=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}/2$ (вж. пример 3⁰, § 4). Затова

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

§ 6. Формула на Стирлинг

Вече знаем, че

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

Ще намерим представяне на величината $n!$ за големи стойности на n (така нареченото *асимптотическо представяне*). Ще докажем, че

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

където величината ω се намира между -1 и $+1$. Това е *формулата на Стирлинг.*

Преминаваме към нейното доказателство. Да отбележим, че функцията $x^n e^{-x}$ расте в интервала $[0, n]$ от 0 до $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ и намалява в интервала $[n, \infty)$ от $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ до 0. Тъй като

$$x^n e^{-x}=\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x},$$

то

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx.$$

Функцията $\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$ расте от 0 до 1 в интервала $[0, n]$ и намалява от 1 до 0 в интервала $[n, \infty)$. Затова може да се направи смяна на променливата

$$(*) \qquad \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}=e^{-t^2}.$$

При това сегментът $[0, n]$, където се изменя x, ще отговаря на полуправата $(-\infty, 0]$, където се изменя t, а полуправата $[n, \infty)$ на изменението на x ще отговаря на полуправата $[0, \infty)$ на изменението на t.

За да направим смяната (*), е необходимо да намерим производната $\frac{dx}{dt}$. За всяко $x \neq n$, диференцирайки лявата и дясната страна на (*) по t, получаваме

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

От друга страна, логаритмувайки равенството (*), получаваме

$$t^2=x-n-n\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right).$$

Записваме за функцията $f(y)=\ln(1+y)$ формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж. Получаваме, че съществува число θ от интервала $(0,1)$ такова, че

$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta y)^2}.$$

Оттук получаваме, че за $y=\frac{x-n}{n}$

$$\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right)=\frac{x-n}{n}-\frac{1}{2}\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}$$

и затова

$$t^2=\frac{n}{2}\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}.$$

Оттук следва

$$t=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{x-n}{n+\theta(x-n)}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{\theta+\frac{n}{x-n}}.$$

Затова $\frac{n}{x-n}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta$ и следователно

$$\frac{dx}{dt}=2t\frac{x}{x-n}=2t\left[1+\frac{n}{x-n}\right]=2t\left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}+1-\theta\right]=2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta).$$

Сега в интеграла $\int\limits_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx$ да направим смяна на променливата, съответствуваща на равенството (*). Получаваме

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\left[2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)\right]dt =$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{2}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,t(1-\theta)\,dt.\right.$$

Да оценим интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,t(1-\theta)\,dt$. Имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,t(1-\theta)\,dt \leq 2\int_0^\infty te^{-t^2}\,dt = -e^{-t^2}\Big|_0^\infty = 1.$$

Отчитайки, че $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ и че $\sqrt{\pi} > \sqrt{2}$, окончателно получаваме

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

където $|\omega| \leq 1$. Формулата на Стирлинг е доказана.

Да забележим, че с по-прецизни оценки може да се докаже следната формула*:

$$n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{139}{5184n^3} + 0\left(\frac{1}{n^4}\right)\right].$$

§ 7. Кратни интеграли, зависещи от параметър

1. Собствени кратни интеграли, зависещи от параметър. Нека $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е точка от ограничената област Ω_n на n-мерното евклидово пространство E^n, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ е точка от ограничената област D_m на m-мерното пространство E^m. Да означим с $\Omega_n \times D_m$ декартовото произведение на областите Ω_n и D_m, което е подмножество на $(n+m)$-мерното евклидово пространство E^{n+m}, състоящо се от точки $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+m})$ такива, че точката $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принадлежи на Ω_n, а точката $(z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+m})$ принадлежи на D_m (често се пише: $z = (x, y)$).

* Вж. например § 5, гл. 9 от книгата «Основы математического анализа, часть 2» на В. А. Ильин и Е. Г. Позняк.

Фактът, че точката z принадлежи на $\Omega_n \times D_m$, обикновено се записва по следния начин: $z=(x, y) \in \Omega_n \times D_m$.

Затворената обвивка на областта Ω_n ще означаваме със символа $\bar{\Omega}_n$, а затворената обвивка на D_m — с $\bar{D}_m$. Лесно се вижда, че затворената обвивка на $\Omega_n \times D_m$ съвпада с $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в $\Omega_n \times D_m$, при това за всяко y_0 от D_m функцията $f(x, y_0)$ е интегруема по x в областта Ω_n. Тогава функцията

$$I(y)=\int_{\Omega_n} f(x, y)\, dx, \tag{7.9}$$

дефинирана в D_m, се нарича интеграл, зависещ от параметър $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, т. е. от m числови параметри.

Точно така, както и в § 2, се доказват теоремите:

Теорема 7.15 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на $n+m$ променливи в областта $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$. Тогава интегралът (7.9) е непрекъсната функция по параметъра y в областта D_m.*

Теорема 7.16 (за интегриране на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на $n+m$ променливи в областта $\Omega_n \times \bar{D}_m$. Тогава функцията (7.9) може да се интегрира по параметъра, т. е. вярно е равенството*

$$\int_{D_m} I(y)\, dy=\int_{\Omega_n} dx \int_{D_m} f(x, y)\, dy.$$

Теорема 7.17 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ и нейната частна производна $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ са непрекъснати в областта $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$. Тогава интегралът (7.9) има в областта D_m непрекъсната частна производна*

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y_k}, \quad \text{при това} \quad \frac{\partial I(y)}{\partial y_k}=\int_{\Omega_n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\, dx.$$

2. Несобствени кратни интеграли, зависещи от параметър. Ще разгледаме за простота случая, когато $\Omega_n=D_m=D$. Нека функцията $f(x, y)$ също така има специален вид: $f(x, y)=F(x, y)\, g(x)$, където $F(x, y)$ е непрекъсната при $x \neq y$ в $\bar{D} \times \bar{D}$, а функцията $g(x)$ е ограничена в D, $|g(x)| \leq M$. Да разгледаме интеграла

$$V(y)=\int_{D} F(x, y)\, g(x)\, dx, \tag{7.10}$$

където подинтегралната функция може да има особеност само за $x=y$. По такъв начин особеностите на подинтегралната функция зависят от параметъра.

Ще дефинираме понятието равномерна сходимост на интеграла (7.10) в точка. Да означим с $O(y_0, \delta)$ m-мерното кълбо с радиус δ и с център точката y_0.

Определение. Интегралът (7.10) се нарича равномерно сходящ по параметъра y в точката $y_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че $O(y_0, \delta)\subset D$ и за всяка кубируема област $G\subset O(y_0, \delta)$ и за всички $y \in O(y_0, \delta)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\int_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 7.18. *Ако интегралът* (7.10) *е равномерно сходящ по y в точката $y_0 \in D$, то той е непрекъснат в тази точка.*

Доказателство. Трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за $|y-y_0|=\rho(y, y_0)<\delta$ е изпълнено неравенството $|V(y)-V(y_0)|<\varepsilon$. От равномерната сходимост на интеграла в точката y_0 следва съществуването на число $\delta_1>0$ такова, че $O(y_0, \delta_1)\subset D$ и при $y\in O(y_0, \delta_1)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\int_{O(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Нека

$$V_1(y)=\int_{O(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

$$V_2(y)=\int_{O'(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

където $O'(y_0, \delta_1)=D\setminus O(y_0, \delta_1)$ е допълнението на кълбото $O(y_0, \delta_1)$ до областта D.

Ще отбележим, че за $x\in O'(y_0, \delta_1)$, $y\in O\left(y_0, \frac{\delta_1}{2}\right)$ функцията $F(x, y)$ е равномерно непрекъсната като функция и на двата аргумента. Затова съществува положително число $\delta<\frac{\delta_1}{2}$ такова, че за $\rho(y, y_0)<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|F(x, y_0)-F(x, y)|<\frac{\varepsilon}{3M\,|D|},$$

където M е константата, ограничаваща $g(x)$ в D, и $|D|$ е обемът на областта D. Тъй като при $\rho(y, y_0)<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|V_2(y)-V_2(y_0)|\leq M \int\limits_{O'(y_0,\delta_1)} |F(x,y_0)-F(x,y)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$V_1(y)<\frac{\varepsilon}{3},\quad V_1(y_0)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$$|V(y)-V(y_0)|\leq|V_1(y)|+|V_1(y_0)|+|V_2(y)-V_2(y_0)|<\varepsilon.$$

Теоремата е доказана.

Ще посочим достатъчно условие за равномерна сходимост на интеграла (7.10) по параметъра във всяка точка $y_0\in D$.

Теорема 7.19. *Нека функцията $F(x,y)$ е непрекъсната в $\overline{D}\times\overline{D}$ при $x\neq y$, а $g(x)$ е ограничена в D. Да предположим, че съществуват константи λ, $0<\lambda<m$ и $C>0$ такива, че за всички $x\in D$ и $y\in D$ е изпълнено неравенството*

$$|F(x,y)|\leq C|x-y|^{-\lambda}.$$

Тогава интегралът (7.10) е равномерно сходящ по y във всяка точка $y_0\in D$.

Доказателство. Ще докажем, че за всяка точка y_0 от областта D и всяко число $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяка кубируема област $G\subset O(y_0,\delta)$ и всички $y\in O(y_0,\delta)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\int\limits_G F(x,y)g(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Отчитайки оценката за $F(x,y)$ и ограничеността на $g(x)$, получаваме

$$\left|\int\limits_G F(x,y)g(x)\,dx\right|\leq M_1\int\limits_G|x-y|^{-\lambda}\,dx.$$

Да фиксираме точка $y\in O(y_0,\delta)$. От условието $G\subset O(y_0,\delta)$ следва че $G\subset O(y,2\delta)$. Затова

$$\left|\int\limits_G F(x,y)g(x)\,dx\right|\leq M_1\int\limits_{O(y,2\delta)}|x-y|^{-\lambda}\,dx.$$

Интегралът в дясната част може да се пресметне в m-мерните сферически координати. Имаме

$$\left|\int\limits_G F(x,y)g(x)\,dx\right|\leq M_2\int\limits_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda}dr=\frac{M_2 2^{m-\lambda}\delta^{m-\lambda}}{m-\lambda}=M_3\delta^{m-\lambda}.$$

Ясно е, че за достатъчно малко δ величината $\left|\int\limits_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|$ може да се направи по-малка от ε. Теоремата е доказана.

Пример. Да приложим получените резултати към теорията на така наречените нютонови потенциали. Нека в някоя точка $A_0(x, y, z)$ е поместена маса m_0. Нека маса m, поместена в точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$, по закона за всемирното привличане действува сила

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \vec{r},$$

където $R = \rho(A_0, A_1)$, γ е гравитационна константа и $\vec{r} = \frac{\vec{R}}{R}$ е единичен вектор, имащ едно и също направление с вектора $\overrightarrow{A_0 A_1}$. Нека $\gamma = 1$, $m = 1$. Тогава

$$\vec{F} = -\frac{m_0}{R} \vec{r},$$

или покомпонентно

$$X = -\frac{m_0}{R^3}(x_1 - x), \quad Y = -\frac{m_0}{R^3}(y_1 - y), \quad Z = -\frac{m_0}{R^3}(z_1 - z).$$

Очевидно потенциалът на силата на привличане, определен като скаларна функция U такава, че $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, е равен на

$$U = \frac{m_0}{R}.$$

Ако масата е съсредоточена не в точката $A_0(x, y, z)$, а е разпределена в областта D с плътност $\mu(x, y, z)$, то за потенциала и за компонентите на силата ще получим

$$u(x_1, y_1, z_1) = \iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R}\, dx\, dy\, dz,$$

$$X = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(x_1 - x)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Y = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(y_1 - y)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Z = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(z_1 - z)\, dx\, dy\, dz$$

Интегралите за X, Y и Z са частните производни на потенциала U. Подинтегралните изрази за всички интеграли може да се оценят чрез $CR^{-\lambda}$, където $\lambda=1$ за интеграла, определящ потенциала U, и $\lambda=2$ за интегралите, определящи компонентите на силата. Тъй като $\lambda<3$, то от теорема 7.19 следва равномерната сходимост на тези интеграли по параметъра във всяка точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Следователно по теорема 7.18 те са непрекъснати функции на точката $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

8. Редове на Фурие

Изучаваното в тази глава разлагане на функция в ред на Фурие е обобщение и развитие на идеята за разлагане на вектор по базис.

От линейната алгебра е известно, че ако в **крайномерно** линейно пространство изберем някакъв базис, то всеки вектор от това пространство може да бъде разложен по базиса, т. е. да се представи като линейна комбинация на базисните вектори. Съществено по-сложни са въпросите за избор на базис и разлагане по базиса в случай на **безкрайномерно** пространство. В тази глава тези въпроси се изучават за случая на така наречените **евклидови** безкрайномерни пространства и за базиси от специален тип (така наречените **ортонормирани** базиси).

Особено подробно се изучава базисът в пространството от всички частично непрекъснати върху даден затворен интервал функции, образуван от така наречената тригонометрична система.

§ 1. Ортонормирани системи и общи редове на Фурие

1. Ортонормирани системи. Ще разглеждаме произволно евклидово пространство.

Ще припомним, че линейното пространство R се нарича **евклидово**, ако е зададено правило, чрез което на всеки два елемента $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от пространството R се съпоставя число, наричано **скаларно произведение** на тези елементи, което означаваме със символа $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

При това скаларното произведение удовлетворява следните четири аксиоми:

1°. $(\mathbf{f}, \mathbf{g})=(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ (симетричност);

2°. $(\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{h})=(\mathbf{f}, \mathbf{h})+(\mathbf{g}, \mathbf{h})$;

3°. $(\lambda\mathbf{f}, \mathbf{g})=\lambda(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ за всяко реално λ;

4°. $(\mathbf{f}, \mathbf{f}) > 0$, ако $\mathbf{f}$ е ненулев елемент,
$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0$, ако $\mathbf{f}$ е нулевият елемент.

Свойства 2° и 3° означават, че скаларното произведение е линейна функция на първия си аргумент.

Ще припомним още, че линейното (и в частност евклидовото) пространство се нарича безкрайномерно, ако в това пространство съществуват произволно много линейно независими елементи.

Ще дадем класически пример на евклидово пространство с безкрайна размерност.

Ще припомним, че функцията $f(x)$ се нарича частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$, ако тя е непрекъсната навсякъде в сегмента с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които тя има прекъсване от I род*.

За линейното пространство от всички частично непрекъснати върху сегмента $[a, b]$ функции е естествено да въведем скаларно произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$ чрез равенството

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{8.1}$$

Тривиално се проверява, че при такова определение на скаларното произведение са изпълнени първите три аксиоми: 1°. $(f, g) = (g, f)$; 2°. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$; 3°. $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$ за всяко реално λ.

Обаче за да се окаже, че е справедлива и четвъртата аксиома [$(f, f) \geq 0$ и е равно на нула тогава и само тогава, когато f е нулевият елемент], се налага да приемем допълнително уговорката, че стойността на частично непрекъснатата функция $f(x)$ във всяка нейна точка на прекъсване x_i да е равна на полусумата от лявата и дясната ѝ граница в тази точка:

$$f(x_i) = \frac{f(x_i + 0) + f(x_i - 0)}{2}. \tag{8.2}$$

Да се убедим, че ако във всяка точка на прекъсване x_i е изпълнено условието (8.2), то за скаларното произведение (8.1) е в сила аксиома 4°.

Наистина първо винаги $(f, f) = \int_a^b f^2(x) \geq 0$. Освен това да отбележим, че понеже $f(x)$ е частично непрекъсната в $[a, b]$, то сегментът $[a, b]$ се представя като обединение на краен брой сегменти $[x_{i-1}, x_i]$, във всеки от които функцията $f(x)$ е непрекъсната, при условие че за стойност на $f(x)$ в краищата на съответния сегмент

* Т. е. във всяка точка на прекъсване x_0 на функцията $f(x)$ съществуват крайна лява и дясна граница.

$[x_{i-1}, x_i]$ се вземат $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ съответно. От равенството $\int_a^b f^2(x)dx=0$ следва, че за всеки сегмент $[x_{i-1}, x_i[$ е изпълнено равенството $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx=0.$

От последното равенство и от непрекъснатостта на $f(x)$ в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ следва, че $f(x)\equiv 0$ в $[x_{i-1}, x_i]$. В частност $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ са равни на нула. Понеже тези разсъждения са верни за всеки сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, т. е за всяко $i=1, 2, \ldots, n$, то лявата и дясната граница във всяка точка x_i са равни на нула, а оттук и от равенството (8.2) следва, че и самата стойност $f(x_i)$ във всяка точка x_i е равна на нула. И така функцията $f(x)$ е равна на нула във всички точки на сегмента $[a, b]$, т. е. е нулевият елемент на линейното пространство от всички частично непрекъснати в сегмента $[a, b]$ функции.

