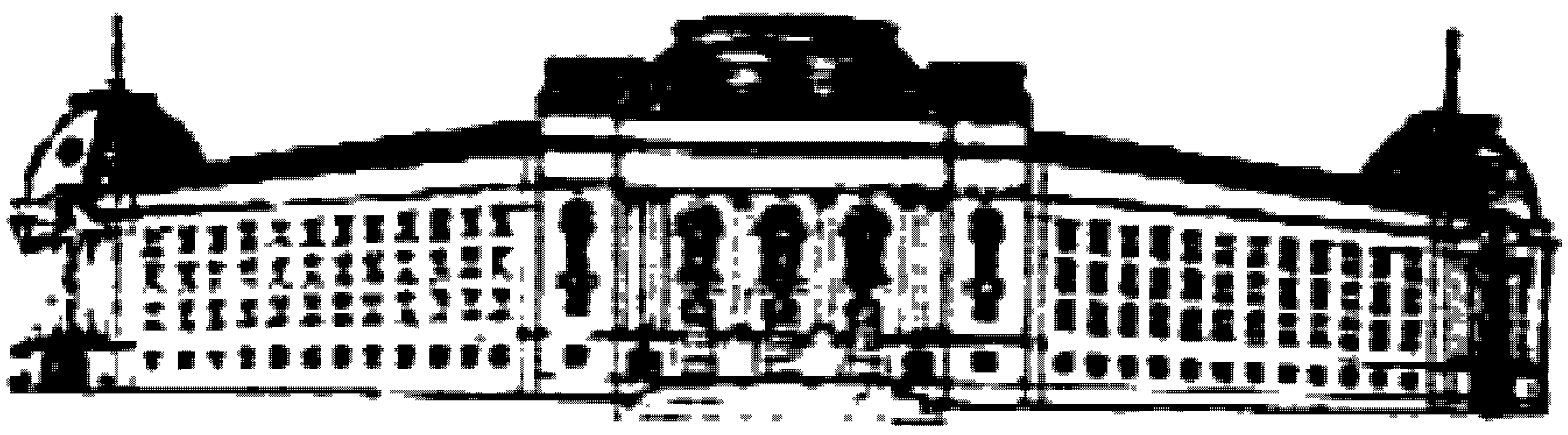


СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ
МЕЖДУ
МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ
„М. В. ЛОМОНОСОВ"
И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ",
НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТИТЕ
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА
И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничи
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

Под редакцията на
академик А. Н. Тихонов

Второ преработено
издание

НАУКА И ИЗКУСТВО
1984
СОФИЯ

Владимир Бабев

Индекс 51

Книгата представлява учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за първата година на обучение на студентите по специалностите „математика“, „механика“ и „приложна математика“. В нея са включени теория на реалните числа, теория на границите, непрекъснатост на функции, диференциално и интегрално смятане на функции на една променлива и техните приложения, диференциално смятане на функции на повече променливи и теория на неявните функции (както в евклидови, така и в нормирани пространства).

Учебникът съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и повишено. Елементарното ниво съответствува на програмата за техническите вузове със задълбочено изучаване на математика; основното ниво отговаря на програмата за специалностите „приложна математика“ и „физика“ в университетите; повишеното ниво включва допълнителен материал, който обикновено се изучава в механо-математическите факултети на университетите.

В предлагания „Математически анализ“ са намерили голямо отражение порасналата роля на числените методи и приложението на математическия анализ за тяхното развитие.

Съдържание

3. Теория на границите

4. Непрекъснатост на функция

5. Диференциално смятане

6. Основни теореми за диференцируемите функции

7. Изследване графиката на функция и намиране на екстремални стойности

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

9. Определен интеграл на Риман

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

13. Функции на няколко променливи

14. Неявни функции

Предговор
към второто издание

Второто издание на учебника не се различава много от първото издание. Съкратени са няколко параграфа, главно от третото равнище. Усъвършенствувани са някои доказателства и са направени редица редакционни изменения. Отстранени са печатните грешки забелязани в първото издание.

В това издание са рационализирани означенията и е използван знакът $\square$ *за край на доказателството.*

АВТОРИТЕ

Предговор към първото издание

Днешният прогрес в математиката до голяма степен е свързан с развитието на електронната изчислителна техника. Математическите методи за изследване проникват във всички области на човешката дейност. Всичко това повишава интереса към математиката от страна на другите науки, използващи в различна степен математическите знания, и поставя нови задачи пред самата математика.

Във връзка с това възниква необходимостта да се напише учебник по математически анализ, в който са взети пред вид тези закономерности.

Обстоятелството, че решаването на математическите задачи се реализира чрез автоматични сметачни машини (АСМ) с помощта на алгоритми, поставя повишени изисквания за точност в алгоритмичното ниво на изложение на математическите дисциплини. Разбира се, едно такова изложение трябва да се основава върху класическите концепции на математиката, без да ги замъглява. Тези общи принципи заедно със задачата за точно, ясно и достъпно изложение са заложени в предлаганата на читателя книга. Тя е написана в съответствие със съгласуваната между Московския и Софийския университет програма за преподаване на математически анализ първа част.

В предлагания учебник е отделено голямо внимание на въпросите за оптимизиране, които играят важна роля в математиката и нейните приложения. По-специално в него за първи път в учебната литература от този род е изложен в завършен вид алгоритъм за намиране както на вътрешен, така и на контурен екстремум на функция. В учебника е отделено значително място за изучаване на въпроса за изходната информация, която е достъпна при решаването на дадена задача. Така например за намиране екстремума на *функция на една променлива авторите предлагат алгоритъм, основан само на информацията за стойностите на функцията в точките от дефиниционната ѝ област. Предлаганият алгоритъм не използва стойностите на производната на функцията в дефиниционната ѝ област и е приложим за намиране на екстремум на недиференцируеми функции. Тази постановка е типична при решаване на задачи за оптимизиране на производствени процеси.*

При избора на метода на изложение авторите са се ръководили от това, че подборът на алгоритъма за решаване на дадена задача зависи от информацията, която може да бъде използвана при поставянето на тази задача. Така например при въвеждането на понятието определен интеграл на Риман авторите тръгват от концепция, основаваща се на използване стойностите на функцията в точки от сегмента. Тази концепция е очевидно за предпочитане в сравнение с въвеждането на определен интеграл на Риман с помощта на примитивна функция, тъй като тя отговаря на идеите на числените методи за пресмятане на определени интеграли чрез използване на АСМ.

В заключение искам да изкажа увереност, че предлаганата книга ще способствува за повишаване на математическата култура на читатели с различни изисквания към обема на математическите знания.

АКАД. А. Н. ТИХОНОВ

Увод

Тази книга е учебник по математически анализ, написана по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за първата година на обучение. Тя напълно обхваща материала за първата година на обучение, предвиден в програмата за студенти от университетите на СССР и НРБ по специалностите „математика" „механика" и „приложна математика".

Особеност на книгата е, че тя съдържа три ясно отделими едно от друго нива на изложение: елементарно, основно и повишено, като за разбирането на материала от елементарното ниво не се изисква да се чете материалът от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала от основното ниво не се изисква да се чете материалът от повишеното ниво.

Елементарното ниво отговаря на програмите за техническите ВУЗ-ове в СССР с повишено изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмите за специалностите „приложна математика" и „физика" на университетите в СССР и България; материалът от повишеното ниво допълва материала от основното ниво с раздели, които обикновено се изучават в механо-математическите факултети на университетите.

Текстът, отделен в книгата с две вертикални черти, се отнася към повишеното ниво на изложение; текстът, отделен с една вертикална черта — към основното ниво, а останалият текст е съдържанието на елементарното ниво на изложение.

Книгата съдържа уводна глава, в която се илюстрира възникването на основните понятия в математическия анализ с цел да се улесни възприемането на следващия материал.

В нея е отразена нарасналата роля на числените методи и са поместени редица примери за приложение на апарата на математическия анализ при пресмятане стойностите на елементарни функции, интеграли, корени на уравнения и намиране на екстремални точки.

Днес в СССР и у нас има много учебници по математически анализ, сред които особено сполучливи по наше мнение са учебниците, написани от Л. Д. Кудрявцев и С. М. Николски в СССР и от Я. Тагамлицки в НР България. Авторите на тази книга несъмнено са изпитали влиянието на тези прекрасни учебници. При написването на текста те са използвали и някои материали от книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк „Основи на математическия анализ", а също така опита от преподаването в университетите.

Авторите изказват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

С особена благодарност те отбелязват труда на В. М. Говоров и Г. Христов, който далеч надхвърли рамките на обикновеното редактиране.

Авторите са благодарни също за ценните бележки на Л. Д. Кудрявцев, И. И. Ляшко, В. Л. Макарова, Д. Дойчинов и Т. Боянов.

1. Увод в математическия анализ

Ще започнем нашето изложение с изясняване на кръга от понятия и проблеми, които предстои да срещнем при изучаването на математическия анализ. При това веднага трябва да се уговорим, че дадените в тази уводна глава формулировки често имат предварителен характер и изискват допълнително уточняване.

1. Да разгледаме най-простия вид движение — движението на материална точка по права линия, и да изясним какви математически понятия възникват при описването на такова движение.

Да предположим, че материалната точка се движи по оста Oy, а x е времето, отчитано от даден начален момент. За характеризиране на това движение трябва да се знае правилото, посредством което на всеки момент от време x се съпоставя координата y на движещата се точка. Такова правило се нарича *закон на движение*.

Като се абстрахираме от физическия смисъл на променливите x и y, идваме до понятието функция, което е вече известно от курса по математика в средните училища. Това е едно от най-важните понятия в цялата математика.

Ако по някакво правило на всяка стойност на една променлива x се съпоставя определена стойност $f(x)$ на друга променлива y, казваме, че променливата y е функция на променливата x, и пишем $y=y(x)$ или $y=f(x)$.

При това променливата x се нарича ***аргумент*** *или* ***независима променлива,*** *а променливата y —* ***функция*** *или* ***зависима променлива.***

Буквата f в записа $y=f(x)$ често се нарича ***характеристика*** *на разглежданата функция, а стойността $f(x)$, отговаряща на дадена фиксирана стойност на x, се нарича* ***частна стойност*** *или просто* ***стойност на функцията в точката*** *x.*

Ще отбележим веднага, че дадената формулировка на понятието функция се нуждае от уточняване, тъй като в нея нищо не се казва за това, от какво множество се вземат стойностите на независимата променлива x.

Множеството, от което се вземат стойностите на независимата променлива x, се нарича обикновено ***дефиниционна област на функцията.*** Задаването на дефиниционните области на функциите изисква развиването на теорията на числовите множества и общата теория на множествата.*

За означаване на аргумента, функцията и нейната характеристика могат да се използват различни букви. Така например записът $\alpha = \varphi(t)$ означава, че променливата α е функция на аргумента t, при това характеристиката на тази функция е означена с φ.

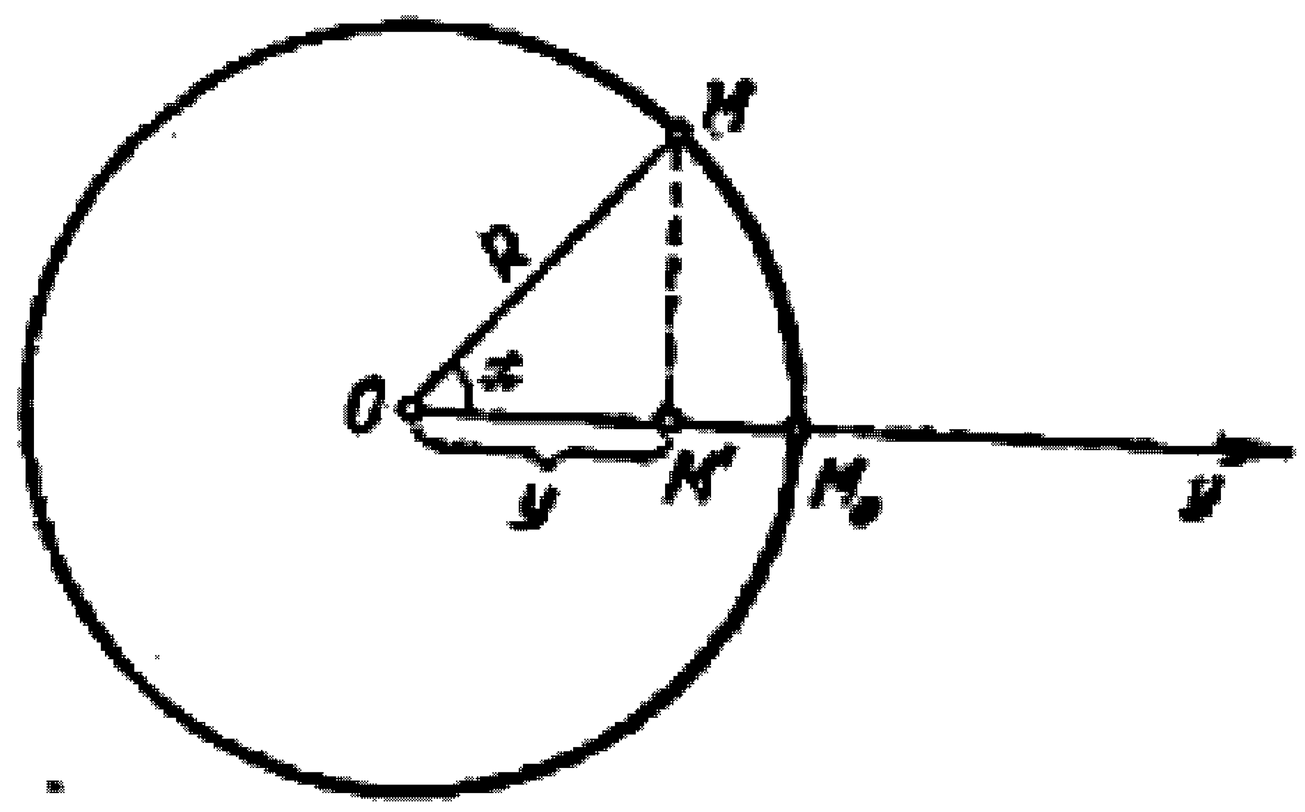
2. Често се налага да се разглежда такава функция $y = f(x)$, аргументът x на която е също функция $x = \varphi(t)$ на друга променлива t. В такъв случай се казва, че променливата y е ***сложна функция*** на аргумента t, а променливата x се нарича ***междинен аргумент.*** Такава сложна функция се нарича още ***суперпозиция*** на функциите f и φ и се означава с $y = f(\varphi(t))$.

Ще разгледаме един прост пример, илюстриращ използването на понятието сложна функция. Нека материалната точка M се върти равномерно по окръжност с радиус R с постоянна ъглова скорост ω. Ще намерим закона на движението на проекцията M' на точката M върху оста Oy, минаваща през центъра O на окръжността и лежаща в нейната равнина (фиг. 1.1). Естествено е да предполагаме, че в началния момент $t = 0$ движещата се точка M се намира в точката M_0, която е пресечна точка на окръжността с оста Oy. Да означим с y координатата на проекцията M' на точката M върху оста Oy, а с x — ъгъла M_0OM, на който се завърта точката M за време t. Очевидно $y = R\cos x$, $x = \omega t$ и ще получим, че координатата y на проекцията M' е сложна функция на времето t от вида $y = R\cos x$, където $x = \omega t$. Тази сложна функция може да се запише във вида $y = R\cos\omega t$. Ще отбележим, че движението по закона $y = R\cos\omega t$ е което да се нарича в механиката ***хармонично трептене.***

3. Важна характеристика на движението на материална точка е нейната скорост във всеки момент от времето t (моментна скорост). Ако материална точка се движи по оста Oy по закона $y = f(x)$, то като фиксираме произволен момент от време x и вземем някакво нарастване на времето Δx, можем да твърдим, че в

---

* В зависимост от характера на дефиниционната област на функцията и от множеството на стойностите ѝ в различните раздели на анализа функциите се наричат още ***изображения, оператори, функционали*** и т. н. Едно изображение се нарича ***взаимно еднозначно*** или ***1,1-значно,*** ако при него всяко y съответствува само на едно x. При взаимно еднозначните изображения съществува ***обратно изображение,*** съпоставящо на всяко y определено x (именно това, което съответствува на даденото y при изходното изображение).



Фиг. 1.1

момента x движещата се точка има координата $f(x)$, а в момента $x+\Delta x$ — координата $f(x+\Delta x)$.

По такъв начин числото $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ представлява пътят, изминат от движещата се точка за интервала време от x до $x+\Delta x$.

Оттук следва, че частното

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

наричано ***диференчно частно***, представлява ***средна скорост*** на движещата се точка за интервала време от x до $x+\Delta x$.

Моментна скорост (или просто ***скорост***) *на движещата се точка се нарича границата, към която клони средната скорост* (1.1), *когато интервалът от време* Δx *клони към нула.*

Ако се използва символът за граница, моментната скорост $v(x)$ в момента x се записва така:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Физическото понятие за моментна скорост води до основното математическо понятие производна. Като се абстрахираме от механичния смисъл на разглежданата по-горе функция f, *ще наречем производна на произволна функция* f *в дадена фиксирана точка* x *границата в дясната страна на* (1.2) (*разбира се, при условие, че тази граница съществува*).

За означаване на производната на функцията f в точката x се използва символът $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операцията намиране на производна се нарича **диференциране**

Горните разглеждания показват, че при дефиниране на производна на функция основна роля играе понятието граница на функция.

Предварителна представа за понятието граница на функция (а и за понятието производна) се дава в курса по математика в средното училище.

Строгото и последователно изучаване на понятието граница е възможно само на основата на строго изградена теория на реалните числа. Така например без строго изградена теория на реалните числа е невъзможно да се установи съществуването на следните две важни граници:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \text{ и } \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t},$$

които възникват, както ще видим по-нататък, при пресмятане производните на функциите $y=\sin x$ и $y=\log_a x$.

Горните разглеждания показват, че въпросът за съществуване и пресмятане на производни води до необходимостта от изграждане на строга теория на реалните числа и на тази основа — теория на границите.

4. Ще пристъпим към намирането на производните на две конкретни елементарни функции $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ и ще изясним какви математически проблеми възникват при това.

Най-напред ще намерим производната на функцията $y=\sin x$ в произволна фиксирана точка x. За тази функция диференчното частно (1.1) има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\cos(x+\Delta x/2).$$

Така производната на функцията $y=\sin x$ в точката x е равна по определение на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right\} \tag{1.3}$$

(при условие, че тя съществува).

Може да се очаква, че

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x. \tag{1.4}$$

Ще отбележим обаче, че не за всяка функция f е изпълнено равенството

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x/2)=f(x). \tag{1.5}$$

Функцията f, за която е изпълнено равенството (1.5), *се нарича* ***непрекъсната*** (в точката x). Понятието непрекъснатост на функция е едно от най-важните математически понятия и ще бъде основно изучено в този курс по математически анализ. В частност ще бъде доказано, че функцията $y=\cos x$ е непрекъсната във всяка точка x, т. е. във всяка точка x е изпълнено равенството (1.4).

За пресмятането на границата (1.3) не е достатъчно да се докаже само верността на (1.4). Необходимо е още да се пресметне и границата

$$(1.6)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\quad (t=\Delta x/2).$$

По-нататък ще докажем, че границата (1.6), наричана ***първа забележителна граница***, съществува и е равна на единица.

Само след като установим непрекъснатостта на функцията $y=\cos x$ (т. е. равенство (1.4)) и пресметнем първата забележителна граница (1.6), можем да твърдим, че границата (1.3) съществува и е равна на $\cos x$ или че производната на функцията $y=\sin x$ съществува и е равна на $\cos x$.

Ще минем сега към пресмятане на производната на функцията $y=\log_a x$, считайки, че $0<a\neq 1$, като ще фиксираме произволна точка $x>0$. За тази функция диференчното частно (1.1) е

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

($\Delta x\neq 0$ и се избира така, че $x+\Delta x>0$). Производната на функцията $y=\log_a x$ във всяка точка $x>0$ е равна по определение на границата

$$(1.7)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

(при условие, че тази граница съществува). Да преобразуваме дробта (1.7) чрез следните операции: 1) заменяме разликата от логаритми с логаритъм на частно; 2) умножаваме и разделяме на една и съща величина $x>0$); 3) внасяме множителя, стоящ пред логаритъма, под знака на логаритъма, с което той става степенен показател. В резултат за границата (1.7) получаваме

$$(1.8)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{1/t}\right\}$$

$$(t=\Delta x/x\to 0).$$

Да разгледаме отделно границата на израза $(1+t)^{1/t}$ при $t\to 0$:

$$(1.9)\qquad \lim_{t\to 0}[(1+t)^{1/t}].$$

Тази граница се нарича ***втора забележителна граница.*** В този курс ще бъде доказано, че тази граница съществува и че тя е равна на ирационалното число e, което с точност до петнадесетия знак след десетичната запетая е

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Освен това ще бъде доказана непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ във всяка точка $x > 0$ и по-специално в точката $x = e$. Но тогава от съществуването на граница (1.9), равна на e, следва, че

$$\lim_{t\to 0} \log_a [(1+t)^{1/t}] = \log_a e.$$

Последното равенство и равенството (1.8) ни позволяват да твърдим, че границата на (1.7) е

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

След като бъде пресметната втората забележителна граница и установена непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ в точката e, ще можем да твърдим, че логаритмичната функция има производна и

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \text{ при } 0<a\neq 1,\ x>0.$$

5. В математиката освен разгледаните две функции $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ се изучават още и следните функции: $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=x^\alpha$ (α — реално число), $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. *Тези функции е прието да се наричат* ***основни елементарни функции.***

Забележително е, че при пресмятането на производните на основните елементарни функции не възникват никакви други трудности освен тези, които срещнахме при пресмятането на производните на функциите $y=\sin x$ и $y=\log_a x$. За пресмятане на производните на основните елементарни функции са необходими само аритметичните свойства на операцията граничен преход, двете забележителни граници и непрекъснатостта на всяка от тези функции.

Таблицата на производните на всички основни елементарни функции е следната:

1°. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x>0,\ \alpha$ — реално число$)$.

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ $(0<a\neq 1,\ x>0)$,

при $a=e$ имаме $(\log_e x)' = \frac{1}{x}$.

3^0. $(a^x)' = a^x \log_e a$ $\qquad (0 < a \neq 1)$,

при $a = e$ имаме $(e^x)' = e^x$.

4^0. $(\sin x)' = \cos x$.

5^0. $(\cos x)' = -\sin x$.

6^0. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$ ($x \neq \pi/2 + n\pi$, където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

7^0. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$ ($x \neq n\pi$, където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

8^0. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ $\qquad (|x| < 1)$.

9^0. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ $\qquad (|x| < 1)$.

10^0. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = 1/(1+x^2)$.

11^0. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

Обосновка на горната таблица е една от задачите на тази част от математическия анализ, която се нарича ***диференциално смятане***.

Традиционната задача на класическото диференциално смятане е пресмятането на производната на всяка функция f, която се получава от изброените по-горе основни елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и краен брой аритметични действия (събиране, умножение, изваждане и деление). Такава функция f е прието да се нарича ***елементарна функция***.

И така ***елементарна функция*** *се нарича такава функция, която е получена от основните елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и четирите аритметични действия.*

Пример за елементарна функция е функцията

$$f(x) = 5^{\operatorname{arc\,tg}((x+1)/(x^2+2))}.$$

За пресмятане производната на произволна елементарна функция са необходими освен таблицата за производните на основните елементарни функции още правилата: 1) правило за диференциране на сложна функция; 2) правила за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции.

Правилото за диференциране на сложна функция $y = f(u)$, където $u = \varphi(x)$, има следния вид: *ако функцията $u = \varphi(x)$ има производна в дадена точка x_0, а функцията $y = f(u)$ има производна в съответната точка $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложната функция $y = f(\varphi(x))$ има производна в точката x_0 и тази производна y' е*

$$y' = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0), \tag{1.10}$$

т. е. е равна на произведението на производната на функцията $y = f(u)$ в точката $u_0 = \varphi(x_0)$ и производната на функцията $u = \varphi(x)$ в точката x_0.

Удобно е и едно друго записване на формулата (1.10), при което индексите долу показват по коя променлива се диференцира:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Верността на формулата за производна на сложна функция (1.10) лесно може да се подкрепи с интуитивни съображения, но строгото й извеждане не е лесно и ще бъде дадено в следващото изложение.

Много по-просто е да се установят правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на две функции и те са:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

(в последната формула се изисква $v(x)$ да не е нула в разглежданата точка x).

Важни задачи на диференциалното смятане са обосноваването на таблицата за производните на основните елементарни функции и на правилата за диференциране на сложна функция, на сума, разлика, произведение и частно на функции, а също така и за производна на обратна функция. Това ще ни позволи да пресмятаме производната на всяка елементарна функция f.

Оказва се, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда вън от класа на елементарните функции. Това обстоятелство оправдава въвеждането на класа от елементарни функции като традиционен обект на класическия анализ.

6. Да се върнем към разглежданата механична задача за движение на материална точка по права линия — оста Oy, но този път ще предположим, че за всеки момент от време x е дадена моментната скорост $f(x)$ на движещата се точка и трябва да се намери законът на движение на тази точка.

Тъй като моментната скорост $f(x)$ е производна на функцията $y=F(x)$, определяща закона на движение, то задачата се свежда до това по дадена функция f да се намери такава функция F, чиято производна F' е равна на f. Като изоставим механичния смисъл на функциите f и F, идваме до математическите понятия ***примитивна функция*** и ***неопределен интеграл***.

Примитивна функция *на функцията f се нарича такава функция F, производната F' на която е равна на f.*

Ще отбележим, че ако функцията F е примитивна на функцията f, то и функцията $F+C$, където C е произволна константа, е също примитивна на функцията f (тъй като произволната на константа е равна на нула).

По-трудно се установява обратното твърдение: Всеки две примитивни на една и съща функция f в интервала (a, b) се различават само със събираемо константа. Доказателството на това твърдение е по-сложно и ще бъде проведено в следващото изложение.

Въз основа на горното твърдение можем да констатираме следното: Ако функцията F е някоя примитивна на функцията f, то всяка примитивна на функцията f има вида $F+C$, където C е константа.

Съвкупността от всички примитивни на дадена функция f се нарича ***неопределен интеграл*** *от тази функция и се означава със символа*

$$\int f(x)\,dx.$$

Следователно, ако F е една от примитивните на функцията f то неопределеният интеграл от функцията f може да се представи в следния вид:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

където C е произволна константа.

Да се върнем към поставената задача за определяне на закона за движение на материална точка по оста Oy, ако е известна моментната скорост $f(x)$ в тази точка. Сега можем да твърдим, че търсеният закон за движение се определя от функцията $y = F(x)+C$, където F е коя да е примитивна на функцията f, а C е константа.

Както виждаме, по моментната скорост законът за движение се определя нееднозначно: с точност до адитивна константа C.

За определяне на константата C трябва да се наложат допълнителни условия, например задаване на координатата y_0 на движещата се точка в даден момент от времето x_0. Като използваме това условие, ще получим $y_0 = F(x_0) + C$, откъдето $C = y_0 - F(x_0)$, така че окончателно търсеният закон на движението е

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

7. Ще разгледаме въпроса за намиране на примитивни функции и неопределени интеграли на някои елементарни функции. Тъй като функцията $f(x)=\cos x$ е призводна на $F(x)=\sin x$, то $F(x)=\sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x)=\cos x$ и затова всяка примитивна на $f(x)=\cos x$ има вида $\sin x+C$, където C е константа, т. е.

$$\int \cos x\, dx=\sin x+C.$$

Тези разсъждения имат общ характер.

Всяка формула на диференциалното смятане $F'(x)=f(x)$, която показва, че функцията f е производна на функцията F, поражда еквивалентна формула на интегралното смятане $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, т. е. неопределеният интеграл от функцията f е равен на $F+C$, където C е произволна константа.

Така от таблицата за производните на основните елементарни функции се получава следната таблица на важни неопределени интеграли:

1°. $\int x^{\alpha}\,dx=x^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C \qquad (\alpha\neq-1).$

2°. $\int \frac{dx}{x}=\log_e x+C \qquad (x>0).$

3°. $\int a^x\,dx=a^x/\log_e a+C \qquad (0<a\neq1).$

По-специално при $a=e$ имаме $\int e^x\,dx=e^x+C.$

4°. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$

5°. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

6°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C \quad (x\neq\pi/2+n\pi$, където $n=0,\pm1,\pm2,\dots).$

7°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C \quad (x\neq n\pi$, където $n=0,\pm1,\pm2,\dots).$

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C \qquad (|x|<1).$

9°. $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C.$

Горната таблица ще бъде допълнена по-нататък с две важни правила за интегриране (интегриране чрез смяна на променливите, т. е. субституция, и интегриране по части).

Така се получава апарат за смятане в тази част на математическия анализ, която се нарича ***интегрално смятане.***

Трябва да отбележим, че за пресмятане на много важни неопределени интеграли този апарат е недостатъчен. Например той е недостатъчен за пресмятане на неопределения интеграл

$$\int e^{-x^2/2}\,dx, \tag{1.11}$$

който играе важна роля в теорията на вероятностите и нейните приложения.

Интегралът (1.11) е пример на интеграл от елементарна функция, който не е елементарна функция, така че *за разлика от диференцирането операцията интегриране не запазва класа на елементарните функции*. Това обстоятелство показва условността на понятието елементарна функция като традиционен обект на класическия анализ.

8. Отново ще предположим, че функцията f представлява моментната скорост на движеща се материална точка по оста Oy. Нека да пресметнем пътя, изминат от тази точка за интервала време от $x=a$ до $x=b$. За простота при разсъжденията ще предполагаме, че скоростта f е неотрицателна във всеки момент от времето x.

За решаване на поставената задача ще разделим интервала от време $[a, b]$ на малки подинтервали, ограничени от моментите $a=x_0<x_1<x_2< \cdots <x_{n-1}<x_n=b$.

Естествено е да считаме, че във всеки такъв малък подинтервал от x_{k-1} до x_k ($k=1, 2, \ldots, n$) скоростта f се изменя малко (което е изпълнено, когато f е непрекъсната), така че можем да я приемем във всеки подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ за константа със стойност $f(\xi_k)$, където ξ_k е някой момент от време в интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

Следователно пътя $S[x_{k-1}, x_k]$, изминат от движещата се точка за подинтервала време от x_{k-1} до x_k, можем да считаме приближено равен на произведението $f(\xi_k)$ и дължината $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ на подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$, т. е.

$$S[x_{k-1}, x_k] \approx f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Тогава пътят $S[a, b]$, изминат от материалната точка за целия интервал време от $x=a$ до $x=b$, е приближено равен на сумата

$$S[a, b] \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\,\Delta x_n. \tag{1.12}$$

Сумата в дясната страна на (1.12) *се нарича* ***интегрална сума*** *или още* ***риманова сума.***

Естествено е да очакваме, че точната стойност на пътя $S[a, b]$, можем да получим, като преминем в интегралната сума (1.12) към граница, оставяйки най-голямата дължина Δx_k да клони към нула (при това, разбира се, броят n на подинтервалите ще расте неограничено). Като означим с d най-голямото от числата Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и използваме означението за граница, ще получим, че

$$(1.13) \qquad S[a, b] = \lim_{d\to 0}\{f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n\}.$$

Разбира се, необходимо е да се уточни какво разбираме под граница на интегралната сума в (1.13). Този път операцията граничен преход е в нова, по-сложна форма, отколкото при обикновената граница на функцията $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Точното определение и изучаване на свойствата на граница от вида (1.13) е дадено в този курс. Тук ще отбележим само, че *границата в дясната страна на* (1.13) *се нарича* ***определен интеграл*** *от функцията* $f(x)$ *в граници от* a *до* b *и се означава със символа*

$$(1.14) \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

И така определеният интеграл (1.14) е точно равен на пътя $S[a, b]$, изминат от движеща се материална точка със скорост f за интервала време от $x=a$ до $x=b$.

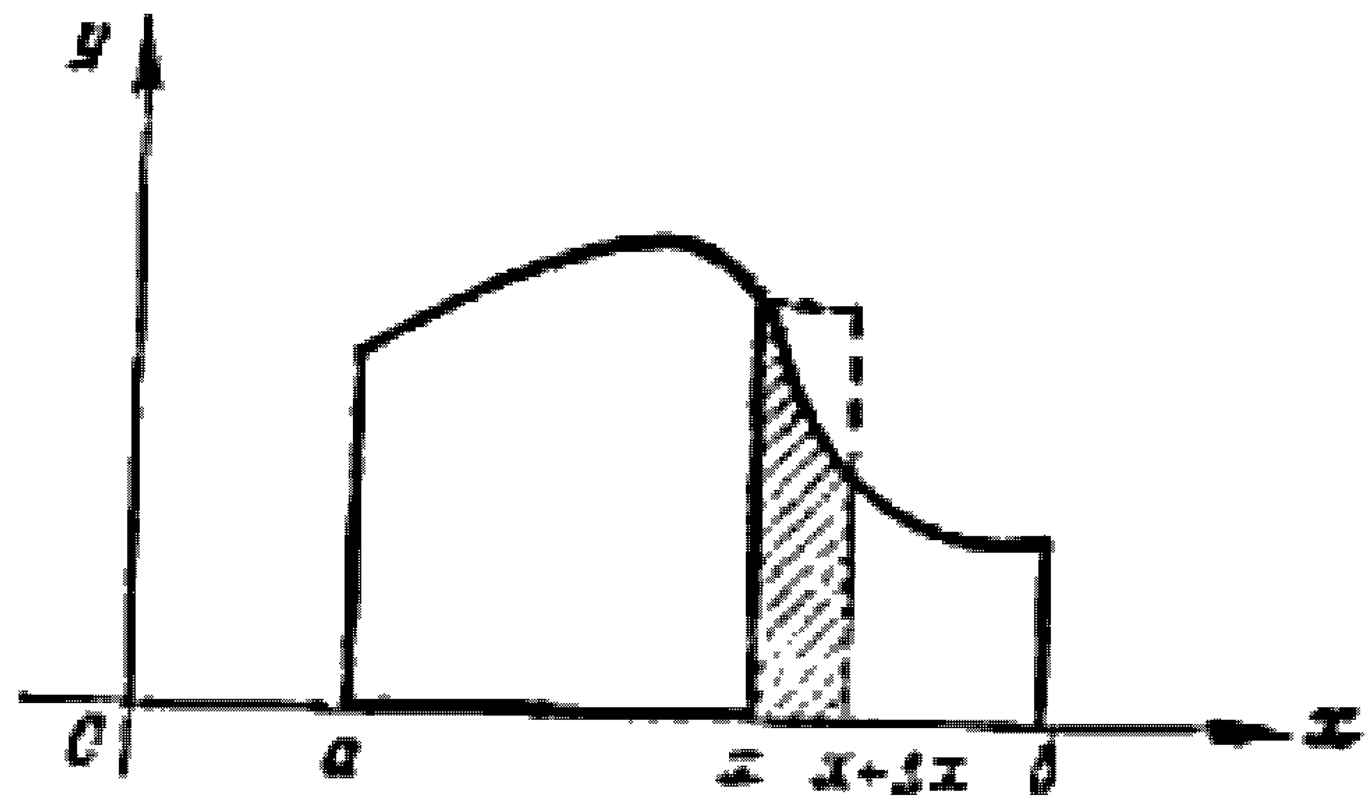
Заедно с това е очевидно, че интегралната сума в дясната страна на (1.12) геометрично представлява сумата от лицата на правоъгълниците с основи Δx_k и височини $f(\xi_k)$. С други думи, интегралната сума в (1.12) е равна на лицето на стъпаловидната фигура, очертана на фиг. 1.2 с плътна линия. Естествено е да се очаква, че ако дължината d на най-голямото от числата Δx_k клони към нула, лицето на посочената стъпаловидна фигура ще клони към лицето на криволинейната фигура, лежаща под графиката на функцията f в интервала $a \leqq x \leqq b$ (на фиг. 1.2 тя е защрихована). Тази криволинейна фигура е прието да се нарича ***криволинеен трапец***.

По такъв начин *определеният интеграл* (1.14) *е равен на лицето на споменатия криволинеен трапец*.

Разбира се, дадените нагледни разсъждения се нуждаят от уточнения. По-специално в системния курс по анализ подлежи на уточняване и самото понятие лице на криволинеен трапец и въобще лице на равнинна фигура.

И така горните разглеждания показват, че с понятието определен интеграл (1.14) са свързани две основни задачи: физическата задача за пресмятане дължина на път и геометричната задача за пресмятане лице на криволинеен трапец.

Фиг. 1.2



Фиг. 1.3

9. Сега ще се спрем на въпроса за връзката на определения интеграл (1.14) с въведения по-рано неопределен интеграл (или с примитивната), а също така и върху начините за пресмятане на определените интеграли.

Да означим с F определения интеграл от функцията f в граници от a до x, където a е някоя фиксирана стойност на аргумента, а x е променлива стойност. С други думи, полагаме*

(1.15)
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

От геометрична гледна точка този интеграл, както поясняхме по-горе, е равен на лицето на трапеца, лежащ под графиката на функцията f в интервала $[a, x]$. На фиг. 1.3 този криволинеен трапец е ограден с плътна линия.

Чрез нагледни геометрични съображения, ще се убедим в това, че въведената от нас функция (1.15) е една от примитивните на функцията f, т. е. че $F'(x)=f(x)$.

Нека Δx е достатъчно малко нарастване на аргумента x. Очевидно разликата $F(x+\Delta x)-F(x)$ представлява лицето на „тесния" криволинеен трапец, защрихован на фиг. 1.3. От друга страна, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка x, т. е. ако стойностите на тази функция се менят малко при малки изменения на аргумента, то лицето на „тесния" криволинеен трапец ще се отличава малко от лицето $f(x)\Delta x$ на правоъгълника с основа Δx и височина $f(x)$.

Оттук следва, че при малко Δx диференчното частно

(1.16)
$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

* Променливата под знака на определения интеграл означаваме с t, за да не се смесва с горната граница на интегриране x.

малко ще се различава от височината $f(x)$ на посочения правоъгълник, т. е. при $\Delta x \to 0$ границата на диференчното частно (1.16) трябва да бъде равна на $f(x)$. Заедно с това по определение тази граница е равна на производната $F'(x)$.

И така ние се убедихме, че $F'(x) = f(x)$, т. е. функцията (1.15) е една от примитивните на функцията f. Но тогава всяка примитивна на функцията f е равна на

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \tag{1.17}$$

където C е константа.

Направените разсъждения имат предварителен характер, но при наличие на развит апарат на математическия анализ може леко да се прецизират и строго да се докаже, че за всяка непрекъсната функция f съществува примитивна и тя се определя с равенството (1.17).

Равенството (1.17) на свой ред позволява да се установи връзката между определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ и всяка примитивна $\Phi(x)$ на функцията $f(x)$. За намиране на тази връзка ще вземем в равенството (1.17) за горна граница на интегрирането x отначало числото b, а после числото a. Така ще получим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(x)\,dx + C, \tag{1.18}$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C \tag{1.19}$$

(интегралът $\int_a^a f(t)\,dt$ е очевидно равен на нула).

Изваждаме от равенството (1.18) равенството (1.19) и получаваме знаменитата ***формула на Нютон — Лайбниц***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

свеждаща въпроса за пресмятане на определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ до пресмятане на разликата от стойностите на произволна примитивна Φ на функцията f в точките b и a.

Обосноваването на формулата на Нютон — *Лайбниц* е една от важните задачи на математическия анализ.

10. Ще отбележим обаче, че точни аналитични изрази на примитивните функции могат да се получат само за тесен клас функции. Затова формулата на Нютон — Лайбниц не решава изцяло въпроса за пресмятане на определени интеграли.

Най-простият начин за приближено пресмятане на определен интеграл е т. нар. ***метод на правоъгълниците***, при който интегралът се заменя с интегралната сума от дясната страна на (1.12), в която за точките ξ_k се вземат средите на съответните им интервали $[x_{k-1}, x_k]$, а те от своя страна са с еднаква дължина, т. е. числата $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ са равни помежду си.

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f грешката, която правим при заменяне на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с посочената специална интегрална сума, е от порядък n^{-2}, където n е броят на подинтервалите.

Методът на правоъгълниците (както и много други методи за приближено пресмятане на определени интеграли) е много удобен при използване на автоматични сметачни машини (АСМ). Това обстоятелство и равенството (1.17) правят тези методи ефективно средство за намиране на примитивни и неопределени интеграли.

В таблица 1 привеждаме резултатите от пресмятането на калкулатор по метода на правоъгълниците на интеграла на Поасон

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

за някои стойности на x. В първата колона на таблицата са стойностите на аргумента x на интеграла на Поасон, във втората колона е посочен броят n на подинтервалите, а в третата колона — резултатите от пресмятанията.

От таблица 1 се вижда, че за пресмятане на интеграла на Поасон с точност до 10^{-5} при $x=0{,}1$ е достатъчно да вземем $n=10$, при $x=0{,}5$ е достатъчно $n=40$, а при $x=1$ е достатъчно да вземем $n=60$.

ТАБЛИЦА 1

x	n	$\approx F(x)$	x	n	$\approx F(x)$
0,1	2	0,0398319	0,5	10	0,191480
0,1	5	0,0398284	0,5	20	0,191466
0,1	10	0,0398279	0,5	40	0,191463
0,1	20	0,0398278	0,5	50	0,191463
0,2	10	0,0792609	1	30	0,341355
0,2	20	0,0792599	1	60	0,341347
0,2	30	0,0792597	1	80	0,341346
0,2	40	0,0792597	1	100	0,341345

11. Наред с приближените методи за пресмятане на интеграли важна роля в съвременната математика играят и приближените методи за определяне на корените на различни уравнения.

Да разгледаме уравнението

$$f(x) = 0. \tag{1.20}$$

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f коренът $x=c$ на уравнението (1.20) може да бъде намерен като граница на редица x_n ($n=1, 2, 3, \ldots$), първият член на която се взема произволно в някакъв достатъчно широк интервал, а останалите се получават по итерационната формула

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n). \tag{1.21}$$

Този метод за приближено пресмятане на корен на уравнението (1.20) се нарича ***метод на Нютон*** (или ***метод на допирателните***).

Като конкретен пример ще разгледаме уравнението (1.20) с функция $f(x)$ от вида $f(x)=x^k - a$, където a е положително реално число, а $k \geqq 2$ — цяло положително число. За такава функция $f(x)$ положителен корен на уравнението (1.20) е $\sqrt[k]{a}$ (т. е. k-ти корен от положителното реално число a). Формулата (1.21), определяща последователните приближения по метода на Нютон, в този случай ще има вида

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{1.22}$$

(за да се убедим в това, достатъчно е да отчетем, че $f'(x) = kx^{k-1}$).

Формулата (1.22) дава един ефективен и леко реализуем на АСМ алгоритъм за пресмятане на k-ти корен от реално положително число a.

Ще приведем примери за пресметнати с АСМ корени по тази формула.

Всяко положително реално число a може да се представи (и то по единствен начин) във вида $a=2^L x$, където L е цяло число, а x удовлетворява неравенствата $1/2 \leq x < 1$. Ще избираме всеки път за първо приближение x_1 числото $x_1 = 2^{[L/k]}$, където k е степента на извлечения корен, а символът $[L/k]$ означава цялата част на числото L/k.

Резултатите от пресмятанията са събрани в таблица 2, в първата колона на която стоят числата a, от които извличаме корен, във втората колона е коренният показател, в третата колона са пресметнатите стойности на корените и в четвъртата колона е даден броят на направените итерации.

ТАБЛИЦА 2

a	k	$\sqrt[k]{a}$	n
2	2	1,414213181	4
3	2	1,732049942	5
4	2	1,999999046	5
2	5	1,148697853	5
3	5	1,245730400	5
4	5	1,319507599	6
2	10	1,071773529	5
3	10	1,116123199	6
4	10	1,148697853	6

12. Ние разгледахме постановката на най-важните задачи на математическия анализ, тръгвайки от най-простия механичен модел — движение на материална точка по права линия. Този модел естествено ни доведе до необходимостта да построим диференциалното и интегралното смятане за функции $f(x)$ на една независима променлива x. При описването на по-сложни задачи е естествено да възникне понятието функция на няколко независими променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Така например температурата u на нагрявано тяло е функция на четири независими променливи: трите координати x_1, x_2, x_3 на точка от това тяло и времето t. Тази функция е естествено да означим със символа $u=f(x_1, x_2, x_3, t)$.

За функция на няколко променливи се въвежда понятието производна по всяка от променливите (такава производна се нарича *частна производна* по дадената променлива).

Важна задача за по-нататъшното развитие на математическия анализ е построяването на диференциално и интегрално смятане за функции на няколко променливи. В теорията на функциите на няколко променливи се изучава също така задачата за намиране на функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, която е решение на функционалното уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)=0$. Тази задача може да се разглежда като обобщение на задачата за намиране на корен на уравнението (1.20).

Накрая математическият анализ, разбиран в най-широк смисъл, включва теорията на диференциалните уравнения (т. е. уравнения, съдържащи и производните на търсените функции).

През последните десетилетия широко развитие получиха теории, изхождащи от обобщено третиране на понятията функция, производна и решение на диференциално уравнение. Създаването на математическия анализ е едно от най-великите постижения на човешкия ум. То даде възможност от разглеждането на отделни, разнокъсани физически и геометрични задачи (като падане на тяло под действието на силата на тежестта, пресмятане на лица на фигури и др.) да се премине към развиване на общи методи за решаване на големи класове от задачи. Развитието на математическия анализ от своя страна оказва огромно влияние за прогреса на науката и техниката.

Класическият математически анализ е много удобен математически модел за описание на различни явления, при които се допуска, че разполагаме с точни стойности за всички изходни величини и можем да намерим точните стойности на пресмятаните величини.* Ще отбележим, че опирайки се на този модел, обикновено можем да оценим грешката, възникваща вследствие на това, че изходните величини са зададени с някаква грешка, и всички пресмятания могат да се направят само с определена точност.** По такъв начин апаратът на математическия анализ може да бъде използван за построяване на числени методи и оценки на грешките.

Накрая нека систематизираме най-важните проблеми, възникнали в резултат от направените предварителни разглеждания.

1. Уточняване на понятията реално число, множество и функция.

2. Развиване на теорията на границите и свързаното с тази теория понятие непрекъснатост на функция.

* Специално ще подчертаем, че този модел обхваща широки класове задачи, различни по своя характер — от физиката, биологията, икономиката, социологията и другите науки.

** Може например да се разглеждат изображения, поставящи в съответствие на всяка стойност на аргумента x цял интервал от стойности за y. Такива изображения в редица случаи представляват доста удобен математически апарат за отчитане на грешките от изходните данни и обработката на данните.

3. Построяване на апарата на диференциалното и интегралното смятане.

4. Построяване на теорията на определения интеграл като граница на суми от специален вид.

5. Развиване на приближени методи за пресмятане на определени интеграли и приближени методи за решаване на уравнения.

6. Изясняване на някои геометрични понятия (като лице на равнинна фигура, дължина на дъга и др.).

2. Теория на реалните числа

Елементарна представа за реалните числа се дава в средното училище, но тази представа не е достатъчна за последователното изучаване на понятието граница.

В основната част на тази глава се излагат посочените въпроси от теорията на реалните числа, необходими за построяване на строга теория на границите. В края на главата се изучават допълнителни въпроси от теорията на реалните числа, които не са свързани с теорията на границите и въобще с курса по математически анализ (пълнотата на множеството на реалните числа в смисъл на Хилберт, аксиоматичното построяване на теорията на реалните числа, връзката между различните начини за въвеждане на реалните числа).

В последния параграф са дадени някои въпроси от теорията на множествата, близки до съответните въпроси от теорията на реалните числа.

2.1. Множеството на числата, представими с безкрайни десетични дроби, и неговата наредба

2.1.1. Свойства на рационалните числа. В тази точка ще систематизираме добре известната теория на рационалните числа.

Рационално *се нарича число, което може да се представи (поне по един начин) като отношение на две цели числа, т. е. във вид на дроб m/n, където m и n са цели числа и $n \neq 0$.*

Рационалните числа притежават следните шестнадесет основни свойства.* (При формулирането на тези свойства вместо термина „рационално число" ще употребяваме за краткост „число".)

* Всички приведени свойства на рационалните числа могат да се получат от свойствата на целите числа.

1°. Всеки две числа a и b са свързани с един и само един от трите знака $>$, $<$ или $=$, при това, ако $a>b$, то $b<a$. С други думи, съществува правило, позволяващо да се установи кой от посочените три знака свързва дадените две числа. Това правило се нарича ***правило за наредба*** и се формулира така: 1) *две неотрицателни числа* $a=m_1/n_1$ *и* $b=m_2/n_2$, *за които* $n_1>0$, $n_2>0$, *са свързани със същия знак, както двете цели числа* m_1n_2 *и* m_2n_1; 2) *две неположителни числа* a *и* b *са свързани със същия знак, както неотрицателните числа* $|b|$ *и* $|a|$; 3) *ако* a *е неотрицателно, а* b *е отрицателно, то* $a>b$.

2°. Съществува правило, чрез което на всеки две числа a и b се съпоставя трето число c, наричано тяхна ***сума*** и означавано със символа $c=a+b$. *Сумата на две рационални числа* $a=m_1/n_1$ *и* $b=m_2/n_2$ *се определя от равенството*

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}.$$

Операцията намиране на сума се нарича ***събиране.***

3°. Съществува правило, посредством което на всеки две числа a и b се съпоставя трето число c, наричано тяхно ***произведение*** и означавано със символа $c=a.b$. *Произведението на две рационални числа* $a=m_1/n_1$ *и* $b=m_2/n_2$ *се определя от равенството*

$$\frac{m_1}{n_1}.\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1.m_2}{n_1.n_2}.$$

Операцията намиране на произведение се нарича ***умножение.***

4°. От $a>b$ и $b>c$ следва, че $a>c$ (транзитивно свойство на знака $>$); от $a=b$ и $b=c$ следва, че $a=c$ (транзитивно свойство на знака $=$).

Операцията събиране притежава следните четири свойства:

5°. $a+b=b+a$ (комутативност).

6°. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (асоциативност).

7°. Съществува такова число 0, че $a+0=a$ за всяко a (особена роля на нулата).

8°. За всяко число a съществува такова противоположно на него число a', че $a+a'=0$.

Аналогични четири свойства има и операцията умножение.

9°. $a.b=b.a$ (комутативност).

10°. $(a.b).c=a.(b.c)$ (асоциативност).

11°. Съществува число 1, такова, че $a.1=a$ за всяко число a (особена роля на единицата).

12°. За всяко число $a\neq 0$ съществува такова обратно число a', че $a.a'=1$.

Операциите събиране и умножение са свързани със следното свойство:

13°. $(a+b).c=a.c+b.c$ (дистрибутивност или разпределително свойство на умножението относно събирането).

Следващите две свойства свързват операцията наредба съответно с операциите събиране и умножение:

14°. От $a>b$ следва, че $a+c>b+c$.

15°. От $a>b$ и $c>0$ следва, че $a.c>b.c$.

Особена роля има свойството

16°. Каквото и да е числото a, то числото 1 може да се прибави към себе си толкова пъти, че получената сума да е по-голяма от a.*

Изброените шестнадесет свойства се наричат *основни*, тъй като всички други алгебрични свойства, отнасящи се до операциите събиране и умножение и връзката им с равенства и неравенства, могат да бъдат получени като логически следствия от тях.

Така например от основните свойства произтича следното често използвано свойство, позволяващо да събираме почленно еднопосочни неравенства:

ако $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Наистина от неравенствата $a>b$ и $c>d$ и от свойства 14° и 5° следва, че $a+c>b+c$ и $b+c>b+d$, а от последните две неравенства и от свойство 4° следва, че $a+c>b+d$.

2.1.2. Недостатъчност на рационалните числа за измерване на отсечки от числовата ос. Числова ос ще наричаме права, на която са избрани определена точка O (начало за отчитане), мащабна отсечка OE, дължината на която приемаме равна на единица, и положително направление (обикновено от O към E). *На всяко рационално число съответствува определена точка от числовата ос.* Действително известно е как се построява отсечка с дължина $1/n$-та част от дължината на мащабната отсечка OE (n — произволно цяло положително число). Естествено можем да построим и отсечка с дължина m/n-та част от дължината на мащабната отсечка, където m и n са произволни цели положителни числа. Като нанесем такава отсечка надясно (наляво) от точката O, ще получим точка M_1 (M_2), съответствуваща на рационалното число $+m/n$ ($-m/n$) (фиг. 2.1).

Ще видим сега, че *че не всяка точка M от числовата ос съответствува на рационално число*. Например нека точката M е избрана така, че дължината на отсечката OM да е равна на диагонала на квадрат със страна отсечката OE. Тъй като дължината на мащабната отсечка OE е равна на единица, то по питагоровата теорема дължината x на отсечката OM ще бъде корен

* Това свойство се нарича *аксиома на Архимед*.

Фиг. 2.1

на уравнението $x^2=2$ и не с рационално число. Но това означава, че на посочената точка M не съответствува рационално число.

Естествено възниква потребността от разширяване на рационалните числа и въвеждане на по-широко множество от числа така, че всяка точка от числовата ос да съответствува на някое число от това по-широко множество (или с помощта на това по-широко множество от числа да може да се изрази дължината на всяка отсечка OM от числовата ос).

Ще покажем, че посредством измерване на отсечката OM на всяка точка M от числовата ос може да се постави в съответствие напълно определена безкрайна десетична дроб.

Нека M е произволна точка от числовата ос. За определеност ще предполагаме, че точката M лежи надясно от O. Ще опишем процеса на измерване на отсечката OM с помощта на мащабната отсечка OE.

Най-напред определяме колко пъти мащабната отсечка се нанася изцяло върху отсечката OM*. Възможни са два случая:

1) Отсечката OE се нанася в отсечката OM цяло число a_0 пъти с някакъв остатък NM, по-малък от OE (вж. фиг. 2.2). В този случай цялото число a_0 представлява резултат от измерването на OM с точност до 1 и недостиг.

2) Отсечката OE се нанася в отсечката OM цяло число a_0 пъти без остатък. В този случай процесът на измерване е завършен и цялото число a_0 е дължината на отсечката OM. На точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0{,}000\ldots$, която се отъждествява с рационалното число a_0.

В първия случай процесът на измерване продължава, за да се види колко пъти $\frac{1}{10}$ част от мащабната отсечка OE се нанася в отсечката NM (която е остатък от измерването с помощта на цялата отсечка OE). Отново са възможни два случая:

1) $\frac{1}{10}$ част от OE се нанася a_1 пъти в отсечката NM с някакъв остатък PM, по-малък от $\frac{1}{10}$ част от OE (вж. фиг. 2.2). В този

* От аксиомата на Архимед за отсечки следва, че каквито и да са две отсечки a и b, ако съберем едната от двете сама със себе си достатъчен брой пъти, ще получим отсечка с по-голяма дължина от другата.

Фиг. 2.2

случай рационалното число a_0, a_1 е резултатът от измерването на OM с недостиг, с точност до числото $\frac{1}{10}$.

2) $\frac{1}{10}$ част от OE се нанася в отсечката NM цяло число пъти a_1 без остатък. В този случай процесът на измерване е завършен и рационалното число a_0,a_1 е дължината на отсечката OM. На точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,a_1000\ldots$, която отъждествяваме с рационалното число a_0, a_1.

Като продължим тези разсъждения, ще стигнем до двете възможности: 1) или описаният процес на измерване ще прекъсне на n-тата стъпка поради това, че на точката M съответствува рационалното число $a_0,a_1a_2\cdots a_n$ (в този случай на точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,a_1a_2\cdots a_n000\cdots$, която отъждествяваме с рационалното число $a_0, a_1 a_2\cdots a_n$); 2) или описаният процес на измерване няма да прекъсне никога и ще получим безкрайна редица от рационални числа

(2.1) $\qquad a_0;\ a_0,a_1;\ a_0,a_1a_2;\ \cdots;a_0,a_1a_2\cdots a_n;\ \cdots,$

представляващи резултатите от измерването на отсечката OM с недостиг, с точност съответно до $1,\ 1/10,\ 1/10^2,\ \cdots,1/10^n,\ \cdots$

Всяко от числата в редицата (2.1) може да бъде получено чрез прекъсване до съответния знак на безкрайната десетична дроб

(2.2) $\qquad a_0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$

По такъв начин в случай 2) на точката M от числовата ос съответствува безкрайната десетична дроб (2.2). Може да се каже, че и в случай 1) на точката M отговаря безкрайна десетична дроб (2.2), но от известно място нататък всички десетични знаци на тази дроб са нули.

Направените разсъждения имат място и в случая, когато точката M лежи наляво от точката 0, само че в този случай естествено е да смятаме, че всички елементи на редицата (2.1) и безкрайната десетична дроб имат отрицателен знак.

И така чрез описания процес за измерване на всяка точка от числовата ос съпоставихме напълно определена безкрайна десетична дроб. Това обстоятелство естествено води до идеята да се разглеждат числа, представими като безкрайни десетични дроби.

Забележка. Разбира се, описаният процес за измерване на отсечката OM може да се видоизмени така, че да води не до безкрайни десетични дроби, а например до безкрайни ***двоични*** или ***троични*** дроби. Желанието да се разглеждат безкрайни десетични дроби идва само от особената роля, която традиционно играе десетичната бройна система.

2.1.3. Наредба на множеството на безкрайните десетични дроби. В уводната глава вече отбелязахме, че понятието число се отнася към т. нар. ***основни понятия***. Ние ще въведем понятието реално число, като тръгнем от множеството на безкрайните десетични дроби.

Да разгледаме множеството на всички възможни безкрайни десетични дроби (както положителни, т. е. взети със знак +, така и отрицателни, т. е. взети със знак —).

Числата, представими с такива дроби, ще се условим да наричаме ***реални.***

Веднага ще подчертаем, че това условяване има предварителен характер и се нуждае от уточняване. Ние сме длъжни да въведем за числата, представими с безкрайни десетични дроби, трите операции (наредба, събиране и умножение). След като тези операции бъдат въведени, можем да дадем по-точно описание на понятието реално число, а именно, че реални наричаме числата, представими с безкрайни десетични дроби при условие, че за тези числа е установен определен начин за въвеждане на операциите наредба, събиране и умножение.

След всичко това ще се убедим, че при избрания начин за въвеждане на операциите наредба, събиране и умножение реалните числа притежават същите шестнадесет свойства, които формулирахме в т. 1 за рационалните числа.

Да пристъпим към реализация на посочената програма.

В тази точка ще въведем за числата, представими с безкрайни десетични дроби, операцията наредба и ще установим, че тази операция притежава свойство 4°, формулирано в 2.1.1 за рационалните числа (т. е. свойството транзитивност на знаците > и =).

Ще напомним още веднъж, че се уговорихме числата, представими с безкрайни десетични дроби, за краткост да наричаме реални (тази договореност няма да бъде в противоречие с даденото по-нататък по-точно описание на реалните числа).

Да разгледаме реално число, представимо с безкрайна десетична дроб, различна от 0,000 . . . Това число ще наричаме *положително*, ако представящата го дроб е взета със знак „+", и *отрицателно*, ако представящата го дроб е взета със знак „—".

Реалните числа, които не са положителни, ще наричаме ***неположителни****, а тези, които не са отрицателни —* ***неотрицателни.***

В множеството на реалните числа влизат, разбира се, всички рационални числа, тъй като те са представими с безкрайни десетични дроби. Представянето на дадено рационално число с безкрайна десетична дроб може да се получи по два начина:

1) взимаме точка M, съответствуваща на даденото рационално число, на числовата ос и измерваме отсечката OM с помощта на мащабната отсечка по начина, посочен в т. 2;

2) взимаме обикновената дроб m/n, представяща даденото рационално число, и делим числителя m на знаменателя n.*

Предоставяме на читателя да се убеди, че тези два начина са еквивалентни. Така при всеки от посочените начини на рационалното число $1/2$ се съпоставя безкрайната десетична дроб $0,5000\ldots$, на рационалното число $1/3$ — безкрайната десетична дроб $1,333\ldots$

Преди да преминем към формулиране на правилото за наредба на реалните числа, ще разгледаме въпроса за представяне с безкрайни десетични дроби на онези рационални числа, които се представят и с крайни десетични дроби.

Ще отбележим, че такива рационални числа допускат **две представяния** с безкрайни десетични дроби. Например рационалното число $1/2 = 0,5$ може да се представи и с двете безкрайни десетични дроби: $1/2 = 0,5000\ldots$ и $1/2 = 0,4999\ldots$

Въобще рационалното число $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$, където $a_n \neq 0$, може да се запише във вид на две безкрайни десетични дроби:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots \quad \text{и}$$
$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} (a_n - 1) 999 \ldots$$

Естествено ние трябва да отъждествяваме тези две безкрайни десетични дроби (т. е. да считаме, че те представляват едно и също реално число).

Нека сега разгледаме две произволни реални числа a и b и да предположим, че те са представени с безкрайните десетични дроби

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \quad b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots, \tag{2.3}$$

като във всяко представяне е взет кой да е от знаците $+$ или $-$.

Ще изключим разглеждания вече случай, когато двете безкрайни десетични дроби са с еднакви знаци и са две различни представяния на едно и също рационално число, представимо и с крайна десетична дроб. След това ще се уговорим да наричаме две числа a и b равни, ако техните представяния с безкрайни десетични дроби (2.3) имат еднакви знаци и ако са изпълнени безкрайната редица равенства

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \; \ldots, \; a_n = b_n, \ldots \tag{2.4}$$

* При такова деление се получава обязателно **периодична** безкрайна десетична дроб.

И така *ще казваме, че две числа a и b са равни, ако представящите ги безкрайни десетични дроби са с еднакви знаци и ако те или удовлетворяват редицата равенства* (2.4), *или са два представителя на едно и също рационално число, представимо с крайна десетична дроб.*

Нека са дадени две неравни реални числа a и b. Ще установим правило, позволяващо да заключим кой от двата знака $>$ или $<$ ги свързва.

Ще наричаме ***модул*** или ***абсолютна стойност*** на реалното число a онова реално число, означавано със символа $|a|$, което се представя със същата безкрайна десетична дроб, както и числото a, но винаги взета със знак $+$. Така $|a|$ е винаги неотрицателно реално число.

Ще разгледаме поотделно трите възможни случая:

1) Нека a и b са неотрицателни и имат представянията $a=a_0,a_1a_2\cdots$; $b=b_0,b_1b_2\cdots$ Тъй като числата a и не са равни, то ще бъде нарушено поне едно от равенствата (2.4). Да означим с k най-малкия номер n, при който се нарушава равенството $a_n=b_n$, т. е.

$$a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots, a_{k-1}=b_{k-1}, \text{ но } a_k \neq b_k.$$

Тогава ще считаме, че $a>b$, ако $a_k>b_k$, и че $a<b$, ако $a_k<b_k$.

2) Нека сега двете числа a и b са отрицателни. Тогава ще считаме, че $a>b$, ако $|b|>|a|$ и $a<b$, ако $|b|<|a|$.

3) Нека накрая едното число (например a) е неотрицателно, а другото (b) — отрицателно. Тогава естествено ще считаме, че $a>b$.

И така правилото за наредба на реалните числа е формулирано.

За да направим това правило безупречно от логическа гледна точка (или, както се казва в математиката, коректно), ще докажем следната лема:

Лема. *Ако $a=a_0, a_1a_2\cdots a_n\cdots$ е произволно неотрицателно реално число, а $b'=b_0,b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n000\cdots$ и $b''=b_0,b_1b_2\cdots b_{n-1}(b_n-1)999\cdots$ при $b_n>0$ са две различни представяния на едно и също рационално число $b_0,b_1b_2\cdots b_n$, то условието $a<b'$ е еквивалентно на условието $a<b''$, а условието $a>b'$ е еквивалентно на $a>b''$.*

Тази лема позволява при наредба на две неравни реални числа да не се грижим за това, кое от двете възможни представяния с безкрайна десетична дроб е взето за числата, представими с крайни десетични дроби.

Доказателство на лемата. За пълното доказателство на лемата трябва да се докажат следните четири твърдения:

1) от $a<b'$ следва $a<b''$; 2) от $a<b''$ следва $a<b'$;
3) от $a>b'$ следва $a>b''$; 4) от $a>b''$ следва $a>b'$.

Ще се ограничим с доказателствата на твърдения 1) и 2), тъй като твърденията 3) и 4) се доказват аналогично.

Нека $a<b'$. Тогава според правилото за наредба ще се намери такъв номер k, че

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k<b_k \tag{2.5}$$

(в тези съотношения трябва да считаме всички b_{n+1}, b_{n+2}, $\cdots$ равни на нула).

Веднага ще отбележим, че $k\leq n$, тъй като при $k>n$ неравенството $a_k<b_k$ е невъзможно, понеже $0\leq a_k\leq 9$, а $b_k=0$.

Тъй като при $k<n$ всички десетични знакове до ред k в числата b' и b'' съвпадат, условията $a<b'$ и $a<b''$ са очевидно еквивалентни.

Остава да разгледаме случая $k=n$. В този случай съотношенията (2.5) имат вида $a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots, a_{n-1}=b_{n-1}, a_n<b_n$. Последното неравенство е еквивалентно на $a_n\leq b_n-1$. Ако при това $a_n<b_n-1$, то по правилото за наредба $a<b''$.

Ако в посоченото неравенство $a_n=b_n-1$, то всички десетични знакове на числата a и b'' до ред n съвпадат. Понеже в числото b'' всички десетични знакове с ред, по-голям от n, са равни на девет, то и в този случай $a<b''$, тъй като в числото a не всички десетични знакове с ред, по-голям от n, могат да бъдат равни на девет (поради това, че a не е равно на b').

И така твърдение 1) е доказано.

2) Нека $a<b''$.

Безкрайните десетични дроби, представящи числата b' и b'', означаваме с $b'=b'_0, b'_1 b'_2 \cdots b'_n \cdots$ и $b''=b''_0, b''_1 b''_2 \cdots b''_n \cdots$

При тези означения

$$b'_0=b''_0=b_0,\ b'_1=b''_1=b_1,\ \cdots,\ b'_{n-1}=b''_{n-1}=b_{n-1},$$
$$b'_n=b_n,\ b''_n=b_n-1.$$

С други думи, изпълнени са съотношенията

$$b'_0=b''_0,\ b'_1=b''_1,\ \cdots,\ b'_{n-1}=b''_{n-1},\ b''_n<b'_n.$$

От друга страна, тъй като $a<b''$, ще се намери такъв номер k, че да са изпълнени съотношенията

$$a_0=b''_0,\ a_1=b''_1,\ \cdots,\ a_{k-1}=b''_{k-1},\ a_k<b''_k.$$

Да означим с m по-малкото от двете числа n и k и да съпоставим двете последни редици от съотношения. Като използваме свойството транзитивност на $>$ и $=$ за целите числа, ще получим следните съотношения:

$$a_0=b'_0, a_1=b'_1, \cdots, a_{m-1}=b'_{m-1}, a_m<b'_m.$$

Съгласно правилото за наредба на реални числа от тези съотношения следва $a<b'$. □

Лесно можем да се убедим в това, че формулираното правило за наредба на реални числа, приложено за две рационални числа, води до същия резултат, както и правилото за наредба на рационални числа, представени във вид на отношение на две цели числа.

Наистина достатъчно е да разгледаме случая на две неотрицателни рационални числа a и b. Нека $a>b$ съгласно предишното правило за наредба на рационални числа и нека $a=a_0, a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $b=b_0, b_1b_2\cdots b_n\cdots$ Като нанесем рационалните числа a и b върху числовата ос, ще получим съответствуващите им точки M_1 и M_2, при което, понеже $a>b$, отсечката OM_1 е по-голяма от OM_2. От описания в т. 2 процес за измерване на отсечки върху числовата ос следва, че цялото число $a_0a_1a_2\cdots a_k$ показва колко пъти 10^{-k}-та част от мащабната отсечка OE се нанася в отсечката OM_1, а цялото число $b_0b_1b_2\cdots b_k$ показва колко пъти 10^{-k}-та част от OE се нанася в OM_2. Тъй като отсечката OM_1 е по-голяма от OM_2, то ще се намери такъв номер k, че $a_0a_1a_2\cdots a_{k-1}=b_0, b_1b_2\cdots b_{k-1}$, но $a_0, a_1 a_2\cdots a_k>b_0, b_1b_2\cdots b_k$, което означава, че $a>b$ съгласно правилото за наредба на реални числа.

Сега ще докажем, че за формулираното правило за наредба на реални числа е в сила свойство 4°, приведено в т. 1 за рационалните числа, т. е. ще докажем, че *за произволни реални числа a, b и c от неравенствата $a>b$ и $b>c$ следва неравенството $a>c$ (транзитивно свойство на знака „$>$"), а от равенствата $a=b$ и $b=c$ следва равенството $a=c$ (транзитивно свойство на знака „$=$")*. Транзитивното свойство на знака $=$ следва непосредствено от съответното свойство за целите числа. Ще докажем транзитивността на знака $>$. Нека $a>b$, $b>c$. Трябва да се докаже, че $a>c$. Ще разгледаме трите възможни случая: 1) c е неотрицателно; 2) c е отрицателно, a е неотрицателно; 3) c е отрицателно и a отрицателно.

1) Нека c е неотрицателно. Тогава b е също неотрицателно, тъй като в противен случай съгласно правилото за наредба ще имаме $c>b$, а това противоречи на условието $b>c$. По-нататък чрез същите разсъждения заключаваме, че a е неотрицателно

(понеже в противен случай $b>a$, а това противоречи на условието $a>b$).

И така в разглеждания случай и трите числа a, b и c са неотрицателни. Записвайки ги като безкрайни десетични дроби

$$a=a_0,a_1a_2\cdots,\quad b=b_0,b_1b_2\cdots,\quad c=c_0,c_1c_2\cdots,$$

от условието $a>b$ ще следва, че съществува такъв номер k, че

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k>b_k. \tag{2.6}$$

Аналогично от $b>c$ следва, че има номер p, за който

$$b_0=c_0,\ b_1=c_1,\ b_2=c_2,\ \ldots,\ b_{p-1}=c_{p-1},\ b_p>c_p. \tag{2.7}$$

Означаваме с m по-малкия от двата номера k и p. Тогава очевидно от (2.6) и (2.7) и от транзитивността на $>$ и $=$ за целите числа получаваме

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1,\ \ldots,\ a_{m-1}=c_{m-1},\ a_m>c_m,$$

а това означава (по правилото за наредба), че $a>c$.

2) Нека сега c е отрицателно, а a е неотрицателно. Тогава (независимо от знака на числото b) неравенството $a>c$ е вярно съгласно правилото за наредба на реалните числа.

3) Да разгледаме накрая случая, когато двете числа c и a са отрицателни. Ще отбележим, че в този случай и b е отрицателно (в противен случай ще получим от правилото за наредба, че $b>a$, а това противоречи на условието $a>b$).

И така в разглеждания случай и трите числа a, b и c са отрицателни. Но тогава (поради правилото за наредба на реални числа) неравенствата $a>b$, $b>c$ са еквивалентни на неравенствата $|b|>|a|$ и $|c|>|b|$. От последните две неравенства (поради свойството транзитивност на знака $>$, вече доказано в случай 1) за неотрицателни числа) следва, че $|c|>|a|$, което означава (поради наредбата на отрицателните числа a и c), че $a>c$. С това доказателството на свойството транзитивност на знака $>$ е завършено.

2.2. Множества от реални числа, ограничени отгоре или отдолу. Съществуване на точни граници

2.2.1. Основни определения. В този параграф ще разгледаме произволни множества от реални числа. За означаване на произволно множество от реални числа ще използуваме символа $\{x\}$.

Отделните числа, участвуващи в множеството $\{x\}$, ще наричаме ***елементи*** на това множество.

Навсякъде в този параграф ще искаме множеството $\{x\}$ да съдържа поне един елемент. Такова множество се нарича ***непразно.***

Ще въведем важното понятие ограниченост на множество отгоре (съответно отдолу).

Определение 1. *Множеството от реални числа $\{x\}$ се нарича* ***ограничено отгоре*** *(съответно* ***ограничено отдолу****), ако съществува такова реално число M (реално число m), че всеки елемент x от множеството $\{x\}$ да удовлетворява неравенството*

(2.8) $$x \leq M \text{ (съответно } x \geq m).$$

Числото M (числото m) се нарича ***горна граница (долна граница)*** *на множеството $\{x\}$.*

Разбира се, всяко ограничено отгоре множество $\{x\}$ има безбройно много горни граници. Наистина, ако реалното число M е една горна граница на множеството $\{x\}$, то всяко реално число M', по-голямо от числото M, е също горна граница на това множество (тъй като от неравенството (2.8) следва, че $x \leq M'$). Аналогична забележка важи и за долните граници на ограничено отдолу множество $\{x\}$.

Така например множеството на всички отрицателни реални числа е ограничено отгоре. За горна граница може да се вземе всяко неотрицателно число. Множеството на всички цели положителни числа 1, 2, 3, . . . е ограничено отдолу. За долна граница може да се вземе всяко реално число m, удовлетворяващо неравенството $m \leq 1$.

Естествено възниква въпросът за съществуване на най-малка горна граница за ограничените отгоре множества и най-голяма долна граница за ограничените отдолу множества.

Определение 2. *Най-малката от всички горни граници на ограничено отгоре множество $\{x\}$ се нарича* ***точна горна граница*** *на това множество и се означава със символа $\overline{x} = \sup\{x\}$*.*

Най-голямата от всички долни граници на ограничено отдолу множество $\{x\}$ се нарича ***точна долна граница*** *на това множество и се означава със символа $\underline{x} = \inf\{x\}$**.*

Определение 2 може да се формулира и по следния начин:

Числото $\overline{x}$ (числото $\underline{x}$) се нарича ***точна горна (точна долна) граница*** *на ограничено отгоре (отдолу) множество $\{x\}$, ако са изпълнени следните две условия: 1) всеки елемент x на множеството*

* sup — първите три букви от латинската дума supremum (супремум), която означава „най-висш".

** inf — първите три букви от латинската дума infimum (инфимум), която означава „най-низш".

$\{x\}$ *удовлетворява неравенството* $x \leq \bar{x}$ $(x \geq \underline{x})$; 2) *каквото и да е реалното число* x', *по-малко от* $\bar{x}$ (*по-голямо от* $\underline{x}$), *съществува поне един елемент* x *на множеството* $\{x\}$, *за който* $x > x'$ $(x < x')$.

В това определение условието 1) показва, че числото $\bar{x}$ (числото $\underline{x}$) е горна (долна) граница на множеството $\{x\}$, а условието 2) показва, че тази граница е най-малката (най-голямата) и не може да се намали (увеличи).

2.2.2. Съществуване на точни граници. Съществуването на точна горна (точна долна) граница за всяко ограничено отгоре (отдолу) множество не е очевидно.

Ще докажем следната основна теорема.

Основна теорема 2.1. *Всяко непразно, ограничено отгоре* (*отдолу*) *множество от реални числа има точна горна* (*точна долна*) *граница.*

Доказателство. Ще дадем доказателство само за съществуването на точна горна граница за всяко ограничено отгоре множество, тъй като съществуването на точна долна граница за всяко ограничено отдолу множество се доказва аналогично.

И така нека множеството $\{x\}$ е ограничено отгоре, т. е. съществува такова реално число M, че всеки елемент на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq M$.

Възможни са следните два случая: 1°. Сред елементите на множеството $\{x\}$ има поне едно неотрицателно реално число. 2°. Всички елементи на множеството $\{x\}$ са отрицателни реални числа. Ще разгледаме тези случаи поотделно.

1°. Да разгледаме само неотрицателните реални числа от множеството $\{x\}$. Всяко от тези числа е представимо с безкрайна десетична дроб. Да разгледаме целите части на тези десетични дроби. Поради неравенството $x \leq M$ всички цели части не надминават числото M и затова ще се намери най-голяма от целите части, която ще означим с $\bar{x}_0$. Да запазим измежду неотрицателните числа на множеството $\{x\}$ онези, чиято цяла част е равна на $\bar{x}_0$, и да пренебрегнем останалите. В запазените числа разглеждаме първия десетичен знак след запетаята. Най-големия от тези знакове означаваме с $\bar{x}_1$. Запазваме измежду неотрицателните числа на множеството $\{x\}$ онези, на които цялата част е равна на $\bar{x}_0$ и първият десетичен знак е равен на $\bar{x}_1$, а останалите пренебрегваме. В запазените числа разглеждаме втория десетичен знак след запетаята. Най-големия от тях означаваме с $\bar{x}_2$. Продължавайки аналогично тези разсъждения, ще определим някое реално число

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \tag{2.9}$$

Ще докажем, че това реално число $\bar{x}$ е точната горна граница на множеството $\{x\}$. За това е достатъчно да покажем верността на двете твърдения: 1) всеки елемент x на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$; 2) за всяко реално число x', по-малко от $\bar{x}$, съществува поне един елемент x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $x > x'$.

Ще докажем най-напред твърдението 1). Тъй като $\bar{x}$ по построение е неотрицателно реално число, то всеки отрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ очевидно удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$. Затова е достатъчно да се докаже, че всеки неотрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$.

Да допуснем, че някой неотрицателен елемент $x = x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ не удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$. Тогава $x > \bar{x}$ и по правилото за наредбата ще се намери такъв номер k, че $x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \cdots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}, x_k > \bar{x}_k$. Но последното съотношение противоречи на това, че $\bar{x}_k$ е най-големият от десетичните знакове x_k за тези елементи x, на които цялата част и първите $k-1$ знака след запетаята са съответно равни на $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{k-1}$. Полученото противоречие доказва твърдение 1).

Сега ще докажем твърдение 2). Нека x' е произволно реално число, за което $x' < \bar{x}$. Трябва да докажем, че съществува поне един елемент x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $x > x'$.

Ако числото x' е отрицателно, то неравенството $x > x'$ се удовлетворява очевидно от всеки неотрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ (по предположение поне един такъв елемент съществува).

Остава да разгледаме случая, когато числото x', удовлетворяващо условието $x' < \bar{x}$, е неотрицателно. Нека $x' = x'_0, x'_1 x'_2 \cdots x'_n \cdots$ От условието $x' < \bar{x}$ и от правилото за наредбата следва, че съществува такъв номер m, че

$$(2.10) \qquad x'_0 = \bar{x}_0, x'_1 = \bar{x}_1, \cdots, x'_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, x'_m < \bar{x}_m .$$

От друга страна, от построението на числото (2.9) следва, че за всеки номер m съществува неотрицателен елемент $x = x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ на множеството $\{x\}$, такъв, че цялата му част и първите му m знака след запетаята са същите, както в числото $\bar{x}$. С други думи, за номера m може да се намери такъв елемент x, че

$$(2.11) \qquad x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \cdots, x_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, x_m = \bar{x}_m.$$

Съпоставяйки (2.10) и (2.11), получаваме

$$x_0=x'_0,\ x_1=x'_1,\ \ldots,\ x_{m-1}=x'_{m-1},\ x_m>x'_m,$$

а това означава (поради правилото за наредба), че $x>x'$. Твърдение 2), а с това и теоремата за случая 1° са доказани.

2°. Аналогично се доказва съществуването на точна горна граница и във втория случай, когато всички елементи x на множеството $\{x\}$ са отрицателни реални числа. В този случай ще представим всички елементи x с отрицателни безкрайни десетични дроби и ще означим с $\bar{x}_0$ и най-малката от целите части на тези дроби, с $\bar{x}_1$ — най-малкия от първите десетични знакове на тези дроби, цялата част на които е равна на $\bar{x}_0$, с $\bar{x}_2$ — най-малкия от вторите десетични знакове на тези дроби, цялата част и първия десетичен знак на които са съответно равни на $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$, и т. н.

По този начин получаваме неположителното реално число

$$\bar{x}=-\bar{x}_0,\bar{x}_1\,\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n\ldots$$

Напълно аналогично на случай 1° се доказва, че това число е точна горна граница на множеството $\{x\}$, т. е. верността на твърдения 1) и 2), формулирани при разглеждането на случай 1°. Теоремата е доказана.

2.3. Приближаване на реалните числа с рационални

Ще докажем няколко важни леми за приближаване на реалните числа с рационални.

Отначало ще установим, че всяко реално число може да бъде приближено с отнапред зададена точност чрез рационални числа.

Да разгледаме произволно реално число a. За определеност ще предполагаме, че това число е неотрицателно, и ще го представим с десетичната дроб $a=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$

Отсичайки тази дроб до n-тия знак включително след запетаята, ще получим рационалното число $a_0,a_1a_2\ldots a_n$, при което от правилото за наредба на реалните числа непосредствено следва, че $a_0,a_1a_2\ldots a_n\leq a$.

Като увеличим това число с 10^{-n}, ще получим друго рационално число $a_0,a_1a_2\ldots a_n+10^{-n}$, което (поради правилото за наредба на реалните числа) ще удовлетворява неравенството

$$a\leq a_0,a_1a_2\ldots a_n+10^{-n}.$$

И така за всеки номер n намерихме такива две рационални числа $\alpha_1=a_0,a_1a_2\cdots a_n$ и $\alpha_2=a_0,a_1a_2\cdots a_n+10^{-n}$, че $\alpha_1\leq\alpha\leq\alpha_2$ и $\alpha_2-\alpha_1=10^{-n}$.

Ще се убедим в това, че за всяко отнапред зададено положително рационално число ε от известно място нататък (т. е. от някое n нататък) е изпълнено неравенството $10^{-n}<\varepsilon$.

Действително според аксиомата на Архимед има само краен брой естествени числа, ненадминаващи числото $1/\varepsilon$. Следователно само за краен брой номера n е изпълнено неравенството $10^n\leq 1/\varepsilon$, или $10^{-n}\geq\varepsilon$. За всички останали номера n е изпълнено противоположното неравенство $10^{-n}<\varepsilon$, което и трябваше да докажем.

Стигнахме до следното твърдение:

Лема 1. *За произволно реално число a и за всяко отнапред избрано положително рационално число ε съществуват такива две рационални числа α_1 и α_2, че $\alpha_1\leq a\leq\alpha_2$ и $\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon$.*

Ще докажем още две леми, характеризиращи гъстотата на разпределение на рационалните числа в реалните числа.

Лема 2. *Каквито и да са двете реални числа a и b, за които $a>b$, съществува рационално число α, заключено между тях, т. е. такова, че $a>\alpha>b$ (а следователно съществуват и безбройно много различни рационални числа, заключени между a и b).*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая, когато числата a и b са неотрицателни, тъй като случаят, когато a и b са неположителни, се свежда към първия, като използваме модулите, а случаят, когато a е положително, а b — отрицателно, е тривиален (за α може да се вземе нулата).

И така нека $a>b\geq 0$. Да предположим, че $a=a_0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $b=b_0,b_1b_2\cdots b_n\cdots$, при това, ако a е рационално число, представимо с крайна десетична дроб, ще приемем за представител на a онази десетична дроб, която окончава на безкраен брой деветки.

Тъй като $a>b$, ще се намери такъв номер k, че $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\ldots$, $a_{k-1}=b_{k-1}$, $a_k>b_k$.

Поради направената по-горе уговорка всички десетични знаци a_n при $n>k$ не могат да бъдат нули.

Означаваме с p най-малкото от числата n, по-големи от k, за които $a_n\neq 0$. Тогава числото a може да се запише във вида

$$a=a_0,a_1a_2\cdots a_k00\cdots 0a_p\cdots \qquad (a_p>0).$$

С помощта на правилото за наредба на реални числа лесно се проверява, че рационалното число

$$\alpha=a_0,a_1a_2\cdots a_k00\cdots 0(a_p-1)999$$

удовлетворява неравенствата $a>\alpha>b$. □

Лема 3. *Нека x_1 и x_2 са две реални числа. Нека за всяко положително рационално число ε да съществуват такива две рационални числа γ_1 и γ_2, че $\gamma_1 \leqq x_1 \leqq \gamma_2$, $\gamma_1 \leqq x_2 \leqq \gamma_2$, и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$.* Тогава *числата x_1 и x_2 са равни.*

Доказателство. Допускаме противното, т. е. че $x_1 \neq x_2$. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че $x_1 < x_2$. Съгласно лема 2 съществуват такива две рационални числа α_1 и α_2, че

$$x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < x_2.$$

Нека сега γ_1 и γ_2 са какви да е рационални числа, удовлетворяващи неравенствата

$$\gamma_1 \leqq x_1 \leqq \gamma_2, \quad \gamma_1 \leqq x_2 \leqq \gamma_2.$$

От горните неравенства и свойствата транзитивност на $>$ и $=$ получаваме $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Но тогава $\gamma_2 - \gamma_1 > \alpha_2 - \alpha_1$, което противоречи на това, че разликата $\gamma_2 - \gamma_1$ може да бъде направена по-малка от всяко отнапред избрано положително рационално число ε. □

2.4. Операции събиране и умножение на реални числа

Един от най-важните въпроси от теорията на реалните числа е въпросът за дефиниране на операциите събиране и умножение на реални числа и свойствата на тези операции.

2.4.1. Дефиниране на операциите. Точно описание на понятието реално число. За да се съберат две реални числа a и b, те се заменят с исканата точност с рационални числа и за приближена стойност на сумата им се взема сумата на посочените рационални числа.

Фактически посоченият практически начин за събиране на реални числа предполага, че колкото по-точно рационалните числа α и β приближават съответно реалните числа a и b, толкова по-точно сумата $\alpha+\beta$ приближава реалното число, което би трябвало да бъде сумата на реалните числа a и b.

Желанието да се оправдае посоченият практически начин за събиране на две реални числа води до следното определение на сума на две реални числа.

Определение 1. ***Сума на две реални числа*** *a и b наричаме такова реално число x, което за всеки четири рационални числа*

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, *за които са изпълнени неравенствата* $\alpha_1 \leqq a \leqq \alpha_2$, $\beta_1 \leqq b \leqq \beta_2$, *удовлетворява неравенствата*

$$\alpha_1+\beta_1 \leqq x \leqq \alpha_2+\beta_2.$$

Това число x се означава със символа $a+b$. В 2.4.2 ще бъде доказано, че такова число x съществува и е само едно. Там ще бъде установено, че това число x е точната горна граница на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ от сумите на всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_1 \leqq a$, $\beta_1 \leqq b$, или точната долна граница на множеството $\{\alpha_2+\beta_2\}$ от сумите на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leqq \alpha_2$, $b \leqq \beta_2$.

В 2.4.2 ще бъде доказано също, че ако приложим даденото определение за две рационални числа, стигаме до същия резултат, както и при старото определение за сума на рационални числа.

Определение 2. ***Произведение*** *на две положителни реални числа a и b се нарича такова реално число x, което при всеки избор на рационалните числа* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, *удовлетворяващи съотношенията* $0<\alpha_1 \leqq a \leqq \alpha_2$, $0<\beta_1 \leqq b \leqq \beta_2$, *удовлетворява неравенствата* $\alpha_1\beta_1 \leqq x \leqq \alpha_2\beta_2$.

Това число x се означава със символа $a.b$. В 2.4.2 ще бъде установено, че такова число x съществува и то е само едно. Това число x е точната горна граница на множеството $\{\alpha_1.\beta_1\}$ от произведенията на всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $0<\alpha_1 \leqq a$, $0<\beta_1 \leqq b$, или точната долна граница на множеството $\{\alpha_2.\beta_2\}$ от произведенията на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $0<a \leqq \alpha_2$, $0<b \leqq \beta_2$.

Произведение на реални числа с произволен знак *се определя по следното правило:*

1) *за всяко реално число a полагаме* $a.0=0=0.a$;

2) $a.b=\begin{cases} |a|.|b|, & \text{ако } a \text{ и } b \text{ имат еднакви знаци,} \\ -|a|.|b|, & \text{ако } a \text{ и } b \text{ са с различни знаци.} \end{cases}$

В 2.4.2 ще бъде установено, че приложено към две рационални числа, това правило води до същия резултат, както и старото определение за произведение на рационални числа.

Сега можем да уточним понятието реално число.

Определение 3. *Ще наричаме реални числата, представими във вид на безкрайни десетични дроби, при условие, че за тези числа са определени по посочения по-горе начин операциите наредба, събиране и умножение.*

2.4.2. Съществуване и единственост на сумата и произведението на реални числа.

Теорема за съществуване на сума на реални числа. *За всеки две реални числа a и b съществува реално число x, което е тяхна сума.*

Доказателство. Фиксираме две произволни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$, и разглеждаме всевъзможните рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_1 \leq a$, $\beta_1 \leq b$.

Ще се убедим, че множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ от всички суми $\alpha_1+\beta_1$ на посочените рационални числа е ограничено отгоре.

Съгласно свойството транзитивност на знаците $>$ и $=$ от неравенствата $a \leq \alpha_2$ и $\alpha_1 \leq a$ следва, че $\alpha_1 \leq \alpha_2$, а от неравенствата $b \leq \beta_2$ и $\beta_1 \leq b$ следва, че $\beta_1 \leq \beta_2$.

По двете неравенства $\alpha_1 \leq \alpha_2$ и $\beta_1 \leq \beta_2$ са еднопосочни, свързват рационални числа и могат да бъдат почленно събрани (вж. края на 2.1.1). Тогава $\alpha_1+\beta_1 \leq \alpha_2+\beta_2$, което и доказва ограничеността на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ отгоре и това, че $\alpha_2+\beta_2$ е една горна граница на това множество.

Според основната теорема 2.1 (вж. 2.2.2) за множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ съществува точна горна граница, която ще означим с x. Остава да се убедим, че това реално число е сума на числата a и b, т. е. удовлетворява неравенствата

$$\alpha_1+\beta_1 \leq x \leq \alpha_2+\beta_2.$$

Верността на лявото неравенство $\alpha_1+\beta_1 \leq x$ следва от това, че x е горна граница на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а верността на дясното неравенство $x \leq \alpha_2+\beta_2$ следва от това, че числото $\alpha_2+\beta_2$ е горна граница за множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а x е точната горна граница, т. е. най-малката от горните граници на това множество. Теоремата е доказана.

Забележка. Съвсем аналогично се доказва, че сумата на числата a и b е точна долна граница на множеството $\{\alpha_2+\beta_2\}$ от сумите $\alpha_2+\beta_2$ на всички възможни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$.

Теорема за единственост на сумата на две реални числа. *Съществува само едно реално число x, което е сума на две дадени реални числа a и b.*

Доказателство. Да предположим, че съществуват две реални числа x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата

$$(2.12) \qquad \begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \leq x_1 \leq \alpha_2+\beta_2, \\ \alpha_1+\beta_1 \leq x_2 \leq \alpha_2+\beta_2 \end{cases}$$

за всички възможни рационални числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяващи неравенствата

$$\alpha_1 \leqq a \leqq \alpha_2, \quad \beta_1 \leqq b \leqq \beta_2. \tag{2.13}$$

Да фиксираме едно произволно положително рационално число ε. Съгласно лема 1 от 2. 3 за положителното рационално число $\varepsilon/2$ и за даденото реално число a съществуват такива рационални числа α_1 и α_2, че $\alpha_1 \leqq a \leqq \alpha_2$, при което $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/2$.

Аналогично за избраното $\varepsilon/2$ и за даденото реално число b съществуват такива рационални числа β_1 и β_2, че $\beta_1 \leqq b \leqq \beta_2$ и $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/2$.

Ако вземем в неравенствата (2.13) посочените α_1, α_2, β_1 и β_2, ще получим, че двете числа x_1 и x_2 удовлетворяват неравенствата 2.12), които могат да се препишат във вида

$$\gamma_1 \leqq x_1 \leqq \gamma_2, \quad \gamma_1 \leqq x_2 \leqq \gamma_2,$$

където $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$.

Тъй като $\gamma_2 - \gamma_1 = (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, ще получим, че двете числа x_1 и x_2 са заключени между рационалните числа γ_1 и γ_2, разликата между които е по-малка от отнапред избраното положително рационално число ε.

Поради лема 3 от 2.3 имаме $x_1 = x_2$. □

Следствие. Ако приложим даденото определение за сума на реални числа за две рационални числа a и b, ще получим същия резултат, както и с определението за сума на рационални числа.

Наистина нека a и b са две рационални числа, $a+b$ е сумата им съгласно старото определение, α_1, α_2, β_1 и β_2 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата (2.13). Тогава очевидно са верни неравенствата*

$$\alpha_1 + \beta_1 \leqq a + b \leqq \alpha_2 + \beta_2, \tag{2.14}$$

при това съгласно теоремата за единственост числото $a+b$ е единственото реално число, удовлетворяващо неравенствата (2.14).

Съвсем аналогично се доказва съществуването и единствеността на произведението на две реални числа.

Ясно е, че е достатъчно да се докаже съществуването и единствеността на произведението на две положителни числа a и b.

За да докажем съществуването на произведението, фиксираме произволни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leqq \alpha_2$, $b \leqq \beta_2$, и разглеждаме всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $0 < \alpha_1 \leqq a$, $0 < \beta_1 \leqq b$. Лесно е да се убедим, че множеството $\{\alpha_1 . \beta_1\}$ от всички произведения $\alpha_1 . \beta_1$ е

* Тъй като за рационалните числа еднопосочните неравенства могат да бъдат събирани почленно.

ограничено отгоре и числото $\alpha_2 . \beta_2$ е една горна граница на това множество.

Съгласно основната теорема 2.1 съществува точна горна граница x на това множество, която, както лесно се проверява, удовлетворява неравенствата $\alpha_1\beta_1 \leq x \leq \alpha_2\beta_2$, т. е. е произведение на числата a и b.

Аналогично може да се докаже, че произведението на положителните числа a и b е точна долна граница на множеството $\{\alpha_2 . \beta_2\}$ от произведенията $\alpha_2 . \beta_2$ на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$.

За да докажем единствеността на произведението на две реални числа a и b, ще предположим, че съществуват две такива реални числа x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата

(2.15) $$\alpha_1 . \beta_1 \leq x_1 \leq \alpha_2 . \beta_2, \quad \alpha_1 . \beta_1 \leq x_2 \leq \alpha_2 . \beta_2$$

за всички рационални числа α_1, α_2, β_1 и β_2, че*

(2.16) $$0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \leq M, \quad 0 < \beta_1 \leq b \leq \beta_2 \leq M.$$

Фиксираме произволно положително рационално число ε, с помощта на лема 1 намираме за дадените реални числа a и b такива рационални числа α_1, α_2, β_1 и β_2, удовлетворяващи неравенствата (2.16), за които $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/2M$ и $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/2M$.

Но тогава поради (2.15) числата x_1 и x_2 ще бъдат заключени между рационалните числа $\alpha_1 . \beta_1$ и $\alpha_2 . \beta_2$, чиято разлика е

$$\alpha_2 . \beta_2 - \alpha_1 . \beta_1 = \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) < 2M . \varepsilon/2M = \varepsilon.$$

Съгласно лема 3 от 2.3 $x_1 = x_2$.

С помощта на теоремата за единственост, както и при сума, се доказва, че за рационални числа това определение е еквивалентно на определението за произведение на рационални числа, дадено по-рано.

2.5. Свойства на реалните числа

2.5.1. Основни свойства на реалните числа. В тази точка ще установим, че за реалните числа са валидни всички основни свойства на рационалните числа, изброени в 2.1.1. Вече бе установено, че реалните числа притежават свойствата 1°—4°, така че остава да се изясни само въпросът за свойствата 5°—16°. Лесно се убеждаваме, че за реалните числа са налице свойствата 5°—8° и 14° свързани с понятието сума. Валидността на свойствата 5° — 8°

* За M може да се вземе например числото $2(a+b)$.

произтича непосредствено от определението за сума на реални числа и от валидността на тези свойства за рационални числа.

Ще се спрем на доказателството на свойство 14°, т. е. ще докажем, че ако a, b и c са три произволни реални числа и $a>b$, то $a+c>b+c$.