По такъв начин доказахме, че пространството от всички частично непрекъснати функции в сегмента $[a, b]$ с условие (8.2) във всяка точка на прекъсване и със скаларно произведение, определено чрез съотношението (8.1), е евклидово пространство.

Това евклидово пространство по-нататък ще обозначаваме със символа R_0.

Ще припомним сега две общи свойства на произволно евклидово пространство, които естествено ще притежава и пространството R_0.

1. Във всяко евклидово пространство за произволни елементи $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ е изпълнено неравенството

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})^2 \leqq (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{g}, \mathbf{g}), \tag{8.3}$$

наричано неравенство на Коши—Буняковски*.

2. Във всяко евклидово пространство за произволен елемент $\mathbf{f}$ от това пространство можем да въведем понятието **норма** на този елемент, определяйки я като число, означавано със символа $\|\mathbf{f}\|$ и определено с равенството

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} \tag{8.4}$$

така, че са изпълнени следните три свойства:

* Ще отбележим, че за доказателството на неравенството (8.3) вследствие на аксиома 4° на скаларното произведение за произволно реално λ е изпълнено неравенството $(\lambda \cdot \mathbf{f}-\mathbf{g},\ \lambda \cdot \mathbf{f}-\mathbf{g}) \geq 0$, което от аксиомите 1°—4° е еквивалентно на неравенството $\lambda^2 \cdot (\mathbf{f}, \mathbf{f})-2\lambda \cdot (\mathbf{f}, \mathbf{g})+(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \geq 0$. Необходимо и достатъчно условие за неотрицателност на квадратния тричлен, стоящ в лявата част на последното неравенство, е неговата дискриминанта да е неположителна, т. е. неравенството $(\mathbf{f}, \mathbf{g})^2-(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{g}, \mathbf{g}) \leq 0$, което е еквивалентно на неравенството (8.3).

1°. $\|\mathbf{f}\| \geq 0$, като $\|\mathbf{f}\| = 0$ само когато $\mathbf{f}$ е нулевият елемент;

2°. $\|\lambda . \mathbf{f}\| = |\lambda| . \|\mathbf{f}\|$ за всеки елемент $\mathbf{f}$ и всяко реално λ;

3°. за всеки два елемента $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ е в сила неравенството

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|, \tag{8.5}$$

наричано **неравенство на триъгълника.**

Наистина верността на свойство 1° веднага следва от (8.4) и аксиома 4° на скаларното произведение.

За да обосновем свойството 2°, ще отбележим, че от (8.4) и аксиомите на скаларното произведение имаме

$$\|\lambda . \mathbf{f}\| = \sqrt{(\lambda\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f})} = \sqrt{\lambda . (\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f})} = \sqrt{\lambda(\lambda\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \sqrt{\lambda^2(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = |\lambda| . \|\mathbf{f}\|.$$

Накрая верността на свойство 3° следва от (8.4), аксиомите на скаларното произведение и неравенството на Коши—Буняковски (8.3). Наистина

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| = \sqrt{(\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{f}+\mathbf{g})} = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f}) + 2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + (\mathbf{g}, \mathbf{g})} \leq$$

$$\leq \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f}) + 2\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} . \sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})} + (\mathbf{g}, \mathbf{g})} = \sqrt{[\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} + \sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})}]^2} =$$

$$= \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} + \sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})} = \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|.$$

В частност във въведеното по-горе евклидово пространство R_0 от всички частично непрекъснати в сегмента $[a, b]$ функции нормата (8.4) за произволен елемент f се определя с равенството

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}, \tag{8.6}$$

а неравенствата на Коши—Буняковски (8.3) и на триъгълника (8.5) добиват следния вид:

$$\left(\int_a^b f(x) . g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx . \int_a^b g^2(x)\, dx, \tag{8.7}$$

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\, dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}. \tag{8.8}$$

Ще въведем сега за произволно безкрайномерно евклидово пространство R понятията **ортогонални елементи** и **ортонормирана система от елементи.**

Определение 1. Елементите $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от евклидовото пространство се наричат **ортогонални,** ако скаларното произведение $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ на тези елементи е равно на нула.

Нека да разгледаме в произволното безкрайномерно евклидово пространство R една редица от елементи

$$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots \tag{8.9}$$

Определение 2. Редицата (8.9) се нарича ортонормирана система, ако всеки два елемента от тази редица са ортогонални и всеки елемент има норма, равна на единица.

Класически пример за ортонормирана система в пространството R_0 от всички частично непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$ функции е тригонометричната система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{8.10}$$

Читателят лесно ще провери, че функциите (8.10) са две по две ортогонални (относно скаларното произведение (8.1) при $a=-\pi$ и $b=\pi$) и че нормата на всяка от тези функции (определена с равенството (8.6) при $a=-\pi$ и $b=\pi$) е равна на единица.

В математиката и в нейните приложения често се срещат различни ортонормирани (в съответните множества) системи от функции.

Ще дадем няколко примера на такива системи.

1°. Полиномите, определени с равенството

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{8.11}$$

е прието да се наричат полиноми на Лежандър.

Не е трудно да се убедим, че образуваните с помощта на полиномите (8.11) функции

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

образуват ортонормирана (в сегмента $[-1, +1]$) система от функции.

2°. Полиномите, определени с равенствата $T_0(x)=1$, $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n \arccos x)$ при $n=1, 2, \ldots$, се наричат полиноми на Чебишев. Измежду всички полиноми от n-та степен с коефициент пред x^n, равен на единица, полиномът на Чебишев $T_n(x)$ има най-малък максимум на модула на сегмента $-1 \leq x \leq 1$. Може да се докаже, че получените с помощта на полиномите на Чебишев функции

$$\Psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad \Psi_n(x)=\frac{2^{n-0.5}\,T_n(x)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{1-x^2}} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

образуват ортонормирана (в сегмента $[-1, +1]$) система.

3°. В теорията на вероятностите често се използува така наречената система на Радемахер*

* Радемахер — немски математик (род. 1892 г.).

$$\Psi_n(x)=\varphi(2^n . x) \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

където $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2 . \pi . t)$.

Лесно се проверява, че тази система е ортонормирана в сегмента $0 \leq x \leq 1$.

4°. В редица изследвания намира приложение така наречената система на Хаар*, която е ортонормирана в сегмента $0 \leq x \leq 1$. Елементите на тази система $\chi_n^{(k)}(x)$ се определят за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и за всички k, приемащи стойности $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Те имат вида

$$=\begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{в останалите точки от } [0, 1]. \end{cases}$$

Всяка функция на Хаар е стъпалце от същия вид, както функцията $\sqrt{2^n} . \operatorname{sgn} x$ в сегмента $[-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)}]$. За всяко фиксирано число n при увеличаване стойността на k това стъпалце се придвижва надясно. Навсякъде извън съответното стъпалце всяка функция на Хаар е тъждествено равна на нула.

2. Понятие за общ ред на Фурие. Нека в произволното безкрайномерно евклидово пространство R е зададена ортонормираната система от елементи $\{\Psi_k\}$.

Определение 1. Ред на Фурие на елемента **f** от R по ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ ще наричаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k . \Psi_k, \tag{8.12}$$

където с f_k са обозначени числата, наричани **коефициенти на Фурие** на елеманта **f** и определени чрез равенствата

$$f_k=(\mathbf{f}, \Psi_k), \qquad k=1, 2, \ldots$$

Естествено е да наречем крайната сума

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k . \Psi_k \tag{8.13}$$

n-та *частична сума на реда на Фурие* (8.12).

Да разгледаме наред с n-тата частична сума (8.13) произволна линейна комбинация на първите n елемента от ортонормираната система $\{\Psi_k\}$:

* Хаар — немски математик (1885—1933).

(8.14)
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \Psi_k,$$

където $c_1, c_2, \ldots, c_n$ са някакви константи.

Ще изясним по какво се отличава n-тата частична сума на реда на Фурие (8.13) от всички други суми (8.14).

Нека се договорим да наричаме израза $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|$ отклонение $\mathbf{f}$ от $\mathbf{g}$ (относно нормата в даденото евклидово пространство).

Справедлива е следната основна теорема.

Теорема 8.1. Най-малко отклонение на елемента $\mathbf{f}$ от всевъзможните суми от вида (8.14) относно нормата на даденото евклидово пространство има n-тата частична сума (8.13) на реда на Фурие на елемента $\mathbf{f}$.

Доказателство. Отчитайки ортонормираността на системата $\{\Psi_k\}$ и използувайки аксиомите на скаларното произведение, може да запишем

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f}\Big\|^2=\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f},\ \sum_{l=1}^{n} c_l\Psi_l-\mathbf{f}\Big)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} c_k^2(\Psi_k, \Psi_k)-2\sum_{k=1}^{n} c_k(\mathbf{f}, \Psi_k)+(\mathbf{f}, \mathbf{f})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} c_k^2-2\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot f_k+\|\mathbf{f}\|^2=\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2+\|\mathbf{f}\|^2.$$

И така

(8.15)
$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f}\Big\|^2=\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2+\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

В лявата част на (8.15) стои квадратът от отклонението на сумата (8.14) от елемента $\mathbf{f}$ (относно нормата на даденото евклидово пространство). От вида на дясната част на (8.15) следва, че указаният квадрат на отклонението е най-малък при $c_k=f_k$ (тъй като тогава първата сума в дясната част на (8.15) става равна на нула, а останалите събираеми в дясната част на (8.15) не зависят от c_k). Теоремата е доказана.

Следствие 1. За произволен елемент f от дадено евклидово пространство, за всяка ортонормирана система $\{\Psi_n\}$, за всеки избор на константите c_k и за всяко n е изпълнено неравенството

(8.16)
$$\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2\leq\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f}\Big\|^2.$$

Неравенството (8.16) е директно следствие от тъждеството (8.15).

Следствие 2. За произволен елемент $\mathbf{f}$ от дадено евклидово пространство, всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ и всяко натурално число n е в сила равенството

(8.17)
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k - \mathbf{f} \right\|^2 = \| \mathbf{f} \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2,$$

често наричано равенство на Бесел*.

За доказателството на равенството (8.17) е достатъчно да положим в (8.15) $c_k = f_k$.

Теорема 8.2. За всеки елемент $\mathbf{f}$ от дадено евклидово пространство и всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ е изпълнено следното неравенство:

(8.18)
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \| \mathbf{f} \|^2,$$

наричано неравенство на Бесел.

Доказателство. От неотрицателността на лявата част на (8.17) следва, че за всяко n

(8.19)
$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \| \mathbf{f} \|^2.$$

Но това означава, че редът с неотрицателни членове, стоящ в лявата страна на (8.18), има ограничена редица от частични суми и затова е сходящ. След граничен преход при $n \to \infty$ (вж. теорема 3.13 от част I) в неравенството (8.19) се получава неравенството (8.18). Теоремата е доказана.

За пример нека да разгледаме пространството R_0 от всички частично непрекъснати в сегмента $-\pi \leq x \leq \pi$ функции и в това пространство реда на Фурие по тригонометричната система (8.10) (този ред е прието да се нарича тригонометричен ред на Фурие). За произволна частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ указаният ред на Фурие е от вида

(8.20)
$$f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

където коефициентите на Фурие $\bar{f}_k$ и $\bar{\bar{f}}_k$ се определят чрез формулите

* Ф. Бесел—немски астроном и математик (1784–1846).

$$f_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\bar{f}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\quad \bar{\bar{f}}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\ (k=1,2,\ldots).$$

Неравенството на Бесел за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ придобива вида

$$\bar{f}_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{f}_k^2+\bar{\bar{f}}_k^2)\leq\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21}$$

Отклонението на $f(x)$ от $g(x)$ по норма в този случай е равно на така нареченото **средно квадратично отклонение**:

$$\|f-g\|=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,dx}. \tag{8.22}$$

Ще отбележим, че в теорията на тригонометричните редове на Фурие е приета по традиция друга форма на запис както на самия ред на Фурие (8.20), така и на неравенството на Басел (8.21). А именно тригонометричният ред на Фурие (8.20) обикновено се записва във вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{8.20'}$$

където

$$\left\{\begin{aligned} a_0&=\frac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\ a_k&=\frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\\ b_k&=\frac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \end{aligned}\right. \tag{8.23}$$

$$(k=1,2,\ldots).$$

При такава форма на запис неравенството на Бесел 8.21 придобива вида

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \qquad ')$$

Забележка. От неравенството на Бесел (8.21') следва, че всяка частично непрекъсната в затворения интервал $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ коефициентите a_k и b_k, наричани тригонометни коефициенти на Фурие, на функцията $f(x)$ клонят нула при $n\to\infty$ (поради необходимото условие за сходимост на реда от лявата страна на (8.21)).

§ 2. Затворени и пълни ортонормирани системи

Както и в предишния параграф, ще разглеждаме произволна ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ в някое безкрайномерно евклидово пространство R.

Определение 1. Ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ се нарича затворена, ако за всеки елемент $\mathbf{f}$ от даденото евклидово пространство R и за всяко положително ε може да се намери такава линейна комбинация (8.14) от краен брой елементи на $\{\Psi_k\}$, че отклонението ѝ от $\mathbf{f}$ (относно нормата на пространството R) да е помалко от ε.

С други думи, системата $\{\Psi_k\}$ се нарича затворена, ако произволен елемент $\mathbf{f}$ от даденото евклидово пространство R може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация от краен брой елементи от $\{\Psi_k\}$ относно нормата на това пространство.

Забележка 1. Тук не разглеждаме въпроса за съществуване на затворени ортонормирани системи в произволно евклидово пространство. Ще отбележим, че в трета част ще бъде изучен един важен клас евклидови пространства — така наречените хилбертови пространства и ще бъде установено съществуването във всяко такова пространство на затворени ортонормирани системи.

Теорема 8.3. Ако ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ е затворена, то за всеки елемент $\mathbf{f}$ от разглежданото евклидово пространство неравенството на Бесел се превръща в точно равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2=\|\mathbf{f}\|^2, \tag{8.24}$$

наричано равенство на Парсевал*.

* М. Парсевал — френски математик, умрял през 1836 г.

Доказателство. Да фиксираме произволен елемент $\mathbf{f}$ от разглежданото евклидово пространство и произволно положително число ε. Тъй като системата $\{\Psi_k\}$ е затворена, то съществува естествено число n и числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такива, че квадратът на нормата, стояща в дясната част на (8.16), е по-малък от ε. Поради (8.16) това означава, че за произволното $\varepsilon>0$ ще се намери естествено число n, за което

$$\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2<\varepsilon. \tag{8.25}$$

За всички естествени числа, по-големи от n, неравенството (8.25) ще бъде също изпълнено, тъй като при растенето на n сумата, стояща в лявата страна на (8.25), може само да расте.

И така доказахме, че за произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число n, започвайки от което е изпълнено неравенството (8.25).

Съвместно с неравенството (8.19) това означава, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ е сходящ към сумата $\|\mathbf{f}\|^2$. Теоремата е доказана.

Теорема 8.4. Ако ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ е затворена, то за произволен елемент $\mathbf{f}$ редът на Фурие на този елемент е сходящ към него относно евклидовата норма, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Psi_k-\mathbf{f}\right\|=0. \tag{8.26}$$

Доказателство. Твърдението на тази теорема непосредствено следва от равенството (8.17) и от предишната теорема.

Забележка 2. В пространството от всички частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции сходимостта относно нормата (8.26) преминава в средноквадратична сходимост на този сегмент (вж. п. 3, §4, гл. 2). По такъв начин, ако докажем затвореността на тригонометричната система (8.10), то твърдението на теорема 8.4 ще означава, че за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ тригонометричният ред на Фурие на тази функция е сходящ към нея в указания сегмент относно средноквадратичното разстояние.

Определение 2. Ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ се нарича пълна, ако освен нулевия елемент не съществува друг елемент от даденото евклидово пространство, който да е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$.

С други думи, системата $\{\Psi_k\}$ се нарича пълна, ако всеки елемент $\mathbf{f}$, който е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$, е нулевият елемент.

Теорема 8.5. Всяка затворена ортонормирана система е пълна система.

Доказателство. Нека системата $\{\Psi_k\}$ е затворена и нека $\mathbf{f}$ да е елемент от даденото евклидово пространство, който е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$.

Тогава всички коефициенти на Фурие f_k на елемента $\mathbf{f}$ по системата $\{\Psi_k\}$ са равни на нула и следователно поради равенството на Парсевал (8.24) и $\|\mathbf{f}\|=0$. Последното равенство (по силата на свойство 1° на нормата) означава, че $\mathbf{f}$ е нулевият елемент. Теоремата е доказана.