Тъй като $a>b$, то съгласно лема 2 от 2.3 съществуват такива рационални числа α_1 и β_2, че $a>\alpha_1>\beta_2>b$. За реалното число c и за положителното рационално число $\varepsilon=\alpha_1-\beta_2$ съществуват такива рационални числа γ_1 и γ_2, че $\gamma_1\leqq c\leqq\gamma_2$, при което $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon=\alpha_1-\beta_2$ (вж. лема 1, 2.3). Нека сега α_2 и β_1 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_2\geqq a$, $b\geqq\beta_1$. Тогава по определението за сума на реални числа

$$\alpha_2+\gamma_2\geqq a+c\geqq\alpha_1+\gamma_1,\quad \beta_2+\gamma_2\geqq b+c\geqq\beta_1+\gamma_1.$$

За доказване на $a+c>b+c$ поради транзитивността на знака $>$ е достатъчно да покажем, че $\alpha_1+\gamma_1>\beta_2+\gamma_2$, но това непосредствено следва от неравенството $\gamma_2-\gamma_1<\alpha_1-\beta_2$.

Ще отбележим, че въпросът за изваждане на реални числа като действие, обратно на събирането, се изчерпва напълно въз основа на свойства 5°—8°. ***Разлика на две реални числа*** *a и b ще наричаме реалното число c,* за което $c+b=a$.

Ще се убедим, че тази разлика е числото $c=a+b'$, където b' е противоположното число на b.

Наистина от свойства 5°—8° следва $c+b=(a+b')+b=a+(b'+b)=a+0=a$.

Ще се убедим също, че съществува само едно реално число, което е разлика на две дадени реални числа. Да предположим, че освен посоченото число $c=a+b'$ съществува още едно такова число d, че $d+b=a$. Тогава, от една страна, $(d+b)+b'=a+b'=c$, а, от друга, $(d+b)+b'=d+(b+b')=d+0=d$, т. е. $c=d$.

От определението на разлика и от свойство 8° следва, че числото a', противоположно на a, е равно на разликата $0-a$. Това число се записва $-a$.

Не представлява трудност да се пренесат за реалните числа свойствата 9°—13° и 15°, свързани с понятието произведение. Ще отбележим само, че по отношение на свойство 12°, ако a е реално положително число, а α_1 и α_2 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата $0<\alpha_1\leqq a\leqq\alpha_2$, то числото a', обратно на a, се определя като единственото реално число, удовлетворяващо неравенствата $1/\alpha_2\leqq a'\leqq 1/\alpha_1$.*

* За a' може да бъде взета точната горна граница на множеството на всички рационални числа $\{1/\alpha_2\}$, където $\alpha_2\geqq a$.

От свойствата 9^0-12^0 заключаваме, че *за всеки две реални числа a и b ($b \neq 0$) съществува и при това само едно число c, удовлетворяващо $c.b=a$. Това число се нарича* ***частно на числата*** a и b. От определението за частно и от свойство 12^0 следва, че числото a', обратно на числото a, е равно на числото $1/a$.

Ще отбележим накрая, че за реалните числа е в сила и последното 16^0-то свойство, а именно: Каквото и да е реалното число a, то числото 1 може да се прибави към себе си толкова пъти, че получената сума да надвишава a.

Да докажем това свойство. В случая $a<0$ то е вярно, тъй като $1>a$. Нека $a \geq 0$, $a=a_0,a_1a_2\ldots$ Достатъчно е да се докаже, че за числото a съществува цяло число n, за което $n>a$, тъй като чрез сумиране на числото 1 n пъти ще получим цялото число n. Но това е очевидно: достатъчно е да вземем $n=a_0+2$. □

По такъв начин за реалните числа са валидни всички основни свойства на рационалните числа, формулирани в 2.1.1.

Следователно за реалните числа са в сила всички алгебрични правила, отнасящи се за аритметичните действия и съчетаването им с равенства и неравенства.

2.5.2. Две важни съотношения. При работа с рационални числа често се използват съотношенията:

$$|a.b|=|a|.|b|, \tag{2.17}$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|. \tag{2.18}$$

Равенството (2.17) следва непосредствено от определението за произведение на две реални числа. Ще докажем неравенството (2.18). От определението за модул и правилото за наредба следва, че за произволни реални числа a и b са изпълнени неравенствата

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Съгласно основните свойства еднопосочните неравенства могат да се събират почленно. Затова

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq (|a|+|b|).$$

Използвайки в случая $a+b>0$ дясното, а в случая $a+b \leq 0$ лявото от последните неравенства, ще получим неравенството (2.18).

2.5.3. Някои конкретни множества от реални числа. По-нататък често ще срещаме различни множества от реални числа. Както вече се условихме, произволно множество от реални числа ще означаваме с символа $\{x\}$, а числата от него ще наричаме елементи или точки на това множество. Ще казваме, че точката

x_1 от множеството $\{x\}$ $(x_1 \in \{x\})$ е различна от точката x_2 на това множество, ако реалните числа x_1 и x_2 не са равни помежду си. Ако при това е вярно неравенството $x_1 > x_2$ $(x_1 < x_2)$, ще казваме, че точката x_1 лежи надясно (наляво) от точката x_2.

Да разгледаме някои често употребявани множества от реални числа.

1°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a \leq x \leq b$, ще наричаме* ***сегмент*** *или* ***затворен интервал*** *и ще го означаваме със символа* $[a, b]$.

2°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a < x < b$, ще наричаме* ***интервал*** *или* ***отворен интервал*** *и ще го означаваме със символа* (a, b).

3°. *Интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, където $\varepsilon > 0$, ще наричаме* ***ε-околност на точката*** *a.*

4°. *Всеки интервал (отворен интервал), съдържащ точката a, ще наричаме* ***околност на точката*** *a.*

5°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a \leq x < b$ (или $a < x \leq b$), ще наричаме* ***полусегмент*** *или* ***полузатворен отдолу (отгоре) интервал,*** *или* ***полузатворен отляво (отдясно) интервал*** *и ще го означаваме със символа* $[a, b)$ *(или* $(a, b]$*).*

6°. *Множеството на всички реални числа ще наричаме* ***числова (безкрайна) права*** *и ще го означаваме със символа* $(-\infty, +\infty)$.

7°. *Множеството на реалните числа x, удовлетворяващи неравенството $x \geq a$ (или $x \leq b$), ще наричаме* ***полуправа*** *и ще го означаваме със символа* $[a, +\infty)$ *(или* $(-\infty, b]$*).*

8°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенството $x > a$ (или $x < b$), ще наричаме* ***отворена полуправа*** *и ще го означаваме със символа* $(a, +\infty)$ *(или* $(-\infty, b)$*).*

Забележка 1. Най-общо под понятието *„интервал"* се разбира множество от вида 1°, 2°, 5°, 6°, 7° и 8°. В първите три случая имаме *„крайни интервали"*, а в последните три — *„безкрайни интервали"*. Ако в текста се среща понятието „интервал" без прилагателно (отворен, затворен, краен, безкраен и т. н.), то видът му или е отнапред посочен, или се изяснява от символа, с който е означен. Когато липсва каквато и да било информация за вида на интервала, ще смятаме, че е „краен отворен интервал".

Забележка 2. В случаите 1°, 2° и 5° точките a и b се наричат ***гранични точки, контурни точки*** или ***краища*** на интервала. В случая 1° те принадлежат на интервала, в 2° не принадлежат на интервала, а в 5° едната принадлежи, а другата не принадлежи на интервала. И в трите случая всяка точка, която удовлетворява неравенствата $a < x < b$, се нарича ***вътрешна точка на интервала.***

Произволно множество $\{x\}$ ще наричаме ***плътно (навсякъде гъсто) в себе си,*** *ако всяка околност на всяка точка x от това множество съдържа поне една точка от множеството $\{x\}$, различна от x.* Пример за плътно (навсякъде гъсто) в себе си множество е всяко от определените по-горе множества 1°—8°. Други примери за плътни (навсякъде гъсти) в себе си множества са множествата на рационалните числа, принадлежащи на кое да е от множествата 1°—8°.

2.6. Допълнителни въпроси от теорията на реалните числа

За въвеждане на реалните числа използвахме безкрайните десетични дроби. За множеството на безкрайните десетични дроби бяха определени правила за наредба, събиране и умножение и беше установено, че тези правила удовлетворяват шестнадесет основни свойства (изброени в 2.1.1 за рационалните числа). Използваният метод за въвеждане на реалните числа не е единствено възможният. Реалните числа могат да се въведат с помощта на безкрайни двоични дроби, с помощта на т. нар. дедекиндови сечения в областта на рационалните числа, с помощта на редици от рационални числа и по други начини. За да изясним връзката между различните методи за въвеждане на реалните числа, ще въведем някои нови понятия и ще установим още едно важно свойство на множеството на реалните числа.

2.6.1. ***Пълнота на множеството от реалните числа.*** Нека A и B са две произволни множества. *Ще казваме, че между множествата A и B е установено* ***взаимно еднозначно съответствие (1,1-значно съответствие),*** *ако на всеки елемент на множеството A отговаря единствен елемент от множеството B, така че на всеки елемент на множеството B е съпоставен някой елемент от множеството A и на различни елементи на множеството A съответствуват различни елементи на множеството B.*

Две множества, за елементите на всяко от които са определени правила за наредба, събиране и умножение, ще наричаме ***изоморфни едно на друго*** *(или за краткост* ***изоморфни****) относно тези правила, ако между елементите на тези множества може да се установи такова взаимно еднозначно съответствие, че ако на елементите a и b от първото множество съответствуват елементите a' и b' от второто множество, то: 1) елементите a' и b' са свързани със същия знак ($>$, $<$ или $=$), както и елементите a и b;*

2) *на елемента $a+b$ съответствува елементът $a'+b'$*; 3) *на елемента $a.b$ съответствува елементът $a'.b'$.*

Аналогично може да се въведе понятието изоморфни множества въз основа и на други правила, характеризиращи някакви съотношения между елементите на множествата, различни от правилата за наредба, събиране и умножение.

Пример на две изоморфни множества относно правилата наредба, събиране и умножение са множеството на рационалните числа, въведени като отношение на цели числа със съответните (вж. 2.1.1) правила за наредба, събиране и умножение, и множеството на рационалните числа, записани във вид на безкрайни десетични дроби с обикновените правила за наредба, събиране и умножение на реални числа.

Ще разгледаме по-внимателно две множества: множеството на рационалните числа и множеството на реалните числа. За всяко от тези множества са определени правила за наредба, събиране и умножение и са изпълнени шестнадесетте основни свойства. Ясно е, че множеството на реалните числа е „по-широко" от множеството на рационалните числа, тъй като множеството на реалните числа не е изоморфно на множеството на рационалните числа относно правилата за наредба, събиране и умножение,* но в множеството на реалните числа може да се отдели част, изоморфна на множеството на рационалните числа относно посочените правила.

Естествено възниква въпросът: възможно ли е и за множеството на реалните числа да се построи „по-широко" множество от обекти със следните свойства: 1) в това „по-широко" множество да са определени правила за наредба, събиране и умножение и да са изпълнени останалите от 16-те основни свойства; 2) това „по-широко" множество да не е изоморфно на множеството на реалните числа относно посочените правила; 3) в „по-широкото" множество да може да се отдели част, изоморфна на множеството на реалните числа относно посочените правила.

Ще докажем, че такова „по-широко" множество не съществува, т. е. множеството на реалните числа е пълно относно правилата наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства.

Въобще *произволно множество от обекти, за които са определени някои правила и са изпълнени някои свойства, се нарича пълно относно тези правила и свойства, ако не може да се построи такова „по-широко" множество от обекти, че:*

* В 2.7.3 ще бъде доказано, че не може да се установи взаимно еднозначно съответствие между рационалните и реалните числа от сегмента [0, 1], откъдето следва твърдението.

1) в това „по-широко" множество да са определени същите правила и да има същите свойства; 2) това „по-широко" множество да не е изоморфно на даденото относно посочените правила; 3) в това „по-широко" множество да съществува част, изоморфна на даденото множество относно посочените правила.

Можем да твърдим, че множеството на рационалните числа не е пълно относно правилата наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства, тъй като съществува „по-широко" множество (множеството на реалните числа), удовлетворяващо изискванията 1), 2), 3) от току-що формулираното определение.

Сега ще докажем, че множеството на реалните числа е **пълно** относно правилата за наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства.

Да предположим противното, т. е. че съществува такова „по-широко" множество от обекти $\{x'\}$, че да са изпълнени 1), 2) и 3) от формулираното по-горе определение, и да означим с $\{\overline{x}'\}$ тази част от множеството $\{x'\}$, която е изоморфна на множеството $\{x\}$ от реалните числа относно правилата за наредба, събиране и умножение.

Ще отбележим най-напред, че в множеството $\{x'\}$ съществува единствена двойка елементи $0'$ и $1'$, играещи особената роля на нула и единица.* Можем да твърдим, че елементите $0'$ и $1'$ принадлежат на множеството $\{\overline{x}'\}$ и са във взаимно еднозначно съответствие с реалните числа 0 и 1.**

Нека α' е кой да е елемент на множеството $\{x'\}$, непринадлежащ на множеството $\{\overline{x}'\}$. Като използваме правилото за наредба, можем да разделим елементите $\overline{x}'$ на множеството $\{\overline{x}'\}$ на два класа — горен и долен, отнасяйки към горния клас всички елементи $\overline{x}'$, удовлетворяващи неравенството $\overline{x}'>\alpha'$, а към долния клас — всички елементи $\overline{x}'$, удовлетворяващи неравенството $\overline{x}'<\alpha'$. Тези два класа не са празни. Наистина ще докажем на-

* Ако имаше два елемента $0_1'$ и $0_2'$, играещи особената роля на нулата, то от свойствата на сумата ще получим $0_1' = 0_1' + 0_2' = 0_2' + 0_1' = 0_2'$, т. е. $0_1' = 0_2'$. Аналогично се доказва единствеността на елемента $1'$, играещ особената роля на единица.

** Ще докажем например, че елементът $0'$ принадлежи на множеството $\{\overline{x}'\}$ и се намира във взаимно еднозначно съответствие с реалното число 0. Да предположим, че на реалното число 0 съответствува някой елемент θ' от множеството $\{\overline{x}'\}$. Тъй като $0+0=0$, то $\theta'+\theta'=\theta'$. В множеството $\{x'\}$ съществува такъв елемент θ'', че $\theta''+\theta'=0'$. Прибавяйки към двете страни на равенството $\theta'+\theta'=\theta'$ елемента θ'', получаваме $(\theta''+\theta')+\theta'=\theta''+\theta'$, т. е. $0'+\theta'=0'$, или $\theta'=0'$. Аналогично се провеждат и разсъжденията за единичния елемент.

пример, че горният клас не е празен. Събирайки елемента $1'$ сам със себе си достатъчен брой пъти, поради свойство 16° ще получим елемент n' от множеството $\{\overline{x'}\}$, удовлетворяващ неравенството $n'>\alpha'$, т. е. принадлежащ на горния клас. От свойство 4° следва, че всеки елемент от долния клас е по-малък от произволен елемент от горния клас.

Поради изоморфизма между множеството $\{\overline{x'}\}$ и множеството $\{x\}$ на реалните числа можем да твърдим, че множеството на реалните числа се разделя на два класа, при това всяко число от долния клас е по-малко от всяко число от горния клас. Но това означава, че долният клас от реални числа е ограничен отгоре и има (според теорема 2.1) точна горна граница m, а горният клас има точна долна граница M. От определенията за точни граници следва, че двете граници m и M са заключени между произволно близки реални числа и затова $m=M$. Тъй като числото $m=M$ е реално число, то принадлежи на един от двата класа, т. е. или съществува най-малък елемент в горния клас, или най-голям елемент в долния клас. Ще докажем, че и двете твърдения са абсурдни. Нека например съществува най-малък елемент в горния клас от реални числа. Тогава съществува най-малък елемент m' и в горния клас при съответното разделяне на множеството $\{\overline{x'}\}$. Според определението на горния клас $m'>\alpha'$. Съгласно свойствата на сума съществува разликата $m'-\alpha'$ и $m'-\alpha'>0'$. Но тогава от 11° за елемента $m'-\alpha'$ съществува обратен, който съгласно свойствата на произведение е равен на частното $1'/(m'-\alpha')$. Поради свойство 16° от елемента $1'$ може да се получи „цял" елемент n', който принадлежи на $\{\overline{x'}\}$ и удовлетворява неравенството $n'>1'/(m'-\alpha')$. От това неравенство и свойствата на произведение и сума получаваме*

$$m'-1'/n'>\alpha'. \tag{2.19}$$

Тъй като елементите m', $1'$ и n' принадлежат на множеството $\{\overline{x'}\}$, то и елементът $(m'-1'/n')$ също така принадлежи на това множество и очевидно удовлетворява неравенството $m'-1'/n'<m'$. Но тогава неравенството (2.19) означава, че горният клас има елемент, по-малък от m', т. е. m' не е най-малкият елемент. Полученото противоречие доказва пълнотата на множеството на реалните числа.**

* Тези свойства осигуряват приложимостта на всички правила на алгебрата.

** При доказателството на тази теорема се използва идеята на така нареченото дедекиндово сечение. Дедекиндово сечение в областта на рационалните числа се нарича разделянето на множеството на рационалните числа на две непразни подмножества A и B, такива, че всеки елемент на A да е по-малък от всеки елемент на B.

2.6.2. Аксиоматично въвеждане на множеството на реалните числа. За въвеждане на реалните числа използвахме множеството на безкрайните десетични дроби. Определяйки за множеството на тези дроби правила за наредба, събиране и умножение, установихме, че елементите на това множество притежават 16-те основни свойства и освен това свойството пълнота относно тези правила.

Описаният начин за въвеждане на реални числа, въпреки че притежава, както вече отбелязахме, несъмнени евристични и методични достойнства, не е единствено възможният и целесъобразният от научна гледна точка. За окончателното оформяне и пълната логическа завършеност на нашите представи за реалните числа е добре да се разгледа и аксиоматичният метод за въвеждане на тези числа.

Този метод се заключава в следното: Множеството от реални числа се въвежда като съвкупност от обекти,* удовлетворяващи 17 аксиоми. Това са 16-те основни свойства и аксиомата за пълнотата относно тях. Тези 17 аксиоми ще наричаме ***аксиоми на реалните числа.*** Конкретна реализация на съвкупност от обекти, удовлетворяващи 17-те аксиоми на реалните числа, е изученото вече множество на безкрайните десетични дроби. Възможни са и други реализации.

В сила е следното забележително твърдение:

Теорема за изоморфизъм. *Всяка реализация на съвкупност от обекти, удовлетворяващи 17-те аксиоми на реалните числа, е изоморфна на изученото множество на безкрайните десетични дроби.*

Доказателството на тази теорема е приведено в 2.6.3.

В геометрията множество от точки върху права се въвежда като съвкупност от обекти, удовлетворяващи известен брой аксиоми, между които основна роля играе аксиомата за пълнотата на тази съвкупност относно останалите аксиоми. Споменатите аксиоми позволяват да се установи взаимно еднозначно съответствие между множеството на точките върху правата и множеството на всички реални числа. Това съответствие позволява реалните числа да се изобразяват като точки на права линия (числовата ос), което ние широко ще използваме с илюстративни цели.

2.6.3. Доказателство на теоремата за изоморфизъм. За удобство ще разделим доказателството на отделни пунктове.

1°. Нека $\{x'\}$ е множество от обекти, удовлетворяващо 17-те аксиоми на реалните числа. Преди всичко ще отбележим, че аксиомите гарантират съществуването на елементите $0'$ и $1'$ в мно-

* При това нищо не се предполага за естеството на тези обекти.

жеството $\{x'\}$, играещи особена роля на нула и единица. От аксиомата на Архимед 16° имаме $1'>0'$.* В множеството $\{x'\}$ отделяме съвкупността от „рационални обекти". Във връзка с това ще отбележим, че всяко рационално число може да се получи от числата 0 и 1 чрез операциите събиране, изваждане и деление. Действително, сумирайки 1 достатъчен брой пъти, можем да получим всяко цяло положително число n; изваждайки от 0 достатъчен брой 1, ще получим всяко цяло отрицателно число; с деление на две цели числа получаваме всяко рационално число. Тъй като съгласно аксиомите в множеството $\{x'\}$ са определени операциите събиране, изваждане и деление, то с помощта на първите две операции от $0'$ и $1'$ ще получим всички (положителни и отрицателни) „цели обекти", а с деление на два „цели обекта" — и всички (положителни и отрицателни) „рационални обекти". Тези обекти ще означаваме, както целите и рационалните числа, но с „'".

Ще докажем, че построената съвкупност от рационални обекти на множеството $\{x'\}$ е изоморфна на съвкупността на рационалните числа на множеството $\{x\}$. Поставяме в съответствие на рационалното число m/n „рационалния обект" m'/n'. От начина на построяване на „рационалните обекти" следва, че на сумата и произведението на рационалните числа m/n и p/q съответствуват сумата и произведението на „рационалните обекти" m'/n' и p'/q'. Остава да се убедим, че m'/n' и p'/q' са свързани със същия знак за равенство или неравенство, както m/n и p/q. Тъй като за построените „рационални обекти" правилото за наредба посредством умножаване на „цели обекти" може да се сведе до наредба на „цели обекти", то е достатъчно да се убедим, че за всеки два „цели обекта" m' и n' имаме $m'>n'$ при $m>n$. За това е достатъчно да докажем, че $(n+1)'>n'$. Последното следва от това, че $1'>0'$, и оттук $(n+1)'=n'+1'>n'+0'=n'$.

2°. Нека a' е произволен обект от множеството $\{x'\}$. Ще покажем, че на този обект може да се съпостави напълно определена „безкрайна десетична дроб". За определеност ще предположим, че $a'>0'$. Според аксиома 16° сред „целите обекти", строго по-малки от a', има най-голям обект, който ще означим с a_0'; сред „рационалните обекти" a_0', $0'$; a_0', $1'$; $\ldots$; a_0', $9'$, строго по-малки от a', има най-голям, който означаваме с a_0', a_1', и т. н.

По такъв начин ние съпоставихме на всеки обект $a'>0'$ безкрайна съвкупност от „рационални обекти"

(2.20) $$a_0'; \; a_0', a_1'; \; a_0', a_1'a_2'; \; \ldots; \; a_0', a_1' a_2' \ldots a_n'; \ldots,$$

* Наистина, ако допуснем противното: $1'\leq 0'$, ще получим $1'+1'+\ldots+1'\leq 0'+0'+\ldots+0'=0'$ (колкото и единици да съберем), което противоречи на аксиома 16°.

или „безкрайната десетична дроб"

(2.21) $$a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdots a'_n \cdots$$

Същите разсъждения са валидни и за $a'<0'$, но в този случай както обектите (2.20), така и „безкрайната десетична дроб" (2.21) ще имат знак „—". От построението на съвкупността обекти (2.20) е очевидно, че за всеки номер n са изпълнени неравенствата

(2.22) $$a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdots a'_n < a' \leq a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdots a'_n + 1'/(10^n)',$$

т. е. всеки обект a' е заключен между два „рационални обекта", разликата между които $1'/(10^n)'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект.*

3°. Ще докажем сега, че ако два обекта a' и b' могат да се заключат между два „рационални обекта" α' и β' $(\beta'>\alpha')$, разликата между които $\beta'-\alpha'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен обект", то $a'=b'$. Да допуснем, че $a'\neq b'$. Нека например $a'<b'$. Тогава $\alpha'\leq a'<b'\leq\beta'$. От тези неравенства и от аксиомите получаваме

(2.23) $$0'<b'-a'\leq\beta'-\alpha'.$$

Но тогава за обекта $b'-a'$ ще се намери обратен $1'/(b'-a')$, а за него „цял обект" n', за който $n'>1'/(b'-a')$, така че $1'/n'<b'-a'$. Съпоставяйки последното неравенство с (2.23), получаваме $1'/n'<\beta'-\alpha'$, което противоречи на това, че разликата $\beta'-\alpha'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект.

4°. Ще се убедим, че на два различни обекта от множеството $\{x'\}$ се съпоставят различни „безкрайни десетични дроби". Действително да предположим, че на два обекта от $\{x'\}$ съответствува една и съща „безкрайна десетична дроб" (например (2.21)). Тогава поради неравенствата (2.22) тези два обекта могат да бъдат заключени между „рационални обекти", разликата между които може да бъде направена по-малка от всеки отнапред зададен „положителен" обект. Въз основа на 3° разглежданите обекти са равни. Доказаното твърдение оправдава представянето на всеки обект от множеството $\{x'\}$ с „безкрайна десетична дроб".

5°. Съгласно първите три аксиоми за обектите от множеството $\{x'\}$ са определени правила за наредба и операциите събиране и умножение. Ще докажем, че ако всички обекти на множеството $\{x'\}$ се представят с „безкрайни десетични дроби", то

* Действително за всеки обект $\varepsilon'>0'$ вследствие на аксиомите съществува обратен елемент $1'/\varepsilon'$, а за него — „цял обект" n', за който $n'>1'/\varepsilon'$, така че $1'/(10^n)'<1'/n'<\varepsilon'$.

за тези „дроби“ правилото за наредба и определенията на сума и произведение се формулират точно така, както за обикновените безкрайни десетични дроби, изучени по-горе.

Нека a' и b' са произволни обекти от множеството $\{x'\}$ и нека на тези обекти съответствуват „безкрайните десетични дроби“*

$$a'_0, a'_1\, a'_2 \cdots \text{ и } b'_0, b'_1\, b'_2 \cdots \tag{2.24}$$

Най-напред ще установим правилото за наредба на обектите a' и b', представени с „безкрайните десетични дроби“ (2.24). Трябва да се докажат следните две твърдения: 1) ако дробите (2.24) съвпадат, т. е. ако $a'_0=b'_0$, $a'_1=b'_1, \ldots, a'_n=b'_n, \ldots$, то обектите a' и b' са равни; 2) ако се намери такъв номер n, че да са изпълнени съотношенията

$$a'_0=b'_0,\ a'_1=b'_1, \ldots, a'_{n-1}=b'_{n-1},\ a'_n<b'_n, \tag{2.25}$$

то обектите a' и b' са свързани с неравенството $a'<b'$. Твърдението 1) е вече доказано в 4°. Ще докажем твърдението 2). Последното от съотношенията (2.25) може да се напише във вида $a'_n+1'\leq b'_n$. Като използваме това съотношение и останалите съотношения от (2.25) и запишем за a' дясното неравенство (2.22), а за b' — лявото неравенство (2.22), ще получим

$$a'<a'_0,a'_1a'_2\cdots a'_{n-1}a'_n+1'/(10^n)'=a'_0,a'_1a'_2\cdots a'_{n-1}(a'_n+1')$$
$$\leq a'_0,a'_1a'_2\cdots a'_{n-1}\,b'_n\leq b',\ \text{т. е. } a'<b'.$$

За обектите a' и b' са валидни същите определения за сума и произведение с използването на „рационални обекти“, както при обикновените реални числа. Ще се ограничим с доказателство за случай на сума. Нека α'_1, α'_2, β'_1 и β'_2 са произволни „рационални обекти“, удовлетворяващи неравенствата

$$\alpha'_1\leq a'\leq\alpha'_2,\ \beta'_1\leq b'\leq\beta'_2. \tag{2.26}$$

Тогава сумата $a'+b'$ на обектите a' и b' е единственият обект, удовлетворяващ неравенствата

$$\alpha'_1+\beta'_1\leq a'+b'\leq\alpha'_2+\beta'_2. \tag{2.27}$$

Действително от аксиомите следва възможността за почленно събиране на неравенствата, а оттук, че сумата $a'+b'$ удовлетворява неравенствата (2.27). Освен това тази сума е единственият обект, удовлетворяващ неравенствата (2.27), тъй като всяка от

* При установяването на правилото за наредба можем да се ограничим със случая на „положителни“ обекти a' и b', тъй като общият случай се свежда към този с помощта на правилото за знаците.

разликите $\alpha_2'-\alpha_1'$ и $\beta_2'-\beta_1'$, а оттук и разликата $(\alpha_2'+\beta_2')-(\alpha_1'+\beta_1')$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект (съгласно 2⁰). Аналогично се разглежда случаят за произведение.

6⁰. Ще докажем, че множеството $\{x'\}$ е изоморфно на множеството на реалните числа, представими с безкрайни десетични дроби. На обекта a', 'представен с „безкрайната десетична дроб" $a_0', a_1' a_2' \cdots a_n' \cdots$, ще съпоставим реалното число $a=a_0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$ Нека на обектите a' и b' съответствуват реалните числа a и b. От резултатите в 5⁰ следва, че 1) a' и b' са свързани със същия знак за равенство или неравенство, както и числата a и b; 2) сумата $a'+b'$ съответствува на сумата $a+b$; 3) произведението $a'.b'$ съответствува на произведението $a.b$.*

Остава да се докаже, че при установеното съответствие на всяко реално число съответствува обект от множеството $\{x'\}$. Ако това не е така, то множеството $\{x'\}$ може да се допълни с недостигащите му „безкрайни десетични дроби", запазвайки валидността на 16-те аксиоми. Така стигаме до противоречие с това, че множеството $\{x'\}$ е пълно относно тези аксиоми. □

2.7. Елементи на теорията на множествата

2.7.1. Изброими и неизброими множества. Неизброимост на сегмента [0, 1]. Мощност на множество. Важен въпрос при изучаването на множествата е въпросът за тяхното сравняване по отношение на „количеството" на съдържащите се в тях елементи. Ако имаме две множества с краен брой елементи, то елементите на тези множества могат да се номерират. При това може да се окаже, че двете множества съдържат по еднакъв брой елементи. Такива две множества, съдържащи краен и еднакъв брой елементи, ще наричаме еквивалентни. Ако в едното множество елементите са повече, ще казваме, че то има по-голяма мощност от другото.

Да разгледаме сега множества, състоящи се, общо казано, от безбройно много елементи. Примери за такива множества са множеството на рационалните числа или множеството на реалните числа в сегмента [0, 1].

* Тъй като правилата за наредба, сума и произведение на обектите a' и b' и реалните числа a и b се определят по един и същ начин.

Две множества A и B ще наричаме ***еквивалентни,*** *ако съществува между тях взаимно еднозначно съответствие, т. е. на всеки елемент $a \in A$ отговаря единствен елемент $b \in B$, всеки елемент $b \in B$ е съпоставен на някой елемент $a \in A$ и на различни елементи от множеството A отговарят различни елементи от множеството B.* Взаимно еднозначното съответствие се нарича още ***биекция или биективно съответствие.***

В частност множества, съдържащи краен брой елементи, са еквивалентни тогава и само тогава, когато съдържат еднакъв брой елементи. Еквивалентността на две множества означаваме така: $A \sim B$.

Ще покажем например, че множеството $R=\{r\}$ на рационалните числа и множеството $N=\{n\}$ на естествените числа са еквивалентни. Да отбележим най-напред, че при всяко цяло $k \neq 0$ двете рационални числа m/n и km/kn са равни ($n \neq 0$). Тогава всяко рационално число r може да се запише във вида $r=p/q$, $q>0$ (p и q — цели) и дробта е несъкратима. Числото 0 ще смятаме, че е записано по единствения начин: $0=0/1$.

Числото $h=|p|+q$ ще наричаме ***височина*** на рационалното число. Ясно е, че рационалните числа с дадена височина са краен брой. Да номерираме рационалните числа по нарастваща височина с помощта на естествените числа: първо ще номерираме всички рационални числа с височина $h=1$. Такова число е само едно: 0, и на него ще поставим индекс 1. След това ще номерираме рационалните числа с височина $h=2$. Такива числа са две: $1=1/1$ и $-1=-1/1$. На първото от тях ще съпоставим естественото число 2 (т. е. поставяме му индекс 2), а на второто — числото 3. След това ще номерираме рационалните числа с височина 3 и т. н. Ясно е, че по този начин ще установим взаимно еднозначно съответствие между рационалните и естествените числа, т. е. $R \sim N$.

Даваме следното определение:

Определение 1. *Едно множество се нарича* ***изброимо,*** *ако е еквивалентно на множеството на естествените числа.*

От проведените по-горе разсъждения се вижда, че множеството на рационалните числа е изброимо множество съгласно това определение.

Ще докажем следните две прости леми, отнасящи се за изброими множества:

Лема 1. *Всяко непразно подмножество на изброимо множество е или множество с краен брой елементи, или изброимо множество.*

Доказателство. Нека A е изброимо множество, т. е. $A \sim N$ е множеството на естествените числа. Това означава, че елементите на A могат да се номерират по някакъв начин. Да разположим елементите на A във вид на редица: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Нека $\emptyset \neq B \subset A$. Разглеждаме редицата от елементи $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Ако $a_1 \in B$, то този елемент означаваме с b_1, ако $a_1 \bar{\in} B$, минаваме към следващия елемент a_2. При разглеждане на елемента a_2 има две възможности: а) елементът $a_2 \in B$; ако при това сме имали, че и $a_1 \in B$, то a_2 означаваме с b_2, а ако $a_1 \bar{\in} B$, то елементът a_2 се означава с b_1; б) елементът $a_2 \bar{\in} B$, тогава минаваме към елемента a_3 и т. н. Ясно е, че може да се случи елементите на множеството B да се разположат във вид на крайна редица: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_M$, $M < +\infty$. В този случай множеството B се състои от краен брой елементи. Ако това не се случи, то ние ще запишем всички елементи от множеството B във вид на безкрайна редица $b_1, b_2, b_3, \ldots$, откъдето следва, че множеството B е изброимо, тъй като очевидно $B \sim N$. □

Лема 2. *Обединението на краен брой или изброима съвкупност изброими множества е изброимо множество.*

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато имаме изброима съвкупност изброими множества. Нека $A_1, A_2, A_3, \ldots$ е съвкупност от множества, всяко от които е изброимо. Да разположим елементите на множествата $A_1, A_2, A_3, \ldots$ във вид на редици:

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \ldots\},\\
\qquad\ \nearrow\quad \nearrow\quad \nearrow\\
A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23}, \ldots\},\\
\qquad\ \nearrow\quad \nearrow\\
A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ a_{33}, \ldots\},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Нека $A = \bigcup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ще номерираме елементите a на множеството $A = \{a\}$ по следния начин:

$$a_1=a_{11},\ a_2=a_{21},\ a_3=a_{12},\ a_4=a_{31},\ a_5=a_{22},\ a_6=a_{13} \text{ и т. н.}$$

В някои от множествата A_i и A_j могат да се окажат общи елементи $(i \neq j)$. В този случай отчитаме тези елементи само веднъж.

По този начин елементите на множеството A могат да се номерират, т. е. да се установи взаимно еднозначно съответствие с множеството на естествените числа N, и следователно $A = \bigcup_n A_n \sim N$. □

Възниква въпросът: Съществуват ли безкрайни неизброими множества, т. е. безкрайни множества, на които не може да се съпостави във взаимно еднозначно съответствие множеството на естествените числа? Отговорът се дава от следното твърдение:

Теорема 22. *Множеството от всички точки на сегмента* [0, 1] *е неизброимо.*

Доказателство. Да разгледаме интервала (0, 1). Очевидно, ако докажем, че интервалът (0, 1) е неизброим, то и сегментът [0, 1] ще бъде неизброим, тъй като множеството от точките на сегмента [0, 1] се отличава от множеството от точките на интервала (0, 1) само с двете точки: 0 и 1. И така ще докажем, че множеството от точките на интервала (0, 1) е неизброимо. Ще допуснем противното, т. е. ще предположим, че всички реални числа от интервала (0, 1) могат да се номерират.

Записваме всички числа на интервала (0, 1) като безкрайни десетични дроби:

$$
\begin{array}{l}
x_1=0,a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots,\\
x_2=0,a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n=0,a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Да разгледаме реалното число $x=0,b_1b_2\cdots b_n\cdots$, където b_1 е коя да е цифра, различна от a_{11}, 0 и 9, и т. н., b_n е коя да е цифра, различна от a_{nn}, 0 и 9. Числото x не съдържа след запетаята нули и деветки, т. е. то не принадлежи към класа на рационалните числа, представими по два начина като безкрайни десетични дроби. В такъв случай числото x има единствено представяне и то е различно от всички числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, тъй като от съвпадането на x с някое число x_n би следвало съвпадане на b_n и a_{nn}. По такъв начин интервалът (0, 1), а заедно с него и сегментът [0, 1] е неизброим.

Определение 2. *Множество, еквивалентно на сегмента* [0, 1], *наричаме* ***множество с мощност на континуум.***

От доказаната теорема 2.2 следва, че множество с мощност на континуум и изброимо множество не са еквивалентни. По-специално от теорема 2.2 следва, че съществуват ирационални числа, тъй като в сегмента [0, 1] не всички числа са рационални: в противен случай бихме могли да ги номерираме. От теорема 2.2 също така следва, че ирационалните числа са неизброимо множество, тъй като, ако бяха изброимо или крайно множество, то по лема 2 и всичките числа — рационални и ирационални, биха били изброимо множество.

Ще преминем сега към по-подробно изучаване на понятието мощност на множество. На всяко множество A ще съпоставим един обект $m(A)$, наречен *мощност* или *кардинално число* на A. При това на две множества A и B се съпоставя едно и също кардинално число тогава и само тогава, когато $A \sim B$. Ще казваме, че *две множества A и B са* ***равномощни*** *или имат еднаква мощност, ако са еквивалентни, т. е. между елементите им може да се установи взаимно еднозначно съответствие.* Ако множеството A се състои от краен брой елементи, мощността му е равна на броя на елементите.

Нека сега A и B са две произволни множества, а $m(A)$ и $m(B)$ са мощностите им. Ние вече казахме, че ако $A \sim B$, то $m(A)=m(B)$. Ако A е еквивалентно на някое подмножество на B и при това A не съдържа подмножество, еквивалентно на B, ще приемем, че мощността на A е по-малка от мощността на $B: m(A) < m(B)$. Например от определението за множество с мощност на континуума, теорема 1 и лема 1 за изброимите множества следва, че мощността на изброимо множество е по-малка от мощността на сегмента $[0, 1]$, т. е. от мощността на континуума.

И така въведохме сравняване на мощностите на две множества. Логически са възможни още два случая:

а) множеството A съдържа подмножество, еквивалентно на множеството B, а множеството B съдържа подмножество, еквивалентно на множеството A;

б) множествата A и B не са еквивалентни и нито едно от тях не съдържа подмножество, еквивалентно на другото.

Може да се покаже, че в случая а) множествата A и B са еквивалентни. Що се отнася до случая б), той е невъзможен.

Ще отбележим, че особено труден проблем се оказа съществуването на междинна мощност — между мощността на изброимите множества и мощността на континуума. Доказано е, че твърдението „няма междинна мощност" не противоречи на аксиомите на теорията на множествата и не може да бъде изведено от тях. Така че са възможни две различни системи от аксиоми на теорията на множествата. В едната система се приема като аксиома наличието, а в другата — липсата на междинна мощност.

2.7.2. Наредба. Частична наредба. Лема на Цорн. Нека за някои двойки елементи $a, b, c, \dots$ на множеството A е въведена наредба, означена със символа $\prec$. Записването $a \prec b$ означава, че елементът a „п р е д х о ж д а" елемента b. Ще предположим, че това съотношение удовлетворява следните условия:

а) от $a \prec b$ и $b \prec c$ следва $a \prec c$;

б) винаги $a \prec a$;

в) от $a \prec b$ и $b \prec a$ следва $a=b$.

Когато са изпълнени тези предположения, множеството A се нарича *частично наредено*; елементи a и b, свързани със съотношение $a \prec b$ или $b \prec a$, се наричат сравними.

Множеството A се нарича ***наредено,*** *ако за всеки два различни елемента a и b е изпълнено едно от двете съотношения $a \prec b$ или $b \prec a$.*

Пример на наредено множество е множеството на реалните числа, ако за съотношение на наредба се приема съотношението „$\leq$", което беше въведено по-рано. Леко се проверява, че условията а) — в) са изпълнени. Пример за частично наредено множество е множеството на всички възможни триъгълници, лежащи в равнината, ако за съотношение на наредба „$\prec$" приемем условието: триъгълникът T_1 „предхожда" триъгълника T_2, ако триъгълникът T_1 се съдържа в триъгълника T_2, т. е. всяка точка на триъгълника T_1 е точка на триъгълника T_2. Очевидно е, че не всеки два триъгълника в равнината са сравними при тази наредба.

Подмножеството B на частично нареденото множество A се нарича ограничено отгоре, ако съществува такъв елемент $a \in A$, че за всеки елемент $b \in B$ е изпълнено $b \prec a$. Елементът a се нарича горна граница на множеството B. Най-малката горна граница, т. е. такава, която „предхожда" всички останали, се нарича точна горна граница. Аналогично се определят долна граница и точна долна граница.

Елементът $z_0 \in A$ се нарича ***максимален,*** *ако в A не съществува $a \neq z_0$, удовлетворяващ съотношението $z_0 \prec a$.*

В сила е следната лема:

Лема на Цорн. *Ако в частично наредено множество A всяко наредено подмножество B притежава горна граница, то в A съществува максимален елемент.*

Едно наредено множество се нарича ***напълно наредено,*** *ако всяко негово непразно подмножество има най-малък елемент,* т. е. *елемент, предхождащ всички елементи на подмножеството.*

Теорема на Цермело. *Всяко непразно множество може да се направи напълно наредено чрез въвеждане на подходящо съотношение на наредба.*

Доказателството на теоремата на Цермело се опира на т. нар. аксиома за произволния избор, според която, ако е дадена произволна система от непразни, две по две непресичащи се множества, то съществува ново множество, имащо с всяко от множествата на системата по един и само един общ елемент.

В аксиомата за избора не се посочва начин, по който да се прави този избор, и затова тя води до неконструктивни доказателства. Някои от теоремите, доказани с помощта на тази аксиома, противоречат на нагледността.

Може да се докаже, че лемата на Цорн, теоремата на Цермело и аксиомата за произволния избор са еквивалентни твърдения. Те са обобщение на принципа на математическата индукция в случая на неизброими множества.

Накрая ще докажем, че сегментът $[0, 1]$ и интервалът $(0, 1)$ са еквивалентни (равномощни) множества. За това ще установим взаимно еднозначно съответствие между елементите им. Избираме в сегмента $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$ редица от точки

$$\{1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\}.$$

Точката 0 от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на точката $1/2$ от интервала $(0, 1)$, точката 1 от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на точката $1/3$ от интервала $(0, 1)$, по-нататък точката $1/2$ от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на точката $1/4$ от интервала $(0, 1)$ и т. н., точката $1/n$ от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на $1/(n+2)$ от интервала $(0, 1)$ $(n \geq 2)$. Всички останали точки от сегмента (т. е. точките, различни от 0, 1 и непринадлежащи на избраната редица) съпоставяме на същите точки от интервала. По такъв начин е установено взаимно еднозначно съответствие между сегмента $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$.

3. Теория на границите

В глава 1 бе казано, че една от основните операции в математическия анализ е граничният преход и че тази операция се среща в различни форми.

В тази глава се изучават различните форми на операцията граничен преход, като се започва с най-простата от тях, основана на понятието граница на числова редица.

Понятието граница на числова редица ще ни улесни при въвеждането на друга, доста по-важна форма на операцията граничен преход, основана на понятието гранична стойност (или кратко граница) на функция.

В края на главата се дава най-общо определение на граница на функция по база.

3.1. Редица. Граница на редица

3.1.1. Редица. Аритметични операции с редици. Примери на числови редици са: 1) редицата от всички елементи на аритметичната или геометричната прогресия; 2) редицата от периметрите на правилните n-ъгълници, вписани в дадена окръжност; 3) редицата от рационалните числа $x_1=0{,}3$, $x_2=0{,}33$, $x_3=0{,}333, \ldots$, приближаващи числото 1/3.

Ако на всяко число n от естествения ред на числата $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ *се съпостави по определен закон някое реално число x_n, то множеството на номерираните реални числа*

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n, \ldots \tag{3.1}$$

ще наричаме ***числова редица*** *или само* ***редица.***

Числата x_n ще наричаме ***елементи*** или ***членове на редицата*** (3.1). За краткост редицата (3.1) ще означаваме със символа $\{x_n\}$ или $\{x_n\}_1^\infty$.

Така например символът $\{1/n^2\}$ означава редицата 1, $1/2^2$, $1/3^2, \ldots, 1/n^2, \ldots$, а символът $\{1+(-1)^n\}$ — редицата 0, 2, 0, 2, . . .

Да разгледаме наред с редицата (3.1) още една редица

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots \tag{3.2}$$

Редицата $x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \ldots, x_n+y_n, \ldots$ *ще наричаме* ***сума*** *на редиците* (3.1) и (3.2), *редицата* $x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3, \ldots, x_n-y_n, \ldots$ — ***разлика*** *на редиците* (3.1) *и* (3.2), *редицата* $x_1 . y_1, x_2 . y_2, x_3 . y_3, \ldots, x_n . y_n, \ldots$ —***произведение*** *на редиците* (3.1) и (3.2) *и накрая редицата* $x_1/y_1, x_2/y_2, x_3/y_3, \ldots, x_n/y_n, \ldots$ — ***частно*** *на редиците* (3.1) и (3.2).

Разбира се, при определението за частно на редиците (3.1) и (3.2) е необходимо да се изисква всички елементи на редицата (3.2) да бъдат различни от нула. Ще отбележим обаче, че ако в редицата $\{y_n\}$ само краен брой елементи са нули, то частното $\{x_n/y_n\}$ може да се определи от този номер нататък, след който всички елементи y_n са различни от нула.

3.1.2. Ограничени, неограничени, безкрайно малки и безкрайно големи редици. Съвкупността от всички елементи на произволна редица $\{x_n\}$ образува числово множество. Тръгвайки от понятията ограничено отгоре, отдолу или от двете страни множество, идваме до следните определения:

Определение 1. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ограничена отгоре (отдолу)****, ако съществува такова реално число M (реално число m), че всеки елемент* x_n *на редицата да удовлетворява неравенството*

$$x_n \leqq M \qquad (x_n \geqq m).$$

При това числото M (числото m) се нарича ***горна (долна) граница на редицата*** $\{x_n\}$, *а неравенството* $x_n \leqq M$ $(x_n \geqq m)$ — ***условие за ограниченост*** *на тази редица отгоре (отдолу).*

Всяка ограничена отгоре редица има безбройно много горни граници и в условието за ограниченост на редицата отгоре, т. е. в $x_n \leqq M$, за M може да се вземе всяка от горните граници. Аналогична забележка се отнася за долната граница и ограничените отдолу редици.

Определение 2. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ограничена от двете страни*** *(или просто* ***ограничена****), ако е ограничена отгоре и отдолу, т. е. ако съществуват такива две реални числа M и m, че всеки елемент* x_n *на редицата да удовлетворява неравенствата*

$$m \leqq x_n \leqq M. \tag{3.3}$$

Числата m и M се наричат съответно ***долна*** *и* ***горна граница*** *на редицата $\{x_n\}$, а неравенствата (3.3) —* ***условия за ограниченост*** *на редицата $\{x_n\}$.*

Условието за ограниченост на редица може да се запише и в друга еквивалентна форма: Редицата $\{x_n\}$ е ограничена тогава и само тогава, когато съществува такова положително реално число A, че всеки елемент x_n на редицата да удовлетворява неравенството

$$|x_n| \leq A. \tag{3.4}$$

Наистина, ако всеки елемент x_n удовлетворява неравенството (3.4), то при $m=-A$, $M=+A$ ще получим, че x_n удовлетворява неравенствата (3.3). Ако, обратно, всеки елемент x_n удовлетворява неравенствата (3.3), то като означим с A по-голямото от двете числа $|m|$ и $|M|$, ще получим, че x_n удовлетворява и неравенството (3.4).

В съответствие с определение 2 за ограничена редица и условието за ограниченост, взето във формата (3.4), може да се определи понятието неограничена редица.

Определение 3. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***неограничена,*** *ако за всяко положително реално число A, колкото и голямо да е то, съществува поне един елемент x_n от редицата, удовлетворяващ неравенството*

$$|x_n| > A. \tag{3.5}$$

Съгласно това определение всяка редица, която е ограничена само отгоре или само отдолу, е неограничена.