Забележка 3. Показахме, че в произволно евклидово пространство от затвореността на ортонормираната система следва нейната пълнота. Ще отбележим без доказателство, че в произволно евклидово пространство от пълнотата на ортонормираната система в общия случай не следва затвореността на тази система. В третата част ще бъде доказано, че за един важен клас евклидови пространства — така наречените хилбертови пространства — пълнотата на ортонормираната система е еквивалентна на нейната затвореност.

Теорема 8.6. За всяка пълна (и още повече за всяка затворена) ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ два различни елемента $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от едно евклидово пространство не могат да имат еднакви редове на Фурие.

Доказателство. Ако коефициентите на Фурие на елементите $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ съвпадат, то всички коефициенти на Фурие на разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ са равни на нула. Т. е. разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ е ортогонална на всички елементи Ψ_k от пълната система $\{\Psi_k\}$. Но това означава, че разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ е нулевият елемент, т. е. $\mathbf{f}$ съвпада с $\mathbf{g}$. Теоремата е доказана.

С това завършваме разглеждането на общите редове на Фурие по произволни ортонормирани системи в произволно евклидово пространство R.

Нашата следваща цел ще бъде по-детайлното изучаване реда на Фурие по тригонометричната система (8.10).

§ 3. Затвореност на тригонометричната система и следствия от нея

1. Равномерно приближаване на непрекъсната функция с тригонометрични полиноми. В този параграф ще установим затвореността (а следователно и пълнотата) на тригонометричната система

(8.10) в пространството от всички частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции. Но преди да пристъпим към доказателството на затвореността на тригонометричната система, ще установим важната теорема за равномерното приближаване на непрекъснатата функция с така наречените тригонометрични полиноми.

Тригонометричен полином ще наричаме произволна линейна комбинация на крайно число елементи от тригонометричната система (8.10), т. е. израз от вида

$$T(x)=\bar{c}_0+\sum_{k=1}^{n}(\bar{c}_k\cos kx+\bar{\bar{c}}_k\sin kx),$$

където n е произволно естествено, а $\bar{c}_0, \bar{c}_k$ и $\bar{\bar{c}}_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ са произволни реални числа.

Ще отбележим две елементарни твърдения:

1°. Ако $P(x)$ е някакъв алгебричен полином, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ са тригонометрични полиноми.

2°. Ако $T(x)$ е тригонометричен полином, то всеки от изразите $[T(x).\sin x]$ и $[T(x).\sin^2 x]$ също е тригонометричен полином.

И двете твърдения следват от факта, че произведението на две (а следователно и на произволен краен брой) тригонометрични функции* на аргумента x се представя като крайна линейна комбинация от тригонометрични функции с аргумент от типа kx (убедете се в това).

В теорията на тригонометричните редове на Фурие важна роля играе понятието периодична функция.

Функцията $f(x)$ се нарича периодична функция с период T, ако: 1) $f(x)$ е определена за всички реални x; 2) за всяко реално x е изпълнено равенството

$$f(x+T)=f(x).$$

Това равенство обикновено се нарича условие за периодичност. Към разглеждане на периодични функции ни довежда изучаването на различни колебателни процеси.

Ще отбележим, че елементите от тригонометричната система (8.10) са периодични функции с период 2π.

Теорема 8.7 (теорема на Вайерщрас). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то функцията $f(x)$ може равномерно да се приближи с тригонометрични полиноми в $[-\pi, \pi]$, т. е. за тази функция $f(x)$ и за всяко положително число ε съществува тригонометричен по-

* Под тригонометрични функции в дадения случай се разбира функциите синус и косинус.

лином $T(x)$ такъв, че за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е изпълнено неравенството

(8.27) $$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

Доказателство. За удобство ще разделим доказателството на две части.

1°. Отначало допълнително ще предположим, че функцията $f(x)$ е четна, т. е. за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворява условието $f(-x)=f(x)$.

Поради теоремата за непрекъснатост на съставна функция (вж. ч. I, гл. 4, § 1) функцията $F(t)=f(\arccos t)$ е непрекъсната функция като функция на аргумента t в сегмента $-1\leq t\leq 1$. Тогава поради теоремата на Вайерщрас за алгебрични полиноми (вж. теорема 2.18 от глава 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува алгебричен полином $P(t)$ такъв, че $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$ за всички t от сегмента $-1\leq t\leq 1$.

Полагайки $t=\cos x$, получаваме, че

(8.28) $$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon$$

за всички x от сегмента $0\leq x\leq\pi$.

Тъй като двете функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ са четни, то неравенството (8.28) е изпълнено и за всички x от сегмента $-\pi\leq x\leq 0$. По такъв начин неравенството (8.28) е изпълнено за всички x от сегмента $-\pi\leq x\leq\pi$ и понеже (по силата на отбелязаното по-горе твърдение 1°) $P(\cos x)$ е тригонометричен полином, то за четна функция $f(x)$ теоремата е доказана.

Да отбележим сега, че една функция $f(x)$, удовлетворяваща условията на доказаната теорема, може периодично с период 2π да бъде продължена на цялата безкрайна права $-\infty<x<+\infty$, при това така, че продължената функция ще бъде непрекъсната във всяка точка x от безкрайната права. Ако функцията $f(x)$ е продължена по такъв начин, то, понеже $P(\cos x)$ е периодична функция с период 2π, получаваме, че за четна функция $f(x)$ неравенството (8.28) е изпълнено върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$.

2°. Нека сега $f(x)$ е произволна функция, която удовлетворява условията на доказаната теорема. Тази функция ще продължим върху цялата безкрайна права периодично с период 2π и ще образуваме следните две четни функции:

(8.29) $$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

(8.30) $$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\cdot\sin x.$$

По доказаното в пункт 1° за всяко $\varepsilon>0$ съществуват тригономе-

тригонометрични полиноми $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такива, че върху цялата безкрайна права

$$|f_1(x)-T_1(x)|<\frac{\varepsilon}{4}, \qquad |f_2(x)-T_2(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$$

и затова

$$|f_1(x)\sin^2 x-T_1(x)\sin^2 x|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f_2(x)\sin x-T_2(x)\sin x|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Събираме последните две неравенства и отчитаме, че модулът от сумата на две величини не надминава сумата от техните модули.

От равенствата (8.29) и (8.30) получаваме, че на цялата безкрайна права е изпълнено неравенството

$$(8.31) \qquad |f(x)\sin^2 x-T_3(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

където с $T_3(x)$ е означен тригонометричният полином

$$T_3(x)=T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x.$$

В проведените от нас разсъждения вместо функцията $f(x)$ може да вземем функцията $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$*. Напълно аналогично с (8.31) ще получим, че за функцията $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ съществува тригонометричен полином $T_4(x)$ такъв, че върху цялата безкрайна права

$$(8.32) \qquad \left|f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\sin^2 x-T_4(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменяме в (8.32) x с $x-\frac{\pi}{2}$ и въвеждаме тригонометричния полином $T_5(x)=T_4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Получаваме, че върху цялата безкрайна права е вярно неравенството

$$(8.33) \qquad |f(x).\cos^2 x-T_5(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Накрая събираме неравенствата (8.31) и (8.33) и обозначаваме с $T(x)$ тригонометричния полином $T_3(x)+T_5(x)$. Получаваме, че върху цялата безкрайна права е вярно неравенството (8.27). Теоремата е доказана.

Забележка. Всяко от условията 1) непрекъснатост на $f(x)$ върху сегмента $[-\pi, \pi]$; 2) равенство на стойностите $f(-\pi)$ и $f(\pi)$

* Тъй като тази функция удовлетворява същите условия, както и получената след продължението на функцията $f(x)$.

са **необходими** условия за равномерното приближение на функцията $f(x)$ с тригонометрични полиноми в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Теоремата на Вайерщрас може да се преформулира по следния начин: за да може функцията $f(x)$ равномерно върху сегмента $[-\pi, \pi]$ да се приближи с тригонометрични полиноми с произволна точност, е необходимо и достатъчно тя да бъде непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и да удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$.

Достатъчността е точно съдържанието на теорема 8.7.

Ще се спрем на доказателството на необходимостта. Нека съществува редица от тригонометрични полиноми $\{T_n(x)\}$, която равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$ клони към функцията $f(x)$. Тъй като всяка от функциите $T_n(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$, то по следствие 2 от теорема 2.7 и функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$. За всяко $\varepsilon>0$ съществува полином $T_n(x)$ такъв, че $|f(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Следователно

$$|f(-\pi)-T_n(-\pi)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(\pi)-T_n(\pi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последните две неравенства и от равенството $T_n(-\pi)=T_n(\pi)$ заключаваме, че $|f(-\pi)-f(\pi)|<\varepsilon$, откъдето $f(-\pi)=f(\pi)$ (тъй като $\varepsilon>0$ е произволно).

2. Доказателство на затвореността на тригонометричната система. Опирайки се на теоремата на Вайерщрас, ще докажем следната основна теорема.

Теорема 8.8. Тригонометричната система (8.10) е затворена*, т. е. за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ и за всяко положително ε съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\varepsilon. \tag{8.34}$$

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че за произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ и за всяко $\varepsilon>0$ съществува непрекъсната в този сегмент функция $F(x)$, удовлетворяваща условието $F(-\pi)=F(\pi)$ и такава, че

$$\|f(x)-F(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

* А следователно (теорема 8.5) и пълна.

Наистина достатъчно е да изберем функцията $F(x)$ да съвпада с $f(x)$ навсякъде освен в достатъчно малки околности на точките на прекъсване на функцията $f(x)$ и на точката $x=\pi$, а в указаните околности да изберем $F(x)$ линейна функция така, че $F(x)$ да е непрекъсната върху целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и да удовлетворява условието $F(-\pi)=F(\pi)$.

Тъй като частично непрекъснатата функция и срязващата я линейна функция са ограничени, избирайки указаните околности в точките на прекъсване на $f(x)$ и в точката $x=\pi$ достатъчно малки, ще осигурим изпълнението на неравенството (8.35).

По теоремата на Вайерщрас 8.7 за функцията $F(x)$ съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че за всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е изпълнено неравенството

$$|F(x)-T(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{8.36}$$

От (8.36) заключаваме, че

$$\| F(x)-T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x)-T(x)]^2\,dx} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.37}$$

От (8.35) и (8.37) и от неравенството на триъгълника за нормата следва неравенството (8.34). Теоремата е доказана.

Забележка 1. От теоремите 8.8 и 8.5 веднага следва, че тригонометричната система (8.10) е пълна. Това от своя страна дава, че системата $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ е пълна в множеството от всички частично непрекъснати в сегмента $[0, \pi]$ (или съответно в сегмента $[-\pi, 0]$) функции. Наистина всяка частично непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$ функция $f(x)$, която е ортогонална в този сегмент към всички елементи от системата $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, след нечетно продължение върху сегмента $[-\pi, 0]$ се оказва, че е ортогонална върху сегмента $[-\pi, \pi]$ на всички елементи от тригонометричната система (8.10). От пълнотата на системата (8.10) следва, че тази функция е равна на нула в $[-\pi, \pi]$, а следователно и в $[0, \pi]$. Съвършено аналогично се доказва, че и системата $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n=1, 2, \ldots)$ е пълна в множеството от всички функции, които са частично непрекъснати в сегмента $[0, \pi]$ (или съответно в сегмента $[-\pi, 0]$).

Забележка 2. Може да се покаже, че измежду ортонормираните системи, указани в § 1, системите, образувани с помощта на полиномите на Лежандър, полиномите на Чебишев и функциите на Хаар, са затворени, а системата на Радемахер не е затворена.

3. Следствия от затвореността на тригонометричната система

Следствие 1. За всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е изпълнено равенството на Парсевал

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx \tag{8.38}$$

(следва от теорема 8.3).

Следствие 2. Тригонометричният ред на Фурие на произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ клони към тази функция в указания сегмент относно средноквадратичното разстояние (следва от теорема 8.4 и забележка 2 към същата теорема).

Следствие 3. Тригонометричният ред на Фурие на произволна, частично непрекъсната функция в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ може почленно да се интегрира в този сегмент (следва от предишното следствие и теорема 2.11, глава 2).

Следствие 4. Ако две частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имат еднакви тригонометрични редове на Фурие, то тези функции съвпадат тъждествено на този сегмент (следва от теорема 8.6).

Следствие 5. Ако тригонометричният ред на Фурие на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е равномерно сходящ в някакъв сегмент $[a, b]$, съдържащ се в сегмента $[-\pi, \pi]$, то той клони в сегмента $[a, b]$ именно към функцията $f(x)$.

Доказателство. Нека $g(x)$ е тази функция, към която клони равномерно в $[a, b]$ тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$. Ще докажем, че $f(x)\equiv g(x)$ на целия сегмент $[a, b]$. Тъй като от равномерната сходимост в сегмента $[a, b]$ следва средноквадратичната сходимост в този интервал (вж. гл. 2, § 4, п. 3), то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони към функцията $g(x)$ в сегмента $[a, b]$ относно средноквадратичното разстояние. Това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_1, започвайки от което n-тата частична сума на тригонометричния ред на Фурие удовлетворява неравенството

$$\| g(x)-S_n(x) \| =\sqrt{\int_a^b [g(x)-S_n(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.39}$$

От друга страна, по силата на следствие 2 редицата $S_n(x)$ клони към $f(x)$ относно средноквадратичното разстояние в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и в частност и на сегмента $[a, b]$, т. е. за фиксираното >0 съществува число n_2, започвайки от което

$$\| S_n(x)-f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [S_n(x)-f(x)]^2\, dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.40}$$

От (8.39) и (8.40) и от неравенството на триъгълника

$$\| g(x)-f(x) \| \leq \| g(x)-S_n(x) \| + \| S_n(x)-f(x) \|$$

следва, че $\| g(x)-f(x) \| < \varepsilon$. От последното неравенство и от произволността на $\varepsilon>0$ следва, че $\| g(x)-f(x) \| = 0$, а оттук въз основа на първото свойство на нормата получаваме, че $g(x)-f(x)$ е нулевият елемент в пространството от всички частично непрекъснати в $[a, b]$ функции, т. е. е тъждествено равна на нула в сегмента $[a, b]$. Следствие 5 е доказано.

Забележка 1. Разбира се, в следствие 5 сегментът $[a, b]$ може да съвпада с целия сегмент $[-\pi, \pi]$, т. е. от равномерната сходимост на реда на Фурие на функцията $f(x)$ върху целия сегмент $[-\pi, \pi]$ следва, че този ред клони в указания сегмент именно към функцията $f(x)$.

Забележка 2. Аналогични следствия са в сила и за реда на Фурие по произволна друга затворена ортонормирана система в пространството от частично непрекъснатите в произволен сегмент $[a, b]$ функции със скаларно произведение (8.1) и норма (8.7). Примери на такива системи са указаните в § 1 ортонормирани системи, получени от полиномите на Лежандър и Чебишев, и системата на Хаар.

§ 4. Най-прости условия за равномерна сходимост и за почленна диференцируемост на тригонометричния ред на Фурие

1. Уводни бележки. В математичната физика и в други раздели от математиката съществена роля играе въпросът за условията, при които тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) в дадена точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

Още в края на миналия век е било известно, че съществуват непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяващи условието $f(-\pi)=f(\pi)$, тригонометричните редове на които са разходящи в отнапред зададена точка от сегмента $[-\pi, \pi]$ (или даже са разходящи върху безкрайно множество от точки от сегмента $[-\pi, \pi]$, навсякъде гъсто в този сегмент)*.

По такъв начин само непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ без допълнителни условия не осигурява не само равномерната сходимост на тригонометричния ред на Фурие на тази функция, но дори и сходимостта на този ред в отнапред зададена точка от този сегмент.

В този и в следващите параграфи ще изясним какви изисквания трябва да добавим към непрекъснатостта на функцията $f(x)$ (или да поставим вместо непрекъснатостта на $f(x)$), за да осигурим сходимостта на тригонометричния ред на Фурие в зададена точка, а също и за да осигурим равномерната сходимост на указания ред в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ или в някаква негова част.

При изучаването на сходимостта на реда на Фурие възниква и друг въпрос: обезателно ли тригонометричният ред на Фурие на произволно частично непрекъсната (или непрекъсната) в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е сходящ поне в една точка от този сегмент?

Положителен отговор на този въпрос беше получен едва през 1966 г.

Отговорът на този въпрос е следствие от фундаменталната теорема, доказана през 1966 г. от Л. Карлесон**, която реши знаменитата проблема на Н. Н. Лузин***, поставена още през 1914 г.: тригонометричният ред на Фурие на всяка функция, за която съществува в смисъл на Лебег интегралът $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, е сходящ към тази функция почти навсякъде в сегмента $[-\pi, \pi]$****.

От теоремата на Карлесон следва, че редът на Фурие не само за всяка частично непрекъсната, но и за всяка интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ в собствен смисъл на Риман функция $f(x)$ е сходящ към тази функция почти навсякъде в сегмента $[-\pi, \pi]$ (тъй като

* Първи пример на такава функция е бил построен от френския математик Дю Буа Раймон през 1876 г.

** Л. Карлесон — съвременен шведски математик. Пълното доказателство на теоремата на Карлесон може да се намери в сборника от преводни статии «Математика», т. II, № 4, 1967, стр. 113—132.

*** Николай Николаевич Лузин — съветски математик, основател на съвременната московска математическа школа по теория на функциите (1883—1950). Постановката на проблемата на Лузин, решена от Карлесон, и други негови проблеми могат да се намерят в книгата на Н. Н. Лузин «Интеграл и тригонометричен ред», Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1951.

**** Определението на интеграл в смисъл на Лебег и сходимост почти навсякъде в даден сегмент вж. в част 3 на тази книга.

за такава функция съществува интегралът $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ в смисъл на Риман, а следователно и в смисъл на Лебег).

Ще отбележим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ не в смисъл на Риман, а само в смисъл на Лебег, то тригонометричният ред на Фурие на тази функция може да не е сходящ в нито една точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Първият пример на интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ в смисъл на Лебег функция $f(x)$ с навсякъде разходящ тригонометричен ред на Фурие беше построен през 1923 г. от съветския математик А. Н. Колмогоров*.

2. Най-прости условия за абсолютна и равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие. Да установим следната терминология.

Определение 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има в сегмента $[a, b]$ *частично непрекъсната производна*, ако производната $f'(x)$ съществува и е непрекъсната навсякъде в сегмента $[a, b]$ с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които функцията $f'(x)$ има крайна лява и дясна граница**.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има в сегмента $[a, b]$ частично непрекъсната производна от ред $n \geq 1$, ако функцията $f^{(n-1)}(x)$ има на този сегмент частично непрекъсната производна в смисъл на определението 1.

Теорема 8.9. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$, има в този сегмент частично непрекъсната производна и удовлетворява условието $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ към тази функция равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$. Нещо повече, редът, съставен от модулите на членовете на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$, е сходящ равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че редът от модулите на членовете на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k \cos kx| + |b_k \sin kx|\} \tag{8.41}$$

е сходящ равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$, тъй като оттук ще следва

* Примерът на А. Н. Колмогоров може да се намери на стр. 412—421 от книгата на Н. К. Бари «Тригонометрични редове», Москва, Физматгиз, 1961.

** При това функцията $f'(x)$ може да се окаже недефинирана в краен брой точки от сегмента $[a, b]$. В тези точки ще я додефинираме по произволен начин (например ще я положим равна на полусумата на лявата и дясната ѝ граница).

както равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на самия тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)$, така и сходимостта на този ред (следствие 5 от п. 3. § 3) именно към функцията $f(x)$.

Предвид признака на Вайерщрас (вж. теорема 2.3 от глава 2) за доказателството на равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на реда (8.41) е достатъчно да докажем сходимостта на мажориращия го числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k| + |b_k|\}. \tag{8.42}$$

Да означим с α_k и β_k тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f'(x)$ (дефинирайки я по произволен начин в крайния брой точки, в които не съществува производната на $f(x)$*).

Интегрираме по части и отчитаме, че $f(x)$ е непрекъсната в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$. Получаваме следните съотношения:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx = k\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = k\,.\,b_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx = -k\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = -k\,.\,a_k,$$

които свързват тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f'(x)$ и функцията $f(x)$**.

По такъв начин

$$|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}$$

и за да докажем сходимостта на реда (8.42), е достатъчно да докажем сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{8.43}$$

* Например може да положим функцията $f'(x)$ в указаните точки да е равна на полусумата от лявата и дясната ѝ граница.

** При интегрирането по части е необходимо да се раздели сегментът $[-\pi, \pi]$ на краен брой подсегменти без общи вътрешни точки, така че на всеки от тях производната $f'(x)$ да е непрекъсната. Прилагаме формулата за интегриране по части на всеки от тези подсегменти и сумираме всички интеграли, като отчитаме, че сумата от всички проинтегрирани членове е нула (тъй като $f(x)$ е непрекъсната в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$).

Сходимостта на реда (8.43) следва от елементарните неравенства*

$$(8.44)\qquad \begin{aligned} \frac{|\alpha_k|}{k} &\le \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right),\\ \frac{|\beta_k|}{k} &\le \frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

и от сходимостта на редовете

$$(8.45)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

първият от които е сходящ по силата на равенството на Парсевал за частично непрекъснатата функция $f'(x)$, а вторият — по силата на интегралния признак на Коши—Маклорен (вж. гл. 1, п. 4, § 2). Теоремата е доказана.

Забележка. Ако функцията $f(x)$, удовлетворяваща условията на теорема 8.9, я продължим периодически (с период 2π) върху цялата безкрайна права, то теорема 8.9 дава сходимостта на тригонометричния ред на Фурие към така продължената функция, като тази сходимост е равномерна в цялата безкрайна права.

3. Най-прости условия за почленно диференциране на тригонометричен ред на Фурие. Преди всичко ще докажем следната лема за реда на тригонометричните коефициенти на Фурие.

Лема 1. Нека функцията $f(x)$ и всички нейни производни до някакъв ред m (m е цяло неотрицателно число) са непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяват условията

$$(8.46)\qquad \begin{cases} f(-\pi)=f(\pi),\\ f'(-\pi)=f'(\pi),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi). \end{cases}$$

Нека освен това функцията $f(x)$ да има в сегмента $[-\pi, \pi]$ частично непрекъсната производна от ред $m+1$. Тогава следният ред е сходящ:

$$(8.47)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^m\left(|a_k|+|b_k|\right),$$

в който с a_k и b_k сме означили тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f(x)$.

* Имаме предвид елементарното неравенство $|a|\cdot|b|\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, следващо от неотрицателността на израза $(|a|-|b|)^2$.

Доказателство. Да означим с α_k и β_k тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f^{(m+1)}(x)$, определяйки тази функция по произволен начин в краен брой точки, в които не съществува производната от ред $m+1$ на функцията $f(x)$. Като интегрираме изразите за α_k и β_k по части m пъти, използуваме непрекъснатостта на самата функция $f(x)$, както и на всички нейни производни до ред m в сегмента $[-\pi, \pi]$, и съотношенията (8.46), ще установим следната връзка между тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f^{(m+1)}(x)$ и на самата функция $f(x)$*:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|).$$

По такъв начин

$$k^m(|a_k| + |b_k|) = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}$$

и сходимостта на реда (8.47) следва от елементарните неравенства (8.44) и от сходимостта на редовете (8.45), първият от които е сходящ поради равенството на Парсевал за частично непрекъснатата функция $f^{(m+1)}(x)$, а вторият — по силата на признака на Коши — Маклорен. Лемата е доказана.

Непосредствено следствие от лема 1 е следната теорема.

Теорема 8.10. Нека функцията $f(x)$ да удовлетворява условията на лема 1, като $m \geq 1$. Тогава тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ може да се диференцира почленно m пъти в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Нека S да е някое от числата $1, 2, \ldots, m$. След S-кратно почленно диференциране на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ се получава редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \left\{a_k \cos\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right) + b_k \sin\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right)\right\}. \tag{8.48}$$

Ще отбележим, че за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ както първоначалният ред на Фурие, така и редът (8.48) (с произволно $s = 1, 2, \ldots, m$) се мажорират от сходящите числови редове (8.47). По признака на Вайерщрас (вж. теорема 2.3 от глава 2) както изходният ред на Фурие, така и всеки от редовете (8.48) (при $s = 1, 2, \ldots, m$) са сходящи равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$, а това (по силата на теорема 2.9 от глава 2) осигурява възможността за m-кратното почленно диференциране на първоначалния ред на Фурие. Теоремата е доказана.

* При интегрирането по части сегментът $[-\pi, \pi]$ трябва да се раздели на краен брой без вътрешни точки подсегменти, на всеки от които функцията $f^{(m+1)}(x)$ да е непрекъсната, и да се отчете, че при събирането на всички интеграли по подсегментите сумата от проинтегрираните членове е равна на нула.

§ 5. По-точни условия за равномерна сходимост и условия за сходимост в точка

1. Модул на непрекъснатост на функция. Класи на Хьолдер. Ще започнем с изясняване на понятията, характеризиращи гладкостта на изучаваните функции, и с определяне на класовете от функции, чрез които ще бъдат формулирани условията за сходимост на тригонометричния ред на Фурие.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

Определение 1. За всяко $\delta>0$ ще наречем модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ точната горна граница от модула на разликата $|f(x')-f(x'')|$ върху множеството от всички x' и x'', принадлежащи на сегмента $[a, b]$ и удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

Ще означаваме модула на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ със символа $\omega(\delta, f)$. Така по дефиниция*

$$\omega(\delta, f)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x', x'' \in [a, b]}}|f(x')-f(x'')|.$$

Директно следствие от теоремата на Кантор (вж. част I, теорема 4.16) е, че модулът на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ на произволна, непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ клони към нула при $\delta\to 0$**.

Обаче за произволна, непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ не може да се твърди нищо повече за реда на нейния модул на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ при малки δ.

Ще покажем сега, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и нейната производна $f'(x)$ е ограничена в този сегмент, то модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в указания сегмент $\omega(\delta, f)$ има ред $\omega(\delta, f)=O(\delta)$***.

Наистина от теоремата на Лагранж**** следва, че за произ-

* Ще напомним, че символът $\in$ означава «принадлежи», така че записът $x', x''\in[a, b]$ означава, че точките x' и x'' принадлежат на сегмента $[a, b]$.

** Тъй като (по силата на теоремата на Кантор) за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ за всички x' и x'' от сегмента $[a, b]$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

*** Ще напомним, че символът $\alpha=O(\delta)$ беше въведен в част I и означава, че съществува константа M такава, че $|\alpha|\le M\delta$.

**** Вж. теорема 6.5 от част I.

волни точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$ съществува точка ξ между точките x' и x'' и такава, че

(8.49) $$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|.$$

Тъй като производната $f'(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$, то съществува константа M такава, че за всички x от този сегмент е изпълнено $|f'(x)| \leq M$ и следователно $|f'(\xi)| \leq M$. От последното неравенство и от (8.49) следва, че $|f(x') - f(x'')| \leq M \cdot \delta$ за всички x' и x'' от $[a, b]$, които удовлетворяват условието $|x' - x''| < \delta$. Но това означава, че $\omega(\delta, f) \leq M \cdot \delta$, т. е. че $\omega(\delta, f) = O(\delta)$.

Нека α е произволно реално число от полусегмента $0 < \alpha \leq 1$.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^α с показател α $(0 < \alpha \leq 1)$, ако модулът на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ има ред $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$.

Фактът, че функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^α, обикновено се изразява чрез следното означение: $f(x) \in C^\alpha [a, b]$.

Веднага ще отбележим, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и нейната производна е ограничена в този сегмент, то тази функция обезателно принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^1* (това твърдение веднага следва от доказаното по-горе съотношение $\omega(\delta, f) = O(\delta)$).

Забележка. Нека $f(x) \in C^\alpha [a, b]$. Точната горна граница на дробта $\frac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}$ върху множеството от всички различни помежду си точки x' и x'', принадлежащи на сегмента $[a, b]$, се нарича константа на Хьолдер (или коефициент на Хьолдер) на функцията $f(x)$ (в сегмента $[a, b]$). Сумата от константата на Хьолдер на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ и точната горна граница на $|f(x)|$ в този сегмент се нарича хьолдерова норма на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ и се обозначава със символа

$$\|f\|_{C^\alpha [a,b]}.$$

Пример. Функцията $f(x) = \sqrt{x}$ принадлежи в сегмента $[0, 1]$ на класа $C^{1/2}$, тъй като за произволни x' и x'' от $[0, 1]$, свързани с условието $x' > x''$, е изпълнено неравенството

* Класът на Хьолдер C^1, съответстващ на стойността $\alpha = 1$, често се нарича клас на Липшиц.

$$|f(x')-f(x'')|=\sqrt{x'-x''}\cdot\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqq\sqrt{x'-x''}$$

(при това константата на Хьолдер, която е равна на точната горна граница в $[0,1]$ на дробта $\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, е равна на едно, а хьолдеровата норма е равна на две).

2. Формула за частичната сума на тригонометричния ред на Фурие. Нека $f(x)$ да е произволна функция, която е дефинирана и е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$.

Периодично продължение на тази функция върху цялата безкрайна права ще наричаме тази дефинирана върху цялата безкрайна права функция $f(x)$, която удовлетворява следните три изисквания: 1) съвпада с първоначално зададената функция в интервала $-\pi<x<\pi$; 2) приема в краищата на сегмента $[-\pi,\pi]$ стойността

$$f(\pi)=f(-\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0));$$

3) удовлетворява условието за периодичност с период 2π, т. е. за всяко x удовлетворява съотношението $f(x+2\pi)=f(x)$.

Ще докажем следното просто твърдение.

Лема 1. Ако функцията $F(x)$ е периодичното продължение върху цялата безкрайна права на функцията $F(x)$, която първоначално е дефинирана и е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$, то всички интеграли от тази функция върху интервали с дължина 2π са равни помежду си, т. е. за всяко x е изпълнено равенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt=\int_{-\pi+x}^{\pi+x}F(t)\,dt. \tag{8.50}$$

Доказателство. От адитивността на интеграла имаме

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x}F(t)dt=\int_{-\pi+x}^{-\pi}F(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt+\int_{\pi}^{\pi+x}F(t)dt. \tag{8.51}$$

С помощта на смяната $y=t+2\pi$ ще получим, използувайки условието за периодичност $F(y-2\pi)=F(y)$, че

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi}F(t)dt=\int_{\pi+x}^{\pi}F(y-2\pi)dy=\int_{\pi+x}^{\pi}F(y)dy=-\int_{\pi}^{\pi+x}F(y)dy. \tag{8.52}$$

От (8.51) и (8.52) следва съотношението (8.50).

Нека сега функцията $f(x)$ е периодичното продължение върху цялата безкрайна права на функцията $f(x)$, която първоначално е дефинирана и частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Да пресметнем частичната сума на тригонометричния ред на Фурие $S_n(x, f)$ на функцията f в точката x:

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx).$$

Като използваме формулите за коефициентите на Фурие

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)dy,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)dy \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и линейното свойство на интеграла, изразът за $S_n(x, f)$ може да се запише в следния вид:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos ky . \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx)\right] dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(y-x)\right] dy.$$

Чрез смяна на променливата $y = t + x$ получаваме

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt.$$

Накрая използваме лема 1 и забелязваме, че подинтегралната функция в последния интеграл е периодична функция на аргумента t с период 2π. Получаваме

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt. \tag{8.53}$$

Да пресметнем сумата, стояща в квадратните скоби на (8.53). За тази цел да отбележим, че за всяко естествено число k и за всяко реално число t е изпълнено равенството

$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$

Като сумираме това равенство по всички стойности на k от 1 до n, ще получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}.$$

Оттук имаме

$$2\sin\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

и следователно

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \tag{8.54}$$

Заместваме (8.54) в (8.53) и окончателно получаваме следната формула за n-тата частична сума на тригонометричен ред на Фурие:

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \tag{8.55}$$

която е валидна за всяка точка от безкрайната права.

Забележка. От формула 8.55 и от факта, че всички частични суми $S_n(x,1)$ на функцията $f(x)\equiv 1$ са равни на единица, следва равенството

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.56}$$

3. Спомагателни твърдения. Ще докажем следното твърдение.

Лема 2. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$ и е продължена периодично с период 2π върху цялата безкрайна права. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всички u, удовлетворяващи условието $|u|\leq\delta$, е изпълнено неравенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+t)-f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Съгласно теорема 8.8 (за затвореността на тригонометричната система) съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2dt}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}},$$

и затова въз основа на неравенството на Коши—Буняковски* имаме

$$(8.57)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|dt\leq\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2dt\,.\int_{-\pi}^{\pi}dt}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

От неравенството (8.57) и от периодичността (с период 2π) на функциите $f(t)$ и $T(t)$ получаваме, че за всяко реално u

$$(8.58)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u)|dt<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тъй като модулът от сумата на три израза не надминава сумата от модулите на тези изрази, то за всяко реално u е изпълнено неравенството

$$(8.59)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-f(t)|dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u)|dt+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t+u)-T(t)|dt+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t)-f(t)|dt.$$

Сега остава само да забележим, че от непрекъснатостта на тригонометричния полином и теоремата на Кантор (вж. теорема 4.16 от част I) за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за $|u|\leq\delta$ и за всички t от $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{6\pi},$$

поради което

* Вж. неравенство (8.7) за $a=-\pi$ и $b=\pi$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|\,dt \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.60}$$

Съпоставяме неравенството (8.59) с неравенствата (8.57), (8.58) и (8.60). Получаваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt < \varepsilon \tag{8.61}$$

за всички u, за които $|u| \leqq \delta$. Лемата е доказана.