Така например редицата $1, 2, 1, 4, \cdots, 1, 2n, \cdots$, която е ограничена само отдолу, е неограничена: каквото и положително реално число A да вземем, ще се намери елемент на тази редица с четен номер, удовлетворяващ неравенството (3.5).

Редицата $\{1/n\}$ очевидно е ограничена: всеки елемент на тази редица удовлетворява неравенствата (3.3) за всяко $m \leq 0$ и $M \geq 1$.

Определение 4. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***безкрайно голяма,*** *ако за всяко положително реално число A, колкото и голямо да е то, съществува такъв номер $N=N(A)$, че при всяко $n \geq N$ елементите x_n на тази редица да удовлетворяват неравенството* (3.5).

Очевидно е, че всяка безкрайно голяма редица е неограничена, тъй като в определението за безкрайно голяма редица се иска за всяко $A>0$ неравенството (3.5) да се удовлетворява от всички елементи на редицата от известен номер N нататък, а в определението за неограничена редица се иска за всяко $A>0$ неравенството (3.5) да се удовлетворява поне за един елемент на редицата.

От друга страна, не всяка неограничена редица е безкрайно голяма. Така например разгледаната редица $1, 2, 1, 4, \cdots, 1,$

$2n, \dots$ е неограничена, но не е безкрайно голяма, тъй като за всяко $A>1$ неравенството (3.5) не е изпълнено за елементите x_n с произволно голям нечетен номер n.

Определение 5. *Редицата $\{\alpha_n\}$ се нарича **безкрайно малка**, ако за всяко положително число ε, колкото и малко да е то, съществува такъв номер $N=N(\varepsilon)$, че при всички $n \geqq N$ елементите α_n на тази редица да удовлетворяват неравенството*

$$|\alpha_n|<\varepsilon. \tag{3.6}$$

Ще докажем, че редицата $q, q^2, q^3, \dots, q^n$ е безкрайно голяма при $|q|>1$ и безкрайно малка при $|q|<1$.

Нека най-напред $|q|>1$. Тогава $|q|=1+\delta$, където $\delta>0$. Като използваме формулата за бинома на Нютон, получаваме $|q|^N=(1+\delta)^N=1+N\delta+$ положителни членове. Оттук следва неравенството

$$|q|^N>\delta N. \tag{3.7}$$

Фиксираме произволно положително число A и избираме такъв номер N, че да е изпълнено неравенството

$$\delta N>A. \tag{3.8}$$

Ще покажем, че това е възможно. Ще се условим да означаваме със символа $[x]$ цялата част на положителното реално число x. Тъй като неравенството (3.8) е еквивалентно на неравенството $N>A/\delta$, то това неравенство очевидно ще се удовлетворява от номер N, за който $N=[A/\delta]+1=[A/(|q|-1)]+1$.

Понеже $|q|>1$, при всички $n \geqq N$ имаме

$$|q|^n \geqq |q|^N. \tag{3.9}$$

От неравенствата (3.7), (3.8) и (3.9) получаваме, че за всяко $A>0$ съществува такъв номер $N=[A/(|q|-1)]+1$, че при всички $n \geqq N$ —

$$|q^n|=|q|^n>A.$$

С това е доказано, че при $|q|>1$ редицата $\{q^n\}$ е безкрайно голяма.

Ще разгледаме сега случая $|q|<1$. Трябва да докажем, че $\{q^n\}$ е безкрайно малка редица. Изключваме тривиалния случай $q=0$ и полагаме $1/|q|=1+\delta$, където $\delta>0$. Използвайки, както по-горе, бинома на Нютон, вместо (3.7) ще получим неравенството

$$1/|q|^N>\delta N, \text{ или } |q|^N>1/\delta N. \tag{3.7'}$$

Фиксираме произволно положително число ε и избираме номера N така, че да е изпълнено неравенството

$$1/\delta N<\varepsilon. \tag{3.8'}$$

Тъй като неравенството (3.8′) е еквивалентно на неравенството $N>1/\varepsilon\delta$, то за N можем да изберем

$$N=[1/\varepsilon\delta]+1=[|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1.$$

За всички $n\geqq N$ при $|q|<1$ е изпълнено неравенството

$$|q|^n\leqq|q|^N. \tag{3.9′}$$

От неравенствата (3.7′), (3.8′) и (3.9′) получаваме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв номер $N=[|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1$, че за всички $n\geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|q^n|=|q|^n<\varepsilon.$$

С това е доказано, че при $|q|<1$ редицата $\{q^n\}$ е безкрайно малка.

3.1.3. Основни свойства на безкрайно малките редици.

Теорема 3.1. *Сумата* $\{\alpha_n+\beta_n\}$ *на две безкрайно малки редици* $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\beta_n\}$ *е безкрайно малка редица.*

Доказателство. Фиксираме произволно положително число ε. Тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N_1, че при $n\geqq N_1$ да е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n|<\varepsilon/2. \tag{3.10}$$

Аналогично, тъй като редицата $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N_2, че при $n\geqq N_2$ да е изпълнено неравенството

$$|\beta_n|<\varepsilon/2. \tag{3.11}$$

Да означим с N по-големия от двата номера N_1 и N_2. Тогава при $n\geqq N$ ще са изпълнени и двете неравенства (3.10) и (3.11).

Тъй като модулът на сума на две числа не надминава сумата от модулите им, то за всички номера n имаме

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqq|\alpha_n|+|\beta_n|. \tag{3.12}$$

От (3.12), (3.10) и (3.11) следва, че при $n\geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon.$$

Това показва, че редицата е безкрайно малка. □

Теорема 3.2. *Разликата* $\{\alpha_n-\beta_n\}$ *на две безкрайно малки редици* $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\beta_n\}$ *е безкрайно малка редица.*

Доказателството на тази теорема се различава от доказателството на теорема 3.1 само по това, че вместо неравенството (3.12) трябва да се вземе неравенството

$$|\alpha_n-\beta_n|\leqq|\alpha_n|+|\beta_n|.$$

Следствие. *Алгебричната сума на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.3. *Произведението на ограничена редица и безкрайно малка редица е безкрайно малка редица.*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е ограничена редица и $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. Съгласно определението на ограничена редица съществува такова реално число $A>0$, че за всички елементи x_n е изпълнено неравенството

(3.13) $$|x_n| \leq A.$$

Да фиксираме произволно положително число ε. Тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число ε/A съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ е изпълнено неравенството

(3.14) $$|\alpha_n| < \varepsilon/A.$$

Тъй като модулът на произведението на две числа е равен на произведението от модулите на тези числа, от неравенствата (3.13) и (3.14) получаваме, че за всички $n \geq N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \varepsilon/A = \varepsilon.$$

Това означава, че редицата $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ е безкрайно малка. □

Теорема 3.4. *Всяка безкрайно малка редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. Да фиксираме произволно положителното число ε. Съгласно определението на безкрайно малка редица съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < \varepsilon$ за всички $n \geq N$. Ако означим с A най-голямото от следните N числа: ε, $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, $\dots$, $|\alpha_{N-1}|$, то очевидно $|\alpha_n| < A$ за всички номера n. Това означава, че редицата $\{\alpha_n\}$ е ограничена. □

Следствие от теореми 3.3 и 3.4. *Произведението на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.5. *Ако всичките елементи на безкрайно малката редица $\{\alpha_n\}$ са равни на едно и също число c, то $c=0$.*

Доказателство. Да допуснем, че $c \neq 0$. Означаваме с ε положителното число $\varepsilon = |c|$. Според определението на безкрайно малка редица за избраното $\varepsilon = |c|$ съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < |c|$ при всички $n \geq N$. Но неравенството $|\alpha_n| < |c|$ (поради това, че $\alpha_n = c$ за всяко n) води до абсурда $|c| < |c|$. □

Теорема 3.6. *Ако $\{x_n\}$ е безкрайно голяма редица, то от известен номер n нататък е определено частното $1/x_n$ и $\{1/x_n\}$ е безкрайно малка редица. Ако всички елементи на безкрайно малката редица $\{\alpha_n\}$ са различни от нула, то частното $\{1/\alpha_n\}$ е безкрайно голяма редица.*

Доказателство. Ще докажем най-напред първата част на теоремата. Очевидно е, че в безкрайно голяма редица само краен брой елементи могат да бъдат равни на нула. Наистина съгласно определението на безкрайно голяма редица за числото $A=1$ съществува такъв номер N^*, че $|x_n|>A=1$ за всички $n \geqq N^*$. Следователно при $n \geqq N^*$ всички елементи x_n са различни от нула и можем да разглеждаме частното $1/x_n$. Ще докажем, че тези частни образуват безкрайно малка редица. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението на безкрайно голяма редица за положителното число $1/\varepsilon$ съществува такъв номер N (този номер ще изберем по-голям от N^*), че $|x_n|>1/\varepsilon$ при $n \geqq N$ или че $|1/x_n|=1/|x_n|<\varepsilon$ при $n \geqq N$. Това показва, че редицата $\{1/x_n\}$ е безкрайно малка.

За да докажем втората част, фиксираме произволно положително число A. Тъй като $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица, то за положителното число $1/A$ съществува такъв номер N, че $|\alpha_n|<1/A$ при $n \geqq N$ или $|1/\alpha_n|=1/|\alpha_n|>A$ при $n \geqq N$. Това показва, че редицата $\{1/\alpha_n\}$ е безкрайно голяма. □

3.1.4. Сходящи редици. Свойства. Ще въведем важните понятия сходяща редица и граница на сходяща редица.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича **сходяща**, ако съществува такова реално число a, че редицата $\{x_n-a\}$ да е безкрайно малка. Числото a се нарича **граница** на редицата $\{x_n\}$.*

Това, че редицата $\{x_n\}$ е сходяща и има за граница числото a, се записва така:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Според горното определение всяка безкрайно малка редица е сходяща и има за граница числото $a=0$.

Като се използва определението за безкрайно малка редица, може да се даде друго определение на понятието сходяща редица, еквивалентно на определение 1.

Определение 2. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича **сходяща**, ако съществува такова реално число a, че за всяко положително число ε съществува такъв номер $N=N(\varepsilon)$, че за всяко $n \geqq N$ членовете на тази редица да удовлетворяват неравенството*

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{3.15}$$

*Числото a се нарича **граница** на редицата $\{x_n\}$.*

Неравенството (3.15) може да се запише в еквивалентната форма

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$

или още така

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon. \tag{3.15'}$$

Неравенствата (3.15′) означават, че елементите x_n при $n \geq N$ лежат в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, който се условихме да наричаме ε-околност на точката a.

Това ни дава право да формулираме още едно определение на сходяща редица, еквивалентно на определенията 1 и 2.

Определение 3. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща,*** *ако съществува такова число a, че във всяка ε-околност на точката a да се съдържат всички членове на редицата $\{x_n\}$ от някакъв номер (зависещ, разбира се, от ε) нататък.*

Ще намерим едно специално представяне за членовете на всяка сходяща редица $\{x_n\}$. Съгласно определение 1 разликата $x_n - a = \alpha_n$ е елемент на безкрайно малка редица. Следователно елементът x_n на сходящата редица с граница a може да бъде представен в следния специален вид:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{3.16}$$

където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица.

Забележка 1. От определението за сходяща редица и граница на сходяща редица непосредствено следва, че отстраняването на краен брой елементи от дадена редица не оказва влияние върху сходимостта на редицата и стойността на границата ѝ.

Забележка 2. Редица, която не е сходяща, се нарича ***разходяща.***

Забележка 3. Понякога ще разглеждаме безкрайно големите редици като сходящи редици с граница безкрайност (∞). Такава формализация за безкрайно голяма редица $\{x_n\}$ е следното означение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Ако при това елементите на безкрайно голямата редица от известно място нататък имат положителен (отрицателен) знак, записваме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

За пример ще докажем, че редицата $\{x_n\}$ с елементи

$$x_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ пъти}}$$

клони към границата $a = 1/3$. Ще фиксираме произволно положително число ε и ще покажем възможността да се намери такъв номер N, че $|x_n - 1/3| < \varepsilon$ при всички $n \geq N$. Тъй като числото 1/3 се представя с безкрайната десетична дроб $0,333\ldots$, то от правилото за наредба на реални числа следват неравенствата

$$\underbrace{0,33\cdots3}_{n\ \text{пъти}} \leqq 1/3 \leqq \underbrace{0,33\cdots3}_{n\ \text{пъти}}+1/10^n,$$

изпълнени за всеки номер n.

От последните неравенства за числото $x_n = \underbrace{0,333\cdots3}_{n\ \text{пъти}}$ получаваме съотношението

$$|x_n - 1/3| \leqq 1/10^n.$$

Тъй като $1/10^n \leqq 1/10^N$ за всички $n \geq N$, то за да намерим при избраното $\varepsilon > 0$ такъв номер N, че $|x_n - 1/3| < \varepsilon$ за всички $n \geqq N$, достатъчно е да изберем N, така че $1/10^N < \varepsilon$.

В 3.1.2 установихме възможността да се избере номер N, за който $|q|^N < \varepsilon$ за всяко $|q| < 1$. Там показахме, че номерът N може да се вземе $N = [|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1$. В този случай $|q| = 0,1$, така че $N = [1/9\varepsilon]+1$.

Ще преминем към установяване на някои свойства на сходящите редици.

Теорема 3.7. *Всяка сходяща редица има само една граница.*

Доказателство. Да предположим, че двете реални числа a и b са граници на сходящата редица $\{x_n\}$. Тогава според специалното представяне (3.16) на елементите на сходяща редица ще имаме $x_n = a+\alpha_n$ и $x_n = b+\beta_n$, където $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ са безкрайно малки редици. Оттук получаваме $\alpha_n - \beta_n = b-a$. Съгласно теорема 3.2 редицата $\{\alpha_n - \beta_n\}$ е безкрайно малка, а от равенството $\alpha_n - \beta_n = b-a$ следва, че всички елементи на тази безкрайно малка редица са равни на едно и също реално число $b-a$. Съгласно теорема 3.5 това число $b-a$ е равно на нула, т. е. $b=a$. □

Теорема 3.8. *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е сходяща редица с граница a. Съгласно (3.16) $x_n = a+\alpha_n$, където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. От теорема 3.4 следва, че $\{\alpha_n\}$ е ограничена и следователно съществува такова число A, че $|\alpha_n| \leqq A$ за всяко натурално n. Тогава $|x_n| \leqq |a|+A$ за всички номера n. □

Забележка 4. Не всяка ограничена редица е сходяща. Така например редицата $0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1, \cdots$ е ограничена, но не е сходяща. Действително да означим n-тия член на тази редица с x_n и да предположим, че тази редица е сходяща и има граница a. Но тогава всяка от редиците $\{x_{n+1}-a\}$ и $\{x_n - a\}$ трябва да бъде безкрайно малка. Очевидно и разликата на тези редици $\{x_{n+1}-x_n\}$ ще бъде безкрайно малка, а това е невъзможно, тъй като $|x_{n+1}-x_n| = 1$ за всички n.

Следващите четири теореми показват, че четирите аритметични действия над елементите на сходящи редици водят към аналогични действия и с техните граници.

Теорема 3.9. *Сумата на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на сумата от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателство. Нека редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са сходящи и имат съответно граници a и b. Съгласно специалното представяне (3.16) ще имаме

(3.17) $$x_n=a+\alpha_n, \quad y_n=b+\beta_n,$$

където $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ са безкрайно малки редици. От (3.17) следва, че

(3.18) $$(x_n+y_n)-(a+b)=\alpha_n+\beta_n.$$

Тъй като сумата $\{\alpha_n+\beta_n\}$ на двете безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица (теорема 3.1), то от (3.18) и определение 1 следва, че редицата $\{x_n+y_n\}$ е сходяща и има за граница числото $a+b$. □

Теорема 3.10. *Разликата на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на разликата от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателството на тази теорема е аналогично на доказателството на теорема 3.9. Вместо (3.18) ще имаме съотношението $(x_n-y_n)-(a-b)=\alpha_n-\beta_n$.

Теорема 3.11. *Произведението на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на произведението от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателство. Нека редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ клонят съответно към границите a и b. Тогава за елементите на тези редици имаме специалните представяния (3.17), които след умножение дават

$$x_n.y_n=a.b+a.\beta_n+b.\alpha_n+\alpha_n.\beta_n,$$

или

(3.19) $$x_n.y_n-a.b=a.\beta_n+b.\alpha_n+\alpha_n.\beta_n.$$

За да докажем теоремата, трябва да се убедим, че дясната страна на (3.19) е елемент на безкрайно малка редица. Това веднага следва от теорема 3.3 (съгласно тази теорема редиците $\{a.\beta_n\}$ и $\{b.\alpha_n\}$ са безкрайно малки), от следствието на теоремите 3.3 и 3.4 (според това следствие редицата $\{\alpha_n.\beta_n\}$ е безкрайно малка) и от теорема 3.1 (според тази теорема сумата на трите безкрайно малки редици $\{a.\beta_n\}$, $\{b.\alpha_n\}$ и $\{\alpha_n.\beta_n\}$ е безкрайно малка редица). □

Преди теоремата за частно на две сходящи редици ще докажем следната лема:

Лема 1. *Ако редицата $\{y_n\}$ клони към различното от нула число b, то от известно място нататък е определено частното $1/y_n$ и редицата $\{1/y_n\}$ е ограничена.*

Доказателство. Понеже $b \neq 0$, означаваме с ε положителното число $\varepsilon = |b|/2$. За това ε съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ да е изпълнено неравенството $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е.

$$|y_n - b| < |b|/2. \tag{3.20}$$

И така за всички номера n от известен номер N нататък е изпълнено неравенството (3.20). Ще покажем, че от неравенството (3.20) следва неравенството

$$|y_n| > |b|/2, \tag{3.21}$$

което също така ще бъде изпълнено за всички номера n от известен номер N нататък. Действително, тъй като модулът на сумата на две числа не надминава сумата от модулите на тези числа, то от тъждеството $b = (b - y_n) + y_n$ и неравенството (3.20) получаваме

$$|b| \leq |b - y_n| + |y_n| < |b|/2 + |y_n|.$$

От последното неравенство непосредствено следва неравенство (3.21).

Неравенството (3.21) ни дава право да твърдим, че при $n \geq N$ елементите y_n са различни от нула и следователно можем да разглеждаме частните $1/y_n$ за $n \geq N$.

От (3.21) на свой ред следва, че за всички $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|1/y_n| < 2/|b|$. Оттук следва, че редицата $\{1/y_n\}$ е ограничена. □

Теорема 3.12. *Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две сходящи редици със съответни граници a и b, при което $b \neq 0$. Тогава частното x_n/y_n е определено от известен номер нататък; редицата $\{x_n/y_n\}$, взета от този номер нататък, е сходяща и нейната граница е a/b.*

Доказателство. Според лема 1 съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ елементите y_n са различни от нула; определена е редицата $\{1/y_n\}$ и тази редица е ограничена. Ние ще разглеждаме частните $\{x_n/y_n\}$ от този номер нататък. Съгласно определение 1 достатъчно е да докажем, че редицата $\{x_n/y_n - a/b\}$ е безкрайно малка. Ще използваме тъждеството

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n . b - y_n . a}{y_n . b}. \tag{3.22}$$

Тъй като за x_n и y_n е в сила специалното представяне (3.17), то

$$x_n . b - y_n . a = (a + \alpha_n) b - (b + \beta_n) a = \alpha_n . b - \beta_n . a. \tag{3.23}$$

Като заместим (3.23) в (3.22), получаваме

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right). \tag{3.24}$$

Остава да докажем, че в дясната страна на (3.24) стои елемент на безкрайно малка редица. Но това веднага следва от теорема 3.3 и от факта, че редицата $\{1/y_n\}$ (поради лема 1) е ограничена, а редицата $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ (като разлика на две безкрайно малки редици) е безкрайно малка. ∟

Ще се убедим сега, че ако елементите на сходящи редици удовлетворяват някакви неравенства, то подобни неравенства удовлетворяват и границите им.

Теорема 3.13. *Ако всички елементи на сходящата редица $\{x_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенството $x_n \geqq b$ ($x_n \leqq b$), то и границата x на тази редица удовлетворява неравенството $x \geqq b$ ($x \leqq b$).*

Доказателство. Ще предположим, че всички елементи x_n от известен номер N^* нататък удовлетворяват неравенството $x_n \geqq b$. Ще докажем, че границата x на тази редица удовлетворява неравенството $x \geqq b$. Да допуснем противното, т. е. че $x < b$.

Тогава по определението на сходяща редица за положителното число $\varepsilon = b - x$ съществува такъв номер N (избираме го така, че да бъде по-голям от N^*), че при $n \geqq N$ да са изпълнени неравенствата $|x_n - x| < \varepsilon$ или $|x_n - x| < b - x$. Последното неравенство е еквивалентно с неравенствата $-(b-x) < x_n - x < b - x$, дясното от които означава, че $x_n < b$ при всички $n \geqq N$. Но това противоречи на условието на теоремата.

Случаят $x_n \leqq b$ се разглежда аналогично.

Забележка 5. Ако всички елементи на сходящата редица $\{x_n\}$ удовлетворяват строгото неравенство $x_n > b$, оттук не следва, че границата x ще удовлетворява строгото неравенство $x > b$. Можем да твърдим само, че $x \geqq b$.

Например, ако $x_n = 1/n$, то всички $x_n > 0$, но границата $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = x = 0$ не удовлетворява неравенството $x > 0$.

Следствие 1. *Ако всички елементи на две сходящи редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенството $x_n \leqq y_n$, то и границите на тези редици удовлетворяват същото неравенство*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3.25}$$

Действително от известно място нататък всички елементи на редицата $\{y_n - x_n\}$ ще бъдат неотрицателни. Съгласно теорема 3.13 и границата на тази редица $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)$ ще бъде неотрицателна. От теорема 3.10 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, откъдето получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqq 0$. От последното неравенство следва (3.25).

Следствие 2. *Ако всички членове на сходящата редица* $\{x_n\}$ *принадлежат на сегмента* $[a, b]$, *то и границата* x *на тази редица принадлежи на същия сегмент.*

Наистина, тъй като $a \leq x_n \leq b$ за всички n, то (съгласно теорема 3.13) $a \leq x \leq b$.

Следващата теорема се нарича принцип на двустранното ограничение.

Теорема 3.14. *Нека* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *са две сходящи редици с една и съща граница* a *и нека всички елементи на редицата* $\{z_n\}$ *от известно място нататък удовлетворяват неравенствата*

$$x_n \leq z_n \leq y_n. \tag{3.26}$$

Тогава редицата z_n *е сходяща и има същата граница* a.

Доказателство. Да предположим, че неравенствата (3.26) са изпълнени от номер N^* нататък. Тогава за $n \geq N^*$

$$x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a. \tag{3.27}$$

От неравенствата (3.27) следва, че за всеки номер n, по-голям от N^*, имаме

$$|z_n - a| \leq \max\{|x_n - a|, |y_n - a|\} \tag{3.28}$$

(това записване означава, че $|z_n - a|$ не надминава по-голямото от двете числа $|x_n - a|$ и $|y_n - a|$).

Избираме произволно положително число ε. Тогава от сходимостта на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ към границата a следва, че съществуват такива номера N_1 и N_2, че

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geq N_1, \\ |y_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geq N_2. \end{cases} \tag{3.29}$$

Ако сега означим с N най-голямото от трите числа N^*, N_1 и N_2, то при $n \geq N$ ще бъдат изпълнени двете неравенства (3.29) и съгласно (3.28) ще получим, че при $n \geq N$ е изпълнено $|z_n - a| < \varepsilon$. Това доказва сходимостта на редицата $\{z_n\}$ към границата a. □

3.2. Монотонни редици

3.2.1. Понятието монотонна редица.

Определение 1. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ненамаляваща (нерастяща)***, *ако всеки член на тази редица от втория нататък не е по-малък (не е по-голям) от предхождащия го член, т. е. ако за всички номера* n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *е изпълнено неравенството*

$$x_n \leq x_{n+1} \qquad (x_n \geq x_{n+1}). \tag{3.30}$$

Определение 2. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***монотонна,*** *ако тя е или ненамаляваща, или нерастяща.*

Ако елементите на ненамаляваща редица удовлетворяват строгото неравенство $x_n < x_{n+1}$ за всички номера n, то тази редица се нарича ***растяща.***

Аналогично, ако елементите на нерастяща редица удовлетворяват строгото неравенство $x_n > x_{n+1}$ за всички номера n, то тази редица се нарича ***намаляваща.***

Ще отбележим, че всяка монотонна редица е очевидно ограничена от едната страна (или отгоре, или отдолу). Действително всяка ненамаляваща редица е ограничена отдолу (за долна граница може да се вземе първият й член), а всяка нерастяща редица е ограничена отгоре (за горна граница може да се вземе също първият й член).

Оттук следва, че ненамаляващите редици са ограничени от двете страни или просто ограничени тогава и само тогава, когато са ограничени отгоре, а нерастящите редици са ограничени тогава и само тогава, когато са ограничени отдолу.

Примери:

1. Редицата $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \ldots$ е ненамаляваща. Тя е ограничена отдолу от стойността на първия си член и е неограничена отгоре.

2. Редицата $2/1, 3/2, 4/3, \ldots, (n+1)/n, \ldots$ е намаляваща. Тя е ограничена от двете страни: отгоре от стойността на първия си член 2, а отдолу например от числото 1.

3.2.2. Теорема за сходимост на монотонна ограничена редица. В сила е следното основно твърдение:

Основна теорема 3.15. *Всяка ненамаляваща (нерастяща) и ограничена отгоре (отдолу) редица $\{x_n\}$ е сходяща.*

Доказателство. Ще разгледаме случая на ненамаляваща и ограничена отгоре редица $\{x_n\}$. Множеството от всички членове на такава редица е ограничено отгоре и затова според основната теорема 2.1 това множество има точна горна граница, която ще означим с $\bar{x}$. Ще докажем, че числото $\bar{x}$ е граница на редицата $\{x_n\}$. Първо ще отбележим, че съгласно определението за горна граница всеки член на редицата $\{x_n\}$ удовлетворява неравенството

$$x_n \leq \bar{x}. \tag{3.31}$$

Избираме произволно положително число ε и съгласно определението за точна горна граница ще съществува поне един член x_N на редицата, удовлетворяващ неравенството

$$\bar{x} - \varepsilon < x_N. \tag{3.32}$$

Но редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща, поради което $x_N \leqq x_n$ за всяко $n \geqq N$. От неравенството $x_N \leqq x_n$ и (3.32) получаваме, че за всяко $n \geqq N$ имаме

(3.33) $$\bar{x} - \varepsilon < x_n .$$

Като обединим неравенствата (3.31) и (3.33), получаваме, че за всички $n \geqq N$ са изпълнени неравенствата $\bar{x} - \varepsilon < x_n \leqq \bar{x}$.

Тогава за всички $n \geqq N$ е в сила неравенството $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, откъдето следва, че редицата $\{x_n\}$ клони към границата $\bar{x} = \sup\{x_n\}$.

Ако редицата $\{x_n\}$ е нерастяща и ограничена отдолу, то съвсем аналогично се доказва, че тя клони към границата $\underline{x} = \inf\{x_n\}$. □

Забележка 1. Съгласно казаното в 3.2.1 редицата $\{x_n\}$, удовлетворяваща условието на теорема 3.15, е ограничена от двете страни или просто ограничена. Затова теорема 3.15 може да се изкаже така: *За да бъде монотонната редица $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде ограничена* (необходимостта следва от теорема 3.8).

Забележка 2. Разбира се, не всяка сходяща редица е монотонна. Например клонящата към нула редица $1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \cdots, 1/n, -1/n, \cdots$ не е монотонна, тъй като знаците на членовете ѝ се сменят алтернативно.

Забележка 3. От приведеното доказателство следва, че всички членове на една ненамаляваща, ограничена отгоре редица $\{x_n\}$ не надминават границата ѝ $\bar{x}$ $(x_n \leqq \bar{x})$. Аналогично лесно се вижда, че всички членове на една нерастяща, ограничена отдолу редица не са по-малки от границата ѝ $\underline{x}$.

Ще извлечем едно важно следствие от теорема 3.15.

Ще се условим да наричаме безкрайната редица от сегменти $[a_1, b_1], [a_2, a_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$ ***свиваща се система*** *от сегменти, ако:*

1) *всеки следващ сегмент се съдържа в предидущия, т. е.* $a_n \leqq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqq b_n$ *за всяко* $n = 1, 2, 3, \cdots$

2) *дължината на n-тия сегмент* $[a_n, b_n]$, *т. е. разликата* $b_n - a_n$, *клони към нула при* $n \to \infty$.

Следствие от теорема 3.15. *За всяка свиваща се система от сегменти* $\{[a_n, b_n]\}$ *съществува, и то само една точка c, която принадлежи на всеки сегмент от тази система.*

Доказателство. Най-напред ще покажем, че точката c, която принадлежи на всички сегменти, може да бъде само една. Действително да допуснем, че има още една точка d, различна от c, която принадлежи на всички сегменти, като за определеност нека $d > c$. Това означава, че сегментът $[c, d]$ принадлежи на всички сегменти $[a_n, b_n]$. Но тогава за всеки номер n ще бъдат изпълнени неравенствата $b_n-a_n \geq d-c>0$, което е невъзможно, тъй като $b_n-a_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Ще докажем сега, че съществува точка c, която принадлежи на всички сегменти. Понеже системата от сегменти е свиваща се, то редицата от левите им краища $\{a_n\}$ е ненамаляваща, а редицата от десните им краища $\{b_n\}$ — нерастяща. Тъй като и двете редици са ограничени (всичките им членове принадлежат на сегмента $[a_1, b_1]$), то те са сходящи (според теорема 3.15). От това, че разликата $\{b_n-a_n\}$ е безкрайно малка редица, следва, че двете редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към една и съща граница, която ще означим с c. Според забележка 3 за всяко n са изпълнени неравенствата $a_n \leq c \leq b_n$, т. е. c принадлежи на всички сегменти $[a_n, b_n]$. □

3.2.3. Числото e. Ще приложим теорема 3.15, за да докажем сходимостта на редицата $\{x_n\}$, членовете x_n на която се определят от равенството

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Съгласно теорема 3.15 достатъчно е да докажем, че тази редица е: 1) растяща; 2) ограничена отгоре.

От формулата за бинома на Нютон за x_n получаваме следния израз:

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Този израз преобразуваме във вида

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{3.34}$$

За следващия член на редицата аналогично на (3.34) се получава изразът

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \tag{3.35}$$

За да се убедим, че редицата $\{x_n\}$ е растяща, ще сравним изразите (3.34) и (3.35). Най-напред ще отбележим, че дясната страна на (3.34) се състои от n събираеми, а дясната страна на (3.35) — от $n+1$ събираеми, като $(n+1)$-вото събираемо в дясната страна на (3.35) е строго положително.

Ще съпоставим сега помежду им всяко от останалите събираеми в дясната страна на (3.35) със съответните им събираеми в дясната страна на (3.34). Лесно се вижда, че за всеки номер k $(k=2, 3, \dots, n)$ е изпълнено неравенството

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Това неравенство означава, че k-тото събираемо в (3.34) е по-малко от съответното k-то събираемо в (3.35).

И така доказахме, че $x_n<x_{n+1}$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е растяща.

Ще докажем сега, че тази редица е ограничена отгоре. Ако изразите в кръглите скоби в дясната страна на (3.34) заменим с единица, ще получим нещо по-голямо. Затова

(3.36) $$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}.$$

От друга страна, за всяко $k\geq 2$ е изпълнено неравенството $k!=2.3.4\dots k\geq 2^{k-1}$. Затова неравенството (3.36) ни дава право да твърдим, че

(3.37) $$x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

(използвахме формулата за сума на геометрична прогресия). От неравенството (3.37) следва ограничеността на редицата $\{x_n\}$.

Според основната теорема 3.15 редицата $\{x_n\}$ е сходяща и нейната граница, следвайки Л. Ойлер*, ще означаваме с e.

Ще покажем, че числото e удовлетворява неравенствата $2\leq e\leq 3$. Затова (поради следствие 2 от теорема 3.13) е достатъчно да се докаже, че всеки член x_n на редицата $\{x_n\}$ удовлетворява неравенството $2\leq x_n\leq 3$.

Неравенството $x_n\leq 3$ следва от (3.37), а неравенството $2\leq x_n$ се получава от (3.34), като премахнем в дясната страна на (3.34) всички членове освен първия.

Числото e играе важна роля в математиката и по-нататък ще бъде даден начин за пресмятането на това число с произволна точност.

* Леонард Ойлер, швейцарски математик, член на Петербургската академия на науките, работил през по-голямата част от живота си в Русия (1707—1783).

3.2.4. Други примери на сходящи, монотонни редици. Ще започнем с разглеждането на редица, която се използва за приближено намиране на квадратен корен от реално положително число a. Тази редица се определя от следната рекурентна формула*:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), \quad n=1,\ 2,\ 3, \cdots, \tag{3.38}$$

където за първо приближение x_1 може да се вземе произволно положително число.

Най-напред ще докажем, че тази редица е сходяща. За това е достатъчно (съгласно теорема 3.15) да покажем, че тя е ограничена отдолу и от втория си член нататък е нерастяща.

Ще започнем с доказателството на ограничеността отдолу. По условие $x_1>0$. Но тогава от рекурентната формула (3.38) при $n=1$ следва, че $x_2>0$, по-нататък от същата формула (3.38) при $n=2$ следва, че $x_3>0, \cdots$ Така установяваме, че за всяко n имаме $x_n>0$, т. е. разглежданата редица е ограничена отдолу.

Ще докажем сега, че при $n\geqq 2$ всички членове x_n удовлетворяват неравенството $x_n\geqq\sqrt{a}$. Записваме формула (3.38) във вида

$$x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \tag{3.39}$$

и използваме тривиалното неравенство $t+\frac{1}{t}\geqq 2$, вярно за всяко $t>0$.

Като поставим в това неравенство $t=x_n/\sqrt{a}>0$, ще получим, че $x_n/\sqrt{a}+\sqrt{a}/x_n\geqq 2$, и затова съотношението (3.39) ни дава $x_{n+1}\geqq\sqrt{a}$ при $n=1, 2, \cdots$ Това означава, че $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n=2,\ 3, \cdots$

Ще докажем накрая, че редицата $\{x_n\}$ от втория член нататък е нерастяща.

От рекурентната формула (3.38) следва, че

$$x_{n+1}/x_n=\frac{1}{2}\left(1+a/x_n^2\right).$$

От това равенство, понеже $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n\geqq 2$, получаваме, че $x_{n+1}/x_n\leqq 1$ при $n\geqq 2$ или $x_{n+1}\leqq x_n$ при $n\geqq 2$. И така при $n\geqq 2$ редицата $\{x_n\}$ е нерастяща.

Според теорема 3.15 редицата $\{x_n\}$ е сходяща към някаква граница x. Остава да намерим тази граница. Тъй като $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n\geqq 2$, получаваме (според теорема 3.13), че $x\geqq\sqrt{a}>0$.

* Рекурентната формула (от латинската дума recurrens — възвръщащ се) е формула, наразяваща ($n+1$)-вия член на една редица чрез предидущите n члена на тази редица.

Взсмаме под внимание, че $x>0$, и правим граничен преход в равенството (3.38) при $n\to\infty$. След граничния преход при $n\to\infty$ от (3.38) ще получим следното равенство:

$$x=(x+a/x)/2.$$

Единственият положителен корен на това уравнение е $x=\sqrt{a}$.

И така окончателно доказахме, че редицата $\{x_n\}$, определена с рекурентната формула (3.38) при всеки избор на $x_1>0$, е сходяща и границата ѝ е $\sqrt{a}$.

Като друго приложение на теорема 3.15 ще намерим границата на редицата $\{x_n\}$, чиито членове имат вида

$$x_n=t^n/n!, \tag{3.40}$$

където t е фиксирано реално число. За всяко фиксирано t съществува такъв номер N, че $|t|<n+1$ при всички $n\geq N$. Но тогава, тъй като $x_{n+1}/x_n=t/(n+1)$, ще получим, че $|x_{n+1}|<|x_n|$ при всички $n\geq N$, т. е. от номера N нататък редицата $\{|x_n|\}$ е намаляваща. Тъй като освен това тази редица е ограничена отдолу (например от числото нула), то съгласно теорема 3.15 тя е сходяща към някаква граница x. За да намерим границата x, ще запишем съотношението (3.40) за номера $n+1$:

$$x_{n+1}=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{t}{n+1}=x_n\cdot\frac{t}{n+1},$$

т. е. $|x_{n+1}|=|x_n|\,.\,|t|/(n+1)$. Като минем в това равенство към граница при $n\to\infty$, ще получим

$$x=x\,.\lim_{n\to\infty}|t|/(n+1)=0.$$

И така редицата $\{|x_n|\}$ е сходяща, а заедно с нея и редицата (3.40) е сходяща с граница $x=0$.

И в двата случая използвахме един често употребяван прийом: най-напред доказваме съществуването на границата на редицата с помощта на теорема 3.15, а след това намираме тази граница от уравнението, което се получава след граничен преход в рекурентното съотношение, изразяващо $(n+1)$-вия член на редицата чрез n-тия ѝ член.

3.3. Произволни редици

3.3.1. Точка на сгъстяване. Горна и долна точка на сгъстяване на редица. Да разгледаме редицата $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ и произволна растяща редица от цели положителни числа $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ Да изберем от редицата $\{x_n\}$ членовете с номера $k_1, k_2,$

$\ldots, k_n, \ldots$ и да ги разположим по реда на нарастване на тези номера. Ще получим нова редица $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$, която е прието да се нарича ***подредица*** на изходната редица $\{x_n\}$. По-специално и самата редица $\{x_n\}$ може да се разглежда като подредица с номера $k_n = n$.

Ще отбележим, че винаги $k_n \geq n$, тъй като всяка подредица, несъвпадаща с цялата редица, се получава чрез някакво разреждане на елементите на редицата.

Верни са следните две твърдения.

1°. *Ако редицата $\{x_n\}$ е сходяща с граница a, то всяка нейна подредица е сходяща и има същата граница.*

2°. *Ако всички подредици на дадената редица $\{x_n\}$ са сходящи, то всички те имат една и съща граница (същата граница има и дадената редица).*

Ще докажем най-напред твърдението 1°. Избираме произволно положително число ε и намираме такъв номер N, че $|x_n - a| < \varepsilon$ при всички $n \geq N$. Нека $\{x_{k_n}\}$ е произволна подредица на редицата $\{x_n\}$. Тъй като $k_N \geq N$, то от номера k_N нататък членовете на подредицата $\{x_{k_n}\}$ ще удовлетворяват неравенството $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$, а това означава, че подредицата $\{x_{k_n}\}$ е сходяща и има за граница a.

За да се докаже твърдение 2°, е достатъчно да се вземе пред вид, че и редицата $\{x_n\}$ (като частен случай на подредица) клони към някаква граница a. От 1° следва, че и всяка нейна подредица клони към същата граница a.

Напълно аналогично на 1° се доказва, че всяка подредица на безкрайно голяма редица е също безкрайно голяма редица.

Ще въведем основното понятие точка на сгъстяване на редица.

Определение 1. *Точката x се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на редицата $\{x_n\}$, ако всяка ε-околност на точката x съдържа безбройно много членове на тази редица.*

Определение 2. *Точката x се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на редицата $\{x_n\}$, ако от тази редица може да се избере сходяща подредица с граница x.*

Ще покажем, че определенията 1 и 2 са еквивалентни.

1. Нека всяка ε-околност на x съдържа безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$. Ще разгледаме съвкупността от ε-околностите на точката x, за които ε е равно на 1, 1/2, 1/3, $\ldots$, $1/n, \ldots$

В първата от тези околности избираме член x_{k_1} от редицата с някакъв номер k_1, във втората от тези околности избираме член x_{k_2} на редицата с номер $k_2 > k_1$, и третата от посочените околности избираме член x_{k_3} от редицата с номер $k_3 > k_2, \ldots$ Този процес може да се продължи неограничено, тъй като във всяка ε-околност на точката x има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$. В резултат ще получим подредицата $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ на редицата $\{x_n\}$, която клони към x, тъй като $|x_{k_n}-x|<1/n$.

2. Да предположим, че от редицата $\{x_n\}$ може да се избере подредица, клоняща към x. Тогава във всяка ε-околност на точката x се съдържат безбройно много членове на подредицата (всичките от известно място нататък). Тъй като всеки член на подредицата е член и на редицата, то във всяка ε-околност на точката x ще се съдържат безбройно много членове и от тази редица. □

Ще изясним въпроса за съществуване на точки на сгъстяване на сходящите редици.

Лема 1. *Всяка сходяща редица има само една точка на сгъстяване и тя съвпада с границата на редицата.*

Доказателство. Нека редицата $\{x_n\}$ клони към граница a. Тогава във всяка ε-околност на a се съдържат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$ (всичките от известно място нататък) и затова a е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Остава да докажем, че нито едно число a', различно от a, не е точка на сгъстяване за редицата $\{x_n\}$. Но това следва непосредствено от доказаното твърдение 1°, според което от сходимостта на една редица с граница a следва сходимостта на всяка нейна подредица към същата граница a. □

Ще приведем пример на ограничена редица $\{x_n\}$ с две точки на сгъстяване. Ще докажем, че редицата $1/2, 1-1/2, 1/3, 1-1/3, \ldots, 1/n, 1-1/n, \ldots$ има само две точки на сгъстяване $x=0$ и $x=1$. Това, че точките $x=0$ и $x=1$ са точките на сгъстяване, следва от факта, че подредицата от членовете с нечетни номера е сходяща с граница $x=0$, а подредицата от членовете с четни номера е сходяща с граница $x=1$. Остава да се докаже, че нито едно число x_0, различно от 0 и 1, не е точка на сгъстяване на тази редица. Тъй като $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то очевидно може да се избере толкова малко положително число ε, че ε-околностите на трите точки 0, 1 и x_0 да нямат общи точки (вж. фиг. 3.1).

Но всички членове на редицата с нечетни номера от известно място нататък се съдържат в ε-околността на точката 0, а всички членове на редицата с четни номера от известно място нататък се съдържат в ε-околността на точката 1. Поради това извън ε-околностите на точките 0 и 1 (по-специално в ε-околността на точката x_0) има най-много краен брой членове на редицата. Това означава, че x_0 не е точка на сгъстяване за редицата.

Ще приведем сега пример за редица $\{x_n\}$, която има безбройно много точки на сгъстяване. По-рано (2.7.3) установихме, че множеството на всички рационални числа в сегмента $[0, 1]$ може да се нареди във вид на редица $\{x_n\}$. Ще докажем, че *всяко реално*

Фиг. 3.1

число x от сегмента $[0, 1]$ *е точка на сгъстяване за тази редица* $\{x_n\}$. Отбелязваме, че каквото и да е числото x от сегмента $[0,1]$, за всяко $0<\varepsilon<1/2$ поне едно от двете числа $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$ принадлежи на сегмента $[0, 1]$.

Да предположим за определеност, че числото $x+\varepsilon$ принадлежи на сегмента $[0,1]$. Между двете различни помежду си числа x и $x+\varepsilon$ според лема 2 от глава 2 се съдържат безбройно много различни рационални числа. Това означава, че за всяко $0<\varepsilon<1/2$ в ε-околностите на точката x се съдържат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$, т. е. x е точка на сгъстяване за тази редица.

Естествено възниква въпросът за най-голямата и най-малката точка на сгъстяване на дадена редица.

Определение 3. *Най-голямата точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ се нарича **горна точка на сгъстяване** (лимес супериор*) на тази редица и се означава със символа* $x=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Определение 4. *Най-малката точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ се нарича **долна точка на сгъстяване** (лимес инфериор**) на тази редица и се означава със символа* $x=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

В сила е следната забележителна теорема.

Основна теорема 3.16. *Всяка ограничена редица има горна и долна точка на сгъстяване и по-специално има поне една точка на сгъстяване.*

Доказателство. Ще се спрем на доказателството за съществуване на поне една точка на сгъстяване и на горна точка на сгъстяване (лимес супериор) за всяка ограничена редица (съществуването на долна точка на сгъстяването се доказва аналогично).

Нека $\{x_n\}$ е произволна ограничена редица. От условието за ограниченост следва, че съществуват такива две реални числа m и M, че всеки член x_n на редицата $\{x_n\}$ да удовлетворява неравенствата $m\leq x_n\leq M$.

Ще разгледаме множеството $\{x\}$ на всички реални числа x, надясно от които или няма членове на редицата $\{x_n\}$, или има само краен брой такива членове.

С други думи, реалното число x принадлежи на множеството $\{x\}$, ако надясно от x лежат не повече от краен брой членове на

* От латинското limes superior, което означава „най-голяма граница".
** От латинското limes inferior, което означава „най-малка граница"

редицата $\{x_n\}$, и не принадлежи на множеството $\{x\}$, ако надясно от това число x има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$.

Ще отбележим, че множеството $\{x\}$ очевидно не е празно: към него принадлежи всяко реално число x, удовлетворяващо неравенството $x \geq M$ (тъй като надясно от такова x няма членове на редицата $\{x_n\}$). Освен това е очевидно, че множеството $\{x\}$ е ограничено отдолу и за негова долна граница може да се вземе всяко число, по-малко от m (надясно от такова число лежат всички членове на редицата $\{x_n\}$, а те са безбройно много).

Според теорема 2.1 за множеството $\{x\}$ съществува точна долна граница, която ще означим с $\bar{x}$. Ще докажем, че това число $\bar{x} = \inf\{x\}$ е горна точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Достатъчно е да се докажат двете твърдения:

1°. Числото $\bar{x}$ е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ (т. е. във всяка ε-околност на $\bar{x}$ има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$).

2°. Нито едно число x, по-голямо от $\bar{x}$, не е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ (това означава, че $\bar{x}$ е най-голямата точка на сгъстяване, т. е. горната точка на сгъстяване на $\{x_n\}$).

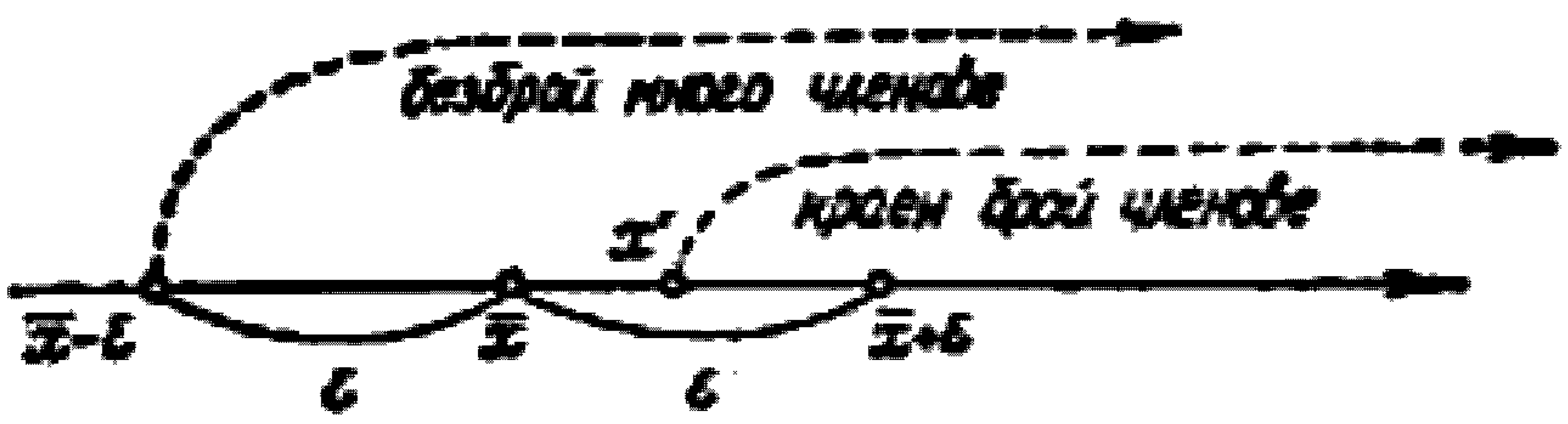
За да докажем твърдението 1°, фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението за долна граница числото $\bar{x}-\varepsilon$ не принадлежи на определеното по-горе множество $\{x\}$. Тогава надясно от $\bar{x}-\varepsilon$ ще лежат безбройно много членове от редицата $\{x_n\}$.