Ще изведем от лема 2 редица важни за по-нататък следствия.

Следствие 1. Ако функцията $f(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата реална права, а x е произволна фиксирана точка от сегмента $[-\pi, \pi]$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt < \varepsilon \tag{8.62}$$

за $|u| \leqq \delta$.

Доказателство. Извършваме в интеграла, стоящ в лявата част на (8.62), смяна на променливата $\tau = x+t$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau,$$

и забелязваме, че (поради равенството (8.50))

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau.$$

Очевидно е, че неравенството (8.62) е следствие от (8.61).

Следствие 2. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права, то функцията

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt$$

е непрекъсната функция на променливата x в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Нека x е произволна точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогава

$$I(x+u)-I(x)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t+u)-f(x+t)]g(t)\,dt$$

и понеже частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ удовлетворява условието за ограниченост $|g(t)|\leq M$ в този сегмент, то

$$|I(x+u)-I(x)|\leq M.\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt$$

и затова поради (8.62) за всяко x

$$|I(x+u)-I(x)|<\varepsilon,\qquad \text{ако } |u|\leq\delta(\varepsilon).$$

Непрекъснатостта на функцията $I(x)$ в точката x е доказана.

Следствие 3. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодично (с период 2π) са продължени върху цялата безкрайна права, то тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $F(x, t)=f(x+t)\,g(t)$ при разлагането й по променливата t

(8.63) $$a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,g(t)\cos(nt)\,dt,$$

(8.64) $$b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin(nt)dt$$

клонят към нула (при $n\to\infty$) равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а следователно и на цялата безкрайна права).

Доказателство. За произволна фиксирана точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$ функцията $F(x, t)=f(x+t)\,g(t)$ е частично непрекъсната функция на аргумента t в сегмента $[-\pi, \pi]$ и затова за тази функция е в сила равенството на Парсевал*

$$\frac{a_0^2(x)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2(x)+b_k^2(x)]=$$

* Вж. следствие 1 от п. 3_3 § 3 на тази глава.

$$(8.65)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\, g^2(t)\, dt.$$

От равенството (8.65) следва сходимостта на реда, стоящ в лявата му част, във всяка фиксирана точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Тъй като указаният ред е с *неотрицателни* членове, то за доказателството на равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на указания ред по силата на теоремата на Дини* е достатъчно да докажем, че както функциите $a_n(x)$ и $b_n(x)$, така и сумата на реда (8.65) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)dt$ са непрекъснати функции на променливата x в сегмента $[-\pi, \pi]$. Но това веднага следва от предишното следствие (достатъчно е да отчетем, че квадратът на частично непрекъсната функция е пак частично непрекъсната функция и че $\cos nt$ и $\sin nt$ при произволно фиксирано n са непрекъснати функции).

Следствие 4. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права, то редицата

$$(8.66)\qquad \bar{c}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

клони към нула равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а следователно и на цялата безкрайна права).

Доказателство. Достатъчно е да отчетем, че

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]=\cos(nt)\sin\frac{t}{2}+\sin(nt)\cos\frac{t}{2},$$

и да приложим предишното следствие, вземайки в (8.63) вместо функцията $g(t)$ функцията $g(t)\sin\frac{t}{2}$, а в (8.64) вместо $g(t)$ функцията $g(t)\cos\frac{t}{2}$.

4. Принцип за локализация. В тази точка ще докажем, че въпросът за това, сходящ или разходящ е тригонометричният ред на Фурие на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодичната (с период 2π) функция $f(x)$ в дадена точка x, се решава от поведението на функцията $f(x)$ в колкото искаме малка околност на точката x. Това забележително свойство на тригонометричния ред

* Вж. теорема 2.4 (формулировката в термини на редове).

на Фурие е прието да се нарича **принцип за локализация.**

Ще започнем с доказателството на една важна лема.

Лема 3 (лема на Риман). Ако функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права и ако тази функция е равна на нула в някакъв сегмент $[a, b]$*, то за произволно положително число δ, по-малко от $\frac{b-a}{2}$, тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони към нула равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$.

Доказателство. Нека δ е произволно положително число, по-малко от $\frac{b-a}{a}$. Частичната сума на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ в произволна точка x от безкрайната права се определя от равенството (8.55). Полагайки

$$g(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}} & \text{при } \delta\leq|t|\leq\pi, \\ 0 & \text{при } |t|<\delta \end{cases} \tag{8.67}$$

и отчитайки, че $f(x+t)$ е равна на нула, при условие че x принадлежи на сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, а t принадлежи на сегмента $|t|\leq\delta$**, можем по следния начин да препишем равенството (8.55) за произволна точка x от сегмента $[a+\delta, b-\delta]$:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Остава да вземем предвид, че редицата, стояща в дясната част на последното равенство, поради следствие 4 от т. 3 клони към нула равномерно по x върху цялата безкрайна права. Лемата е доказана.

Следните теореми следват непосредствено от доказаната лема.

Теорема 8.11. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права и нека $[a, b]$ е някакъв сегмент. При произволно положително δ, по-малко от $\frac{b-a}{2}$, за да бъде тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, достатъчно е да съ-

* Сегментът $[a, b]$ е съвсем произволен. В частност този сегмент може да не се съдържа изцяло в $[-\pi, \pi]$.

** Поради това, че функцията $f(x)$ е равна на нула върху целия сегмент $[a, b]$.

ществува частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодична (с период 2π) функция $g(x)$, имаща равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$ тригонометричен ред на Фурие и съвпадаща в сегмента $[a, b]$ с функцията $f(x)$.

Доказателство. Прилагаме лема 3 за разликата $[f(x)-g(x)]$. Получаваме, че тригонометричният ред на Фурие на разликата $[f(x)-g(x)]$ при произволно δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$ клони към нула равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, а оттук и от равномерната в сегмента $[a, b]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $g(x)$ следва равномерната в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$. Фактът, че последният ред клони в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$ именно към функцията $f(x)$, се получава непосредствено от следствие 5, т. 3, § 3 на тази глава. Теоремата е доказана.

Теорема 8.12. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права и нека x_0 е някоя точка от безкрайната права. За да бъде тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ сходящ в точката x_0, е достатъчно да съществува частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодична (с период 2π) функция $g(x)$, имаща сходящ в точката x_0 тригонометричен ред на Фурие и съвпадаща с $f(x)$ в произволно малка δ-околност на точката x_0.

Доказателство. Достатъчно е да приложим лема 3 към разликата $[f(x)-g(x)]$ върху сегмента $\left[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right]$ и да отчетем, че от сходимостта на тригонометричните редове на функциите $[f(x)-g(x)]$ и $g(x)$ в точката x_0 следва сходимостта в тази точка и на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$. Теоремата е доказана.

Теорема 8.12 не дава конкретни условия, осигуряващи сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ в точката x_0. Тя показва само, че тези условия се определят единствено от поведението на $f(x)$ в произволно малка околност на точката x_0 (т. е. имат локален характер)

5. Равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие за функции от класа на Хьолдер. В тази и в следващите точки ще се занимаваме с уточняване на условията, осигуряващи равномерна сходимост и сходимост в дадена точка x_0 на тригонометричния ред на Фурие.

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 8.13. Ако функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[-\pi, \pi]$ на класа на Хьолдер C^α с произволен положителен показател α $(0<\alpha\leq 1)$ и ако освен това $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Както обикновено, ще считаме, че функцията $f(x)$ е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права. Условието $f(-\pi)=f(\pi)$ осигурява така продължената функция да принадлежи на класа на Хьолдер C^{α} върху цялата безкрайна права.

Нека x да е произволна точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Умножаваме двете страни на равенството (8.56) с $f(x)$ и изваждаме така полученото равенство от (8.55). Получаваме равенството

$$S_n(x, f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.68}$$

От условието, че $f(x)$ принадлежи на класа на Хьолдер C^{α}, следва, че съществува константа M такава, че

$$|f(x+t)-f(x)|\leq M t^{\alpha} \tag{8.69}$$

поне когато x и t принадлежат на сегмента $[-\pi, \pi]$.

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и нека $\delta>0$ да удовлетворява неравенството

$$\frac{M}{\alpha}\cdot\delta^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.70}$$

Представяме сегмента $[-\pi, \pi]$ като сума от сегмента $|t|\leq\delta$ и на множеството $\delta\leq|t|\leq\pi$ и записваме равенството (8.68)

$$\begin{aligned}S_n(x, f)-f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+\\&+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt-\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.\end{aligned} \tag{8.71}$$

За оценката на първия от интегралите в дясната страна на (8.71) ще се възползуваме от неравенството (8.69) и ще използуваме, че $\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leq\frac{\pi}{2|t|}$ за всички t от сегмента $[-\pi, \pi]$*. Ще получим, че

* Отбелязаното неравенство веднага следва от факта, че функцията

за всяко естествено число n и за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е вярно

$$\left|\int\limits_{|t|\leq\delta} [f(x+t)-f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{|t|\leq\delta} |f(x+t)-f(x)| \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{M\pi}{2}\int\limits_{|t|\leq\delta} |t|^{\alpha-1}\, dt = M\pi\int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\, dt =$$

$$= \frac{M\pi}{\alpha}\cdot\delta^\alpha.$$

Оттук въз основа на (8.70) за всяко естествено число n и за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ имаме

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq\delta} [f(x+t)-f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.72}$$

Вторият от интегралите в дясната страна на (8.71) с помощта на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ (8.67) се записва във вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

По силата на следствие 4 от т. 3 дясната страна на последното равенство клони към нула (при $n\to\infty$) равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$. Затова за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_1 такова, че

$\frac{\sin x}{x}$ при изменението на x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ намалява от 1 до $2/\pi$. Намаляването на функцията $\frac{\sin x}{x}$ от своя страна следва от това, че $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg} x)<0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, тъй като $x<\operatorname{tg} x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ (вж. глава 4, част I).

$$(8.73)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

за всички $n\ge N_1$ и всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

За да оценим последния интеграл от дясната страна на (8.71), ще отбележим, че с помощта на частично непрекъснатата функция (8.67) този интеграл се записва във вида

$$\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Интегралът, стоящ в дясната част на последното равенство, клони към нула (при $n\to\infty$) по силата на все същото следствие 4 от т. 3 (достатъчно е да приложим това следствие към функцията $f(x)\equiv 1$). Отчитаме също, че функцията $f(x)$ е ограничена в сегмента $[-\pi, \pi]$, и получаваме, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_2 такова, че

$$(8.74)\qquad \left|\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

за всички $n\ge N_2$ и всички точки x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначаваме с N по-голямото от числата N_1 и N_2 и получаваме по силата на (8.71) — (8.74), че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N такова, че

$$|S_n(x, f)-f(x)|<\varepsilon$$

за всяко $n\ge N$ и всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Теоремата е доказана.

З а б е л е ж к а 1. Очевидно при условията на теорема 8.13 тригонометричният ред на Фурие е сходящ равномерно не само в сегмента $[-\pi, \pi]$, но и равномерно върху цялата безкрайна права (към функцията, която е периодичното (с период 2π) продължение на функцията $f(x)$ върху цялата безкрайна права).

З а б е л е ж к а 2. Ще отбележим, че при оценката на интегралите (8.73) и (8.74) използувахме само частичната непрекъснатост (и следващата от нея ограниченост) на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ (принадлежността на $f(x)$ на класа C^α на Хьолдер при оценката на тези интеграли не се използува).

З а б е л е ж к а 3. Естествено възниква въпросът за това, може ли в теорема 8.13 да се намали изискването за гладкост на функцията $f(x)$ със запазване на твърдението на тази теорема за равномерна сходимост на реда на Фурие на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Ще припомним, че принадлежността на $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ към класа на Хьолдер C^{α} по дефиниция означава, че модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в този сегмент има ред

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha}).$$

Ще формулираме без доказателство така наречената **теорема на Дини—Липшиц**, която твърди, че за равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ е достатъчно тази функция да удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$ и нейният модул на непрекъснатост в сегмента $[-\pi, \pi]$ да има ред

$$\omega(x, f) = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right),$$

т. е. да бъде безкрайно малка величина при $\delta \to 0$, имаща по-висок ред, отколкото $\frac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Теоремата на Дини—Липшиц съдържа окончателно (чрез модула на непрекъснатост) условие за равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие към тази функция, тъй като може да се построи функция $f(x)$, удовлетворяваща условието $f(-\pi)=f(\pi)$ с модул на непрекъснатост, имащ в сегмента $[-\pi, \pi]$ ред $O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right)$, и с тригонометричен ред на Фурие, който е разходящ на множество от точки, което е навсякъде гъсто в сегмента $[-\pi, \pi]$*.

В условията на теорема 8.13 след периодичното (с период 2π) продължение на функцията $f(x)$ се оказа, че тя принадлежи класа на Хьолдер C^{α} върху цялата безкрайна права. Естествено възниква въпросът за поведението на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$, която принадлежи на класа на Хьолдер C^{α} само в някакъв сегмент $[a, b]$, а навсякъде извън този сегмент удовлетворява само обикновеното изискване за частична непрекъснатост.

Отговор на този въпрос дава следната теорема.

Теорема 8.14. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодично (с период 2π) е продължена върху цялата безкрайна права. Нека освен това в някакъв сегмент $[a, b]$,

* Доказателство на теоремата на Дини — Липшиц и конструкция на току-що указания пример може да намерите например в книгата А. Зигмунд, «Тригонометрические ряды», т. I, «Мир», 1965, стр. 108 и 477.

имащ дължина, по-малка от 2π, тази функция принадлежи на класа на Хьолдер C^{α} с произволен положителен показател α $(0<\alpha\leq 1)$. Тогава за всяко δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$ тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони (към тази функция) равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$.

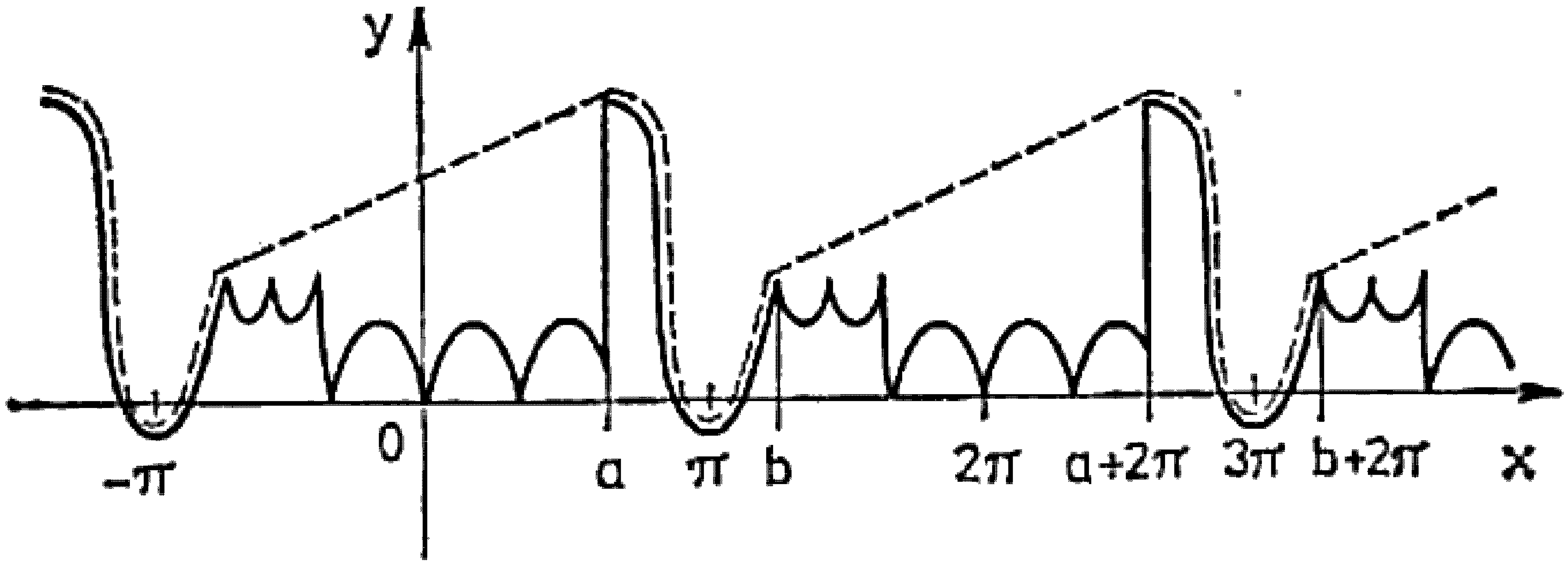
Доказателство. Да построим функция $g(x)$, която в сегмента $[a, b]$ съвпада с $f(x)$, в сегмента $[b, a+2\pi]$ е линейна функция от вида $Ax+B$, приемаща значение $f(b)$ при $x=b$ и $f(a)$ при $x=a+2\pi$*, и която периодично (с период 2π) е продължена от сегмента $[a, a+2\pi]$ върху цялата безкрайна права (на фиг. 8.1 непрекъснатата линия представлява графиката на функцията $f(x)$, а пунктираната линия — графиката на построената по нея функция $g(x)$).