Тъй като числото $\bar{x}$ е точна долна граница на множеството $\{x\}$, от неравенството $\bar{x}<\bar{x}+\varepsilon$ следва, че съществува поне един елемент x' от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $\bar{x}\leq x'<\bar{x}+\varepsilon$, т. е. лежащ наляво от $\bar{x}+\varepsilon$ (вж. фиг. 3.2). Според определението на множеството $\{x\}$ надясно от това число x' ще лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

На фиг. 3.2 е посочено условно, че надясно от числото $\bar{x}-\varepsilon$ лежат безбройно много членове от редицата $\{x_n\}$, а надясно от числото x' лежат не повече от краен брой членове на тази редица.

Тъй като надясно от $\bar{x}-\varepsilon$ лежат безбройно много, а надясно от x' — само краен брой членове на редицата $\{x_n\}$, то стигаме до извода, че в полусегмента $(\bar{x}-\varepsilon, x']$ (а очевидно и в интервала $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$) лежат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$.

И така доказахме, че за всяко $\varepsilon>0$ в ε-околността на точката $\bar{x}$ лежат безбройно много членове на редицата $\{\bar{x}\}$. Това означава, че $\bar{x}$ е точка на сгъстяване за тази редица. □



Фиг. 3.2

Фиг. 3.3

Същевременно доказахме, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от числото $\bar{x}+\varepsilon$ има не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

Този факт ще използваме при доказателството на твърдение 2°, а именно че $\bar{x}$ е най-голямата точка на сгъстяване.

Нека $\bar{\bar{x}}$ е произволно число, по-голямо от $\bar{x}$. Да означим с ε положителното число $\varepsilon=(\bar{\bar{x}}-\bar{x})/2$. При този избор на ε интервалите $(\bar{x}-\varepsilon,\ \bar{x}+\varepsilon)$ и $(\bar{\bar{x}}-\varepsilon,\ \bar{\bar{x}}+\varepsilon)$, т. е. ε-околностите на точките $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, няма да имат общи точки, а по-точно ε-околността на точката $\bar{\bar{x}}$ изцяло ще лежи надясно от числото $\bar{x}+\varepsilon$, което е дясна граница на ε-околността на точката $\bar{x}$ (вж. фиг. 3.3).

По-горе установихме, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от $\bar{x}+\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

Очевидно в разглежданата ε-околност на точката $\bar{\bar{x}}$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$, а това означава че $\bar{\bar{x}}$ не е точка на сгъстяване на тази редица. □

Доказахме, че всяка ограничена редица $\{x_n\}$ има горна точка на сгъстяване (т. е. най-голяма точка на сгъстяване). Съвършено аналогично се доказва съществуването на долна точка на сгъстяване, която е точната горна граница на множеството от реалните числа $\{x\}$, наляво от които лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. □

Следствие 1. *Ако $\{x_n\}$ е ограничена редица, $\underline{x}$ и $\bar{x}$ са съответно нейната долна и горна точка на сгъстяване, ε е произволно положително число, то в интервала $(\underline{x}-\varepsilon,\ \bar{x}+\varepsilon)$ се съдържат всички членове на тази редица от известен номер нататък (който зависи, разбира се, от ε).*

Достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ вън от интервала $(\underline{x}-\varepsilon,\ \overline{x}+\varepsilon)$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Разбира се, за това е достатъчно да се докаже например, че надясно от $\overline{x}+\varepsilon$ и наляво от $\underline{x}-\varepsilon$ лежат най-много краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Фактът, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от $\overline{x}+\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на $\{x_n\}$, беше установен при доказването на теорема 3.16. Съвсем аналогично се доказва, че за всяко $\varepsilon>0$ наляво от $\underline{x}-\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. □

Следствие 2. *Нека $\{x_n\}$ е ограничена редица с долна и горна точка на сгъстяване съответно $\underline{x}$ и $\overline{x}$, (a, b) е интервал, вън от който лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Тогава интервалът $(\underline{x}, \overline{x})$ се съдържа в интервала (a, b) и по-специално $\overline{x}-\underline{x}\leq b-a$.*

Доказателство. Достатъчно е да се докажат двете неравенства $\overline{x}\leq b$ и $\underline{x}\geq a$. Първото от тях следва от това, че точката b, надясно от която лежат само краен брой членове от редицата $\{x_n\}$, принадлежи на множеството $\{x\}$, разгледано при доказателството на теорема 3.16, а $\overline{x}$ е точна долна граница на това множество. Второто неравенство $a\leq\underline{x}$ се установява аналогично. □

Следствие 3 (теорема на Болцано — Вайерщрас*). *От всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица.*

Тази теорема е непосредствено следствие от теорема 3.16 и определение 2 за точка на сгъстяване.

Теорема 3.16 хвърля светлина върху структурата на множеството от всички точки на сгъстяване на произволна ограничена редица. Ако както и по-горе, означим с $\underline{x}$ и $\overline{x}$ съответно долната и горната точка на сгъстяване на такава редица, то всички точки на сгъстяване се съдържат в сегмента $[\underline{x}, \overline{x}]$, при което, ако редицата не е сходяща, тя има поне две точки на сгъстяване $\underline{x}$ и $\overline{x}$. Разгледаната по-рано редица $1/2,\ 1-1/2,\ 1/3,\ 1-1/3, \dots,\ 1/n,\ 1-1/n, \dots$ е пример за редица със само две точки на сгъстяване $\underline{x}=0$ и $\overline{x}=1$.

Другата разгледана редица $\{x_n\}$ от всички рационални числ на сегмента $[0, 1]$ е пример за редица, чиито точки на сгъстяван покриват целия сегмент $[0, 1]$.

* Бернхард Болцано — чешки философ и математик (1781—1848). Карл Вайерщрас — немски математик (1815—1897).

Лесно е да се построи пример за редица $\{x_n\}$, която има точки на сгъстяване: 1) отнапред зададено крайно множество точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$; 2) отнапред избрана безкрайна редица от точки $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$* (във втория случай всяка точка сгъстяване на редицата от точките на сгъстяване $\{a_n\}$ ще точка на сгъстяване и за изходната редица $\{x_n\}$).

3.3.2. Разширяване на понятието точка на сгъстяване. Аналог на теоремата на Болцано — Вайерщрас за неограничени редици е следното твърдение:

Лема 2. *От всяка неограничена редица може да се избере безкрайно голяма подредица (и по-специално безкрайно голяма подредица, всички членове на която имат еднакъв знак).*

Доказателство. Най-напред ще отбележим, че ако в неограничена редица премахнем произволен брой от първите членове, то редицата от останалите членове е също неограничена. Нека $\{x_n\}$ е произволна неограничена редица. Тогава съществува член x_{k_1} от тази редица, удовлетворяващ неравенството $|x_{k_1}|>1$. Като вземем пред вид, че редицата $\{x_n\}$, разглеждана от номера k_1+1 нататък, е също неограничена, то ще съществува член x_{k_2}, който удовлетворява неравенството $|x_{k_2}|>2$, а $k_2>k_1$. Продължавайки тези разсъждения, ще получим, че за всеки номер n съществува член x_{k_n}, за който е изпълнено неравенството $|x_{k_n}|>n$ и $k_n>k_{n-1}$.

Очевидно е, че построената по този начин подредица $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ е безкрайно голяма. Тъй като тази редица съдържа безбройно много или положителни, или отрицателни членове, ние можем да изберем от нея безкрайно голяма подредица, членовете на която имат един и същ знак. □

От лема 2 и теоремата на Болцано — Вайерщрас следва твърдението:

Лема 3. *От произволна редица може да се избере или сходяща подредица, или безкрайно голяма подредица, всички членове на която имат един и същ знак.*

Лема 3 естествено води до идеята за разширяване на понятието точка на сгъстяване на редица. Ще се уговорим формално да допълним въведените по-рано крайни точки на сгъстяване на редица с още две възможни точки на сгъстяване $+\infty$ и $-\infty$.

Ще казваме, че $+\infty$ $(-\infty)$ е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$, ако от тази редица може да се избере безкрайно голяма подредица, всички членове на която са положителни (отрицателни).

При такова разширение на понятието точка на сгъстяване от лема 3 следва твърдението: *Всяка редица има поне една точка на сгъстяване* (или крайна, или равна на $+\infty$ или $-\infty$).

* Такава е редицата $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, \ldots$

Естествено е да считаме, че $+\infty$ и $-\infty$ са свързани с всяко крайно реално число x с неравенствата $-\infty<x<+\infty$. Ще покажем, че всяка редица $\{x_n\}$ има горна и долна точка на сгъстяване.

За определеност ще се спрем на доказателството за съществуване на горна точка на сгъстяване.

Съгласно теорема 3.16 е достатъчно да разгледаме само случая, когато редицата $\{x_n\}$ е неограничена.

Ако при това редицата $\{x_n\}$ е неограничена отгоре, то от нея може да се избере безкрайно голяма подредица, всичките членове на която са положителни и затова $+\infty$ ще бъде точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Остава да се разгледа случаят, в който неограничената редица $\{x_n\}$ е ограничена отгоре, т. е. когато съществува такова реално число M, че всички членове x_n на редицата удовлетворяват неравенството $x_n \leq M$. Понеже при това редицата $\{x_n\}$ е неограничена отдолу, то от нея може да се избере безкрайно голяма подредица, всички членове на която са отрицателни, т. е. $-\infty$ е точка на сгъстяване на тази редица.

Ако при това редицата $\{x_n\}$ няма нито една крайна точка на сгъстяване, то единствената точка на сгъстяване $-\infty$ е и горна точка на сгъстяване на тази редица.

Ако редицата има поне една крайна точка на сгъстяване x_0, то като фиксираме някое $\varepsilon>0$, можем да изберем от тази редица подредицата от всички членове, които удовлетворяват неравенствата

$$x_0-\varepsilon \leq x_n \leq M.$$

Избраната подредица е ограничена и според теорема 3.16 за нея съществува най-голяма точка на сгъстяване, която е най-голямата точка на сгъстяване и на редицата $\{x_n\}$. Съществуването на горна точка на сгъстяване за всяка редица е доказано. Аналогично се доказва, че за всяка редица съществува долна точка на сгъстяване.

В заключение ще отбележим, че почти всички понятия и твърдения, установени в тази и в предишните точки, се пренасят и за произволно числово множество $\{x\}$ с безкраен брой елементи.

Точката α от безкрайната права $(-\infty, +\infty)$ ще наричаме точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$, ако във всяка ε-околност на точката α се съдържат безкрайно много елементи от това множество.

Най-голямата и най-малката точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$ ще наречем съответно *горна* и *долна точка на сгъстяване* на това множество.

Като повторим разсъжденията в теорема 3.16 и заменим термина „редицата $\{x_n\}$" с термина „множеството $\{x\}$, съдържащо безкраен брой елементи", ще дойдем до следното твърдение: *Всяко ограничено числово множество $\{x\}$, съдържащо безкраен брой елементи, има горна и долна точка на сгъстяване (и по-специално има поне една точка на сгъстяване).*

От това твърдение следва едно обобщение на теоремата на Болцано — Вайерщрас: *От елементите на всяко ограничено безкрайно множество $\{x\}$ може да се избере сходяща подредица, всички членове на която са различни помежду си.*

Както и в случая на редица, удобно е да разширим понятието точка на сгъстяване и да приемем, че $+\infty$ $(-\infty)$ *е точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$, ако от елементите на това множество може да се избере безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) числа.*

Тази формализация ни позволява да твърдим, че *безкрайно числово множество $\{x\}$ има поне една точка на сгъстяване, а така също горна и долна точка на сгъстяване.*

3.3.3. Критерий на Коши* за сходимост на редица. При изучаване на сходимостта на една редица $\{x_n\}$ се оценява обикновено разликата $x_n - a$ между членовете на редицата и предполагаемата ѝ граница a. С други думи, трябва да предугаждаме стойността на границата a на тази редица.

Сега ще дадем „вътрешен" критерий за сходимост на редица, позволяващ да определяме нейната сходимост, без да познаваме предполагаемата граница на тази редица.

Определение 5. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***фундаментална*****, ако за всяко положително число ε съществува такъв номер N, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n \geq N$, и за всяко естествено число p $(p = 1, 2, \ldots)$ да е изпълнено неравенството*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Ще докажем две важни свойства на фундаменталните редици.

Свойство 1. Нека е дадена фундаменталната редица $\{x_n\}$. За всяко положително число ε съществува такъв член x_N, че в ε-околността на този член x_N се съдържат всички членове x_n на редицата с номера $n \geq N$.

С други думи, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува член от фундаменталната редица, вън от ε-околността на който има най-много краен брой членове на тази редица.

* Огюстен Луи Коши — френски математик (1789 — 1857).
** Използува се още наименованието *редица на Коши.*

Доказателство. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението за фундаментална редица съществува такъв номер N, че за всяко естествено число p $(p=1, 2, 3, \ldots)$ членовете на фундаменталната редица удовлетворяват неравенството

$$|x_{N+p}-x_N|<\varepsilon,$$

или

$$x_N-\varepsilon<x_{N+p}<x_N+\varepsilon.$$

Тъй като p е произволно естествено число, то от последните неравенства следва, че всички членове на фундаменталната редица с номера, по-големи от N, се съдържат в интервала $(x_N-\varepsilon, x_N+\varepsilon)$, т. е. в ε-околността на x_N. □

Свойство 2. Всяка фундаментална редица е ограничена.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е фундаментална редица. Избираме произволно числото $\varepsilon>0$. Съгласно свойство 1 за това ε съществува такъв член x_N, че всички членове x_n с номера $n\geq N$ удовлетворяват неравенството

$$x_N-\varepsilon<x_n<x_N+\varepsilon.$$

Да означим с A най-голямото от следните $N+1$ числа: $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_{N-1}|$, $|x_N-\varepsilon|$, $|x_N+\varepsilon|$. Тогава очевидно за всички номера n ще бъде изпълнено неравенството $|x_n|\leq A$, откъдето следва ограничеността на редицата $\{x_n\}$. □

Ще докажем сега следната помощна теорема.

Теорема 3.17. *За да бъде редицата $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да е ограничена и горната ѝ точка на сгъстяване $\bar{x}$ да съвпадне с долната ѝ точка на сгъстяване $\underline{x}$.*

Доказателство. 1) *Необходимост.* Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща. Тогава тя е ограничена (съгласно теорема 3.8) и има само една точка на сгъстяване (съгласно лема 1). Това означава, че горната ѝ и долната ѝ точка на сгъстяване $\bar{x}$ и $\underline{x}$ съвпадат.

2) *Достатъчност.* Нека редицата $\{x_n\}$ е ограничена (съгласно теорема 3.16 тя има горна точка на сгъстяване $\bar{x}$ и долна точка на сгъстяване $\underline{x}$) и нека $\bar{x}=\underline{x}$. Да положим $x=\bar{x}=\underline{x}$. Съгласно следствие 1 на теорема 3.16 за всяко $\varepsilon>0$ интервалът $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ съдържа всички членове на редицата $\{x_n\}$ от даден номер нататък. Според определение 3 за сходяща редица (вж. 3.1.4) това означава, че редицата $\{x_n\}$ клони към границата x. Теорема 3.17 е доказана.

Ще докажем следната важна теорема:

Основна теорема 3.18 (критерий на Коши за сходимост на

редица). *За да бъде редицата $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде фундаментална.*

Доказателство. 1. *Необходимост.* Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща с граница x. Ще докажем, че тази редица е фундаментална. Фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като x е граница на редицата $\{x_n\}$, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$

$$|x_n - x| < \varepsilon/2. \tag{3.41}$$

Ако p е произволно естествено число, то за всички $n \geq N$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2, \tag{3.42}$$

тъй като $n+p \geq N$.

От неравенствата (3.41) и (3.42) получаваме, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |(x_{n+p} - x) + (x - x_n)| \\ &\leq |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon, \end{aligned}$$

а това означава, че редицата $\{x_n\}$ е фундаментална.

2. *Достатъчност.* Нека редицата $\{x_n\}$ е фундаментална. Трябва да се докаже, че тя е сходяща. Съгласно теорема 3.17 е достатъчно да докажем, че редицата $\{x_n\}$ е ограничена и че горната и долната ѝ точка на сгъстяване $\bar{x}$ и $\underline{x}$ съвпадат.

По-горе установихме, че всяка фундаментална редица е ограничена (вж. свойство 2). Остава да докажем, че горната точка на сгъстяване $\bar{x}$ и долната точка на сгъстяване $\underline{x}$ на редицата $\{x_n\}$ съвпадат. Фиксираме произволно положителното число ε. Съгласно свойство 1 на фундаменталните редици съществува такъв член x_N от редицата $\{x_n\}$, че вън от ε-околността на този член, т. е. вън от интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$, лежат най-много краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Но тогава съгласно следствие 2 на теорема 3.16 интервалът $(\underline{x}, \bar{x})$ се съдържа в интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ и по-специално е изпълнено неравенството $\bar{x} - \underline{x} \leq (x_N + \varepsilon) - (x_N - \varepsilon) = 2\varepsilon$. Тъй като освен това $\bar{x} \geq \underline{x}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ са изпълнени неравенствата $0 \leq \bar{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$. От произволния избор на ε и от тези неравенства следва, че $\bar{x} - \underline{x} = 0$, т. е. $\bar{x} = \underline{x}$. Критерият на Коши е доказан.

Примери:

1. Ще приложим критерия на Коши, за да установим разходимостта на редицата $\{x_n\}$ с членове $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Ще отбележим, че ако за всяко n изберем естественото число p, равно на n, ще получим, че за всяко n

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По този начин за положителното число $\varepsilon = 1/2$ не съществува такъв номер N, че за всяко $n \geqq N$ и за всяко естествено число p да е изпълнено неравенството $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Следователно разглежданата редица не е фундаментална и (по критерия на Коши) е разходяща.

2. Ще приложим критерия на Коши, за да установим сходимостта на редицата $\{x_n\}$ с членове $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, където q е произволно число от интервала $0 < q < 1$.

За всеки номер n и всяко естествено число p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ е изпълнено неравенството

$$(3.43) \qquad |x_{n+p} - x_n| = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+p}) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

$$= q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} = \frac{q^{n+1} - q^{n+p+1}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като редицата $\{q^n\}$ поради $0 < q < 1$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon(1-q)$ съществува такъв номер N, че за всяко $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$(3.44) \qquad q^n < \varepsilon(1-q).$$

От неравенствата (3.43) и (3.44) следва, че за всяко $n \geqq N$ и за всяко естествено число p имаме

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon(1-q)}{1-q} = \varepsilon,$$

а това означава, че разглежданата редица е фундаментална и следователно (по критерия на Коши) сходяща.

3.4. Граница на функция

Ще преминем към изучаването на друга, по-сложна форма на граничен преход, основана на понятието граница (или гранична стойност) на функция. Но преди това ще се спрем на понятията променлива величина и функция.

3.4.1. Понятие за променлива величина и функция. Разглеждането на реални физически променливи величини показва, че те не всякога могат да приемат произволни стойности. Така например скоростта на материална точка не може да бъде по-голяма от 3.10^{10} m/s (т. е. скоростта на светлината във вакуум), температурата на тяло не може да бъде по-малка от $-273°C$, отместването на материална точка, извършваща хармонични трептения по закона $y=A\cos(\omega t+\delta)$, може да приема стойности само от сегмента $[-A, A]$.

Като се абстрахираме от конкретните физически свойства на наблюдаваните в природата променливи величини, стигаме до понятието ***математическа променлива величина***, характеризираща се само с численните стойности, които тя приема.

Множеството $\{x\}$ от всички стойности, които дадена променлива величина x може да приема, се нарича ***област на изменение*** *на тази променлива величина. Променливата величина е зададена, ако е дадена нейната област на изменение.*

По-нататък обикновено ще означаваме променливите величини с малките латински букви $x, y, t, \ldots$, а областите на изменение на тези величини — съответно със символите $\{x\}, \{y\}, \{t\}, \ldots$

Ще преминем сега към уточняване на понятието функция.

Нека е зададена променливата величина x, която има област на изменение някое множество $\{x\}$.

Ако на всяка стойност на променливата x от множеството $\{x\}$ е съпоставено някое число y от множеството $\{y\}$, казваме, че върху множеството $\{x\}$ е ***зададена (дефинирана) функцията*** $y=f(x)$ *или* $f:\{x\}\to\{y\}$.

Променливата x се нарича ***аргумент*** *или* ***независима променлива***, *множеството $\{x\}$ се нарича* ***дефиниционна област*** *на функцията, а числото $f(x)$, което съответствува на дадена стойност на x, се нарича* ***стойност на функцията f в точката x***. *Съвкупността $\{y\}$ от всички възможни стойности на функцията f се нарича* ***област на изменение на тази функция.***

В означението $y=f(x)$ буквата f често се нарича ***характеристика*** на функцията.

Ако f и g са две функции с една и съща дефиниционна област $\{x\}$, тогава сума $f+g$ на функциите f и g се нарича функцията h, която е дефинирана за всяко $x \in \{x\}$ с равенството $h(x) = f(x) + g(x)$. Аналогично се дефинира разлика $f - g$, произведение $f \cdot g$ и частно f/g на две функции. Разбира се, частното f/g е дефинирано само за онези стойности $x \in \{x\}$ на аргумента, за които $g(x) \neq 0$.

Примери:

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$. Тази функция е дефинирана върху сегмента $-2 \leq x \leq 2$ (при тези стойности на x изразът под знака на корена е неотрицателен), а множеството от всичките ѝ стойности е сегментът $0 \leq y \leq 2$ (вж. фиг. 3.4).

2. Функцията на Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално число,} \\ 1, & \text{ако } x \text{ е рационално число.} \end{cases}$$

Функцията D е дефинирана върху безкрайната права $-\infty < x < \infty$ а множеството от всичките ѝ стойности съдържа само точките 0 и 1.

3.
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{ако } x > 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0, \\ -1, & \text{ако } x < 0 \end{cases}$$

(sgn от латинската дума signum — знак). Чете се „сигнум x“ Тази функция е дефинирана върху безкрайната права $-\infty < x < \infty$ а множеството от всичките ѝ стойности съдържа трите точки $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ (вж. фиг. 3.5).

4. Символът $[x]$ означава цялата част на числото x, или по-точно най-голямото цяло число, ненадминаващо x. Чете се „скобки от x“. Функцията $f(x) = [x]$ е дефинирана върху цялата безкрайна права $-\infty < x < \infty$, а множеството от всичките ѝ стойности е множеството от всичките цели числа (вж. фиг. 3.6).

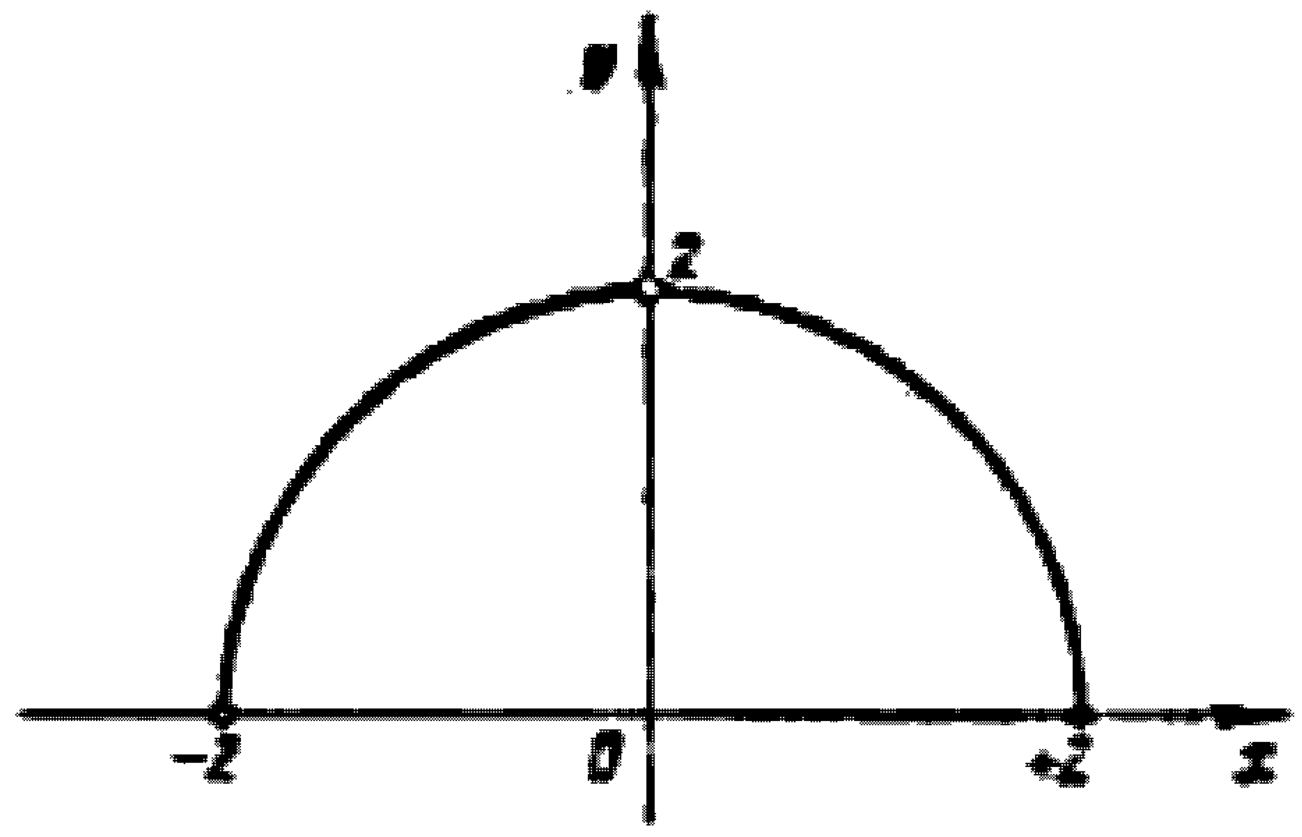
5. $f(n) = n!$. Тази функция** е дефинирана върху множеството на всички естествени числа $n = 1, 2, 3, \ldots$ Множеството от всичките ѝ стойности е множеството от естествените числа от вида $n! = 1.2.3 \ldots n$, където $n = 1, 2, 3, \ldots$ (вж. фиг. 3.7).

Често съответствието между множеството от стойности на аргумента и множеството от стойности на функцията се задава с формула. Този начин на задаване на функцията се нарича аналитичен.

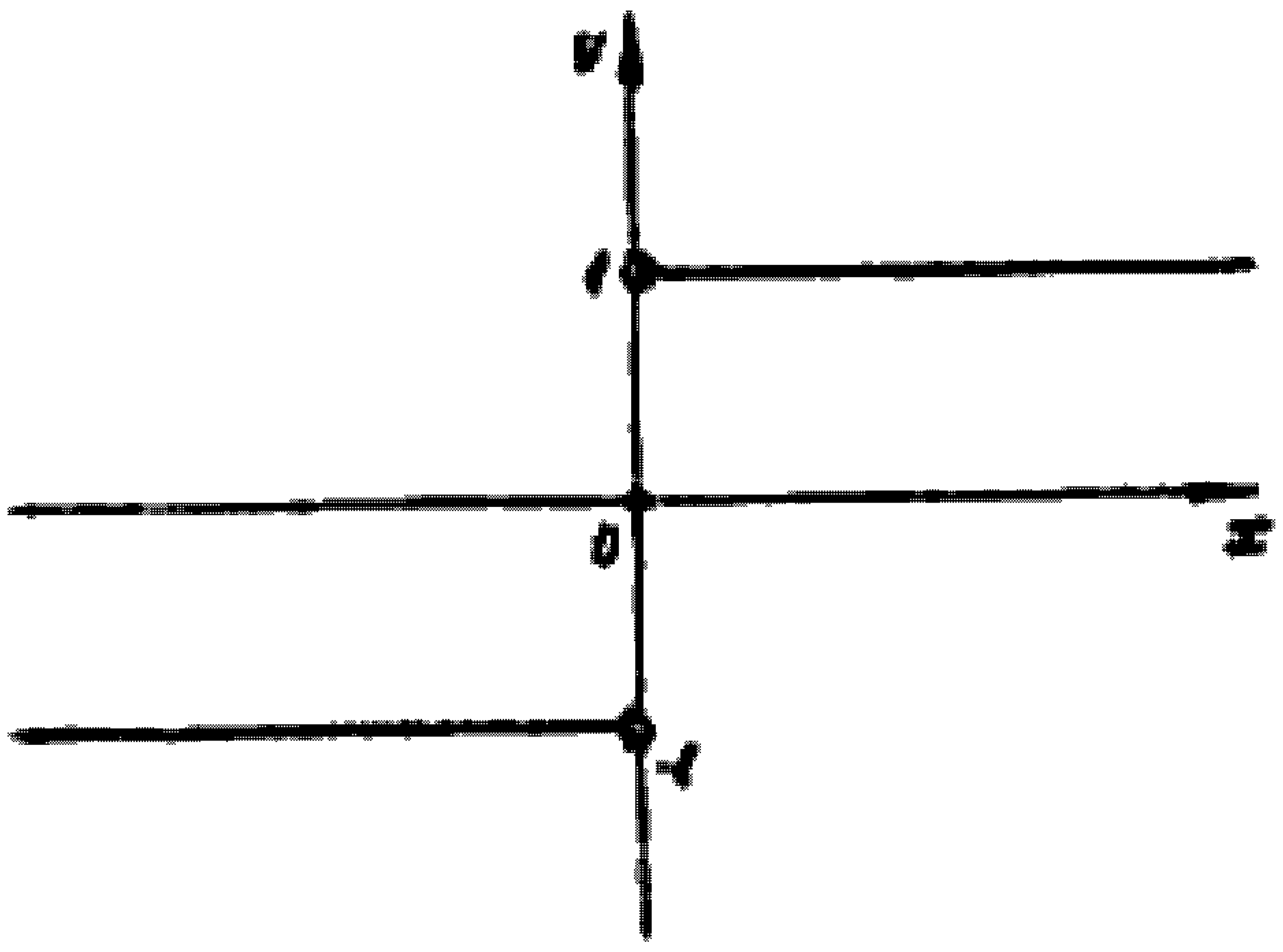
Ще отбележим, че функцията може да се задава с различни

* Петер Густав Льожон-Дирихле — немски математик (1805 — 1859).

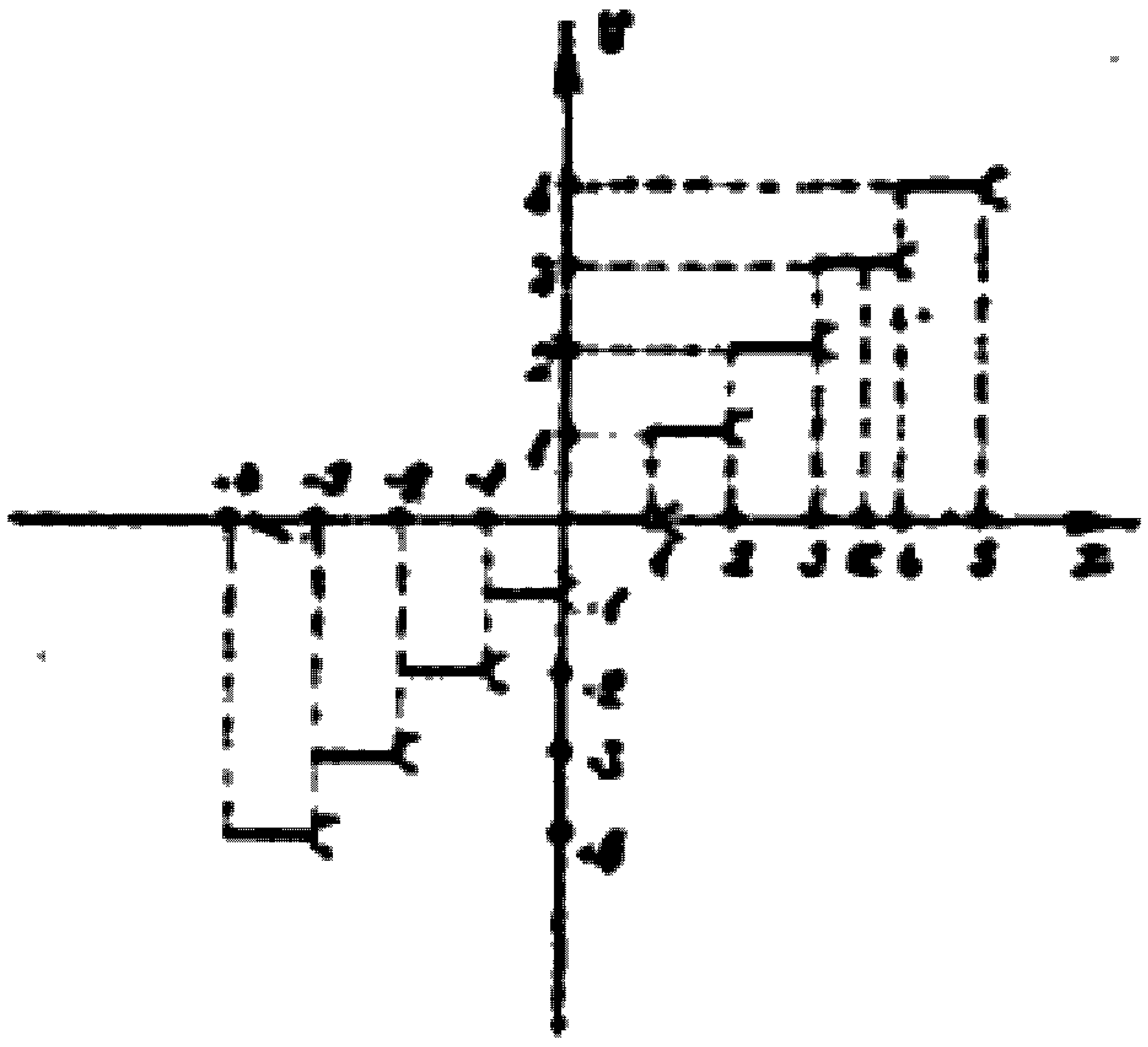
** Символът „$n!$“ се чете „n факториел“.



Фиг. 3.4



Фиг. 3.5



Фиг. 3.6

формули върху различните участъци от дефиниционната си област. Например функцията

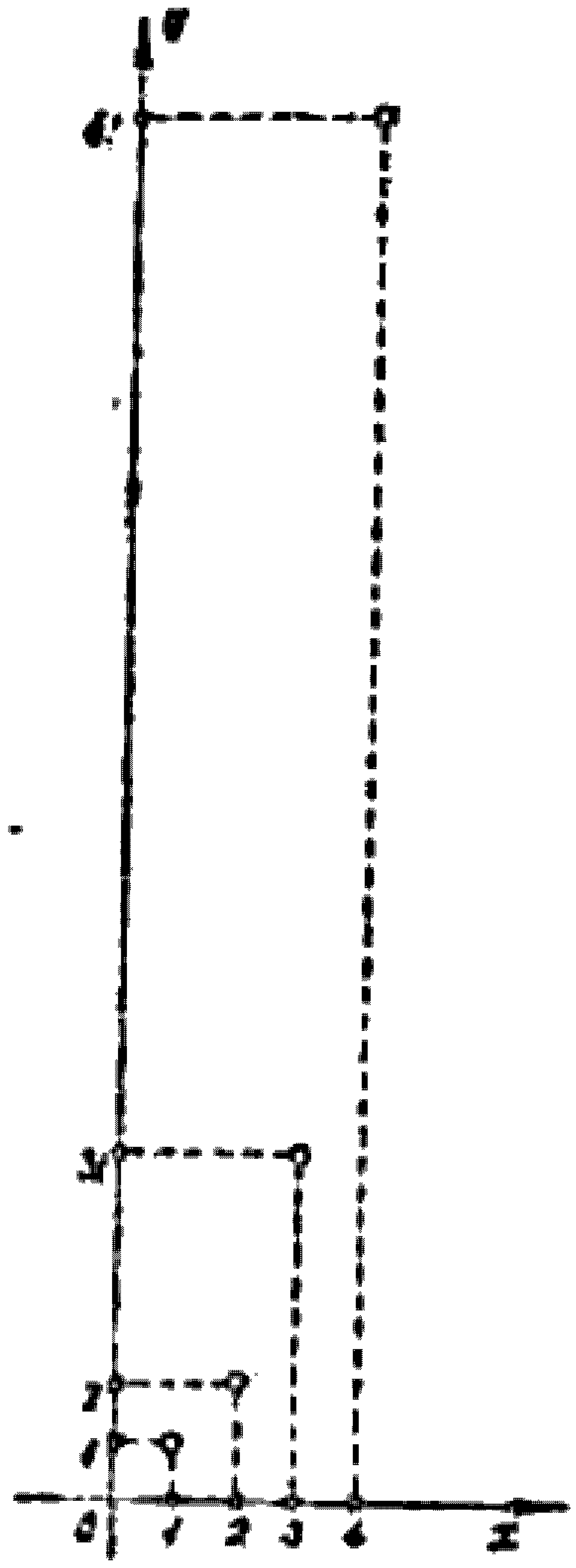
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x<0, \\ x^2 & \text{при } x \geqq 0 \end{cases}$$

е зададена аналитично върху безкрайната права $-\infty < x < +\infty$ (вж. фиг. 3.8).

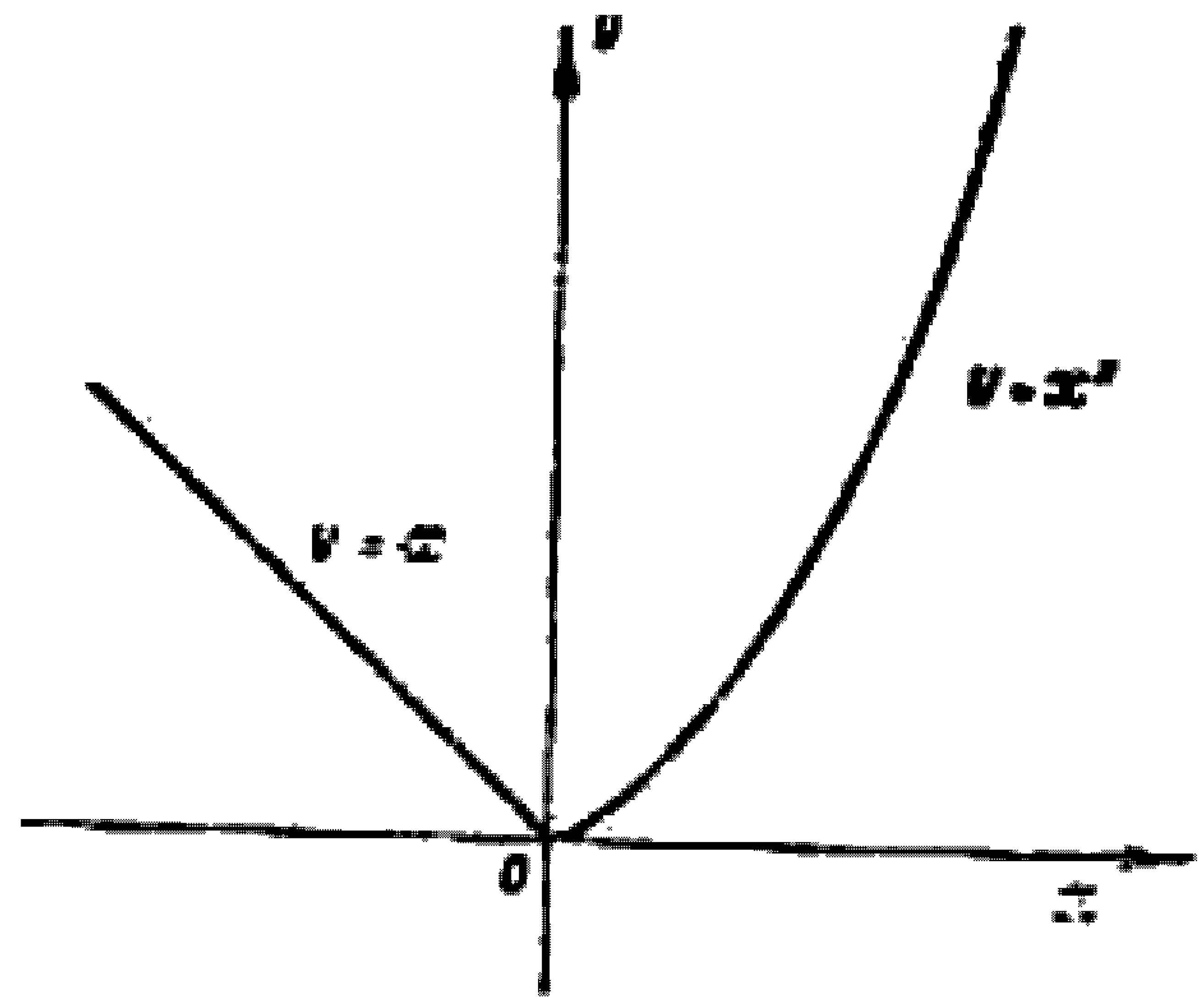
Възможно е стойностите на аргумента и съответните стойности на функцията да са дадени във вид на таблица.

Като пример за таблично зададена функция може да служи разписанието за движение на влак, което определя местоположението на влака в отделни моменти от времето. Чрез интерполация, при която функцията в интервала между две съседни таблични стойности се заменя с никаква функция от прост вид (например линейна или квадратна), може приближено да се определи местоположението на влака и във всеки междинен момент от времето.

В практиката на физическите измервания много разпространен е още един начин — графичният начин за задаване на функции, при



Фиг. 3.7



Фиг. 3.8

който съответствието между аргумент и функция се задава чрез графика.

3.4.2. Граница на функция по Хайне и по Коши. Нека функцията f е дефинирана върху някое безкрайно множество $\{x\}$ и нека a е точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$, която може и да не принадлежи на това множество.

Например нека множеството $\{x\}$ е интервалът (a, b); в този случай точката a не принадлежи на интервала, но всяка δ-околност на точката a съдържа точки от интервала.

Друг пример за множеството x е множеството на рационалните числа, принадлежащи на интевала $(a-\delta,\ a+\delta)$, без точката a.

Ще отбележим, че при всяко $\delta>0$ интервалът $(a-\delta,\ a+\delta)$, от който е изключена точката a, се нарича ***прободена δ-околност*** на точката a.

Определение 1 (граница на функция по Хайне*). *Числото b се нарича **граница** (или **гранична стойност**) на функцията f в точката a (или при $x\to a$), ако за всяка редица от стойности на*

* Хайнрих Едуард Хайне — немски математик (1821 — 1881).

аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, клоняща към a и състояща се от числа x_n, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ клони към числото b.

Определение 1′ (граница на функцията по Коши). *Числото b се нарича **граница** (или **гранична стойност**) на функцията f в точката a (или при $x \to a$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0 < |x-a| < \delta$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x)-b| < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Граничната стойност на функцията $y=f(x)$ в точката a се означава с:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

Преди да докажем еквивалентността на определения 1 и 1′, ще направим няколко забележки, които изясняват смисъла на тези определения.

Забележка 1. Ще подчертаем важността на изискването в определение 1 членовете x_n на редицата да бъдат различни от a и аналогичното изискване в определение 1′, което налага за аргумента x условието $0 < |x-a|$, т. е. x да бъде различно от a. Това се налага от обстоятелството, че функцията f може да не е дефинирана в точката a. Без това изискване е невъзможно да се използва граница на функция за определяне на производна на функция. Действително, производната $f'(a)$ на функцията f в точката a е границата при $x \to a$ на следната функция:

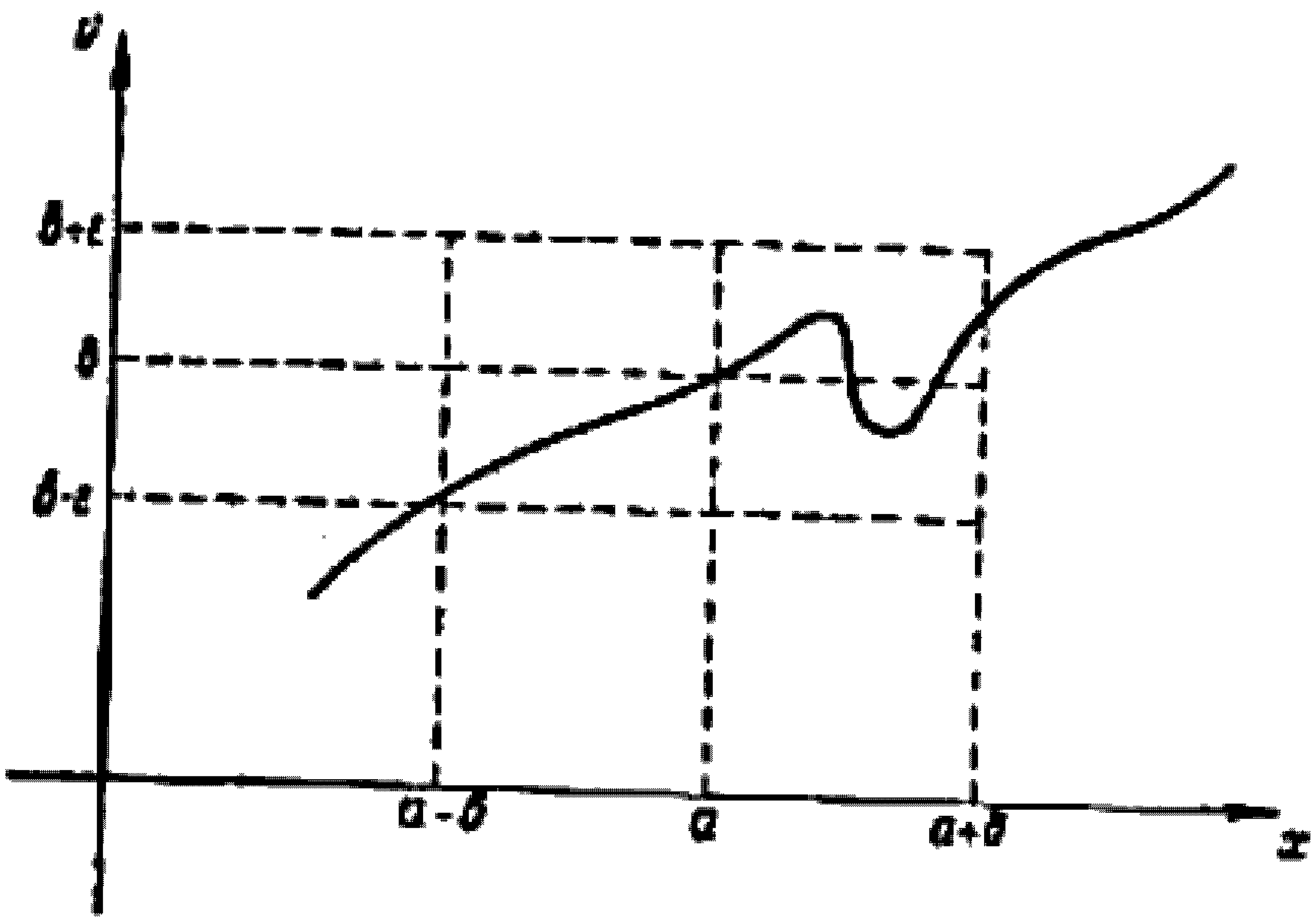
$$F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Очевидно е, че функцията F не е дефинирана в точката a.

Забележка 2. Множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, не е необходимо изцяло да покрива някоя прободена δ-околност на точката a. Това множество $\{x\}$ трябва да има само поне един елемент във всяка прободена околност на точката a. Пример за такова множество $\{x\}$ е множеството на всички членове на редицата $\{1/n\}$, лежащи във фиксирана δ-околност на точката $a=0$.

Забележка 3. Условието $0 < |x-a| < \delta$ в определение 1′ е еквивалентно на съотношенията $a-\delta < x < a+\delta$, т. е. x принадлежи на прободената δ-околност на точката a.

(3.58) е еквивалентно на неравенствата $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$, т. е. $f(x)$ принадлежи на ε-околност на b.



Фиг. 3.9

Забележка 4. Като използваме идеята за приближаване на функцията f в околност на точката a с отнапред зададена точност ε, можем да изкажем определението на граница на функция по Коши (определение 1') така: Числото b се нарича гранична стойност на функцията f в точката a, ако при всяка отнапред зададена точност $\varepsilon>0$ може да се намери такава δ-околност на точката a, че за всички стойности на аргумента x, различни от a и принадлежащи на тази δ-околност на точката a, числото b приближава стойността на функцията $f(x)$ с точност ε (фиг. 3.9).

Забележка 5. Функцията f може да има в точката a само една граница. Действително при определянето на граница на функция по Хайне това следва от единствеността на границата на редицата $\{f(x_n)\}$, а при определянето на граница на функция по Коши то следва от еквивалентността на двете определения, която сега ще докажем.

Теорема 3.19. *Определенията 1 и 1' за граница на функция по Хайне и по Коши са еквивалентни.*

Доказателство. 1. Нека числото b е граница на функцията f в точката a по Коши. Ще докажем, че числото b е граница на функцията f в точката a и по Хайне. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, всичките членове на която са различни от a. Трябва да се докаже, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към b.

Фиксираме произволно положително число ε и избираме положителното число δ, което според определението за граница на функция по Коши осигурява верността на неравенства (3.45) за всички стойности на x, за които $0<|x-a|<\delta$.

От сходимостта на редицата $\{x_n\}$ към a за посоченото положително число δ съществува такъв номер N, че при всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството $|x_n - a| < \delta$. Тъй като $x_n \neq a$ за всички номера n, то за всички $n \geqq N$ са изпълнени неравенствата $0 < |x_n - a| < \delta$ и съгласно определението за граница на функция по Коши за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Това означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ клони към b.

2. Нека сега числото b е граница на функцията f в точката a по Хайне. Ще докажем, че това число b е граница на функцията f в точката a и по Коши. Да допуснем противното. Тогава съществува положително число ε_0 такова, че за всяко положително число δ може да се намери поне една такава стойност на аргумента x, че $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - b| \geqq \varepsilon_0$.

По този начин, ако вземем редицата $\delta_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, можем да твърдим, че за всеки неин член $\delta_n = 1/n$ съществува поне една такава стойност на аргумента x_n, че

$$0 < |x_n - a| < 1/n, \text{ но } |f(x_n) - b| \geqq \varepsilon_0. \tag{3.46}$$

Лявото от неравенствата (3.46) означава, че редицата $\{x_n\}$ клони към a със стойности, различни от a. Но в такъв случай съгласно определението на граница по Хайне съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ трябва да клони към b, а това противоречи на дясното от неравенства (3.46), изпълнено за всички номера n. Полученото противоречие доказва теоремата.

Примери:

1. Функцията $f(x) = c = \text{const}$ има граница c във всяка точка a от безкрайната права. Наистина за всяка стойност на аргумента x разликата $f(x) - c$ е равна на нула и затова $|f(x) - c| < \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$ и за всички стойности на аргумента (в дадения случай, за всяко $\varepsilon > 0$ в определението за граница по Коши, за δ може да се избере всяко положително число).

2. Функцията $f(x) = x$ има граница a във всяка точка a на безкрайната права. Наистина за тази функция редицата от стойности на аргумента съвпада със съответната редица от стойности на функцията и ако редицата $\{x_n\}$ клони към a, то и редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към a.

3. Функцията на Дирихле D, стойностите на която в рационалните точки са единица, а в ирационалните точки — нула, няма граница в нито една точка на безкрайната права. Това следва от факта, че за клоняща към a редица от рационални стойности на аргумента границата на редицата от съответните стойности на функцията е единица, а за клоняща към a редица от ирационални стойности на аргумента границата на редицата от съответните стойности на функцията е равна на нула.

Ще въведем сега понятието едностранна (дясна или лява) граница на функция в дадена точка a. За целта най-напред ще уточним характера на множеството $\{x\}$, върху което е зададена функцията f. Ще поискаме от множеството $\{x\}$ за всяко $\delta>0$ да има поне един елемент, принадлежащ на интервала $(a, a+\delta)$ (интервала $(a-\delta, a)$).

Определение 2 (дясна (лява) граница на функция по Хайне). *Числото b се нарича **дясна (лява) граница** на функцията f в точката a, ако за всяка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, клоняща към a и състояща се от числа, по-големи от a (по-малки от a), съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към b.*

Определение 2′ (дясна (лява) граница на функция по Коши). Числото b се нарича ***дясна (лява) граница на функцията*** f в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$, е изпълнено неравенството (3.45).

Дясната (лявата) граница на функцията f в точката a се означава с:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \quad (\lim_{x\to a-0} f(x)=b),$$

или по-краткото

$$f(a+0)=b \quad (f(a-0)=b).$$

Напълно аналогично на теорема 3.19 се доказва еквивалентността на определенията 2 и 2′ — трябва само да се вземат стойности на аргумента x и членове на редицата $\{x_n\}$, по-големи от числото a (по малки от числото a).

За пример ще разгледаме функцията

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{ако } x>0,\\ 0, & \text{ако } x=0,\\ -1, & \text{ако } x<0.\end{cases}$$

Тази функция има в точката $a=0$ както дясна, така и лява граница, при което $\operatorname{sgn}(0+0)=+1$, $\operatorname{sgn}(0-0)=-1$. Наистина за всяка клоняща към $a=0$ редица $\{x_n\}$, състояща се от числа, по-големи от нула, съответната редица $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ клони към 1, за всяка клоняща към $a=0$ редица $\{x_n\}$ от числа, по малки от нула, съответната редица $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ клони към -1.

От тези разсъждения следва, че разглежданата функция, $f(x)=\operatorname{sgn} x$ няма граница в точката $a=0$.

И така функцията sgn няма граница в точката $a=0$, но има в тази точка дясна граница, равна на 1, и лява граница, равна на -1.

Фактът, че дясната и лявата граница на тази функция не са равни, не е случаен, тъй като е в сила следното твърдение: *Ако функцията f има в точката a дясна и лява граница и тези едностранни граници са равни на едно и също число b, то тази функция има граница в точката a, равна на b.* Очевидно е вярно и обратното твърдение: Ако функцията f има в точката a граница, равна на b, то дясната и лявата граница на f в точката a съществуват и са равни на b.

За доказателството на това твърдение можем да се възползваме от определенията 1′ и 2′, като отчетем, че ако неравенството (3.45) е изпълнено за стойности на аргумента x, удовлетворяващи условията $a<x<a+\delta$ и $a-\delta<x<a$, то неравенството (3.45) е изпълнено и за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0<|x-a|<\delta$.

Ще формулираме сега понятието граница на функция при $x\to\infty$. За въвеждането на това понятие трябва да поискаме множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, да има поне един елемент, лежащ вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ за всяко $\delta>0$.

Определение 3 (граница на функция при $x\to\infty$ по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to\infty$, ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към числото b.*

Определение 3′ (граница на функция при $x\to\infty$ по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to\infty$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x|>\delta$, е изпълнено неравенството* (3.45).

Границата на функцията f при $x\to\infty$ се означава с: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Напълно аналогично на теорема 3.19 се доказва еквивалентността на определенията 3 и 3′. Трябва само да се замени „сходяща редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$" с „безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$", а неравенството $0<|x-a|<\delta$ да се замени с неравенството $|x|>\delta$.

Пример за функция, която има граница при $x\to\infty$, е функцията $f(x)=1/x$ $(x\neq 0)$. Наистина за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(x_n)=1/x_n$ (по теорема 3.6) е безкрайно малка, т. е. има за граница числото $b=0$. Съгласно определение 3 $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = 0$.

Ще формулираме накрая понятието граница на функция, когато x клони към безкрайност с определен знак. За да въведем това понятие, ще искаме функцията f да е дефинирана в такова множество $\{x\}$, което за всяко $\delta>0$ има поне един елемент, лежащ надясно от δ (наляво от $-\delta$).

Определение 4 (граница на функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, всички членове на която са положителни (отрицателни), съответната редици от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към числото b.*

Определение 4′ (граница на функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $x>\delta$ $(x<-\delta)$, да е изпълнено неравенството* (3.45).

Въведените понятия се означават с: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b)$.

Еквивалентността на определенията 4 и 4′ се доказва по същата схема, както в теорема 3.19: трябва само да се замени „сходяща редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$" с „безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) стойности на аргумента $\{x_n\}$", а неравенството $0<|x-a|<\delta$ се заменя с неравенството $x>\delta$ $(x<-\delta)$.

Забележка 6. Понятието за граница на числова редица $\{x_n\}$ може да се разглежда като частен случай на граница на функция при $x\to+\infty$. Ако вземем за $\{x\}$ множеството от всички естествени числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, а за f функция, дефинирана върху това множество, която на всяка стойност на аргумента n съпоставя n-тия член на редицата $\{x_n\}$, то определение 4′ за граница на такава функция при $x\to+\infty$ съвпада с определението за граница на числовата редица $\{x_n\}$.

3.4.3. Критерий на Коши за съществуване на граница на функция. За определеност ще разгледаме подробно случая за граница на функция f в точката a, въведена с определенията 1 и 1′.

Определение 5. *Ще казваме, че функцията f* ***удовлетворява в точката a условието на Коши,*** *ако за всяко положително ε съществува такова положително число δ, че за всеки две стойности на аргумента x' и x'', удовлетворяващи условията*

$$0<|x'-a|<\delta,\quad 0<|x''-a|<\delta, \tag{3.47}$$

да е изпълнено неравенството

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{3.48}$$

Теорема 3.20 (критерий на Коши за съществуване на граница на функция в точка a). *За да има функцията f крайна гра-*

ница в точката а, е необходимо и достатъчно тя да удовлетворява в тази точка условието на Коши.

Доказателство. *1. Необходимост.* Нека да съществува крайна граница $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определение 1' за граница на функция по Коши за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такова положително число δ, че каквито и да са стойностите на аргумента x' и x'', удовлетворяващи условията $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, съответните стойности на функцията удовлетворяват неравенствата

$$|f(x')-b|<\varepsilon/2, \ |f(x'')-b|<\varepsilon/2. \tag{3.49}$$

От неравенствата (3.49) получаваме, че

$$\begin{aligned} |f(x')-f(x'')| &= |(f(x')-b)+(b-f(x''))| \\ &\le |f(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon, \end{aligned}$$

което означава, че функцията f удовлетворява в точката a условието на Коши.

2. Достатъчност. Нека функцията f удовлетворява в точката a условието на Коши. Трябва да се докаже, че f има граница в точката a. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a и състояща се от числа, различни от a. Според определение 1 за граница по Хайне е достатъчно да се докаже, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към някакво число b и че това число b е едно и също за всички клонящи към a редици $\{x_n\}$ от числа, различни от a.

Ще докажем най-напред, че за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към някаква граница. Фиксираме произволно положително число ε и избираме съгласно условието на Коши съответно положително число δ. От сходимостта на редицата $\{x_n\}$ към a и от условието $x_n\neq a$ следва, че за това $\delta>0$ съществува такъв номер N, че $0<|x_n-a|<\delta$ при $n\geq N$. Ако сега p е произволно естествено число ($p=1, 2, 3, \cdots$), то още повече $0<|x_{n+p}-a|<\delta$ при $n\geq N$.

По такъв начин при $n\geq N$ и за всяко естествено p са изпълнени неравенствата $0<|x_{n+p}-a|<\delta$, $0<|x_n-a|<\delta$. От тези неравенства и от условието на Коши следва, че при $n\geq N$ и за всяко естествено p имаме

$$|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon,$$

а това означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ е фундаментална. Съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици (вж. теорема 3.18) редицата $\{f(x_n)\}$ клони към някое число b.

Остава да се докаже, че за две произволни клонящи към a редици от стойности на аргумента $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ с елементи, различни от a, съответните редици от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ са сходящи и имат една и съща граница. Да предположим, че редиците $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ клонят съответно към границите b и b'. Да разгледаме новата редица от стойности на аргумента x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', $\dots$, x_n, x_n', $\dots$, която също клони към a и се състои от числа, различни от a. От доказаното по-горе следва, че редицата от стойности на функцията $f(x_1)$, $f(x_1')$, $f(x_2)$, $f(x_2')$, $\dots$, $f(x_n)$, $f(x_n')$, $\dots$ е сходяща и има за граница някакво число b''. Но тогава от твърдението, доказано в 3.3.1, следва, че всяка подредица на тази редица е също сходяща и има граница b''. Очевидно подредицата от нечетните членове $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\dots$, $f(x_n)$, $\dots$ и подредицата от четните членове $f(x_1')$, $f(x_2')$, $\dots$, $f(x_n')$, $\dots$ са сходящи и имат граница b''. Оттук следва, че $b=b'=b''$. □

Аналогично се формулира условието на Коши и се доказва критерият на Коши за случаите на дясна (лява) граница в точката a, граница при $x\to\infty$ и граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

При формулировката на условието на Коши е достатъчно в приведеното по-горе определение да се замени условие (3.47) за случая на дясна (лява) граница в точката a с условията $a<x'<a+\delta$, $a<x''<a+\delta$ $(a-\delta<x'<a$, $a-\delta<x''<a)$, за случая на граница при $x\to\infty$ — с условията $|x'|>\delta$, $|x''|>\delta$, и накрая за случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ — с условията $x'>\delta$, $x''>\delta$ $(x'<-\delta$, $x''<-\delta)$.

Съответният критерий на Коши се доказва по схемата на доказателството на теорема 3.20: трябва само под „редици от стойности на аргумента $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$" в случай на дясна (лява) граница в точката a да се разбира „редица, клоняща към a и състояща се от числа, по-големи от a (по-малки от a)", в случая на граница при $x\to\infty$ — „безкрайно голяма редица" и накрая в случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ — „безкрайно големи редици от положителни (отрицателни) числа".

3.4.4. Аритметични действия с функции, имащи граница. В сила е следната основна теорема:

Основна теорема 3.21. *Нека двете функции f и g са дефинирани върху едно и също множество $\{x\}$ и имат в точката a граници, съответно равни на b и c. Тогава функциите $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и f/g имат в точката a граници, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c (в случая на частно трябва да предполагаме, че c е различно от нула).*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, различни от a. Съгласно определение 1 на граница по Хайне съответните редици от стойности на функциите $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ са сходящи и клонят съответно към b и c. Но тогава съгласно теореми 3.9—3.12 редиците $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)-g(x_n)\}$, $\{f(x_n).g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ клонят съответно към границите $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c. Поради това, че редицата $\{x_n\}$ е произволна, от определение 1 за граница по Хайне следва, че функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g имат в точката a граници, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c. □

Доказателствата на съответните теореми за случаите на дясна (лява) граница в точката a, граница при $x\to\infty$ и граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ се провеждат по същата схема. Разликата е само в това, че редицата $\{x_n\}$ в случая на дясна (лява) граница клони към точката a със стойности, по-големи от a (по-малки от a), в случая на граница при $x\to\infty$ тя е безкрайно голяма редица и накрая в случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ тя е безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) числа.

Примери:

1. В 3.4.2 се убедихме, че за всяка точка a от безкрайната права $\lim\limits_{x\to a} x=a$. Съгласно теорема 3.21 можем да твърдим, че

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \,.\, \lim_{x\to a} x = a\,.\,a = a^2$$

и изобщо за всяко естествено число n

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

2. Нека сега $P_n(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$, където $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n\neq 0$ са дадени константи. *Такава функция P_n се нарича* ***полином от степен*** n. Съгласно теорема 3.21

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = \lim_{x\to a}(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$$
$$=b_0+b_1a+b_2a^2+\cdots+b_na^n=P_n(a)$$

за всяка точка a от безкрайната права.

И така полиномът P_n има граница във всяка точка a от безкрайната права и тази граница е равна на стойността $P_n(a)$ на полинома в точката a.

3. Нека P_n и Q_m са два произволни полинома от степени съответно n и m. *Частното $R=P_n/Q_m$ се нарича* ***рационална дроб.*** От теорема 3.21 за случая на частно имаме

$$\lim_{x\to a} R(x)=\lim_{x\to a}(P_n(x)/Q_m(x))=\lim_{x\to a} P_n(x)/\lim_{x\to a} Q_m(x)$$
$$=P_n(a)/Q_m(a) = R(a)$$

във всяка точка a, която не е корен на полинома Q_m. Следователно рационалната дроб има граница във всяка точка a от безкрайната права, която не е корен на знаменателя ѝ, и тази граница е равна на стойността на рационалната дроб в точката a.

3.4.5. Безкрайно малки и безкрайно големи функции. За определеност ще разглеждаме граница на функция в точката a.

Определение 6. *Функцията α се нарича* ***безкрайно малка*** *в точката a, ако границата ѝ в тази точка е равна на нула.*

Като пример за функция, която е безкрайно малка в точката a, може да служи функцията $\alpha(x)=(x-a)^n$, където n е произволно естествено число.

Наистина в края на предишната точка установихме, че полиномът $(x-a)^n$ има граница в точката a и тази граница е равна на стойността му в точката a, т. е. равна е на нула.

Ще отбележим, че ако функцията f има граница в точката a, равна на числото b, то функцията $\alpha(x)=f(x)-b$ е безкрайно малка в точката a. Това следва от факта, че границите на всяка от функциите f и $g=b$ в точката a са равни на числото b, и от теорема 3.21, приложена за разликата $f-g$.

Формулираното твърдение ни води до следното специално представяне на функцията f, чиято граница в точката a е равна на числото b:

$$f(x)=b+\alpha(x), \tag{3.50}$$

където α е някоя безкрайно малка в точката a функция. Представянето (3.50) е много удобно в различните приложения на теорията на границите.

Ще въведем сега понятието функция, безкрайно голяма отдясно (отляво) в дадена точка a.

Функцията A се нарича ***безкрайно голяма отдясно (отляво) на точката*** *a, ако за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, всички членове на която са по-големи от a (по-малки от a), съответната редица от стойности на функцията $\{A(x_n)\}$ е безкрайно голяма редица, чиито членове от някой номер нататък са или само положителни, или само отрицателни.*

Безкрайно големите отдясно (отляво) на точката a функции се означават с:

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=+\infty \quad (\lim_{x\to a-0} A(x)=+\infty)$$

или

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=-\infty \quad (\lim_{x\to a-0} A(x)=-\infty).$$

Употребява се и по-лаконичната символика:

$$A(a+0)=+\infty \qquad (A(a-0)=+\infty)$$

или

$$A(a+0)=-\infty \qquad (A(a-0)=-\infty).$$

Ще се спрем на методиката за сравняване на две безкрайно малки функции в дадена точка a. Нека α и β са две безкрайно малки в точката a функции, дефинирани за едни и същи стойности на аргумента.

1°. Казва се, че α е ***безкрайно малка от по-висок ред*** от β в точката a, ако

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)/\beta(x) = 0. \tag{3.51}$$

2°. Казва се, че α и β са ***безкрайно малки от еднакъв ред*** в точката a, ако границата в лявата страна на (3.51) е равна на число, различно от нула.

3°. Казва се, че α и β са ***еквивалентно безкрайно малки*** в точката a, ако границата в лявата страна на (3.51) е равна на единица.

Това, че α е безкрайно малка от по-висок ред от β в дадена точка a, се записва така:

$$\alpha = o(\beta)$$

(чете се „a равно на o малко от β").

И така символът $o(\beta)$ означава безкрайно малка функция от по-висок ред от безкрайно малката функция β в дадена точка a. От това определение на символа „o малко" получаваме следните негови свойства:

1) $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$, $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

2) ако $\gamma=o(\beta)$, то $o(\beta)\pm o(\gamma)=o(\beta)$;

3) ако α и β са две безкрайно малки в дадена точка функции, то $\alpha.\beta=o(\alpha)$ и $\alpha.\beta=o(\beta)$.

Аналогично се сравняват две безкрайно големи отдясно (отляво) на дадена точка a функции.

Нека A и B са дефинирани за едни и същи стойности на аргумента и за определеност $\lim\limits_{x\to a+0} A(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} B(x)=+\infty$.

1°. Казва се, че A *има отдясно на точката a* ***по-висок ред на нарастване*** *от B, ако функцията A/B е безкрайно голяма отдясно на точката a.*

2°. *Казва се, че A и B имат отдясно на точката a* ***еднакъв ред на нарастване***, *ако границата на функцията A/B при $x\to a+0$ е число, различно от нула.*

Примери:

1. Функциите $\alpha(x)=x^3-x^5$ и $\beta(x)=5x^3+x^4$ са безкрайно малки от един и същ ред в точката $x=0$, тъй като

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^5}{5x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{5+x}=\frac{1}{5}.$$

2. Функциите $\alpha(x)=(x-2)^2.(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ са еквивалентно безкрайно малки в точката $x=2$, понеже

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

3. Функциите $A(x)=(2+x)/x$ и $B(x)=1/x$ са безкрайно големи от еднакъв ред както отдясно, така и отляво на точката $x=0$, тъй като

$$\lim_{x\to 0}A(x)/B(x)=\lim_{x\to 0}(2+x)=2.$$

Аналогично се определят и сравняват функции, безкрайно малки или безкрайно големи при $x\to\infty$, а също и при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

3.5. По-общо определение за граница на функция по база

Като анализираме определенията за различните видове граница на функция f по Коши, забелязваме че във всички тях се изисква за всяко $\varepsilon>0$ всички стойности на тази функция, отговарящи на стойности на аргумента x от някое множество C_δ, да удовлетворяват неравенството (3.45), т. е. да принадлежат на ε-околност на точката b.

При това множеството C_δ, определено за всяко $\delta>0$, има различен вид при определянето на различните видове граница. При определяне на граница в точка a множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a; при определяне на дясна (лява) граница в точка a множеството C_δ е интервалът $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$); при определяне на граница при $x\to\infty$ множеството C_δ е външната част на сегмента $[-\delta, \delta]$ и накрая при определяне на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ множеството C_δ е отворената полуправа $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, -\delta)$).

Ако функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, то във всички определения на граница по Коши се иска неравенството (3.45) да бъде изпълнено за тези елементи от множеството $\{x\}$, които принадлежат и на съответното множество C_δ. Ще означим с B_δ подмножеството от онези елементи на $\{x\}$, които принадлежат и на C_δ, т. е. полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$.

Анализът на условията, при които се формулират определенията 1′—4′ за граница на функция по Коши, ни води до извода, че множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, съдържа винаги поне един елемент, т. е. множеството B_δ никога не е празно.

Лесно е да се убедим също така, че за всичките видове граници сечението на две произволни множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ е също множество от тази съвкупност.

Така например сечението на две множества B_δ и $B_{\delta'}$, първото от които се състои от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ-околност на точката a, а второто — от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ'-околност на точката a, е съвкупността от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ''-околност на точката a, където δ'' е по-малкото от двете положителни числа δ и δ', т. е. е множеството $B_{\delta''}$ от съвкупността $\{B_\delta\}$.

В по-общи случаи, които се срещат при изучаването на функции на няколко променливи, сечението на две произволни множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ може да не е елемент на тази съвкупност, но обезателно съдържа елемент на тази съвкупност.

Приведените разглеждания ни водят естествено до понятието база на множеството $\{x\}$.

Определение 1. *Ще казваме, че безкрайната съвкупност $B=\{B_\delta\}$ от подмножества B_δ на множеството $\{x\}$ образува* ***база*** (*или* ***базис на филтър***) *в множеството $\{x\}$, ако елементите на тази съвкупност удовлетворяват двете изисквания*: 1) *всеки елемент B_δ е непразно подмножество на множеството $\{x\}$*; 2) *сечението на всеки два елемента на съвкупността $\{B_\delta\}$ съдържа елемент на тази съвкупност.*

Примери:

1. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент във всяка прободена δ-околност на точката a. Тази прободена δ-околност на точката a означаваме с C_δ и полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Очевидно съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от множества B_δ при всички $\delta>0$ образува база на множеството $\{x\}$, тъй като всяко множество B_δ при всяко $\delta>0$ не е празно и сечението на две множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ е също множество от тази съвкупност.

Разгледаната база $\{B_\delta\}$ се означава със символа $x\to a$.

2. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент, принадлежащ на интервала $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$) при всяко $\delta>0$. Означаваме този интервал със символа C_δ и полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Тривиално се проверява, че съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от множествата B_δ, отговарящи на всички $\delta>0$, образуват база на множеството $\{x\}$.

Разгледаната база е прието да се означава със символа $x\to a+0$ (съответно $x\to a-0$).

3. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ за всяко $\delta>0$. Полагаме $C_\delta=(-\infty, +\infty)\setminus[-\delta, \delta]$, $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ е база на множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $x \to \infty$.

4. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент от полуправата $(+\delta, +\infty)$ (съответно от $(-\infty, -\delta)$) при всяко $\delta>0$. Означаваме тази полуправа с C_δ и полагаме $B_\delta = \{x\} \cap C_\delta$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ образува база в множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $x \to +\infty$ (съответно $x \to -\infty$).

5. Нека $\{x\}$ е множеството от всички естествени числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Полагаме $B_\delta = \{x\} \cap (+\delta, +\infty)$ за всяко $\delta>0$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ е база на множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $n \to \infty$.

Ще формулираме сега определението за граница на функция f относно база B на дефиниционната ѝ област, което съдържа всички разгледани по-горе определения за граница на функция, а също така и определението за граница на числова редица.

Ще предполагаме, че функцията f е дефинирана върху множеството $\{x\}$ и съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от подмножества B_δ на множеството $\{x\}$ образува база в множеството $\{x\}$.

Множеството от всички стойности, които приема функцията f, когато аргументът ѝ x пробягва множеството B_δ, ще наричаме *образ* на множеството B_δ и ще означаваме със символа $f(B_\delta)$.

Определение 2. *Числото b се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$* ***по базата*** *B на дефиниционната ѝ област, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв елемент B_δ от базата B, образът на който $f(B_\delta)$ принадлежи на ε-околността на точката b, т. е. принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.*

Границата на функцията f по базата B на дефиниционната ѝ област ще означаваме с $\lim\limits_{B} f(x) = b$. Това по-общо определение за граница по база съдържа в себе си всички частни случаи за граници, изучени по-горе, отговарящи на бази

$$x \to a,\ x \to a+0,\ x \to a-0,\ x \to \infty,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty \text{ и } n \to \infty.$$

Лесно се проверява също така, че общото определение на граница по база притежава основните свойства на граница, отговарящи на най-простата база $B=(x \to a)$.

Ще докажем критерия на Коши за съществуване на граница на функция по база.

Теорема 3.22 *За съществуване на граница на функцията f по база $B=\{B_\delta\}$ на дефиниционната ѝ област е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува елемент B_δ от базата B, чийто образ $f(B_\delta)$ да се съдържа в някой интервал с дължина 2ε.*

Доказателство. 1. *Необходимостта* е очевидна; ако съществува граница b на функцията f по база B, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент от тази база B_δ, чийто образ $f(B_\delta)$ принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ с дължина 2ε.

2. *Достатъчност.* Нека за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент B_δ на базата B, чийто образ $f(B_\delta)$ принадлежи на интервал с дължина 2ε. Да разгледаме безкрайно малката редица от положителни числа $\varepsilon_n=1/n$, $n=1, 2, 3, \dots$ За всяко ε_n съществува елемент от базата B_{δ_n}, чийто образ $f(B_{\delta_n})$ принадлежи на интервал с дължина $2\varepsilon_n$.

По определението на база сечението на елементите B_{δ_1} и B_{δ_2} съдържа обязателно някой елемент на базата, който ще означим с $\hat{B}_{\delta_2}$. Образът на този елемент $f(\hat{B}_{\delta_2})$ се съдържа както в някакъв интервал I_1 с дължина $2\varepsilon_1$, така и в някакъв интервал I_2' с дължина $2\varepsilon_2$. Сечението на интервалите I_1 и I_2' е интервал I_2 с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_2$, съдържащ се в интервала I_1. По-нататък съгласно определението на база сечението на елементите $\hat{B}_{\delta_2}$ и B_{δ_3} обязателно съдържа някой елемент на базата, който ще означим със символа $\hat{B}_{\delta_3}$. Образът на този елемент $f(\hat{B}_{\delta_3})$ принадлежи както на интервала I_2 с дължина $2\varepsilon_2$, така и на някакъв интервал I_3' с дължина $2\varepsilon_3$. Сечението на интервалите I_2 и I_3' е интервал I_3 с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_3$, съдържащ се в интервала I_2.

Продължавайки тези разсъждения, ще построим редица от такива елементи на базата $\hat{B}_{\delta_2}, \hat{B}_{\delta_3}, \dots, \hat{B}_{\delta_n}, \dots$, че образът $f(\hat{B}_{\delta_n})$ на всеки елемент $\hat{B}_{\delta_n}$ се съдържа в някакъв интервал I_n с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_n$, при което в редицата от интервали $I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ всеки следващ интервал се съдържа в предидущия. Да означим със символа $\bar{I}_n$ сегмента, който се получава, като към интервала I_n прибавим неговите краища. Тъй като редицата $\bar{I}_2, \bar{I}_3, \dots, \bar{I}_n, \dots$ е свиваща се система от сегменти (вж. 3.2.2), то съгласно следствието от теорема 3.15 съществува, и то единствена точка b, принадлежаща на всички сегменти.

Остава да се докаже, че b е граница на функцията f по базата B, т. е. да се убедим в това, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент на базата B, образът на който се съдържа в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Тъй като системата от сегменти $\{\bar{I}_n\}$ е свиваща се и b е обща точка на всички сегменти, можем да твърдим, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува сегмент $\bar{I}_n$ с достатъчно голям номер n, който се съдържа в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Това означава, че за този номер n образът $f(\hat{B}_{\delta_n})$ на елемента на базата $\hat{B}_{\delta_n}$ принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. □

От доказаната теорема следват както критерият на Коши за сходимост на числова редица, така и критерият на Коши за съществуване на всички разгледани по-горе видове граница на функция.

Като възможни обобщения на изложената теория могат да се разглеждат функции, дефинирани върху подмножества на произволно метрично пространство (вж. глава 12).

Забележка. Базите B и D на множеството $\{x\}$ се наричат *еквивалентни*, ако за всеки елемент B_{δ_1} на базата B съществува такъв елемент D_{δ_2} на базата D, че $D_{\delta_2} \subset B_{\delta_1}$, и за всеки елемент D_{δ_1} на базата D съществува такъв елемент B_{δ_2} на базата B, че $B_{\delta_2} \subset D_{\delta_1}$.

Съвкупността на всички еквивалентни бази B на множеството $\{x\}$ се нарича ***филтър на множеството*** $\{x\}$.

Не е трудно да се убедим, че твърденията за граници на функции и редици по еквивалентни бази B и D са едновременно верни.

4. Непрекъснатост на функция

В тази глава ще бъде разгледано важното понятие непрекъснатост на функция. При това, както и в глава 3, ще разглеждаме функция f на една реална променлива. В глава 12 понятието непрекъснатост ще бъде въведено в общия случай на изображение на едно метрично пространство в друго.

4.1. Понятие за непрекъснатост на функция

4.1.1. Определение за непрекъснатост на функция. Нека точката a принадлежи на дефиниционната област на функцията f и всяка δ-околност на точката a съдържа точки от дефиниционната област на f, различни от a.

Формално определение за непрекъснатост в точката a. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a, ако в тази точка тя има граница и тази граница е равна на стойността $f(a)$ на функцията f в точката a.*

Като използваме определенията за граница на функцията f в точката a по Хайне и по Коши, ще стигнем до определение за непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне и по Коши.

Определение 1 (непрекъснатост в точка a по Хайне). *Функцията $f(x)$ се нарича* ***непрекъсната*** *в точката a, ако за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, съответната редица $\{f(x_n)\}$ от стойности на функцията е сходяща и има граница $f(a)$.*

Забележка 1. В сравнение с определение 1 за граница на функция по Хайне (вж. 3.4.2) в определението за непрекъснатост по Хайне няма изискване всички членове на редицата $\{x_n\}$ да бъдат различни от a. Това е така, защото прибавянето на произволен брой нови членове, равни на $f(a)$, към членовете на редицата

$\{f(x_n)\}$, клоняща към $f(a)$, не изменя сходимостта на тази редица и границата ѝ е $f(a)$.

Определение 1′ (непрекъснатост в точка a по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната*** *в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x-a|<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.*

Забележка 2. В сравнение с определение 1′ за граница на функция по Коши (вж. 3.4.2) в определението за непрекъснатост по Коши не се иска всички стойности на аргумента x да удовлетворяват неравенството $0<|x-a|$, т. е. да са различни от x. Това е така, защото за стойности $x=a$ разликата $f(x)-f(a)$ е равна на нула и удовлетворява неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при всяко $\varepsilon>0$.

Условието за непрекъснатост на функцията f в точката a се записва:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Тъй като $a=\lim\limits_{x\to a} x$, то това равенство се записва и във формата

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x).$$

Следователно за непрекъсната в точката a функция символът „$\lim\limits_{x\to a}$" за граничен преход и символът „f" за характеристиката на функцията могат да сменят местата си.

От теоремата за еквивалентност на определенията за граница о Хайне и по Коши (вж. теорема 3.19) следва, че определенията на функция по Хайне и по Коши (определения и 1′) са еквивалентни.

Ще формулираме сега определение за едностранна непрекъсна функция f в точката a, т. е. непрекъснатост на f в a или само отдясно, или само отляво.

От множеството $\{x\}$, което е дефиниционна област на функ- f, ще трябва да поискаме този път да включва точката a и всяко $\delta>0$ да има поне един елемент от интервала $(a, a+\delta)$ от $(a-\delta, a))$.

Формално определение за непрекъснатост в точка a отдясно тляво). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната*** *в* ***точ-а отдясно (отляво)****, ако дясната (лявата) граница на в точката a съществува и е равна на стойността $f(a)$ функцията $f(x)$ в точката a.*

Като използваме определенията за дясна (лява) граница на $f(x)$ в точка a по Хайне и по Коши, идваме до определ- за непрекъснатост на функция f в точка a отдясно (отля- по Хайне и по Коши.

Определение 2 (непрекъснатост на функция в точка a отдясно (отляво) по Хайне). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката a отдясно (отляво),*** *ако за всяка клоняща към a редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, членовете на която удовлетворяват условието $x_n>a$ $(x_n<a)$, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към $f(a)$.*

Ще отбележим, че в това определение условието $x_n>a$ $(x_n<a)$ може да се замени с по-слабото условие $x_n\geq a$ $(x_n\leq a)$, тъй като, ако добавим към редицата $\{f(x_n)\}$, клоняща към $f(a)$, произволен брой нови членове, равни на $f(a)$, ще получим редица, която също клони към $f(a)$.

Определение 2′ (непрекъснатост на функция в точка a отдясно (отляво) по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката a отдясно (отляво),*** *ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, които удовлетворяват условието $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Ще отбележим, че и в това определение условието $a<x<a+$ $(a-\delta<x<a)$ може да се замени с по-слабото условие $a\leq x<a+$ $(a-\delta<x\leq a)$.

Еквивалентността на определения 2 и 2′ следва от еквивалентността на съответните определения за граница на функция.

Непрекъснатостта на функцията f в точка a отдясно (отляво) се записва така:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \quad \text{или} \quad f(a+0)=f(a)$$

$$\Big[\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a) \quad \text{или} \quad f(a-0)=f(a)\Big].$$

Забележка 3. Ако функцията f е непрекъсната в точката a отляво и отдясно, то тя е непрекъсната в тази точка. Действително съгласно твърдението, доказано в 3.4.2, в този случай съществува граница на функцията в точката a и тя е равна на $f(a)$. Точки, в които функцията не притежава свойството непрекъснатост, се наричат ***точки на прекъсване*** за тази функция.

Примери:

1. Степенната функция $f(x)=x^n$, където n е естествено число, е непрекъсната във всяка точка a на безкрайната права $-\infty<x<+\infty$.

Наистина в глава 3 беше установено, че границата на тази функция във всяка точка a от безкрайната права е равна на a^n.

2. Полиномите и рационалните дроби имат граница във всяка точка от дефиниционната си област, равна на стойността им в тази точка (вж. 3.4.3). Затова те са непрекъснати функции във всяка точка от дефиниционната си област.

3. Функцията sgn е прекъсната в точката $x=0$ и непрекъсната във всички останали точки от числовата ос. Наистина в точката $x=0$, както беше показано в глава 3, съществуват дясна граница (равна на $+1$) и лява граница (равна на -1) на функцията sgn. Тъй като тези едностранни граници не са равни помежду си, функцията $\operatorname{sgn} x$ е прекъсната в точката нула. В останалите точки от числовата ос тя притежава граница, равна съответно на стойността ѝ в тези точки, и следователно е непрекъсната.

4. Функцията на Дирихле D (вж. 3.4.1) е прекъсната във всяка точка от числовата ос, понеже няма граница в нито една точка.

Ще отбележим обаче, че функцията $f(x)=xD(x)$, където D е функцията на Дирихле, е непрекъсната в точката $x=0$ и прекъсната във всички останали точки от безкрайната права. Прекъснатостта на f във всяка точка $x_0 \neq 0$ се установява също както за функцията D (за всяка сходяща към x_0 редица $\{x_n\}$ от рационални точки съответната редица $\{f(x_n)\}$ клони към $x_0 \neq 0$, а за всяка сходяща към x_0 редица $\{x_n'\}$ от ирационални точки съответната редица $\{f(x_n')\}$ клони към нула).

Ще се убедим, че функцията $f(x)=xD(x)$ е непрекъсната в точката $x=0$. За всяка безкрайно малка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ редицата $\{D(x_n)\}$ е ограничена и затова (според теорема 3 от глава 3) редицата $f(x_n)=x_nD(x_n)$ е безкрайно малка, т. е. има за граница числото нула, равно на $f(0)$.

Ще казваме, че дадена функция е ***непрекъсната в множеството*** $\{x\}$, *ако тя е непрекъсната във всяка точка на това множество.*

Например функция, непрекъсната във всяка точка на даден интервал, се нарича непрекъсната в този интервал.

Специално ще *наричаме функцията f* ***непрекъсната в сегмента*** $[a, b]$, *ако е непрекъсната във всяка вътрешна точка на този сегмент, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b.*

По-рано, когато дадохме определение за непрекъснатост на функция f в точката a, предположихме, че във всяка δ-околност на точката a се съдържат точки от дефиниционната област на функцията, различни от a. Формално можехме да минем без това предположение, т. е. да включим и случая, когато в някоя δ-околност на точката a не се съдържат точки от дефиниционната област на функцията, различни от a. В този случай можем да приемем, че f е непрекъсната в точката a. Разбира се, понятието непрекъснатост на функция е съдържателно, когато a е точка на сгъстяване за дефиниционната област на функцията.

Определението за непрекъснатост на функция може да се даде и в следната еквивалентна форма.

Определение 1″. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a, ако за всяка околност на точката $f(a)$ съществува околност на точката a, образът на която при изображението f се съдържа в избраната околност на точката $f(a)$.*

В глава 12 ще бъде показано (даже и в по-общи случаи), че последното определение за непрекъснатост е еквивалентно на предишните. За упражнение читателят може сам да провери това.

Като използваме въведеното в 3.5 общо определение за граница на функция по база, можем да обединим понятията непрекъснатост в точката a, непрекъснатост в точката a отдясно и непрекъснатост в точката a отляво.

Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, което съдържа точката a и има база B от вида $x \to a$, $x \to a+0$ или $x \to a-0$.

Функцията f се нарича непрекъсната в точката a, ако границата й по базата B на дефиниционната й област съществува и е равна на $f(a)$.

4.1.2. Аритметични операции с непрекъснати функции. В сила е следната теорема:

Основна теорема 4.1. *Нека функциите f и g имат една и съща дефиниционна област и са непрекъснати в точката a. Тогава и функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g са непрекъснати в точката a (в случая на частно е нужно допълнителното изискване $g(a)\neq 0$).*

Доказателство. Тъй като функциите f и g са непрекъснати в точката a, границите им в тази точка са съответно $f(a)$ и $g(a)$ и съгласно теорема 3.21 границите на функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g съществуват и са съответно равни на $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a).g(a)$ и $f(a)/g(a)$. Но тъй като тези са стойностите на тези функции в точката a, то по определение те са непрекъснати в тази точка. □

4.1.3. Сложна функция. Непрекъснатост. Функция, получена в резултат от суперпозиция на две или повече функции, ще наричаме *сложна* (*съставна*) *функция*.

Ще определим понятието суперпозиция на две функции, тъй като обобщението за суперпозиция на повече функции е очевидно.

Нека функцията $x=\varphi(t)$ е дефинирана в множеството $\{t\}$ и нека $\{x\}$ е множеството от стойностите ѝ, а функцията $y=f(x)$ е дефинирана в множеството $\{x\}$. Тогава функцията $y=f(\varphi(t))=F(t)$ е суперпозиция на функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$, т. е. $f(\varphi(t))$ е сложна (съставна) функция.

В сила е следната теорема.

Теорема 4.2. *Нека функцията φ е непрекъсната в точката a, а функцията f е непрекъсната в точката $b=\varphi(a)$. Тогава сложната функция $F(t)=f(\varphi(t))$ е непрекъсната в точката a.*

Доказателство. Нека $\{t_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента на сложната функция. Тъй като функцията $x=\varphi(t)$ е непрекъсната в точката a, то (според определение 1 за непрекъснатост по Хайне) съответната редица от стойности на функцията $x_n=\varphi(t_n)$ е сходяща с граница $b=\varphi(a)$. Но функцията f е непрекъсната в точката $b=\varphi(a)$, а редицата $\{x_n\}$ от стойности на аргумента ѝ клони към $b=\varphi(a)$. Следователно съответната редица от стойностите на функцията

$$f(x_n)=f(\varphi(t_n))=F(t_n)$$

(според определение 1 за непрекъснатост по Хайне) клони към $f(b)=f(\varphi(a))=F(a)$.

И така за всяка редица $\{t_n\}$, клоняща към a, от стойности на аргумента на сложната функция съответната редица от стойностите на функцията $\{f(\varphi(t_n))\}=\{F(t_n)\}$ е сходяща и има за граница числото $f(\varphi(a))=F(a)$. Съгласно определение 1 за непрекъснатост по Хайне сложната функция е непрекъсната в точката a. □

4.2. Свойства на монотонните функции

4.2.1. Монотонни функции. Ще дадем следното определение:

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***ненамаляваща (нерастяща) в множеството*** *$\{x\}$, ако за произволни точки x_1 и x_2 от това множество, такива, че $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$.*

Ненамаляващите и нерастящите функции се наричат *монотонни функции*.

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***растяща (намаляваща)*** *в множеството $\{x\}$, ако за произволни точки x_1 и x_2 от това множество, такива, че $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.*

Растящите и намаляващите функции се наричат *строго монотонни*.

Примери:

1. Функцията $f(x)=x$ е строго монотонна, по-точно растяща върху цялата числова ос.

2. Функцията $f(x)=x^2$ е растяща върху полуоста $x\geq 0$ и намаляваща за $x\leq 0$.

3. Функцията $f(x)=\operatorname{sgn} x$ е ненамаляваща върху цялата числова ос.

4. Функцията $f(x)=1/x$ е намаляваща при $x<0$ и $x>0$.

4.2.2. Понятието обратна функция. *Нека функцията f е дефинирана в сегмента $[a, b]$ и нека множеството $\{y\}$ от стойностите на тази функция е сегментът $[\alpha, \beta]$. Нека освен това на всяко y от сегмента $[\alpha, \beta]$ съответствува само една стойност на x от сегмента $[a, b]$, за която $f(x)=y$. При тези условия в сегмента $[\alpha, \beta]$ може да се дефинира функция, която на всяко y от $[\alpha, \beta]$ съпоставя тази стойност на x от $[a, b]$, за която $f(x)=y$. Тази функция се означава със символа f^{-1} и се нарича* ***обратна функция*** *на функцията f.*

Нека $\{x\}$ и $\{y\}$ са произволни множества и f е взаимно еднозначно изображение на множеството $\{x\}$ в множеството $\{y\}$ (биективно изображение, вж. 2.7). Тогава може да се определи обратното на f изображение f^{-1} на множеството $\{y\}$ в множеството $\{x\}$. В този случай уравнението $y=f(x)$ има, и то единствено решение относно x, т. е. за даден елемент y еднозначно се определи x и f^{-1}.

Ще отбележим, че ако $x=f^{-1}$ е обратната функция на f, то очевидно функцията f е обратна на функцията f^{-1}. Затова функциите f и f^{-1} се наричат *взаимно обратни*. Очевидно е, че

$$f(f^{-1}(y))=y, \quad f^{-1}(f(x))=x.$$

Примери:

1. Нека функцията $y=2x$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$. Множеството от стойности на тази функция е сегментът $[2a, 2b]$. Функцията $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y$, дефинирана в сегмента $[2a, 2b]$, ще бъде обратна на дадената функция $y=2x$.

2. Да разгледаме функцията $y=x^2$ в сегмента $[0, 2]$. Множеството от стойности на тази функция е сегментът $[0, 4]$. В този сегмент е дефинирана функцията $x=\sqrt{y}$, обратна на дадената функция.

3. Да разгледаме в сегмента $[0, 1]$ функцията

$$y=\begin{cases} x, & \text{ако } x \text{ е рационално число,} \\ 1-x, & \text{ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

Не е трудно да се убедим, че дефинираната в сегмента функция

$$x=\begin{cases} y, & \text{ако } y \text{ е рационално число,} \\ 1-y, & \text{ако } y \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

е обратна на дадената функция.

Ще докажем няколко твърдения за монотонни функции.

Ще започнем с доказателство на една лема, която е вярна за всяка монотонна (не е задължително строго монотонна) функция.

Лема. *Ако функцията f е монотонна в сегмента $[a, b]$, то тя има дясна и лява граница във всяка вътрешна точка на сегмента*

$[a, b]$ и освен това има дясна граница в точката a и лява граница в точката b.

Доказателство. За доказателството на лемата е достатъчно да се докаже: 1) съществуването на дясна граница във всяка точка c при $a \leqq c < b$; 2) съществуването на лява граница във всяка точка c при $a < c \leqq b$.

Ще докажем само първото твърдение, тъй като второто се доказва аналогично. При това ще разгледаме случая, когато функцията f е ненамаляваща в сегмента $[a, b]$ (случаят на нерастяща функция се разглежда аналогично).

И така нека функцията f е ненамаляваща в $[a, b]$ и c е произволна точка, за която $a \leqq c < b$. Разглеждаме множеството $\{f(x)\}$ от всички стойности на функцията f за стойности на аргумента x, удовлетворяващи неравенствата $c < x \leq b$. Множеството $\{f(x)\}$ не е празно (тъй като $c < b$) и е ограничено отдолу (понеже функцията f е ненамаляваща в полусегмента $c < x \leq b$ и $f(c)$ ще бъде долната граница на това множество). От теорема 2.1 следва, че разглежданото множество има точна долна граница, която ще означим с γ. Ще докажем, че γ е дясна граница на функцията f в точката c, т. е. че $\gamma = f(c+0)$.

Избираме произволно положително число ε. От определението на точна долна граница следва, че съществува такова положително число δ, ненадминаващо $b-c$, че стойността $f(c+\delta)$ на функцията да удовлетворява неравенството $f(c+\delta) < \gamma+\varepsilon$.

Но тогава поради монотонността на функцията f за всяко x от интервала $c < x < c+\delta$ ще имаме $f(x) < \gamma+\varepsilon$. Тъй като за всяко x от този интервал е изпълнено и неравенството $\gamma \leq f(x)$, то за всяко x от интервала $c < x < c+\delta$ ще са изпълнени и неравенствата

$$\gamma \leq f(x) < \gamma+\varepsilon \quad \text{или} \quad |\gamma - f(x)| < \varepsilon,$$

а това означава (според определението за дясна граница по Коши), че числото γ е дясна граница на функцията f в точката c. □

Забележка към лемата. При предположенията на лемата и при условие, че f е ненамаляваща функция, за всяко c и всяко x, удовлетворяващи съотношенията $a \leqq c < x \leqq b$, ще са изпълнени неравенствата

$$f(a) \leqq f(c) \leq f(c+0) \leq f(x) \leq f(b), \tag{4.1}$$

а за всяко c и всяко x, удовлетворяващи съотношенията $a \leq x < c \leq b$, ще бъдат изпълнени

$$f(a) \leq f(x) \leqq f(c-0) \leq f(c) \leq f(b). \tag{4.2}$$

При условие, че функцията f е нерастяща, знаците в неравенствата (4.1) и (4.2) се сменят с противоположни.