Очевидно, че построената от нас функция $g(x)$ удовлетворява условието $g(-\pi)=g(\pi)$ и принадлежи на класа на Хьолдер C^{α} (със същия положителен показател α, както и $f(x)$) върху цялата безкрайна права**. Поради теорема 8.13 и забележка 1 тригонометричният ред на Фурие на функцията $g(x)$ е равномерно сходящ в цялата безкрайна права, а затова поради теорема 8.11 тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[a-\delta, b+\delta]$ за всяко δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$. Теоремата е доказана.

Забележка 4. Твърдението на теорема 8.14 остава в сила и за сегмент $[a, b]$, имащ дължина, равна на 2π (т. е. за случая $b=a+2\pi$), но в този случай при доказателството на теоремата трябва, фиксирайки произволно δ от интервала $0<\delta<\pi$, да вземем функцията $g(x)$, съвпадаща с $f(x)$ в сегмента $\left[a+\frac{\delta}{2}, a+2\pi-\frac{\delta}{2}\right]$, линейна в сегмента $\left[a+2\pi-\frac{\delta}{2}, a+2\pi+\frac{\delta}{2}\right]$ и периодично (с период 2π) продължена от сегмента $\left[a+\frac{\delta}{2}, a+2\pi+\frac{\delta}{2}\right]$ върху цялата безкрайна права. Ако сегментът $[a, b]$ има дължина, по-голяма от 2π, то от принадлежността на $f(x)$ на класа на Хьолдер C^{α} в този сегмент и от условието за периодичност на $f(x)$ (с период 2π)

* Условието функцията $Ax+B$ да приема стойността $f(b)$ при $x=b$ и $f(a)$ при $x=a+2\pi$ еднозначно определя константите A и B: $A=\frac{f(a)-f(b)}{a+2\pi-b}$, $B=\frac{(a+2\pi)f(b)-bf(a)}{a+2\pi-b}$.

** Достатъчно е да отчетем, че $g(x)$ е навсякъде непрекъсната и че линейната функция има ограничена производна и затова принадлежи на класа на Хьолдер C^{α} за всяко $\alpha\leq 1$.



Фиг. 8. 1

следва, че $f(x)$ принадлежи към класа C^{α} върху цялата безкрайна права, т. е. този случай се свежда към теорема 8.13.

6. Върху сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично хьолдерова функция

Дефиниция 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е частично хьолдерова в сегмента $[a, b]$, ако тази функция е частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и ако сегментът $[a, b]$ с помощта на краен брой точки $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ се разделя на подсегменти $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, на всеки от които тази функция принадлежи към класа C^{α_k} с някакъв положителен показател α_k $(0<\alpha_k\leq 1)$, като при определянето на класа на Хьолдер в подсегмента $[x_{k-1}, x_k]$ за стойността на функцията в краищата на сегмента трябва да се вземат граничните стойности $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_{k-1}-0)$*.

С други думи, областта, където е зададена всяка частично хьолдерова функция, се разпада на краен брой сегменти без общи вътрешни точки, на всеки от които тази функция принадлежи към класа на Хьолдер с някакъв положителен показател.

Всеки от тези сегменти ще наричаме област на гладкост на функцията.

Дефиниция 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е частично гладка в сегмента $[a, b]$, ако тази функция е частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и притежава в този сегмент частично непрекъсната производна**, т. е. ако функцията $f(x)$ е частично

* Както за всяка частично непрекъсната функция, за частично хьолдерова функция стойностите във всяка точка x_k трябва да са равни на полусумата от дясната и лявата гранична стойност в тази точка, т. е. трябва да е в сила равенството $f(x_k)=\frac{1}{2}[f(x_k+0)+f(x_k-0)]$.

** Вж. дефиниция 1 от т. 2, § 4 на тази глава.

непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и нейната производна $f'(x)$ съществува и е непрекъсната навсякъде в този сегмент с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които функцията $f'(x)$ има крайна дясна и лява гранична стойност.

Ясно е, че всяка частично гладка в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ е частично хьолдерова в този сегмент.

В сила е следната основна теорема.

Теорема 8.15. Нека $f(x)$ е частично хьолдерова в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция, която е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права. Тогава тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ във всяка точка x от безкрай- права към стойността $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, при това сходимостта на този ред е равномерна във всеки фиксиран сегмент, лежащ в областта на гладкост на функцията $f(x)$.

Доказателство. Твърдението на теоремата за равномерната сходимост във всеки фиксиран сегмент, лежащ в областта на веднага следва от теорема 8.14. Оттук следва и сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ във вътрешна точка от областта на гладкост на функцията x*. Остава да докажем сходимостта на тригонометричния ред на на функцията $f(x)$ във всяка точка на съединение на две на гладкост.

Да фиксираме една от тези точки и да я означим с x. Тогава съществуват константи M_1 и M_2 такива, че при всяко достатъчно малко положително t е изпълнено неравенството

$$(8.75)\qquad |f(x+t)-f(x+0)|\leq M_1 \, . \, t^{\alpha_1} \quad (0<\alpha_1\leq 1),$$

а при всяко достатъчно малко отрицателно t е в сила неравенството

$$(8.76)\qquad |f(x+t)-f(x-0)|\leq M_2 |t|^{\alpha_2} \quad (0<\alpha_2\leq 1).$$

Да означим с M по-голямото от числата M_1 и M_2, а с α по-малкото от числата α_1 и α_2. Тогава при $|t|\leq\delta$ в дясната част на всяко от неравенствата (8.75) и (8.76) може да напишем $M \, . \, |t|^{\alpha}$.

Да фиксираме сега произволно $\varepsilon>0$ и по него $\delta>0$, удовлетворяващо неравенството (8.70) и толкова малко, че при $|t|\leq\delta$ са в сила и двете неравенства (8.75) и (8.76), като в дясната част на тези неравенства може да вземем числото $M \, . \, |t|^{\alpha}$. Повтаряйки разсъжденията, проведени при доказателството на теорема 8.13, ще достигнем до равенството (8.71) и за доказателството на тео-

* Тъй като всяка вътрешна точка от участъка на гладкост може да се обхване със сегмент, лежащ в този участък изцяло.

ремата остава да се убедим, че във фиксираната точка x са справедливи оценките (8.72), (8.73) и (8.74). В забележка 2 на т. 5 отбелязахме, че оценките (8.73) и (8.74) са валидни за всяка частично непрекъсната и периодична (с период 2π) функция. Остава да докажем валидността на оценката (8.72) за всички естествени числа.

Имайки предвид, че $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ и че*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=2\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=2\int_{-\delta}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

може да запишем интеграла, стоящ в лявата част на (8.72), по следния начин:

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+ \tag{8.77}$$

* Тъй като функцията

$$\varphi(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

е четна, т. е. за всяко t удовлетворява условието $\varphi(-t)=\varphi(t)$, то имаме $\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt=\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt$ (достатъчно е в един от тези интеграли да извършим смяната $t=-\tau$) и затова

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+0)-f(x-0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

За да оценим интегралите, стоящи в дясната част на (8.77), ще се възползуваме от неравенствата (8.75) и (8.76), като поставим в десните части на тези неравенства числото $M\,.\,|t|^{\alpha}$. Като използуваме вече приложената при доказателството на теорема 8.13 оценка

$$\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leq\frac{\pi}{2|t|}\quad(\text{при } |t|\leq\pi)$$

и неравенството (8.70), ще получим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{M}{2}\left[\int_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt+\int_{-\delta}^{0}|t|^{\alpha-1}\,dt\right]=$$

$$=\frac{M}{\alpha}\,.\,\delta^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Оценката (8.72), а с нея и теоремата са доказани.

Следствие 1. Твърдението на теорема 8.15 ще бъде сигурно вярно, ако в нейната формулировка вместо частично хьолдерова вземем частично гладка (в сегмента $[-\pi,\pi]$) функция, която е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права.

За да формулираме още едно следствие, ще въведем едно ново понятие. Нека $0<\alpha\leq 1$.

Определение 3. Ще казваме, че функцията $f(x)$ удовлетворява в дадената точка x отляво (отдясно) условието на Хьолдер от ред α, ако за функцията $f(x)$ съществува в точката x дясната (лявата) граница и ако съществува такава константа M, че за всички достатъчно малки положителни (отрицателни) t е изпълнено неравенството

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^{\alpha}}\leq M\quad\left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|^{\alpha}}\leq M\right).$$

Очевидно, че ако функцията $f(x)$ има в дадената точка x дясна (лява) производна, т. е. съществува границата

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \quad \left(\lim_{t\to 0-0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} \right).$$

то функцията $f(x)$ удовлетворява в тази точка отдясно (отляво) условието на Хьолдер от произволен ред $\alpha \leqq 1$.

Следствие 2 (условие за сходимост на тригонометричен ред на Фурие в дадена точка). За сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично непрекъснатата и периодична (с период 2π) функция $f(x)$ в дадена точка от безкрайната права е достатъчно функцията $f(x)$ да удовлетворява в точката x отдясно условието на Хьолдер от някакъв положителен ред α_1 и отляво условието на Хьолдер от някакъв положителен ред α_2 (и още повече достатъчно е функцията $f(x)$ да има в точката x лява и дясна производна).

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че ако функцията $f(x)$ удовлетворява в точката x отдясно (отляво) условието на Хьолдер от ред α_1 (от ред α_2), то съществува константа M_1 (константа M_2) такава, че за всички достатъчно малки положителни (отрицателни) t е в сила неравенството (8.75) (неравенството (8.76)). Но изложеното от нас доказателство на теорема 8.15 използва само неравенствата (8.75) и (8.76), частичната непрекъснатост и периодичността на функцията $f(x)$.

Пример. Без да пресмятаме коефициентите на Фурие на функцията

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad -\pi \leqq x < 0, \\ 1/2 & \text{при} \quad x=0, \\ \sqrt{x} & \text{при} \quad 0 < x \leqq \pi, \end{cases}$$

може да твърдим, че тригонометричният ред на Фурие на тази функция е сходящ в точката $x=0$ към стойността $\frac{1}{2}$, тъй като функцията $f(x)$ има в тази точка лява производна и удовлетворява отдясно условието на Хьолдер от ред $\alpha_2=\frac{1}{2}$.

7. Сумируемост на тригонометричния ред на Фурие на непрекъсната функция по метода на средните аритметични. Вече отбелязахме, че тригонометричният ред на Фурие от непрекъсната и периодична (с период 2π) функция може да бъде разходящ (вж. т. 1). Ще докажем, че този ред въпреки това винаги е сумируем (равномерно в цялата безкрайна права) по метода на Чезаро (или по метода на средните аритметични)*.

Теорема 8.16 (теорема на Фейер)**. Ако функцията $f(x)$ е не-

* Вж. т. 1, § 7, гл. 1.

** Л. Фейер е доказал своята теорема през 1904 г. Л. Фейер — унгарски математик (1880—1959).

в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, средното аритметично от частичните суми на нейния тригонометричен ред на Фурие

$$\sigma_n(x, f)=\frac{S_0(x, f)+S_1(x, f)+\cdots+S_{n-1}(x, f)}{n}$$

(към тази функция) равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а ко- функцията е продължена върху цялата безкрайна права с 2π, то равномерно в цялата безкрайна права).

лство. От равенството (8.55) за $S_n(x, f)$ получаваме

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t\right] dt. \tag{8.78}$$

За да пресметнем сумата, стояща в квадратните скоби на (8.78), ще сумираме тъждествата

$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t=\cos kt-\cos(k+1) t$$

за всички $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ще получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t=$$

$$=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

С помощта на последното равенство (8.78) се преобразува във вида

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt. \tag{8.79}$$

От (8.79) веднага следва, че

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt=1, \tag{8.80}$$

тъй като лявата част на (8.80) е равна на средното аритметично на частичните суми на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)\equiv 1$, а всички указани частични суми са тъждествено равни на единица (вж. т. 2).

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. По теоремата на Вайерщрас 8.7 съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$(8.81)\qquad |f(x)-T(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

за всички x от безкрайната права. От линейността на средните аритметични имаме $\sigma_n(x,f)=\sigma_n(x,f-T)+\sigma_n(x,T)$, така че

$$(8.82)\qquad |\sigma_n(x,f)-T(x)|\leq|\sigma_n(x,f-T)|+|\sigma_n(x,T)-T(x)|.$$

Записваме равенството (8.79) за функцията $[f(x)-T(x)]$, отчитайки неотрицателността на функцията $\dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$, наричана ядро на Фейер, и използуваме оценката (8.81) и равенството (8.80). Получаваме

$$|\sigma_n(x,f-T)|\leq$$

$$(8.83)\qquad \leq\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-T(x+t)|\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi\cdot n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Неравенството (8.83) е изпълнено за всяко естествено число n. Да отбележим сега, че тригонометричният ред на Фурие на полинома $T(x)$ съвпада с този полином. Оттук следва, че всички частични суми $S_n(x,T)$, започвайки от някакво естествено число n_0, са равни на $T(x)$. Но това ни позволява за фиксираното по-горе произволно $\varepsilon>0$ да намерим естествено число N такова, че

$$(8.84)\qquad |\sigma_n(x,T)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

за всяко $n\geqq N$ и всяко x.

От неравенствата (8.82), (8.83) и (8.84) заключаваме, че $|\sigma_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon$ за всяко $n\geqq N$ и всяко x. Теоремата е доказана.

8. Заключителни бележки. 1°. За решаването на редица конкретни задачи се налага да развиваме функцията в тригонометричен ред на Фурие не на сегмента $[-\pi,\pi]$, а на сегмента $[-l,l]$, където l е произволно положително число. За прехода към този случай е достатъчно във всички изложени по-горе разсъждения да заменим променливата x с $\frac{\pi}{l}\cdot x$. Разбира се, при такава линейна смяна на променливите всички установени от нас резултати остават валидни. Тези резултати ще се отнасят за тригонометричния ред на Фурие

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{8.85}$$

със следните формули за коефициентите на Фурие:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,$$

(8.86)

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt$$

$$(k=1, 2, \dots).$$

Няма да формулираме отново всички установени теореми, а само ще отбележим, че във всички формулировки сегментът $[-\pi, \pi]$ трябва да се замени със сегмента $[-l, l]$, а периодът 2π — с период $2l$.

2°. Ще напомним, че функцията $f(x)$ се нарича **четна**, ако удовлетворява условието $f(-x)=f(x)$, и **нечетна**, ако удовлетворява условието $f(-x)=-f(x)$.

От вида (8.86) на тригонометричните коефициенти на Фурие следва, че за четна функция $f(x)$ всички коефициенти b_k $(k=1, 2, \dots)$ са равни на нула, а за нечетна функция всички коефициенти a_k $(k=0, 1, 2, \dots)$ са равни на нула. По такъв начин една четна функция $f(x)$ се разлага в тригонометричен ред на Фурие само по косинуси:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi}{l}kx,$$

а една нечетна функция $f(x)$ се разлага в тригонометричен ред на Фурие само по синуси:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Ще въведем често употребяваната **комплексна форма на записване** на тригонометричния ред на Фурие (8.85).

Като използуваме съотношенията (вж. т. 3, § 7, гл. 2)

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx-i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

$$e^{i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx+i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

лесно е да се убедим, че тригонометричният ред на Фурие (8.85) с коефициенти на Фурие (8.86) се записва във вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{8.87}$$

в който комплексните коефициенти c_k имат вида

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,.\,e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt$$

и се изразяват чрез коефициентите (8.86) по формулите

$$c_0=\frac{a_0}{2}\,,\ c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2}\,,\quad c_k=\frac{a_k+ib_k}{2}\quad (k=1,2,\dots).$$

§ 6. Кратни тригонометрични редове на Фурие

1. Понятие за кратен тригонометричен ред на Фурие и за неговите правоъгълни и сферични частични суми. Нека функцията на N променливи $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ е дефинирана и интегруема в N-мерния куб $-\pi\leq x_k\leq\pi$ $(k=1, 2, \dots, N)$. Този куб ще обозначим със символа $\prod$. Удобно е да запишем кратния тригонометричен ред на такава функция направо в комплексна форма, използувайки за съкращаване на записа понятието за скаларно произведение на два N-мерни вектора.

Нека $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ е вектор с произволни реални координати $x_1, x_2, \dots, x_N$, а $n=(n_1, n_2, \dots, n_N)$ да е вектор с *целочислени* координати $n_1, n_2, \dots, n_N$.