Нека например f е ненамаляваща в $[a, b]$ и $a \leq c < x \leq b$. Тогава $f(a) \leq f(c) \leq f(x) \leq f(b)$. От последните неравенства веднага следва, че $f(a) \leq f(c) \leq f(c+0) \leq f(b)$. За да завършим доказателството на неравенствата (4.1), трябва да се убедим, че $f(c+0) \leq f(x) \leq f(b)$ за всяко x от полусегмента $c < x \leq b$, но то следва непосредствено от това, че числото $\gamma = f(c+0)$ е (както е доказано в лемата) точна долна граница на множеството от стойности на функцията f в полусегмента $c < x \leq b$. Верността на неравенствата (4.2) се проверява аналогично.

Сега ще докажем три теореми за строго монотонни функции.

Теорема 4.3. *Нека функцията f расте (намалява) в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Ако множеството от всички стойности на функцията е сегментът $[\alpha, \beta]$ (съответно сегментът $[\beta, \alpha]$), то в сегмента $[\alpha, \beta]$ е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, която е също растяща (намаляваща) в този сегмент.*

Доказателство. Ще проведем всички разсъждения при предположението, че функцията f е растяща в сегмента $[a, b]$ (за намаляваща функция разсъжденията са аналогични).

Функцията f осъществява взаимно еднозначно съответствие между сегментите $a \leq x \leq b$ и $\alpha \leq y \leq \beta$. Наистина това, че на всяко x от $[a, b]$ съответствува само една стойност y от $[\alpha, \beta]$, следва от определението на функция, а това, че на всяко y от $[\alpha, \beta]$ съответствува само едно x от $[a, b]$, следва от условието, че функцията f е растяща.

Да покажем сега, че ако f расте в $[a, b]$, то и f^{-1} също расте в $[\alpha, \beta]$. Нека $y_1 < y_2$, където y_1 и y_2 са произволни числа от $[\alpha, \beta]$. Тогава $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, тъй като в противен случай при $x_1 \geq x_2$ от това, че функцията $y = f(x)$ е растяща, ще следва, че $y_1 \geq y_2$, което противоречи на условието $y_1 < y_2$. □

Забележка 1. Съвсем аналогично се доказва едно по-общо твърдение: Нека f е дефинирана и растяща (намаляваща) в множеството $\{x\}$, а $\{y\}$ е множеството от всички стойности на функцията. Тогава в множеството $\{y\}$ е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, и тя е също растяща (намаляваща) в множеството $\{y\}$.

Теорема 4.4. *Нека функцията f е растяща (намаляваща) в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Необходимо и достатъчно условие функцията f да бъде непрекъсната в сегмента $[a, b]$ е всяко число γ, заключено между α и β, да бъде стойност на тази функция.*

Доказателство. Всички разсъждения ще проведем за растяща функция, тъй като за намаляваща функция те са аналогични.

I. Необходимост. Нека функцията f е растяща и непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Трябва да се докаже, че всяко число γ, удовлетворяващо условията $\alpha<\gamma<\beta$, е стойност на функцията в някоя точка c от сегмента $[a, b]$.

Нека $\{x\}$ е множеството от онези стойности на x от сегмента $[a, b]$, за които $f(x)\leq\gamma$. Множеството $\{x\}$ не е празно (то съдържа точката a, понеже $f(a)=\alpha<\gamma$) и е ограничено отгоре (например от числото b). Според основната теорема 2.1 множеството $\{x\}$ има точна горна граница, която ще означим с c: $c=\sup\{x\}$. Остава да се докаже, че $f(c)=\gamma$.

Най-напред ще се убедим, че $f(x)\leq\gamma$ за всяко x от $[a, b]$, лежащо наляво от c, и $f(x)>\gamma$ за всяко x, лежащо надясно от c.

Действително, ако $x<c$, то според определението на точна горна граница съществува x' от полуинтервала $x<x'\leq c$, принадлежащо на множеството $\{x\}$, т. е. такова, че $f(x')\leq\gamma$. Но понеже f е растяща, ще следва, че $f(x)\leq\gamma$ (тъй като $f(x)<f(x')$).

Освен това всяко x, лежащо надясно от c, не принадлежи на множеството $\{x\}$ и затова за него ще бъде изпълнено неравенството $f(x)>\gamma$.

Сега ще се убедим, че c е вътрешна точка на сегмента $[a, b]$. Ще докажем, че $c<b$. Да предположим, че това не е така, т. е. допускаме, че $c=b$. Да вземем произволна клоняща към $c=b$ растяща редица $\{x_n\}$ от точки на сегмента $[a, b]$. Тъй като всичките ѝ членове x_n са наляво от c, то $f(x_n)\leq\gamma$ за всеки номер n и (теорема 3.13) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\leq\gamma$. Но понеже функцията f е непрекъсната в точката $c=b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(b)=\beta$. Така получаваме неравенството $\beta\leq\gamma$, което противоречи на условието $\gamma<\beta$. Полученото противоречие доказва, че $c<b$.

Съвършено аналогично се доказва, че $a<c$.

И така доказахме, че c е вътрешна точка на сегмента $[a, b]$.

За да докажем, че $f(c)=\gamma$, ще разгледаме две клонящи към c от различни страни редици от точки на сегмента $[a, b]$ — растяща редица $\{x_n'\}$ и намаляваща редица $\{x_n''\}$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката c, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=\lim_{n\to\infty} f(x_n'')=f(c).$$

От друга страна, тъй като $x_n'<c<x_n''$ за всеки номер n, то $f(x_n')\leq\gamma$, $f(x_n'')\geq\gamma$ (за всеки номер n). Но тогава от теорема 3.13

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=f(c)\leq\gamma,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n'')=f(c)\geq\gamma,$$

т. е. $f(c)=\gamma$. □

2. *Достатъчност.* Нека функцията f е растяща в сегмента $[a, b]$ и нека всяко число γ от сегмента $[\alpha, \beta]$ е стойност на тази функция. Ще докажем, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Достатъчно е да докажем, че f е непрекъсната отдясно във всяка точка c, удовлетворяваща условията $a \leq c < b$, и непрекъсната отляво във всяка точка c, удовлетворяваща условията $a < c \leq b$.

Ще се ограничим с доказателството за непрекъснатост отдясно във всяка точка c, която удовлетворява условията $a \leq c < b$, тъй като втората част на твърдението се доказва аналогично.

Да предположим, че функцията f не е непрекъсната отдясно в някоя точка c, удовлетворяваща условията $a \leq c < b$. Тогава нейната дясна граница $f(c+0)$, която съществува въз основа на доказаната по-горе лема, ще се различава от стойността $f(c)$ и съгласно забележката към същата лема неравенствата (4.1) ще приемат вида

$$\alpha = f(a) \leq f(c) < f(c+0) \leq f(x) \leq f(b) = \beta \tag{4.2'}$$

(за всички x от полуинтервала $c < x \leq b$).

Неравенствата (4.2') показват, че съдържащият се в $[\alpha, \beta]$ сегмент $[f(c), f(c+0)]$ не съдържа стойности на функцията $f(x)$, което противоречи на това, че всяко число γ от сегмента $[\alpha, \beta]$ е стойност на тази функция. □

Теорема 4.5. *Нека функцията f е растяща (намаляваща) и непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогава в сегмента $[\alpha, \beta]$ (съответно в $[\beta, \alpha]$) е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, и тя е също растяща (намаляваща) и непрекъсната в посочения сегмент.*

Накратко от строгата монотонност и непрекъснатост на една функция в сегмента $[a, b]$ следва съществуването на строго монотонна и непрекъсната обратна функция в съответния сегмент.

Доказателство. Ще проведем всички разсъждения за растяща функция, тъй като за намаляваща функция те са аналогични.

Тъй като f е растяща и непрекъсната в сегмента $[a, b]$, множеството от всичките ѝ стойности е сегментът $[\alpha, \beta]$ (теорема 4.4, необходимост). Но тогава от теорема 4.3 следва, че в сегмента $[\alpha, \beta]$ съществува обратната ѝ функция f^{-1}, която е растяща. Остава да се докаже, че обратната функция е непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$. Това следва непосредствено от теорема 4.4, като се вземе пред вид, че множеството от всички стойности на обратната функция f^{-1} е сегментът $[a, b]$, където $a = f^{-1}(\alpha)$ и $b = f^{-1}(\beta)$. □

Забележка 2. Може да се докаже, че от съществуването на обратна функция на функцията f, непрекъсната в сегмента $[a, b]$, следва, че $f(x)$ е строго монотонна в този сегмент (вж. 4.6.2).

4.3. Основни елементарни функции

Основни елементарни функции се наричат функциите: $y=x^a$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$.

Ще разгледаме въпроса за непрекъснатост на основните елементарни функции, като се спрем на въпросите за дефинирането и някои свойства на тези функции.

4.3.1. Показателна функция. Ще започнем с дефинирането на рационална степен на положително число. За да се повдигне реалното число x в цяла положителна степен n, трябва да се умножи това число само на себе си n пъти.

Следователно при цяло n можем да считаме, че функцията $y=x^n$ е определена за всяко реално число x. Ще установим някои от най-простите свойства на тази функция.

Лема 1. *Степенната функция $y=x^n$ при $x\geq 0$ и цяло положително n е растяща и непрекъсната.*

Д о к а з а т е л с т в о. Ще покажем, че функцията $y=x^n$ е растяща. Нека $0\leq x_1<x_2$. Тогава $x_2^n-x_1^n=(x_2-x_1)(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+\cdots+x_1^{n-1})$. Двата множителя в дясната страна са положителни поради избора на x_1 и x_2. Затова и лявата страна на равенството е положителна, т. е. $x_2^n>x_1^n$, а това означава, че функцията $y=x^n$ е растяща при $x\geq 0$.

Непрекъснатостта на функцията $y=x^n$ във всяка точка a на безкрайната права $-\infty<x<+\infty$ беше установена в пример 1 на 4.1.1. □

Да разгледаме степенната функция $y=x^n$ в сегмента $[0, N]$, където N е произволно положително число. Тъй като функцията е непрекъсната и растяща в този сегмент, то според теорема 4.5 тя има непрекъсната и растяща обратна функция в сегмента $[0, N^n]$, която ще означим с $x=y^{1/n}$. Тъй като N може да се избере произволно голямо, то и N^n може да се направи произволно голямо. Следователно функцията $x=y^{1/n}$ е дефинирана за всички неотрицателни стойности на y. Ако сменим в тази функция означението на аргумента y с x, а означението на функцията x с y, ще получим степенната функция $y=x^{1/n}$, дефинирана за всяко реално $x\geq 0$.

Сега можем да дефинираме всяка рационална степен r на положителното число a. Определяме най-напред $a^{1/n}$ като реално число b, равно на стойността на функцията $y=x^{1/n}$ в точката a. По-нататък, ако $r=m/n$, където m и n са цели положителни числа, полагаме

$$a^r=a^{m/n}=(a^{1/n})^m.$$

Освен това по определение полагаме

$$a^0=1,\ a^{-r}=(1/a)^r\ (\text{при } r>0).$$

Така дефинирахме произволна рационална степен на положително реално число a.

Рационалните степени на положителните реални числа имат следните свойства:

$$(a^r)^s=a^{rs},\ a^r.b^r=(ab)^r,\ a^r a^s=a^{r+s}.$$

Ще докажем най-напред първото свойство. Ще отбележим, че при цяло положително p равенството $(a^{m/n})^p=a^{mp/n}$, където m и n са произволни цели положителни числа, е очевидно вярно, тъй като лявата и дясната му страна се получават чрез умножаване на числото $a^{1/n}$ само на себе си $m.p$ пъти.

Ще докажем равенството $(a^r)^s=a^{rs}$ за всички положителни рационални r и s. Нека $r=m_1/n_1$ и $s=m_2/n_2$. Полагаме $c_1=(a^{m_1/n_1})^{m_2/n_2}$, $c_2=a^{m_1m_2/n_1n_2}$. Ако допуснем, че $c_1\neq c_2$, то и $c_1^{n_2}\neq c_2^{n_2}$, тъй като функцията $y=x$ е растяща и оттук поради верността на равенството $(a^{m/n})^p=a^{mp/n}$ за цели стойности на p ще получим $(a^{m_1/n_1})^{m_2}\neq a^{m_1m_2/n_1}$. Но това противоречи на доказаното вече равенство $(a^{m_1/n_1})^{m_2}=a^{m_1m_2/n_1}$ при цели m_1, n_1 и m_2. Така $c_1=c_2$, с което първото свойство е доказано за произволни положителни рационални числа r и s.

Валидността на това равенство лесно може да се разшири за неположителни r и s, като се има пред вид, че по определение

$$a^0=1,\ a^{-r}=(1/a)^r \text{ при } r>0.$$

Второто равенство $a^r.b^r=(ab)^r$ е също така достатъчно да се докаже само за положителни рационални числа r. Полагаме $r=m/n$, където m и n са цели положителни числа. Ще отбележим, че е достатъчно да се докаже равенството $a^{1/n}b^{1/n}=(a.b)^{1/n}$, тъй като общото равенство $a^r.b^r=(a.b)^r$ се получава от това чрез умножаването му само на себе си m пъти.

За доказване на равенството $a^{1/n}.b^{1/n}=(a.b)^{1/n}$ ще вземем пред вид, че от свойствата на взаимно обратните функции $y=x^{1/n}$ и $x=y^n$ следва $(b^{1/n})^n=b$, $(a^{1/n})^n=a$, $((ab)^{1/n})^n=ab$. Ако положим $c_1=a^{1/n}.b^{1/n}$, $c_2=(ab)^{1/n}$ и предположим $c_1\neq c_2$, ще получим, че $c_1^n\neq c_2^n$, което противоречи на равенството $ab=ab$.

Ще докажем сега последното свойство $a^r.a^s=a^{r+s}$, отчитайки, че първите две са вече доказани. Нека $r=m_1/n_1$, $s=m_2/n_2$; тогава $r=m_1n_2/n_1n_2$, $s=m_2n_1/n_1n_2$ и стигаме до следните равенства:

$$a^r a^s=(a^{1/n_1n_2})^{m_1n_2}(a^{1/n_1n_2})^{m_2n_1}=(a^{1/n_1n_2})^{m_1n_2+m_2n_1}.$$

Последното равенство е вярно, защото m_1n_2 и m_2n_1 са цели числа.

По такъв начин

$$a^r \cdot a^s = a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/n_1 n_2} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2} = a^{r+s},$$

което трябваше да докажем.

При $a>1$ и рационално $r>0$ е изпълнено неравенството $a^r>1$. Наистина нека $r=m/n$ и $a^r=a^{m/n}\leq 1$. Умножавайки почленно n пъти горното неравенство, ще получим $a^m\leq 1$. Но това неравенство противоречи на неравенството $a^m>1$, получено от почленното умножение на неравенството $a>1$ само на себе си m пъти.

Ще отбележим също, че ако рационалната дроб $r=m/n$ има нечетен знаменател n, то определението за рационална степен може да се разшири и за отрицателни числа, като при $a>0$ положим

$$(-a)^r=a^r, \text{ ако } m \text{ е четно},$$

$$(-a)^r=-a^r, \text{ ако } m \text{ е нечетно}.$$

Да се убедим, че функцията $y=a^x$ при $a>1$, дефинирана в множеството на рационалните числа, е монотонно растяща в това множество.

Наистина нека r_1 и r_2 са две такива рационални числа, че $r_2>r_1$. Тогава

$$a^{r_2}-a^{r_1}=a^{r_1}(a^{r_2-r_1}-1). \tag{4.3}$$

Понеже $r_2-r_1>0$ и $a>1$, от доказаното по-рано имаме $a^{r_2-r_1}>1$, така че дясната страна на равенството (4.3) е положителна. Следователно

$$a^{r_2}-a^{r_1}>0, \text{ т. е. } a^{r_2}>a^{r_1},$$

което трябваше да докажем.

Ще дефинираме накрая функцията $y=a^x$ не само за рационални стойности на x, но и за всички реални стойности. Нека x е произволно реално число. Ще разгледаме всички двойки рационални числа α и β, които удовлетворяват неравенствата

$$\alpha<x<\beta. \tag{4.4}$$

Ще дефинираме a^x за $a>1$ като реално число y, удовлетворяващо неравенствата

$$a^{\alpha}\leq y\leq a^{\beta} \tag{4.5}$$

за всички двойки рационални числа α и β, които удовлетворяват неравенствата (4.4).

Оказва се, че такова число съществува и то е само едно. Следователно функцията $y=a^x$ ще бъде дефинирана в множеството на всички реални числа x.

Ще покажем, че тази функция е растяща и непрекъсната върху цялата реална права. Тези твърдения се съдържат в следващите леми.

Лема 2. *За всеки две фиксирани реални числа x и $a>1$ и всички възможни двойки рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенствата* (4.4), *съществува, и то само едно реално число y, което удовлетворява неравенствата* (4.5).

Доказателство. Ще докажем най-напред съществуването на такова число y. Фиксираме произволно рационалното число β, така че да удовлетворява дясното неравенство (4.4), и разглеждаме всевъзможните рационални числа α, удовлетворяващи лявото неравенство (4.4). Тъй като $\alpha<\beta$ и показателната функция, дефинирана в множеството на рационалните числа, е растяща, то $a^{\alpha}<a^{\beta}$. Тогава множеството $\{a^{\alpha}\}$ е ограничено отгоре и числото a^{β} е негова горна граница. От основната теорема 2.1 следва, че множеството $\{a^{\alpha}\}$ има точна горна граница, която ще означим с y. Ще покажем, че y удовлетворява неравенствата (4.5). От определението за точна горна граница следва верността на лявото неравенство (4.5), а верността на дясното неравенство (4.5) следва от това, че a^{β} е една горна граница и y е точната горна граница за множеството $\{a^{\alpha}\}$.

Ще докажем сега, че това число y е само едно. За това е достатъчно да се покаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенствата (4.4), за които $a^{\beta}-a^{\alpha}<\varepsilon$. Тогава всеки две числа y_1 и y_2, удовлетворяващи неравенствата (4.5), трябва да съвпадат, тъй като разликата между тях по абсолютна стойност е по-малка от всяко отнапред избрано число $\varepsilon>0$.

Фиксираме произволно положително число ε и рационално число β_0, удовлетворяващо дясното неравенство (4.4). Тогава, тъй като $a^{\alpha}<a^{\beta_0}$, то

$$a^{\beta}-a^{\alpha}=a^{\alpha}(a^{\beta-\alpha}-1)<a^{\beta_0}(a^{\beta-\alpha}-1).$$

Неравенството $a^{\beta}-a^{\alpha}<\varepsilon$ ще бъде доказано, ако установим съществуването на такива рационални α и β, че $a^{\beta-\alpha}-1<\varepsilon/a^{\beta_0}$.

В глава 2 беше доказано, че за всяко естествено число n съществуват такива рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенството (4.4), че разликата им $\beta-\alpha$ да е по-малка от $1/n$. Следователно достатъчно е да се докаже съществуването на такова естествено число n, че $a^{1/n}-1<\varepsilon^{\beta_0}$. Нека $a^{1/n}=1+\delta_n$. Тъй като $a^{1/n}>1$, то δ_n е положително. Използвайки първите два члена в развитието на бинома на Нютон, получаваме

$$a=(a^{1/n})^n=(1+\delta_n)^n>1+n\,\delta_n.$$

Оттук $a-1>n\,.\,\delta_n$, т. е. $0<\delta_n<(a-1)/n$. И така $a^{1/n}-1=\delta_n<(a-1)/n$. Да изберем сега естествено число n, което да удовлетворява неравенството $(a-1)/n<\varepsilon/a^{\beta_0}$, т. е. $n>(a-1)a^{\beta_0}/\varepsilon$. Тогава $a^{1/n}-1<(a-1)/n<\varepsilon a^{\beta_0}$. С това доказателството за единствеността на числото y, удовлетворяващо неравенствата (4.5), е завършено. □

Ще отбележим, че ако x е рационално число и a^x е стойността на показателната функция в точката x, първоначално дефинирана само в множеството на рационалните числа, то a^x е това единствено число y, което удовлетворява неравенствата (4.5).

Лема 3. *Показателната функция $y=a^x$ при $a>1$ е растяща върху цялата безкрайна права.*

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са такива произволни числа, че $x_1<x_2$. Винаги съществуват такива рационални числа α и β, че $x_1<\alpha<\beta<x_2$ (вж. лема 2 от 2.3). Тъй като $x_1<\alpha$ и $\beta<x_2$, то от определението на показателната функция следват неравенствата $a^{x_1}\leq a^{\alpha}$, $a^{\beta}\leq a^{x_2}$. От друга страна, тъй като $\alpha<\beta$ и показателната функция е растяща в множеството на рационалните числа, е изпълнено неравенството $a^{\alpha}<a^{\beta}$. От неравенствата $a^{x_1}<a^{\alpha}$, $a^{\alpha}<a^{\beta}$, $a^{\beta}<a^{x_2}$ и свойството транзитивност на знаците $<$ и $=$ получаваме $a^{x_1}<a^{x_2}$, а това показва, че функцията $y=a^x$ е растяща. □

Лема 4. *Показателната функция $y=a^x$ $(a>1)$ е непрекъсната във всяка точка на безкрайната права.*

Доказателство. Нека x е произволно реално число, а $\{x_n\}$ е клоняща към x редица. Съгласно определението за непрекъснатост по Хайне е достатъчно да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв номер N, че $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$ за всяко $n\geqq N$. Избираме произволно $\varepsilon>0$ и такива рационални числа α и β, че $\alpha<x<\beta$ и $a^{\beta}-a^{\alpha}<\varepsilon$. Възможността за всяко $\varepsilon>0$ да се изберат такива числа α и β беше доказана в лема 2. Тъй като редицата $\{x_n\}$ клони към x и $\alpha<x<\beta$, то съществува такъв номер N, че за всяко $n\geqq N$ да са изпълнени неравенствата $\alpha<x_n<\beta$. Понеже показателната функция е монотонно растяща, то $a^{\alpha}<a^x<a^{\beta}$, $a^{\alpha}<a^{x_n}<a^{\beta}$ при всички $n\geqq N$.

Следователно двете числа a^x и a^{x_n} при $n\geqq N$ са заключени между числата a^{α} и a^{β}, разликата между които $a^{\beta}-a^{\alpha}$ е по-малка от ε. Оттук следва, че при $n\geqq N$ е изпълнено неравенството $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$, което показва, че показателната функция е непрекъсната в произволна точка x. □

Ще получим сега някои следствия от доказаните свойства на показателната функция. Преди това ще отбележим, че ако $0<a<1$, то $a=1/b$, където $b>1$. Затова функцията $y=a^x$ при $0<a<1$ може да се дефинира като функция $y=b^{-x}$ при $b>1$.

Следствие 1. *Показателната функция $y=a^x$ е положителна за всички стойности на x.*

Ако x е произволна точка от числовата ос, а r е такова рационално число, че $r<x$, то според определението на показател

ната функция в множеството на рационалните числа имаме $a^r>0$, а от лема 3 — че $a^r<a^x$. Следователно $a^x>0$.

Следствие 2. *Показателната функция $y=a^x$ при $a>1$ удовлетворява условията:* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

Наистина, тъй като $a>1$, то $a=1+\delta$, където $\delta>0$ и $a^n=(1+\delta)^n>1+n\delta$. Следователно $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=+\infty$. От монотонността на функцията $y=a^x$ получаваме, че и $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$. Понеже $a^{-n}=1/a^n$, то $\lim\limits_{n\to-\infty} a^n=0$, откъдето $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$.

Следствие 3. *Стойностите на функцията $y=a^x$ запълват изцяло положителната полуправа $y>0$.*

Действително функцията $y=a^x$ приема само положителни стойности (следствие 1) — както произволно малки, така и произволно големи (следствие 2). От непрекъснатостта и строгата монотонност на функцията a^x и от теорема 4.4 следва, че всяко положително число е стойност на функцията $y=a^x$.

Следствие 4. *За всеки две реални числа x_1 и x_2 са изпълнени съотношенията*

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2},\quad a^{x_1}.\,b^{x_1}=(a\,.\,b)^{x_1},\; a^{x_1}.\,a^{x_2}=a^{x_1+x_2}.$$

Наистина тези съотношения вече бяха установени при рационални показатели. Оттук следва и верността им при произволни реални показатели. Ще се убедим в това например за първото съотношение. Нека $\{r_n'\}$ и $\{r_n''\}$ са редици от рационални числа, клонящи съответно към x_1 и x_2. Тогава $(a^{r_n'})^{r_n''}=a^{r_n'r_n''}$.

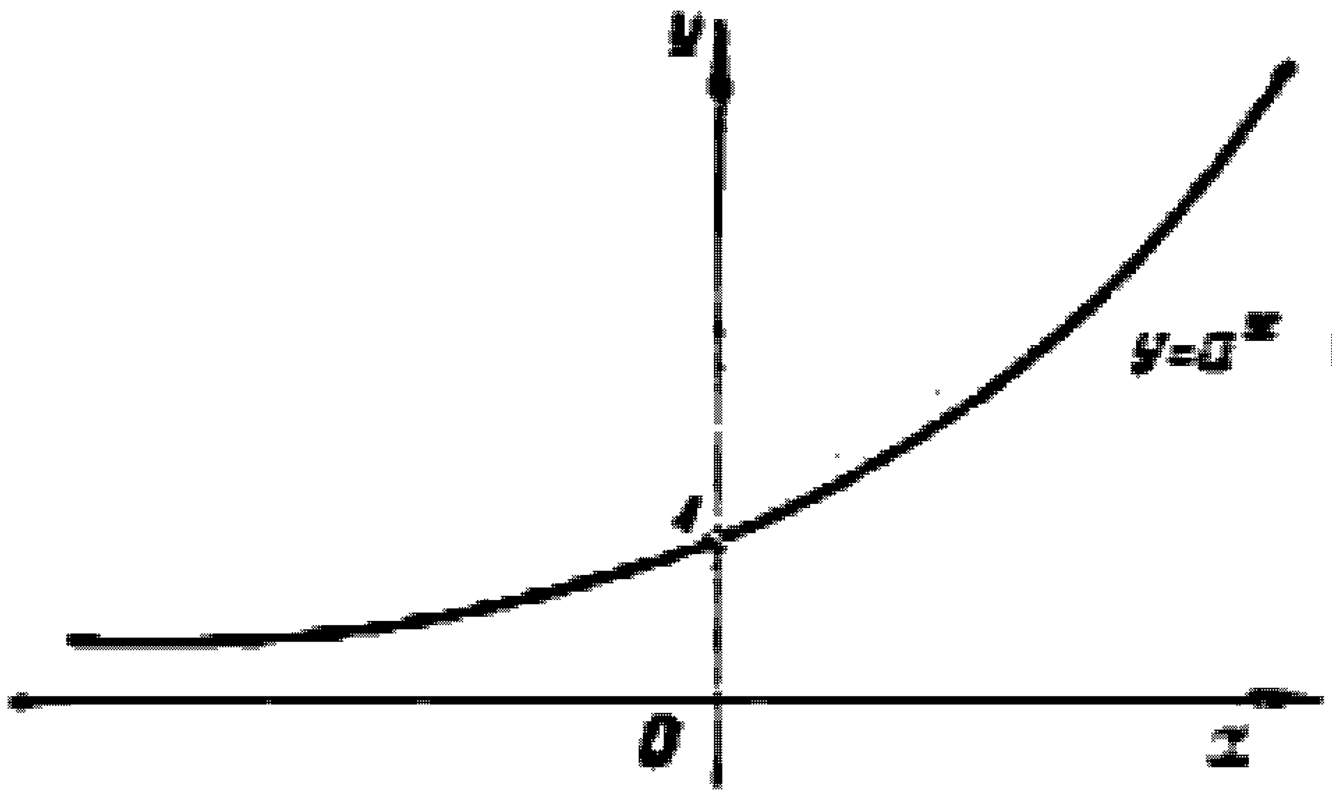
Граничният преход при $n\to\infty$, като използваме свойството непрекъснатост на показателната функция, ни дава $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$. Аналогично се установява верността и на останалите съотношения.

Ако $0<a<1$, като положим $b=1/a$, то $b>1$ и определяме $a^x=b^{-x}$.

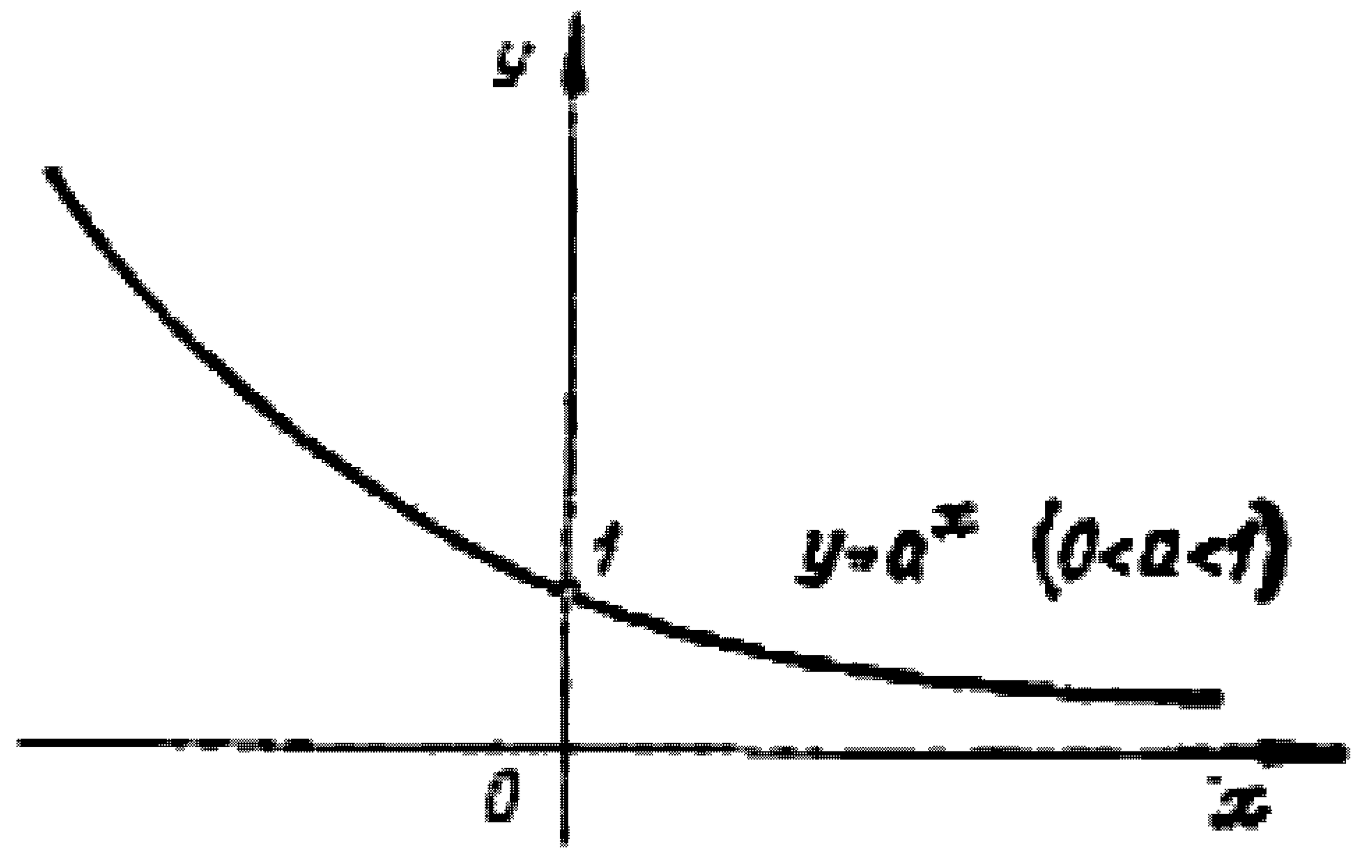
Ще отбележим, че досега фактически изучихме и свойствата на показателната функция $y=a^x$ при $0<a<1$. Наистина непрекъснатостта ѝ следва от самото определение. От определението следва също така, че тази функция е монотонно намаляваща върху безкрайната права. Следствия 1, 3 и 4 са верни и за функцията $y=a^x$ при $0<a<1$, а следствие 2 очевидно ще изглежда така:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} a^x=0.$$

На фиг. 4.1 и 4.2 са изобразени графиките на функцията $y=a^x$ за случаите $a>1$ и $0<a<1$.



Фиг. 4.1



Фиг. 4.2

Забележка. Показателната функция може да се определи и като решение на функционално уравнение, удовлетворяващо определени условия. Може да се докаже, че съществува, и то единствена функция f, дефинирана върху безкрайната права и удовлетворяваща следните три условия:

1) за всеки две реални числа x_1 и x_2 е изпълнено равенството $f(x_1+x_2)=f(x_1) \cdot f(x_2)$;

2) $f(0)=1$*, $f(1)=a$ при $a>1$;

3) функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката $x=0$.

Такава функция е построената по-горе функция a^x при $a>1$.

4.3.2. Логаритмична функция. Логаритмичната функция ще определим като обратна на показателната. Нека $[c, d]$ е произволен сегмент от безкрайната права. В този сегмент функцията $y=a^x$ при $a>1$ е непрекъсната и растяща. Затова според теорема 4.5 функцията $y=f(x)=a^x$ има растяща и непрекъсната обратна функция $x=f^{-1}(y)$ в сегмента $[a^c, a^d]$, която се нарича логаритмична функция и се означава така:

$$x=f^{-1}(y)=\log_a y.$$

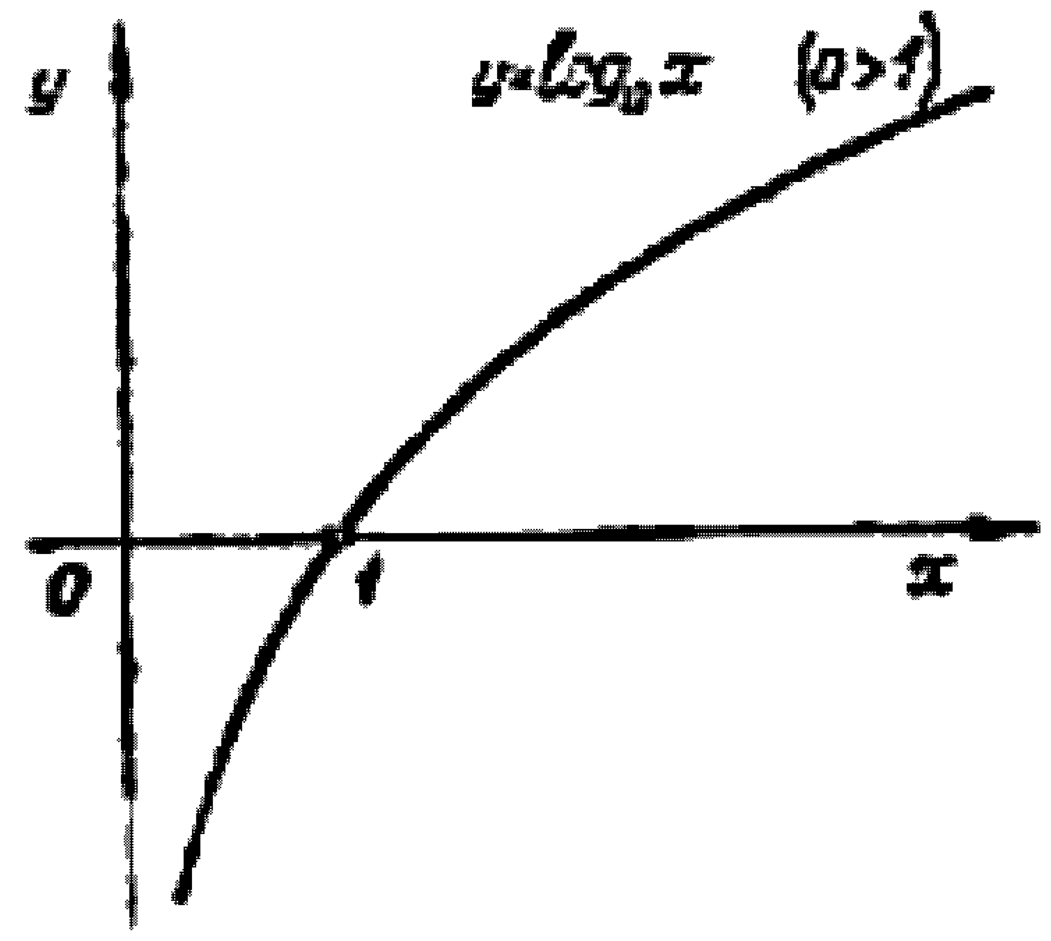
Като заменим означението на аргумента y с x, а означението на функцията x с y, ще запишем функцията в обичайния ѝ вид

$$y=\log_a x.$$

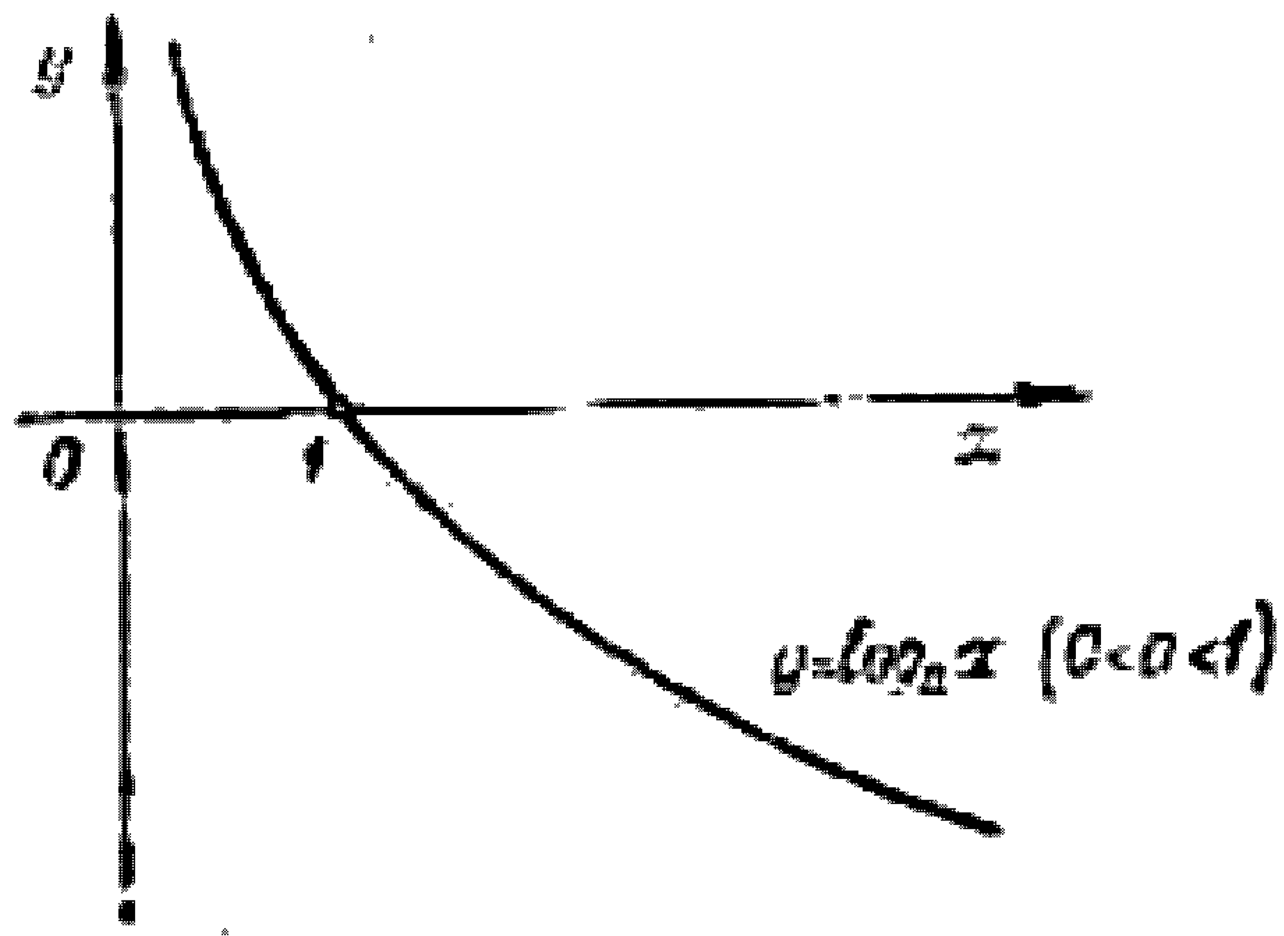
Случаят $0<a<1$ се разглежда аналогично. Ще отбележим някои свойства на логаритмичната функция, следващи непосредствено от определението ѝ.

1. *Логаритмичната функция е дефинирана за всички положителни стойности на x.* Наистина стойности на аргумента на лога-

* Може да се докаже, че условието $f(0)=1$ е следствие от останалите (и затова може да се изпусне).



Фиг. 4.3



Фиг. 4.4

ритмичната функция са стойностите на показателната функция, които, както видяхме, са само положителни и запълват полуправата $x>0$.

2. *Логаритмичната функция е непрекъсната и растяща върху цялата полуправа* $x>0$ *при* $a>1$ *и непрекъсната и намаляваща върху цялата полуправа* $x>0$ *при* $0<a<1$; *при това*

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ при } a>1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ при } 0<a<1.$$

Тези свойства следват от свойствата на показателната функция.

3. *За произволни положителни числа* x_1 *и* x_2

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

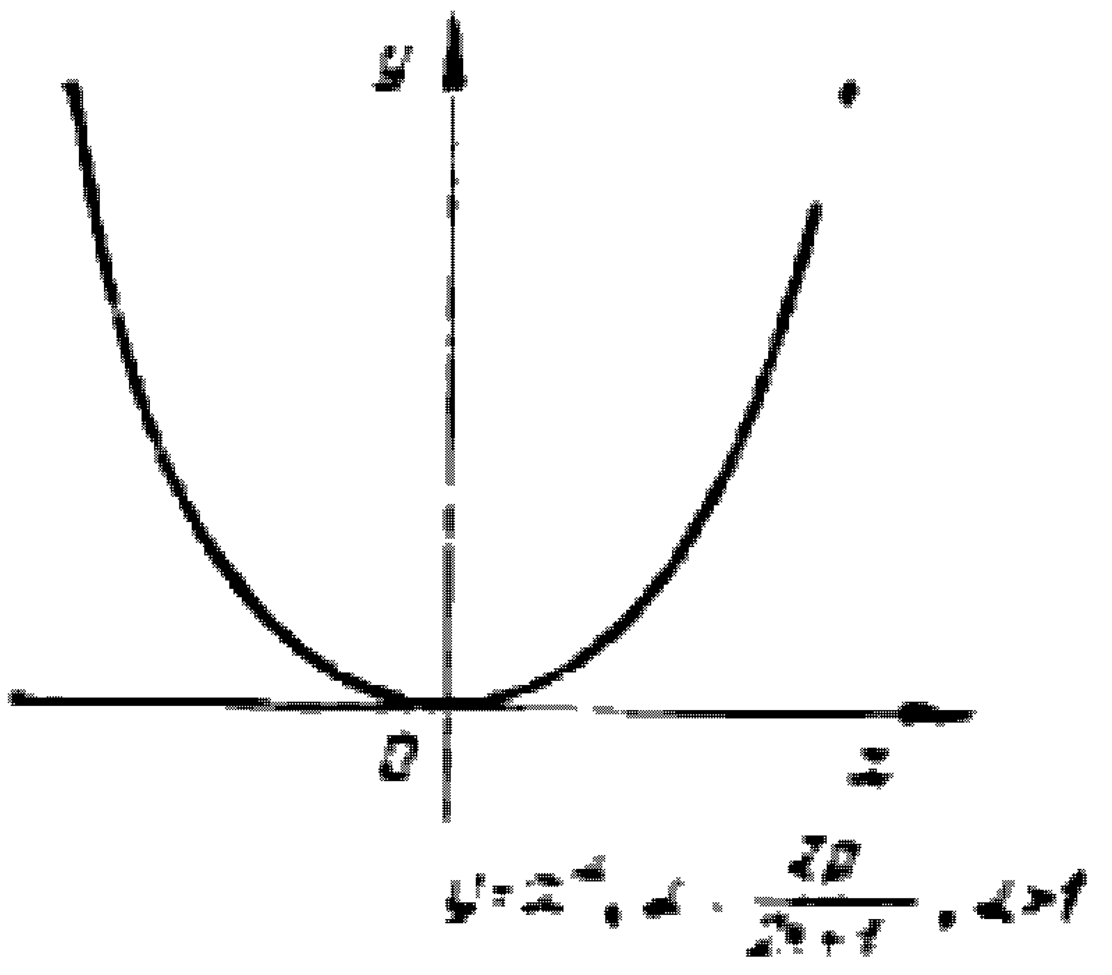
Това свойство също така следва от свойствата на показателната функция.

Забележка. Специално ще отделим логаритмичната функция $y=\log_e x$, където $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. За тази функция се използва означението $y=\ln x$. Логаритъм при основа e се нарича натурален логаритъм.

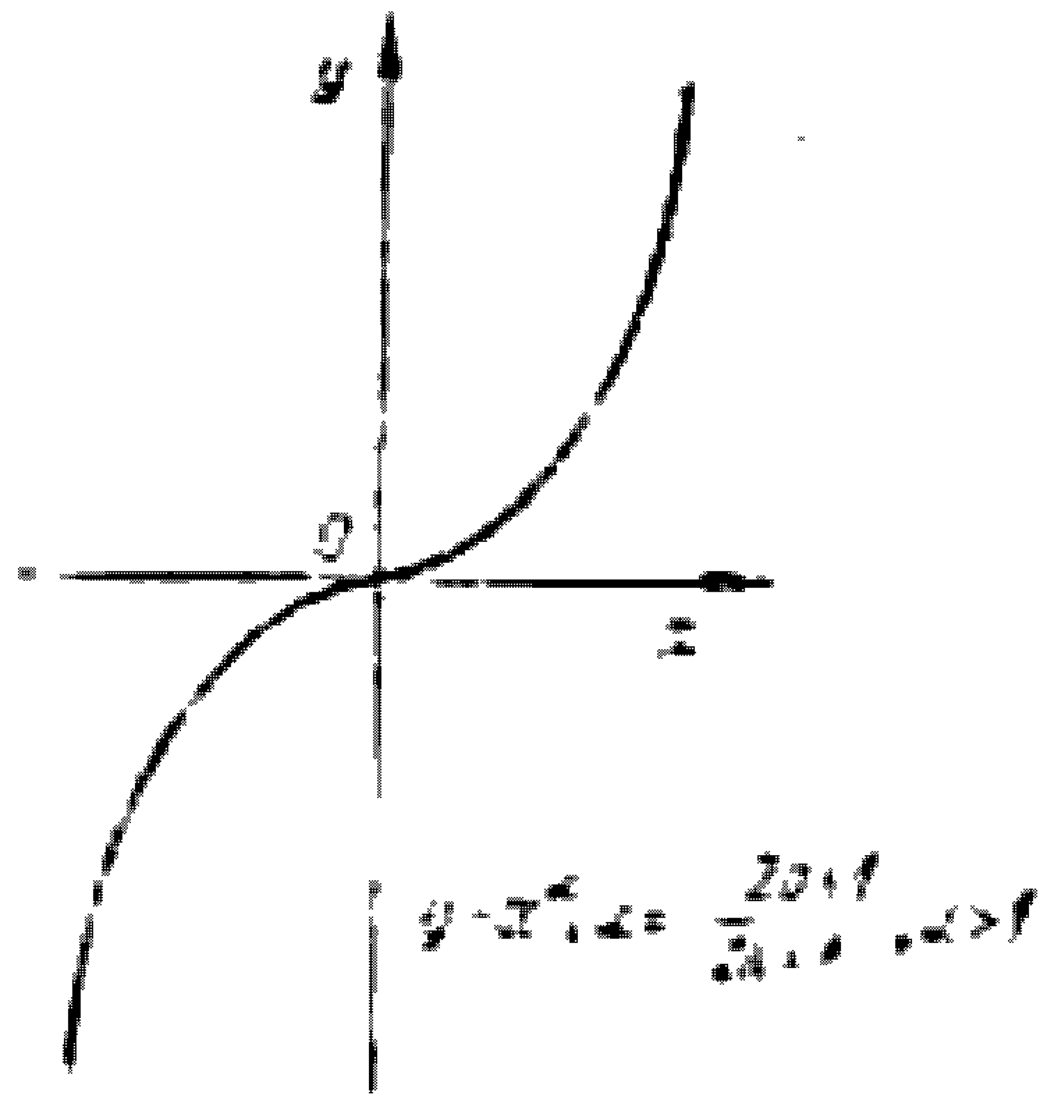
На фиг. 4.3 и 4.4 са дадени графиките на логаритмичната функция $\log_a x$ за случаите $a>1$ и $0<a<1$.