Кратен тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ се нарича ред

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n\, e^{-i(x,n)}, \tag{8.88}$$

в който числата $\hat{f}_n$, наричани *коефициенти на Фурие*, се определят с равенствата

$$\hat{f}_n=\hat{f}_{n_1n_2\dots n_N}=$$

$$(8.89)\qquad =(2\pi)^{-N}\cdot\underset{\Pi}{\int\ldots\int} f(y_1, y_2, \ldots, y_N)\, e^{i(y_1n_1+\cdots+y_Nn_N)}\, dy_1\ldots dy_N,$$

а символът (x, n) обозначава скаларното произведение на векторите x и n, равно на $x_1 . n_1+x_2 . n_2+\cdots+x_N . n_N$.

Разбира се, кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) може да се разглежда като ред на Фурие по ортонормираната (в N-мерния куб Π) система*, образувана с помощта на всевъзможните произведения от елементите на едномерни тригонометрични системи, взети по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_N$ съответно. Тази ортонормирана система е присто да се нарича **кратна тригонометрична система**.

Както и за всяка ортонормирана система, за кратната тригонометрична система е вярно **неравенството на Бесел**:

$$(8.90)\qquad \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|^2\leq(2\pi)^{-N}\underset{\Pi}{\int\ldots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\ldots dx_N$$

(тук $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е произволна непрекъсната (или интегруема) в N-мерния куб функция).

Да разгледаме въпроса за сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие. Ако в дадена точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ такъв ред **не е сходящ абсолютно**, то въпросът за неговата сходимост (поради теоремата на Риман 1.10) зависи от реда, в който се вземат неговите членове (или което е същото, зависи от реда на сумиране по индексите $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Широко са разпространени два начина за сумиране на кратния тригонометричен ред на Фурие — **сферичен** и **правоъгълен**.

Сферични частични суми на кратния тригонометричен ред на Фурие (8.88) се наричат сумите от вида

$$S_\lambda(x, f)=\sum_{|n|\leq\lambda}\hat{f}_n\, e^{-i(x, n)},$$

където сумирането е по всички целочислени стойности $n_1, n_2, \ldots, n_N$, удовлетворяващи условието $|n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_N^2}\leq\lambda$.

Ще казваме, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88)

* При това скаларното произведение на две произволни функции се дефинира като интеграл от произведението на тези функции върху куба Π.

е сумируем в дадената точка x по сферичния метод, ако в тази точка съществува границата $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x, f)$.

Правоъгълни частични суми на кратния тригонометричен ред на Фурие (8.88) се наричат сумите от вида

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(x, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \ldots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n e^{-i(x,\,n)}\,.$$

Ще казваме, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) е сумируем в дадената точка x по правоъгълния метод (или по метода на Принсхейм), ако в тази точка съществува границата

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ \cdots\cdots\\ m_N\to\infty}} S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(x, f)$$

всеки от индексите $m_1, m_2, \ldots, m_N$ клони независимо към безкрайност).

И двата метода за сумиране имат своите преимущества и недостатъци. При разглеждането на кратен тригонометричен ред на Фурие като ред на Фурие по ортонормирана система е естествено да подредим неговите членове по нарастването на $|n|$ и да използуваме сферичните частични суми.

Правоъгълните частични суми се използуват при изследване на поведението на кратните степенни редове около границата на областта му на сходимост. Трябва да отбележим, че определението на сумата на реда като граница на правоъгълните суми (за разлика от определението, опиращо се на границата на сферичните суми) не налага никакви ограничения на безкрайното множество от парциални суми на този ред.

Преди да формулираме условия за сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие, ще определим някои характеристики за гладкост на функция на N променливи.

2. Модул на непрекъснатост и класове на Хьолдер за функции на N променливи. Нека функцията $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е дефинирана и непрекъсната в N-мерната област D.

Определение 1. За всяко $\delta > 0$ *модул на непрекъснатост* на функцията $f(x)$ в областта D наричаме точната горна граница от модула на разликата $|f(x') - f(x'')|$ по множеството от всички точки x' и x'', които принадлежат на областта D и разстоянието $\rho(x', x'')$ между които е по-малко от δ.

Модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D ще означаваме със символа $\omega(\delta, f)$.

Определение 2. За произволно $\varkappa$ от полусегмента $(0,1]$ ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в областта D на класа на Хьолдер $C^{\varkappa}$ с показател $\varkappa$ и ще пишем $f(x)\in C^{\varkappa}(D)$, ако модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D има ред $\omega(\delta, f)=\bar{\bar{O}}(\delta^{\varkappa})$

Нека сега α е произволно (не непременно цяло) положително число. Винаги можем да представим това число във вида $\alpha=r+\varkappa$, където r е цяло, а $\varkappa$ се съдържа в полусегмента $(0,1]$.

Определение 3. Ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в D на класа на Хьолдер C^{α} с показател $\alpha>0$ и ще пишем ако всички частни производни на функцията $f(x)$ от r са непрекъснати в областта D и всяка частна производна от r принадлежи на класа $C^{\varkappa}(D)$, въведен в определение 2.

Условия за абсолютна сходимост на кратен тригонометричен на Фурие

Теорема 8.17. Ако функцията $f(x)$ периодично (с период 2π по всяка от променливите) е продължена върху цялото пространство E^N и притежава в E^N непрекъснати производни от ред $s=[N/2]+1$, където $[N/2]$ е цялата част на числото $N/2$, то кратният тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ към тази функция абсолютно и равномерно в цялото пространство E^N.

Доказателство. Да се договорим да означаваме със символа $\left(\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_n$ коефициента на Фурие на производната $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номер $n=(n_1, n_2, \ldots, n_N)$. Чрез интегриране по части получаваме, че $\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n = i\, n_k \cdot \hat{f}_n$ (за всяко $k=1, 2, \ldots, N$), така че $\sum_{k=1}^{N}\left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n\right| =$ $n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)$ и следователно

$$|\hat{f}_n| =(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-1}\cdot \sum_{k=1}^{N}\left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n\right|.$$

(8.91) е вярна не само за функцията f, но и за всяка производна на функцията f до ред $s-1$ включително. веднага следва съотношението

$$|\hat{f}_n| \leq (|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-s} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_N=s} \left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}}\right)_n\right|, \tag{8.92}$$

като в дясната част сумираме по всички цели неотрицателни

$s_1, s_2, \ldots, s_N$, удовлетворяващи условието $s_1+s_2+\cdots+s_N=s$ (така че броят на събираемите в тази сума е равен на N^s). От (8.92) следва*, че

$$|\hat{f}_n| \leqq$$

(8.93)

$$\leqq \frac{1}{2}(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-2s}+\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+\cdots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2.$$

Отчитаме, че $s=\frac{N}{2}+\varepsilon$, където $\varepsilon=1$ за четно N и $\varepsilon=\frac{1}{2}$ за нечетно N, и че

$$(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-2s}=(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-N-2\varepsilon}\leqq$$

$$\leqq |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

и получаваме от (8.93), че

$$|\hat{f}_n| \leqq \frac{1}{2}|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}+$$

(8.94)

$$+\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2.$$

За да бъде кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) абсолютно и равномерно сходящ, е достатъчно (поради признака на Вайерщрас) да докажем сходимостта на мажориращия го числов ред

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_n|,$$

но (поради неравенството (8.94)) сходимостта на последния ред е директно следствие от сходимостта за всяко $k=1, 2, \ldots, N$ на числовия ред $\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}|n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и от сходимостта за произволни $s_1, s_2, \ldots, s_N$ на реда

* Използувахме неравенствата $|a|\cdot|b|\leqq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ и $(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_p|)^2\leqq p\,(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_p^2)$.

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2,$$

следваща от неравенството на Бесел (8.90), приложено към непрекъснатата функция $\dfrac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_N^{s_N}}$.

Фактът, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) е сходящ именно към функцията $f(x)$, следва от пълнотата на кратната тригонометрична система*. Наистина, ако редът (8.88) би бил равномерно сходящ към някаква функция $g(x)$, то от възможността за почленно интегриране на такъв ред би следвало, че всички коефициенти на Фурие на функцията $g(x)$ съвпадат със съответните коефициенти на Фурие на функцията $f(x)$. Но тогава разликата $[f(x)-g(x)]$ би била ортогонална на всички елементи на кратната тригонометрична система и (поради пълнотата на тази система) би била равна на нула. Теоремата е доказана.

З а б е л е ж к а 1. Теорема 8.17 може да бъде уточнена. Вярно е следното т в ъ р д е н и е: ако функцията $f(x)$, периодична по всяка от променливите си (с период 2π), принадлежи в E^N на класа на Хьолдер C^α при $\alpha > \frac{N}{2}$, то кратният тригонометричен ред на Фурие на $f(x)$ е сходящ (към тази функция) абсолютно и равномерно в цялото пространство E^N.

Изясняването на условията за н е а б с о л ю т н а сходимост на кратния тригонометричен ред на Фурие изисква привличането на по-тънка техника.

* Пълнотата на кратната тригонометрична система веднага следва от пълнотата на съставящите я едномерни тригонометрични системи.

9. Преобразование на Фурие

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в цялата безкрайна права или в полуправата и не е периодична, то естествено е тази функция да се разложи не в тригонометричен ред на Фурие, а в така наречения интеграл на Фурие. Настоящата глава е посветена на изучаването на това разлагане.

Ще започнем с някои насочващи съображения. Нека периодичната в сегмента $[-l, l]$ функция $f(x)$ е разложена в ред на Фурие:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right),$$

където

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt.$$

Като заместим формално изразите за a_k и b_k в разлагането на функцията $f(x)$, получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kx\,.\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kx\,.\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi}{l}kx\,.\cos\frac{\pi}{l}kt+\sin\frac{\pi}{l}kx\,.\sin\frac{\pi}{l}kt\right]dt,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}k(t-x)\,dt.$$

Да предположим, че функцията $f(x)$ е абсолютно интегруема върху цялата права, т. е. че е сходящ несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$, и да извършим в равенството за $f(x)$ формално граничен преход при $l\to\infty$. Първото събираемо в дясната страна на горното равенство клони към нула при $l\to\infty$, а второто събираемо е интегрална сума за интеграла $\int_0^{\infty}g(\lambda)d\lambda$ на функцията

$$g(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

ако положим $\lambda_k=\frac{\pi}{l}k$ и $\Delta\lambda=\frac{\pi}{l}$.

Формалният граничен преход води до равенството

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Това равенство се нарича **формула на Фурие** (за обръщане).

Ако положим

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

то формулата на Фурие може да се запише във вида

$$f(x)=\int_0^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

Да пристъпим сега към по-строго изложение на теорията на преобразованието на Фурие.

§ 1. Представяне на функция с интеграл на Фурие

Навсякъде по-нататък ще искаме функцията $f(x)$ да е абсолютно интегруема върху безкрайната права $(-\infty, \infty)$, т. е. ще искаме да е сходящ несобственият интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{9.1}$$

Определение 1. Казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в безкрайната права $(-\infty, \infty)$ на класа L_1, т. е. $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, ако функцията $f(x)$ е интегруема по Риман върху всеки сегмент (казваме, че $f(x)$ е локално интегруема) и ако е сходящ несобственият интеграл (9.1).

1. Помощни твърдения. Една комплекснозначна функция $g(\lambda)$ на реална променлива λ ще разглеждаме като двойка реални функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$: $g(\lambda)=u(\lambda)+iv(\lambda)$. Комплексната функция $g(\lambda)$ е непрекъсната в дадена точка λ, ако и само ако всяка от функциите $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ е непрекъсната в тази точка.

Лема 1. Ако $f \in L_1(-\infty, \infty)$, то за произволно реално число λ съществува несобственият интеграл

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx, \tag{9.2}$$

наричан преобразование на Фурие на функцията $f(x)$ (или Фурие-образ на f). Функцията (9.2) непрекъсната по λ във всяка точка от безкрайната права.

Доказателство. От равенството $|f(x)e^{i\lambda x}|=|f(x)|$ и от сходимостта на интеграла (9.1) следва съществуването на несобствения интеграл $g(\lambda)$: $|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx<\infty$. От признака на Вайерщрас (вж. теорема 7.8, § 3, гл. 7) следва равномерната сходимост на интеграла (9.2) и поради непрекъснатостта на $e^{i\lambda x}$ по λ от теорема 7.9, § 3, гл. 7 следва непрекъснатостта на $g(\lambda)$ във всеки сегмент, т. е. във всяка точка от безкрайната права.

Лема 2 (лема на Риман). Нека функцията $f(x)$ е интегруема и абсолютно интегруема в интервала (a, b). Тогава

$$\int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx \to 0$$

при $\lambda \to \infty$ (λ е реално).

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ и да изберем сегмент $[c, d]$, съдържащ се в (a, b), такъв, че при всяко λ

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\, dx - \int_c^d f(x) e^{i\lambda x}\, dx \right| < \varepsilon.$$

Наистина от оценките

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\, dx - \int_c^d f(x) e^{i\lambda x}\, dx \right| \leq \int_a^c |f(x)\ e^{i\lambda x}|\, dx +$$

$$+ \int_d^b |f(x) e^{i\lambda x}|\, dx = \int_a^c |f(x)|\, dx + \int_d^b |f(x)|\, dx$$

и от абсолютната интегруемост на $f(x)$ върху (a, b) следва съществуването на такъв сегмент $[c, d]$.

Тъй като f е абсолютно интегруема в $[a, b]$, то съществува такава малка сума на Дарбу

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j, \quad m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),$$

че

$$0 \leqq \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{j=1}^{m} m_j \Delta x_j < \varepsilon, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}.$$

Да определим частично постоянна функция $p(x)$ в $[c, d]$ чрез $p(x) = m_j$ при $x \in [x_{j-1}, x_j]$ $j = 1, 2, \ldots, k$. Ясно е, че $p(x) < f(x)$ в $[c, d]$ и

$$0 \leqq \left| \int_c^d f(x) e^{i\lambda x}\, dx - \int_c^d p(x) e^{i\lambda x}\, dx \right| \leq \int_c^d |f(x) - p(x)|\, |e^{i\lambda x}|\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b (f(x) - p(x))\, dx < \varepsilon.$$

Обаче

$$\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}\,dx-\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{m}(m_j e^{i\lambda x})\Big|_{x_{j-1}}^{x_j}\to 0$$

при $\lambda\to\infty$. Следователно $\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx$ клони към нула при $\lambda\to\infty$ и с произволна точност приближава интеграла $\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx$. Следователно последният интеграл също клони към нула при $\lambda\to\infty$. Лемата е доказана.

Лема 3. Преобразованието на Фурие $g(\lambda)$ на функцията $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ клони към нула при $|\lambda|\to\infty$, т. е.

$$\lim_{\lambda\to\infty}|g(\lambda)|=0.$$

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От сходимостта на интеграла (9.1) следва, че може да изберем число $A>0$ такова, че

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx+\int_A^{\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

За така избраното A е в сила неравенството

$$|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|\le\left|\int_{-A}^{A} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поради предишната лема интегралът, стоящ в дясната част, може да бъде направен при достатъчно голямо λ по-малък от $\frac{\varepsilon}{2}$ и следователно $|g(\lambda)|<\varepsilon$.

Лемата е доказана.

Като следствие от нашите разсъждения получаваме, че

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x.f(x)\,dx=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x\,.\,f(x)\,dx=0.$$

2. Основна теорема. Формула за обръщане

Определение 2. За произволна функция $f(x)$ от класа $L_1(-\infty,\infty)$ границата

$$(9.3)\qquad \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-x)}\,f(t)\,dt\right]d\lambda$$

(при условие че тази граница съществува) ще наричаме разлагане на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие.

Възниква въпросът за съществуването на разлагане на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие.

Отговор дава следната теорема.

Теорема 9.1. Ако функцията $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и ако f удовлетворява в дадена точка x отдясно условието на Хьолдер от ред α_1, където $0<\alpha_1\leq 1$, а отляво — условието на Хьолдер от ред α_2, където $0<\alpha_2\leq 1$, то в точката x е изпълнено равенството

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

По такъв начин във всяка точка x, в която имаме $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (в частност във всяка точка на непрекъснатост на f) и за която са изпълнени условията на теоремата, е налице равенството

$$(9.4)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda,$$

където несобственият интеграл се разбира в смисъл на главна стойност, т. е. при симетрично клонене на границите на интегриране към безкрайност.

Доказателство. Тъй като $g(\lambda)$ е непрекъсната функция, то за всяко $A>0$ съществува интегралът

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{-ix\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}f(t)\,dt\right]d\lambda.$$

В интеграла отдясно поради равномерната по λ върху сегмента $[-A,A]$ сходимост на вътрешния (ограден с квадратни скоби) интеграл можем да сменим реда на интегриране по t и λ и да се възползуваме от равенствата

$$e^{i\lambda(t-x)}=\cos\lambda(t-x)+i\sin\lambda(t-x),$$

$$\int_{-A}^{A}\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{2\sin A(t-x)}{(t-x)},\quad \int_{-\lambda}^{\lambda}\sin\lambda(t-x)\,d\lambda=0,$$

и сменяме променливата $t=x+u$. Получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-A}^{A} e^{i\lambda(t-x)}\,d\lambda\right]f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Следователно за всяко $A>0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du+$$

(9.5)

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Тъй като $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$ и $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin Au}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$,

то

$$f(x+0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+0)\,\frac{\sin Au}{u}\,du,$$

$$f(x-0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-0)\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Изваждаме последните две равенства от (9.5) и получаваме

$$\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+u)-f(x+0)]\times$$

(9.6)

$$\times\frac{\sin Au}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Тъй като функцията $f(x)$ удовлетворява отдясно условието на Хьолдер от ред α_1, то съществува константа M_1 такава, че за достатъчно малки положителни u ще бъде изпълнено неравенството

$$|f(x+u)-f(x+0)|\leq M_1u^{\alpha_1},\quad 0<\alpha_1\leq 1.$$

Аналогично от условието на Хьолдер отляво от ред α_2 ще получим неравенството

$$|f(x+u)-f(x-0)|\leq M_2|u|^{\alpha_2}$$

за всички достатъчно малки по модул отрицателни u. Нека $M=\max\{M_1, M_2\}$ и $\alpha=\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогава горните две оценки са еквивалентни на следното неравенство:

$$|f(x+u)-f(x\pm 0)|\leqq M|u|^{\alpha} \tag{9.7}$$

при $|u|<\delta$, където $\delta>0$ е достатъчно малко.

Да препишем съотношението (9.6) по следния начин:

$$\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\times$$

$$\times\frac{\sin Au}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}\,du- \tag{9.8}$$

$$-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Нека е фиксирано произволно $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ изпълнява условието

$$\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Да оценим първите два интеграла в дясната част на (9.8). От (9.7) получаваме

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leqq\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}|f(x+u)-f(x+0)|\frac{du}{u}\leqq$$

$$\leqq\frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta}u^{\alpha-1}\,du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x-u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|f(x+u)-f(x-0)|\frac{du}{|u|}\leqq$$

$$\leqq\frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|u|^{\alpha-1}\,du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Затова

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\delta [f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|+$$

(9.9)

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^0 [f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

За да оценим третия интеграл в дясната част на (9.8), ще разгледаме функцията

$$g(u)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\,\frac{f(x+u)}{u} & \text{при } |u|\geqq\delta,\\ 0 & \text{при } |u|<\delta.\end{cases}$$

Функцията $g(u)\in L_1(-\infty,\infty)$ и затова поради лемата на Риман

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\sin Au\,du=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|u|\geq\delta} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du=0.$$

Но това и означава, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_1 такова, че при $A\geqq N_1$

(9.10)

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{|A|\geq\delta} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Освен това

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{A\delta}^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\longrightarrow 0$$

при $A\longrightarrow\infty$. Оттук следва, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ и за разглежданата точка x ще се намери N_2 такова, че

(9.11)

$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int_\delta^\infty\frac{\sin Au}{u}\,du\right|+\left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

при $A\geqq N_2$. Нека $N=\max\{N_1, N_2\}$. Заместваме (9.9), (9.10) и (9.11) в (9.8) и получаваме

$$\left|\int_{-A}^{A} g(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon$$

при $A\geqq N$. Теоремата е доказана.

Забележка. **Определение 3.** Ще казваме, че функцията $f(x)$, дефинирана в някоя прободена околност на точката x, удовлетворява в точката x условието на Дини, ако:

а) в точката x съществуват двете едностранни граници

$$f(x+0)=\lim_{u\to 0+0} f(x+u), \quad f(x-0)=\lim_{u\to 0+0} f(x-u);$$

б) двата интеграла

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\,du, \quad \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\,du$$

са *абсолютно* сходящи за някаква положителна стойност на ε.

Ясно е, че ако непрекъснатата в околност на точката x функция $f(x)$ удовлетворява в точката x условието на Хьолдер

$$|f(x+u)-f(x)|\leq M|u|^{\alpha}, \quad 0<\alpha\leq 1,$$

имаме

$$\frac{|f(x+u)-f(x)|}{u}\leq \frac{M}{|u|^{\alpha-1}},$$

следователно за функцията $f(x)$ е изпълнено и условието на Дини.

Обратното, разбира се, не е вярно.

Може да се докаже, че условието на Дини също осигурява разлагането на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие в дадената точка.

Да направим някои изводи от получените резултати. При условие че $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, за функцията $f(x)$ съществува преобразование на Фурие

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx.$$

Да го означим по следния начин: $g(\lambda)=F(f)$, където с F сме означили оператора на Фурие.

Ако са изпълнени условията на теорема 9.1 и условието $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, то, както доказахме, функцията се разлага в интеграл на Фурие, т. е. вярна е формулата

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Тази формула се нарича обратно преобразование на Фурие.

Да го означим по следния начин: $f(x)=\frac{1}{2\pi}F^{-1}(g)$, където с F^{-1} е означен обратният оператор на Фурие, приложен към функцията $g(\lambda)$, т. е. към образа на Фурие на функцията $f(x)$.

Да подчертаем, че въпреки че формулите за преобразованието на Фурие и за обратното преобразование на Фурие външно си приличат (вж. формулите (9.2) и (9.4)), по същество те са различни: в първата от тях интегралът съществува в обикновен смисъл (понеже $f\in L_1(-\infty, \infty)$), а във втората, изобщо казано, само в смисъл на главна стойност. Освен това равенството (9.2) е определението на функцията $g(\lambda)$, а равенството (9.4) съдържа твърдението, че интегралът вдясно е равен на изходната функция $f(x)$.

3. Някои примери. Да разгледаме правото и обратното преобразование на Фурие в случая на четна и нечетна функция.

1°. Случай на четна функция $f(x)$. Очевидно в случая, когато $f(x)=f(-x)$, от формула (9.2) получаваме

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,dx=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Оттук следва, че $g(\lambda)$ също е четна функция. Затова

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,dx.$$

Първата от тези формули се нарича *косинус преобразование на Фурие на функцията* $f(x)$, а втората — *обратно косинус преобразование на Фурие.*

2°. Случай на нечетна $f(x)$. Нека $f(x)=-f(-x)$. Тогава очевидно получаваме *синус преобразование на Фурие*

$$g(\lambda)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$$

и *обратно синус преобразование на Фурие*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx.$$

3°. Нека $f(x)=e^{-\gamma|x|}$, $\gamma>0$. Тогава

$$F(f)=g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}e^{i\lambda x}\,dx=2\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x}\cos\lambda x\,dx.$$

След двукратно интегриране по части получаваме

$$F(f)=g(\lambda)=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

4°. Нека

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x|\leq a, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>a. \end{cases}$$

Тогава

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda x}\,dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Да отбележим, че $g(\lambda)$ не принадлежи на $L_1(-\infty,\infty)$.

§ 2. Някои свойства на преобразованието на Фурие

Да установим връзка между скоростта на намаляване на функцията $f(x)$ и гладкостта (диференцируемостта) на нейното преобразование на Фурие, а също и между гладкостта на функцията и скоростта на намаляване на нейното преобразование на Фурие.

Верни са твърденията.

Твърдение 1. Нека за някое естествено число k функцията $(1+|x|)^k f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Тогава преобразованието на Фурие $g(\lambda)$ на функцията $f(x)$ е диференцируемо k пъти, при това производната по λ от произволен ред $m=1, 2, \ldots$ може да се пресметне чрез диференциране под знака на интеграла (9.2), т. е. по формулата

$$g^{(m)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(ix)^m e^{i\lambda x}\,dx,\; m=1, 2, \ldots, k. \tag{9.12}$$

Доказателство. За всяко $m=1, 2, \ldots, k$ е вярно неравенството

$$|(e^{ix\lambda}f(x))^{(m)}|=|e^{ix\lambda}(ix)^m f(x)|\leq(1+|x|^k)\,.\,|f(x)|.$$

Интегралът $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^k)|f(x)|\,dx$ е сходящ. От сходимостта на този интеграл и от признака на Вайерщрас (вж. теорема 7.8 от § 3, гл. 7) следва равномерната по λ сходимост на интеграла

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx$ в произволен сегмент. От теорема 7.14, § 3, гл. 7 следва възможността да се диференцира този интеграл по λ до ред $m=1, 2, \dots, k$, а също и верността на формула (9.12). Твърдението е доказано.

Твърдение 2. Нека функцията $f(x)$ да има във всяка точка x всички производни до ред $k\geq 1$ включително, като при това $f(x)$ и всички $f^{(m)}(x)$, $m=1, 2, \dots, k$, са абсолютно интегруеми в $(-\infty, \infty)$ и за произволно m между 0 и $k-1$ $f^{(m)}(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ $(f^{(0)}(x)\equiv f(x))$.

Тогава $|g(\lambda)|=\overline{\overline{O}}(|\lambda|^{-k})$ при $|\lambda|\to\infty$, където $g(\lambda)$ е преобразованието на Фурие на $f(x)$.

Доказателство. Нека $A>0$. Тогава

$$\int\limits_{-A}^{A} f^{(k)}(x)\,e^{i\lambda x}\,dx=\Big[f^{(k-1)}(x)\,e^{i\lambda x}\Big]_{-A}^{A}-\Big[f^{(k-2)}(x)\,(i\lambda)\,e^{i\lambda x}\Big]_{-A}^{A}+$$

$$+\dots+(-i)^k\lambda^k\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx.$$

Оставяме A да клони към безкрайност и отчитаме, че производните на функцията $f(x)$ клонят към нула. Получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\,e^{i\lambda x}\,dx=(-i\lambda)^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx=(-i\lambda)^k g(\lambda).$$

Съгласно лема 3 преобразованието на Фурие на функцията $f^{(k)}(x)$ клони кум нула при $|\lambda|\to\infty$. Следователно

$$|g(\lambda)|=O(|\lambda|^{-k}).$$

Твърдението е доказано.

Твърдение 3 (равенство на順Планшерел*). Нека функцията $f(x)$ и нейната втора производна да са абсолютно интегруеми в $(-\infty, \infty)$, $f(x)\to 0$, $f'(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Нека функцията $\varphi(x)$ да е абсолютно интегруема в $(-\infty, \infty)$. Тогава

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda)}\,d\lambda,$$

където $g(\lambda)=F(f)$, $\psi(\lambda)=F(\varphi)$ са преобразованията на Фурие на

* М. Планшерел — швейцарски математик (1885—1967).

функциите f и φ съответно и $\overline{\psi(\lambda)}$ е функцията, комплексно спрегната към $\psi(\lambda)$.

Доказателство. По формулата за обръщане $f(x)=$
$=\frac{1}{2\pi}\ F^{-1}(g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, dx$, като съгласно твърдение 2

$$|g(\lambda)|\leq c(1+|\lambda|)^{-2}.$$

Следователно интегралът за $f(x)$ е сходящ абсолютно и равномерно (относно x) върху $(-\infty, \infty)$.

Умножаваме двете части на формулата за $f(x)$ с $\varphi(x)$ и интегрираме по x от $-A$ до A. Получаваме

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\; e^{-i\lambda x}\,d\lambda\right]dx.$$

В дясната част на тази формула можем да сменим реда на интегриране, тъй като интегралът $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$ е равномерно сходящ по λ върху $(-\infty, \infty)$. Затова

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\left[\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right]}g(\lambda)\,d\lambda, \tag{9.13}$$

където чертата означава комплексното спрягане.

От оценката

$$\left|\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right||g(\lambda)|\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,dx\,.\,c(1+|\lambda|)^{-2}$$

и от признака на Вайерщрас интегралът в дясната част на (9.13) е сходящ равномерно по A върху цялата безкрайна права. Следователно в (9.13) може да извършим граничен преход при $|A|\to\infty$ под знака на интеграла. Получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda)}\,d\lambda,$$

което и трябваше да докажем.

В края на този параграф ще докажем теоремата на Котелников*, която играе важна роля в теорията на радиовръзките. За тази цел да направим няколко предварителни пояснения. Нека функцията $f(x)$ е периодична в сегмента с период $2l$ и абсолютно интегруема върху интервала $[-l, l]$. Да разложим функцията $f(x)$ в ред на Фурие (който в случая, когато удовлетворява допълнителни условия, е сходящ към нея)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{\pi}{l}kx}.$$

Функцията $f(x)$ се нарича сигнал, числата $\{a_0, a_k, b_k\}$ или $\{c_k\}$ — спектър на сигнала, числото $\frac{k}{2l}$ се нарича честота на сигнала f. Разлагането на периодична функция в ред на Фурие се нарича хармоничен анализ на дадената функция.

Ако функцията $f(x)$ не е периодична, то нейният ред на Фурие, както знаем, може да бъде заменен с интеграла на Фурие на функцията $f(x)$ и

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Функцията $f(x)$ може, както преди, да наричаме сигнал, функцията $g(\lambda)$ — спектър на сигнала (в дадения случай спектърът е непрекъснат), λ — честота на сигнала.

Задачата за възстановяване на сигнал по неговия спектър е важна за практиката. Ще подчертаем, че често не е необходимо да знаем спектъра $g(\lambda)$ за всички честоти λ, а и приборите улавят спектъра само в някакъв диапазон от честоти $|\lambda|\leqq a$ (например човешкото ухо улавя сигнали в диапазон от 20 херца до 20 килохерца).

Затова ще считаме, че сигналът $f(x)$ (x е времето, $-\infty<x<\infty$) има финитен спектър, различен от нула само за честоти λ, $|\lambda|\leqq a$. По такъв начин при $|\lambda|>a$ имаме, че $g(\lambda)\equiv 0$. Следователно

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda. \tag{9.14}$$

Да разложим в сегмента $[-a, a]$ функцията $g(\lambda)$ в ред на Фурие

$$g(\lambda)=\sum_{-\infty}^{\infty}d_k e^{i\frac{\pi}{a}k\lambda}.$$

* В. А. Котельников (роден през 1908 г.) — известен съветски академик, специалист в теорията на радиовръзките.

Отчитаме (9.14) и получаваме, че

$$(9.15) \qquad d_k=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} g(\lambda)e^{-i\frac{\pi}{a}\lambda k}\,d\lambda=\frac{\pi}{a}f\left(+\frac{\pi}{a}k\right).$$

Заместваме в реда за $g(\lambda)$ тези коефициенти и после $g(\lambda)$ в интеграла (9.14). Получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\pi}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)e^{-i\lambda x+i\frac{\pi}{a}\lambda k}\right)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\int_{-a}^{a}e^{i\lambda\left(\frac{\pi}{a}k-x\right)}\,d\lambda.$$

Доказахме следната теорема.

Теорема 9.2 (на Котелников). За сигнала $f(x)$ с финитен спектър $g(\lambda)$ е в сила съотношението

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\frac{\sin a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}.$$

Теорема 9.2 показва, че сигнал, зададен от функцията $f(x)$ с финитен спектър $g(\lambda)$, съсредоточен в ивицата честоти $|\lambda|\leq a$, се възстановява само по отчетените стойности $f\left(\frac{\pi}{a}k\right)$, предавани през равни интервали от време $\frac{\pi}{a}$.

§ 3. Кратен интеграл на Фурие

В този параграф ще обсъдим началните понятия за кратен интеграл на Фурие. Нека функцията на $N\geq 2$ променливи $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ е такава, че съществува несобственият интеграл

$$\int\underset{E^N}{\dots}\int f(x_1, x_2, \dots, x_N)\,dx_1\,dx_2\dots dx_N.$$

Преобразование на Фурие (образ на $f(x)$) на тази функция ще наричаме израза

$$g(\lambda)=g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)=\int\underset{E^N}{\dots}\int f(x_1, x_2, \dots, x_N)e^{i(x,\lambda)}\,dx_1dx_2\dots dx_N,$$

където (x, λ) означава скаларното произведение на векторите $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, т. е.

$$(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} x_i \lambda_i .$$

По същия начин, както в § 1, можем да докажем, че $g(\lambda)$ е непрекъсната функция на λ в E^N и клони към нула при

$$|\lambda| = \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Границата

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int \ldots \int_{E^N} g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)\, e^{-(x, \lambda)}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_N ,$$

при условие че тя съществува, се нарича разлагане на функцията $f(x)$ в N-кратен интеграл на Фурие. С граничен преход получаваме, както и в случая на една променлива, следната формула за обръщане:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \ldots \int_{E^N} g(\lambda)\, e^{-i(x, \lambda)}\, d\lambda ,$$

където

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$

λ) е

ıята

об-