4.3.3. Степенна функция. Степенната функция при произволен реален показател α може да се дефинира и като суперпозиция на логаритмична и показателна функция. Нека $x>0$. Тогава степенната функция се представя така:

$$y=x^\alpha=(a^{\log_a x})^\alpha=a^{\alpha\log_a x},$$



Фиг. 4.5



Фиг. 4.6

където a е произволно фиксирано число и за определеност ще го вземем по-голямо от единица.

От това представяне и от факта, че при $a>1$ логаритмичната функция е растяща върху цялата полуправа $x>0$, а показателната функция е растяща върху цялата безкрайна права следва, че степенната функция $y=x^{\alpha}=a^{\alpha \log_a x}$ е растяща при $\alpha>0$ и намаляваща при $\alpha<0$ върху полуправата $x>0$.

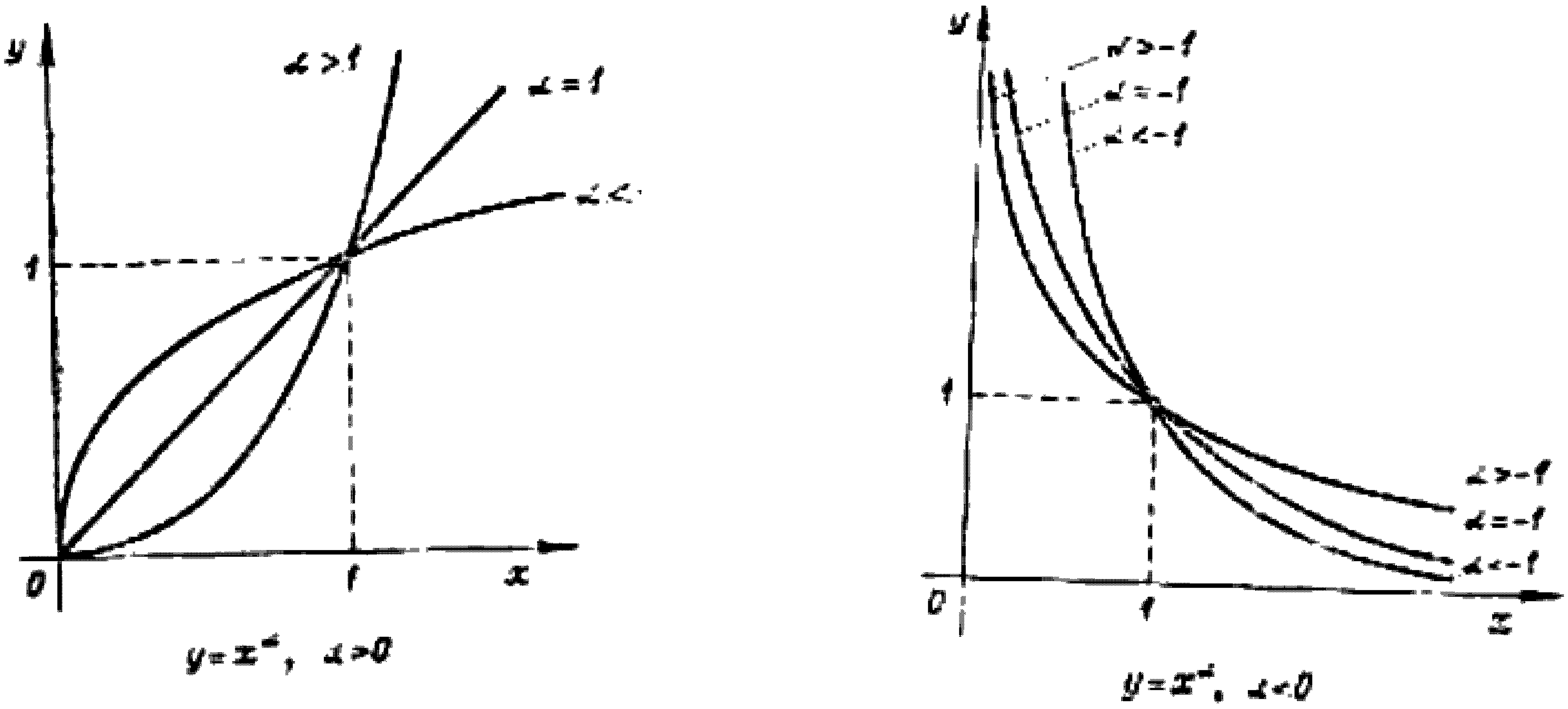
Степенната функция има следните свойства:

1. *За степенната функция са изпълнени съотношенията* $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\alpha}=0$ *при* $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\alpha}=+\infty$ *при* $\alpha<0$. Наистина нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща отдясно към нула редица от стойности на аргумента x_n. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n=-\infty$, то от свойствата на показателната функция следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha \log_a x_n}=0$ при $\alpha>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha \log_a x_n}=+\infty$ при $\alpha<0$. По дефиниция полагаме $0^{\alpha}=0$ при $\alpha>0$ и ще считаме този израз за неопределен при $\alpha\leqq 0$.

2. *Степенната функция* $y=x^{\alpha}=a^{\alpha \log_a x}$ *е непрекъсната във всяка точка* x *на отворената полуправа* $x>0$.

Това следва непосредствено от теорема 4.2 за непрекъснатост на сложна функция, като се вземе пред вид, че функцията $u=\alpha \log_a x$ е непрекъсната във всяка точка $x>0$, а функцията $y=a^u$ е непрекъсната във всяка точка от безкрайната права.

Забележка. Ако показателят α на степенната функция е рационално число m/n, където n е нечетно цяло число, то степенната функция $y=x^{\alpha}$ може да се дефинира върху цялата числова ос чрез формулите:



Фиг. 4.7

$$y=|x|^{\alpha}, \text{ ако } \alpha=m/n \text{ и } m \text{ е четно,}$$

$$y=-|x|^{\alpha}, \text{ ако } \alpha=m/n \text{ и } m \text{ е нечетно.}$$

На фиг. 4.5 и 4.6 са дадени графиките на степенната функция $y=x^{\alpha}$ за различни стойности на α.

4.3.4. Тригонометрични функции. Вече имаме представа за тригонометричните функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ и функциите, които се изразяват чрез тях:

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad y=\sec x=\frac{1}{\cos x},$$

$y=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$. Определенията на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ чрез нагледни геометрични съображения е логически несъвършено. Логически безупречно тези функции могат да се определят като решения на система функционални уравнения. По-точно може да се докаже следното твърдение: *Съществува и при това единствена двойка функции f и g, определени за всички реални стойности на аргумента x и удовлетворяващи условията:*

$$\begin{aligned}
&1)\quad f(x_1+x_2)=f(x_1)g(x_2)+g(x_1)f(x_2),\\
&\qquad g(x_1+x_2)=g(x_1)g(x_2)-f(x_1)f(x_2),\\
(4.6)\quad&\qquad f^2(x)+g^2(x)=1;\\
&2)\quad f(0)=0,\ g(0)=1,\ f(\pi/2)=1,\ g(\pi/2)=0;
\end{aligned}$$

3) ако $0<x<\pi/2$, то $0<f(x)<x<f(x)/g(x)$*.

Първата от тези функции наричаме ***синус*** *и я означаваме със символа* sin, *а втората —* ***косинус*** *и я означаваме със символа* cos.

Доказателството на това твърдение може да се види в допълнението към глава 4 на книгата на В. А. Ильин и Э. Г. Позняк „Основы математического анализа, I".

Не е трудно да се докаже, че от свойствата 1), 2) и 3) могат да се получат като следствия всички други свойства на функциите sin и cos, известни от средния курс по математика и доказани там с помощта на нагледни геометрични съображения. Впрочем то следва от това, че свойствата 1), 2) и 3) определят единствена двойка функции f и g и че въведените в средния курс чрез нагледни геометрични съображения функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ притежават тези свойства.

За пример ще установим с помощта на свойствата 1), 2) и 3) някои свойства на функциите $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$, които ще ни бъдат необходими при доказателството на непрекъснатостта на тези функции и при определяне на интервалите им на монотонност.

а) От третото равенство на 1), а именно $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, непосредствено следва, че $\sin^2 x\leq 1$ и $\cos^2 x\leq 1$, т. е.

$$|\sin x|\leq 1,\ |\cos x|\leq 1. \tag{4.7}$$

б) С помощта на първите две равенства от 1) и първите две равенства от 2) получаваме

$$\sin 0=\sin(x+(-x))=\sin x\,.\cos(-x)+\cos x\,.\sin(-x)=0,$$
$$\cos 0=\cos(x+(-x))=\cos x\,.\cos(-x)-\sin x\,.\sin(-x)=1.$$

Получените две равенства са система от две уравнения относно двете неизвестни $\cos(-x)$ и $\sin(-x)$. Като решим тази система и вземем пред вид, че $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаваме

$$\cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x, \tag{4.8}$$

т. е. $g(x)=\cos x$ е четна функция, а $f(x)=\sin x$ е нечетна функция.**

в) От равенствата в 1) на свой ред следват равенствата

$$\begin{aligned}\sin(x_1-x_2)&=\sin(x_1+(-x_2))=\sin x_1\,.\cos(-x_2)\\&+\cos x_1\,.\sin(-x_2)=\sin x_1\,.\cos x_2-\cos x_1\,.\sin x_2,\end{aligned} \tag{4.9}$$

* Верността на неравенството $x<f(x)/g(x)$ за $0<x<\pi/2$ следва от останалите условия.

** Функцията h, дефинирана за всички реални стойности на x, се нарича четна, ако $h(-x)=h(x)$ (за всяка стойност на x), и нечетна ако $h(-x)=-h(x)$ (също за всяка стойност на x).

$$\cos(x_1-x_2)=\cos(x_1+(-x_2))=\cos x_1 \,.\, \cos(-x_2)$$
$$-\sin x_1 \,.\, \sin(-x_2)=\cos x_1 \,.\, \cos x_2+\sin x_1 \,.\, \sin x_2.$$

г) От първото равенство на 1) и първото равенство на (4.9) получаваме, че

$$\sin x_2 = \sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sin\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \cos\frac{x_2-x_1}{2}$$
$$+\cos\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$\sin x_1=\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sin\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \cos\frac{x_2-x_1}{2}$$
$$-\cos\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

Като съберем и извадим получените две равенства, намираме

$$\sin x_2+\sin x_1 = 2\sin\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \cos\frac{x_2-x_1}{2}, \tag{4.10}$$
$$\sin x_2-\sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

д) По-нататък от първото равенство на (4.9) и от последните две равенства на 2) получаваме

$$\sin(\pi/2-x)=\sin\frac{\pi}{2} \,.\, \cos x-\cos\frac{\pi}{2} \,.\, \sin x=\cos x,$$

т. е.

$$\cos x = \sin(\pi/2-x). \tag{4.11}$$

е) Ще се убедим накрая в периодичността на функциите $g(x)=\cos x$ и $f(x)=\sin x$ с период 2π. От първите две равенства на 1) при $x=x_1=x_2$ ще получим

$$\sin 2x=2\sin x \,.\, \cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x. \tag{4.12}$$

От 2) имаме $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Използваме (4.12) при $x=\pi/2$ и получаваме, че $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$. Като използваме повторно (4.12), при $x=\pi$ имаме $\sin 2\pi=0$, $\cos 2\pi=1$.

От последните две равенства и първите две равенства на 1) следва

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \,.\, \cos 2\pi+\cos x \,.\, \sin 2\pi=\sin x,$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x \,.\, \cos 2\pi-\sin x \,.\, \sin 2\pi=\cos x,$$

а това означава, че функциите $\sin x$ и $\cos x$ са периодични с период 2π.

ж) В заключение ще усилим малко неравенствата от условие 3). Ще установим валидността на следното по-общо неравенство:

$$|\sin x| \leqq |x|. \tag{4.13}$$

При $0<x<\pi/2$ неравенството (4.13) следва от неравенството в условие 3).

При $-\pi/2<x<0$ неравенството (4.13) следва от $\sin(-x)=-\sin x$ и от неравенствата

$$0<\sin(-x)<-x \quad \text{при} \quad -\pi/2<x<0,$$

а тези неравенства са изпълнени вследствие на това, че $(-x)$ е в интервала $(0, \pi/2)$. При $x=0$ имаме $\sin x=x$.

При $\pi/2 \leq |x|$ имаме $|\sin x| \leq 1 < \pi/2 \leq |x|$, т. е. $|\sin x| \leqq |x|$.

Ще преминем към установяване на две основни свойства на функциите $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$.

1°. *Функциите* $\sin x$ *и* $\cos x$ *са непрекъснати във всяка точка* x *на безкрайната права.*

Доказателство. Достатъчно е да установим непрекъснатостта на функцията $f(x)=\sin x$ във всяка точка x, тъй като непрекъснатостта на функцията $g(x)=\cos x$ във всяка точка x ще следва от (4.11).

Най-напред ще докажем, че функцията $\sin x$ е непрекъсната в точката $x=0$. Понеже съгласно 2) $\sin 0=0$, то според определението за непрекъснатост по Хайне е достатъчно да докажем, че за всяка безкрайно малка редица $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $\{\sin x_n\}$ е също безкрайно малка.

От неравенството (4.13) и от условието $|\sin x| \geqq 0$ имаме

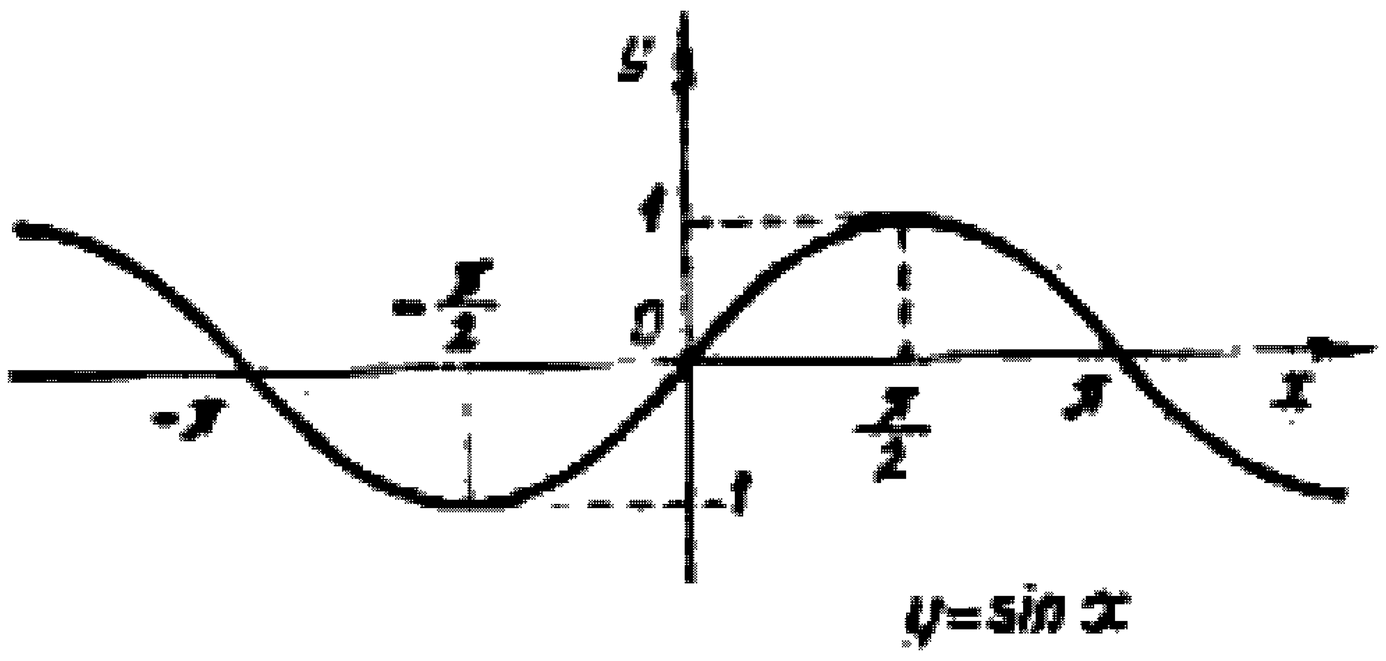
$$0 \leqq |\sin x| \leq |x|; \tag{4.13'}$$

следователно

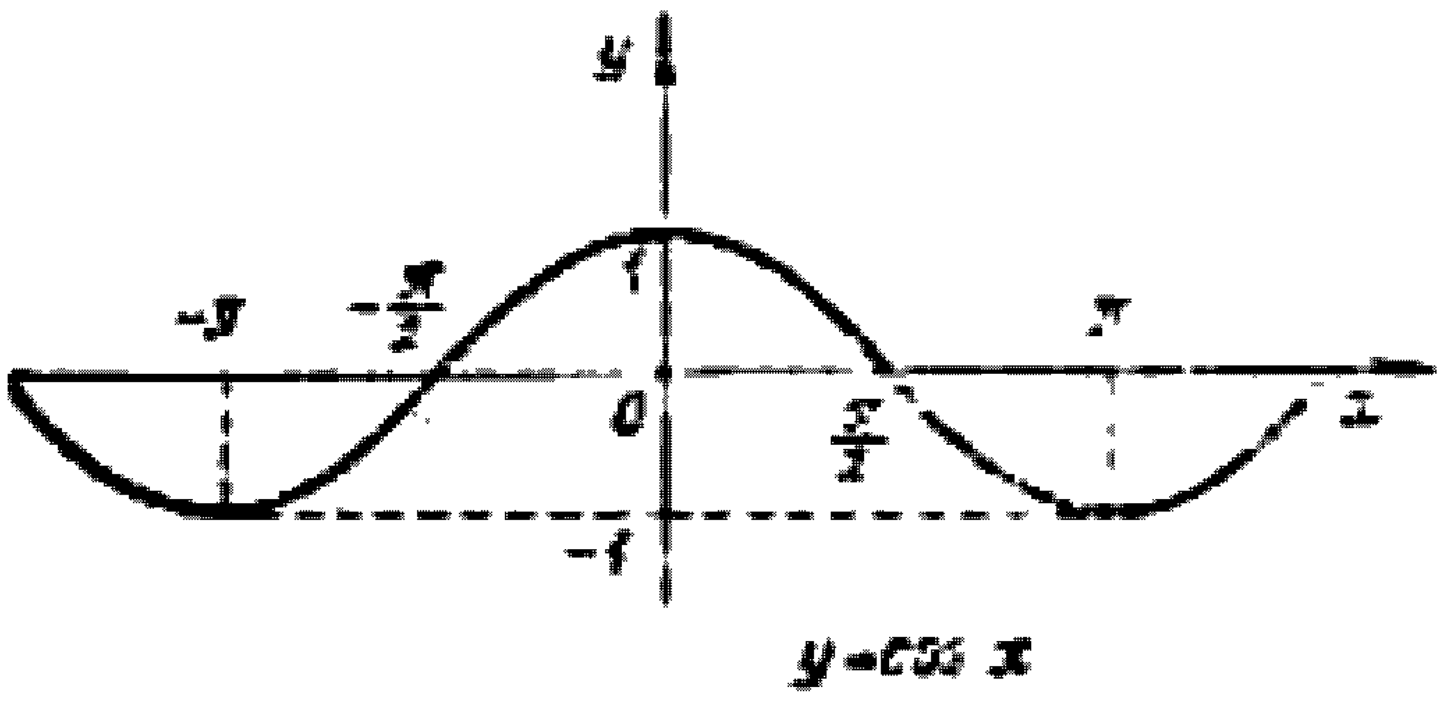
$$0 \leqq |\sin x_n| \leqq |x_n|.$$

От последното неравенство (вж. теорема 3.14) следва, че редицата $\{|\sin x_n|\}$, а оттук и редицата $\{\sin x_n\}$ е безкрайно малка. Непрекъснатостта на функцията $\sin$ в точката $x=0$ е доказана.

Ще докажем сега, че функцията $\sin$ е непрекъсната във всяка точка x на безкрайната права. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица, клоняща към x. Трябва да докажем, че съответната редица $\{\sin x\}$ клони към $\sin x$.



Фиг. 4.8



Фиг. 4.9

Като използваме второто равенство от (4.10) при $x_1=x$ и $x_2=x_n$, получаваме

$$\text{(4.14)} \qquad \sin x_n - \sin x = 2\cos\frac{x_n+x}{2}\cdot\sin\frac{x_n-x}{2}.$$

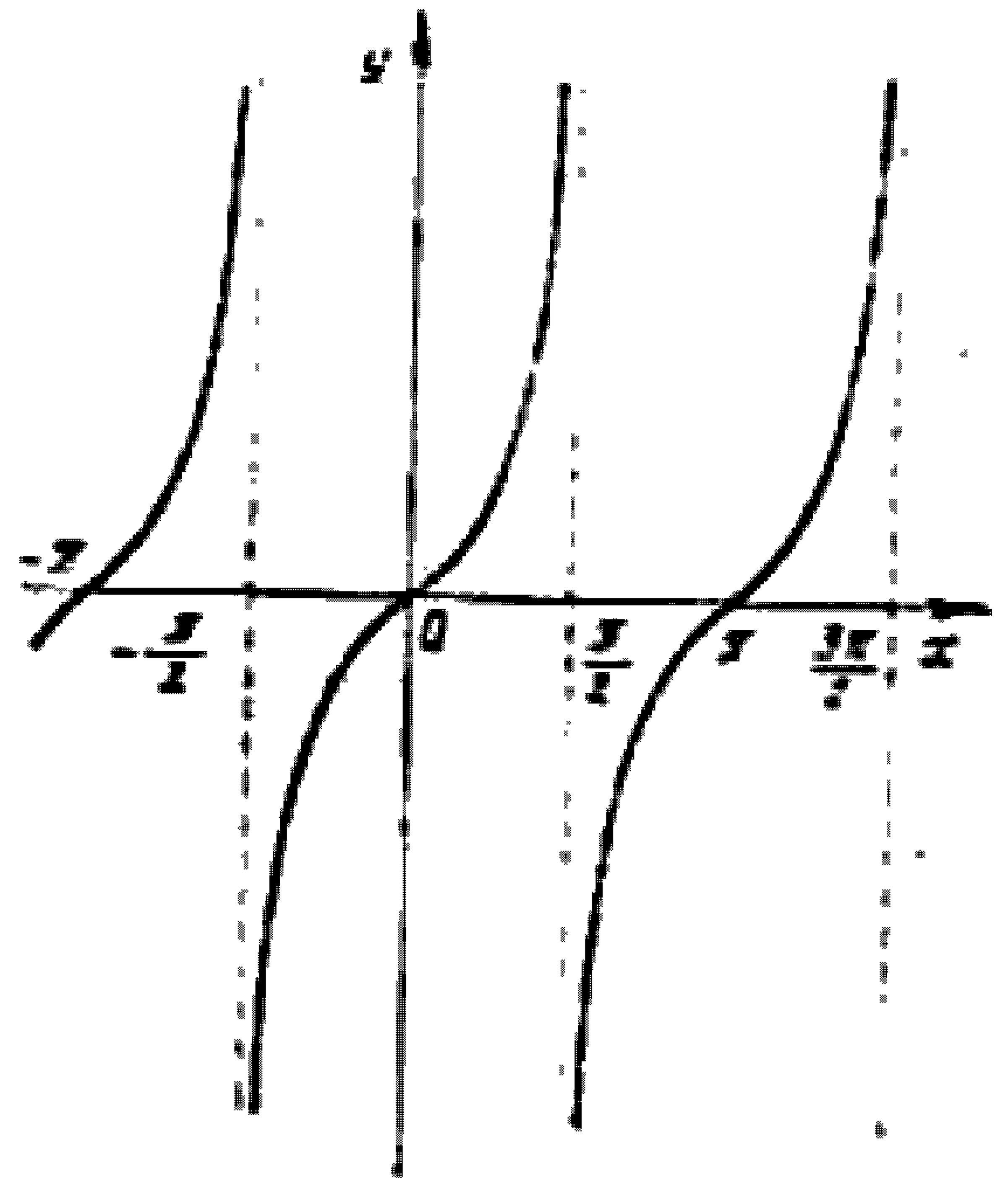
Остава да покажем, че дясната страна на (4.14) е член на безкрайно малка редица, което непосредствено следва от това, че редицата $\left\{\sin\frac{x_n-x}{2}\right\}$ е безкрайно малка поради непрекъснатостта на синуса в точката нула, а редицата $\left\{2\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ е ограничена (вж (4.7)).

2°. *Функцията* $\sin$ *е растяща във всеки от сегментите* $[2k\pi-\pi/2,\ 2k\pi+\pi/2]$ *и намаляваща във всеки от сегментите* $[(2k+1)\pi-\pi/2,\ (2k+1)\pi+\pi/2]$, *а функцията* $\cos$ *е намаляваща във всеки от сегментите* $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ *и растяща във всеки от сегментите* $[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$ (навсякъде тук $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$).

Доказателство. Достатъчно е да проведем всички разсъждения само за функцията $\sin$, тъй като след намирането на всички интервали на монотонност на функцията $\sin$ интервалите на монотонност на функцията $\cos$ могат да бъдат получени от равенствата (4.11).

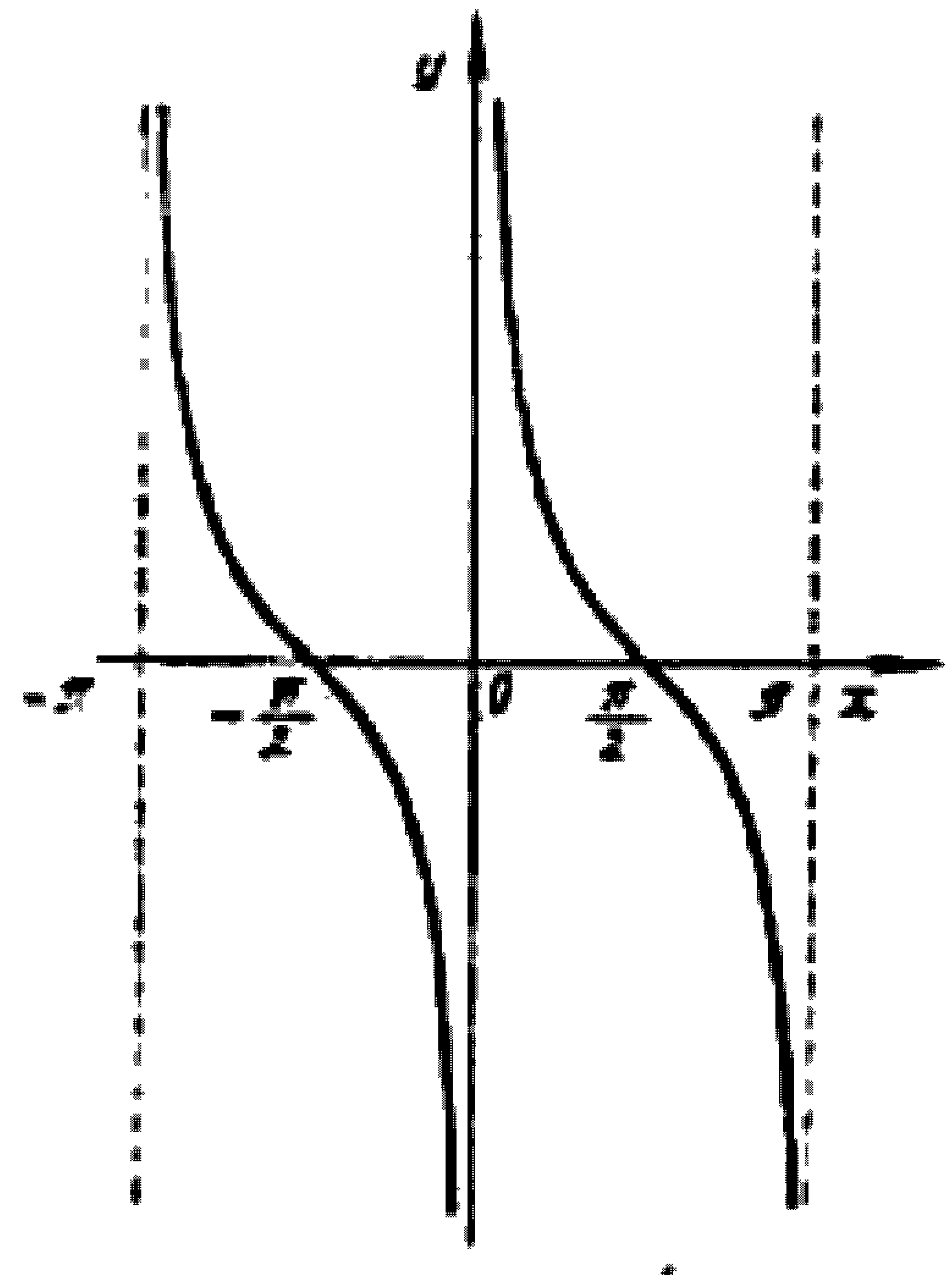
Понеже $\sin$ е периодична функция с период 2π, ще намерим интервалите на монотонност само в рамките на един период например за сегмента $[-\pi/2,\ 2\pi-\pi/2]$. Най-напред ще докажем, че функцията $\sin$ расте в сегмента $[0,\ \pi/2]$. Нека x_1 и x_2 са произволни числа от този сегмент и $x_2>x_1$. Тогава очевидно числата $\frac{x_2+x_1}{2}$ и $\frac{x_2-x_1}{2}$ принадлежат на интервала $(0,\ \pi/2)$ и от второто равенство на (4.10) следва

$$\text{(4.15)} \qquad \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$



$y = \operatorname{tg} x$

Фиг. 4.10



$y = \operatorname{ctg} x$

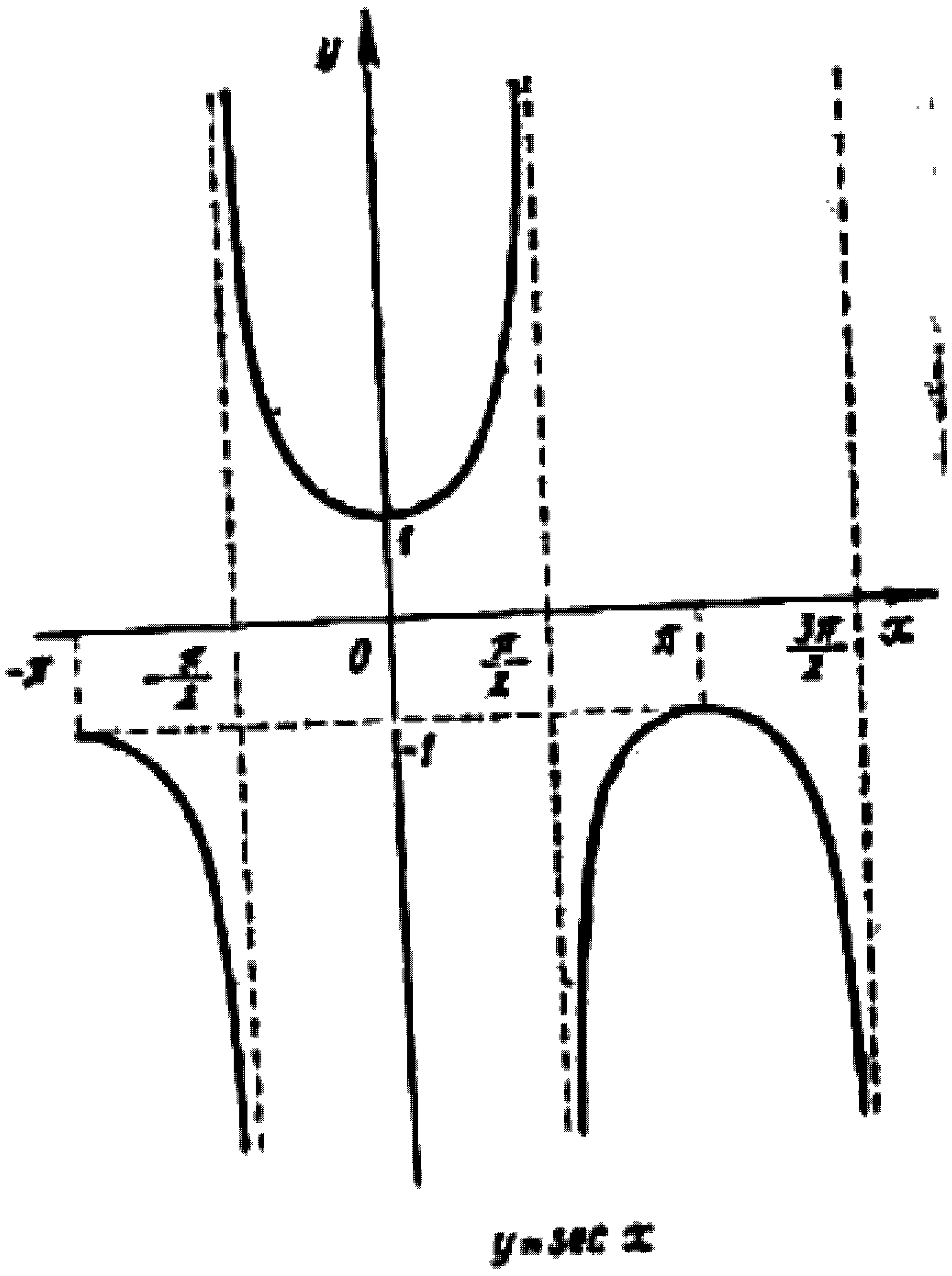
Фиг. 4.11

Но функцията sin има в интервала $(0, \pi/2)$ положителни стойности (условие 3)). Функцията cos има също положителни стойности в интервала $(0, \pi/2)$ (следва от (4.11)). Следователно дясната страна на (4.15) е положително число.

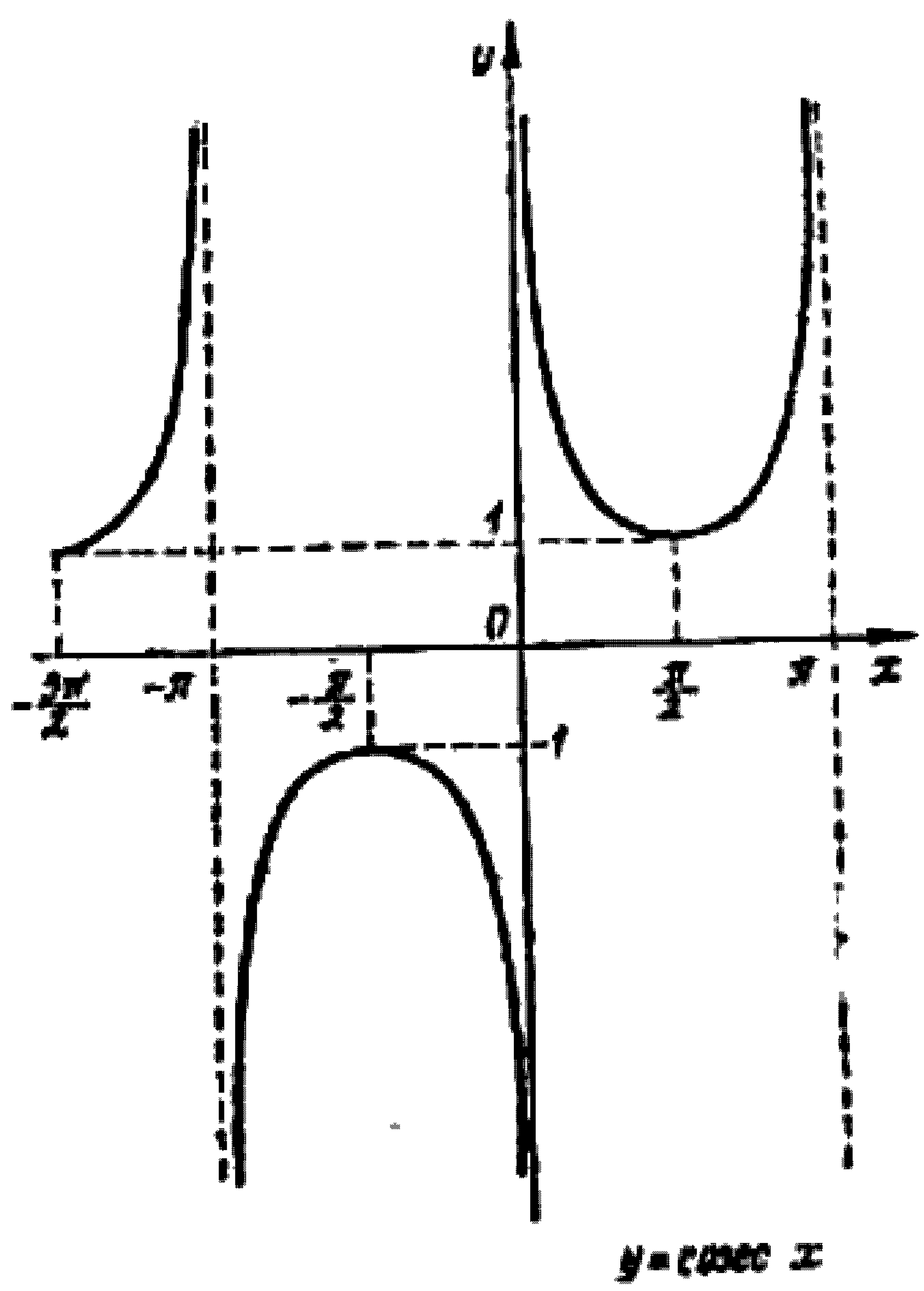
И така доказахме, че функцията sin е растяща в сегмента $[0, \pi/2]$. От нечетността на функцията sin (съотношение (4.8)) следва, че тя е растяща и в сегмента $[-\pi/2, 0]$.

С това е доказано, че функцията sin е растяща в сегмента $[-\pi/2, \pi/2]$. Остава да се изследва поведението на функцията sin в сегмента $[\pi/2, \pi+\pi/2]$. В точка е) се убедихме, че $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, а оттук и от първото равенство на 1) следва $\sin(x+\pi)=\sin x \,.\, \cos\pi+\cos x \,.\, \sin\pi=-\sin x$. От полученото равенство заключаваме, че функцията sin е намаляваща в сегмента $[\pi/2, \pi+\pi/2]$, понеже е растяща в сегмента $[-\pi/2, \pi/2]$. □

От представянията $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и от теорема 4.1 за случая на частно следва, че функцията tg е дефинирана и непрекъсната във всяка точка x, различна от $k\pi+\pi/2$, а функцията ctg е дефинирана и непрекъсната във всяка точка $x \neq k\pi$. Като използваме равенствата $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$, ще получим $\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$ и аналогично $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$. Това показва, че tg и ctg са периодични функции с период π. За да



Фиг. 4.12



Фиг. 4.13

определим областите на монотонност на тези функции, достатъчно е да изследваме интервал с дължина π. От равенствата

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin (x_2 - x_1)}{\cos x_2 \,.\, \cos x_1} \tag{4.16}$$

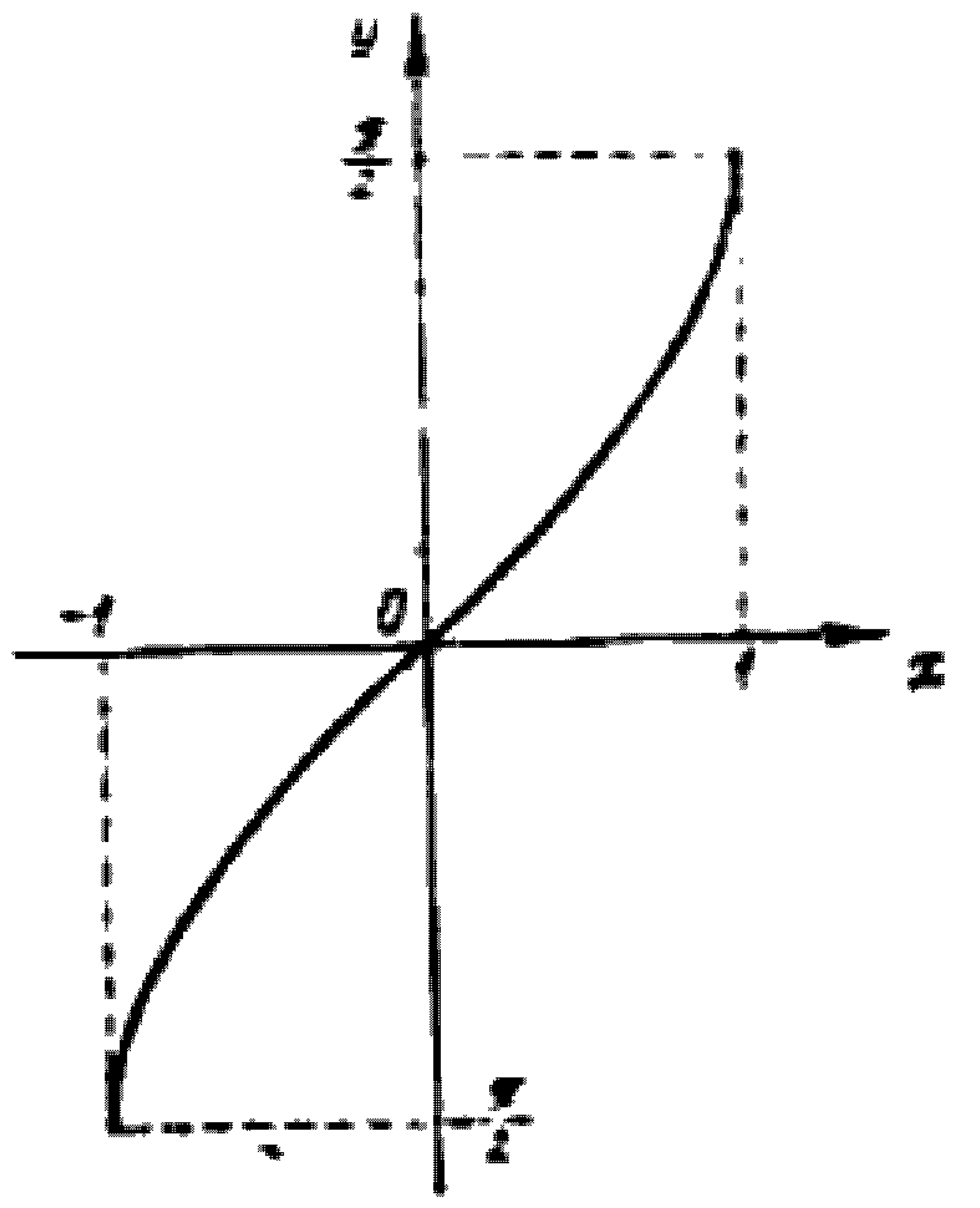
и от това, че sin има също положителни стойности в интервала $(0, \pi)$, а cos има също само положителни стойности в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, следва, че функцията tg е растяща в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. (При всеки x_1 и x_2 от интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, за които $x_2 > x_1$, дясната страна на (4.16) е положителна величина.)

Аналогично се установява, че функцията ctg е намаляваща в интервала $(0, \pi)$.

Няма да се спираме на функциите $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ и $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

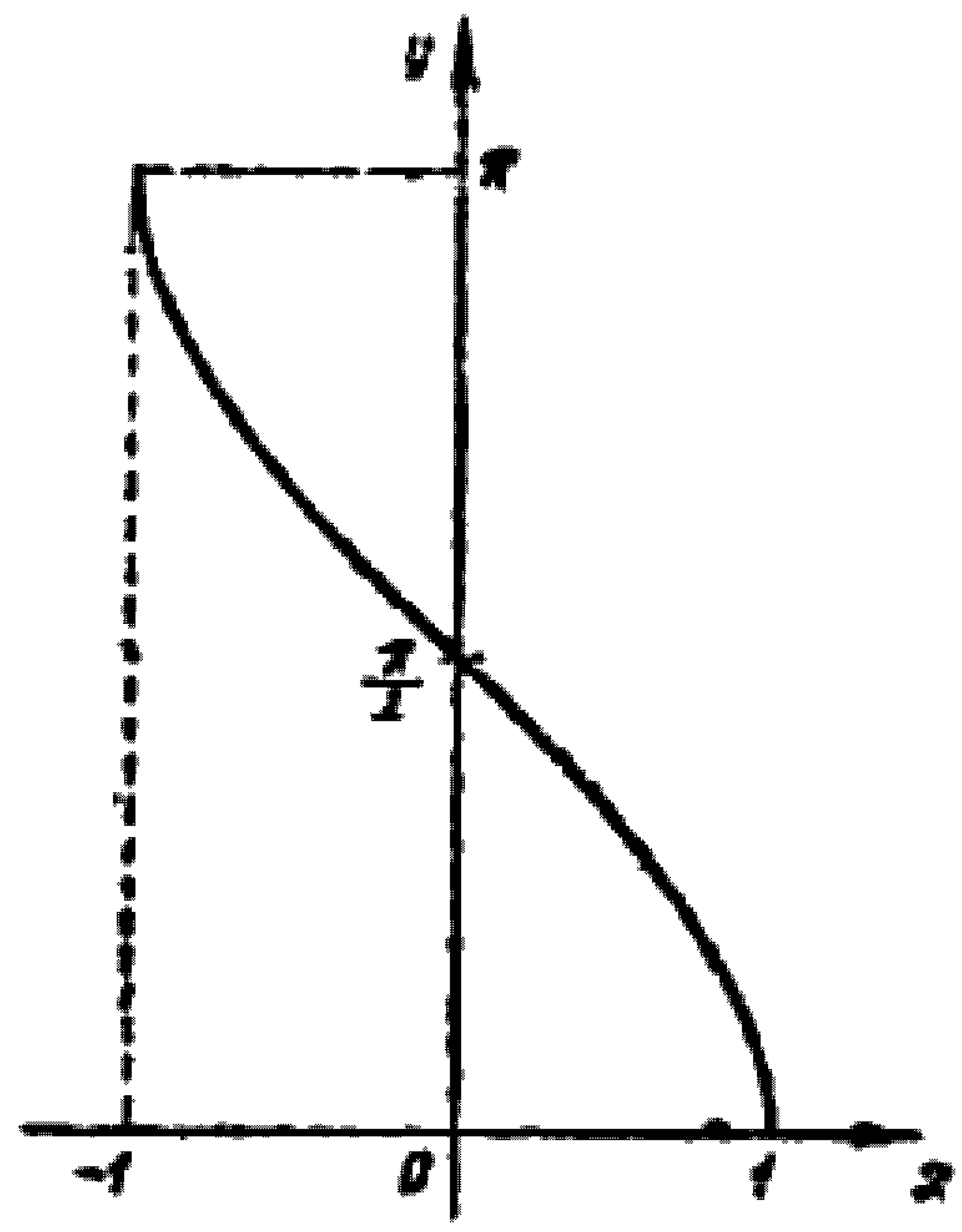
Графиките на всички тригонометрични функции са дадени на фиг. 4.8—4.13.

4.3.5. Обратни тригонометрични функции. Ще дефинираме обратните тригонометрични функции и ще се спрем на въпроса за тяхната непрекъснатост и монотонност.



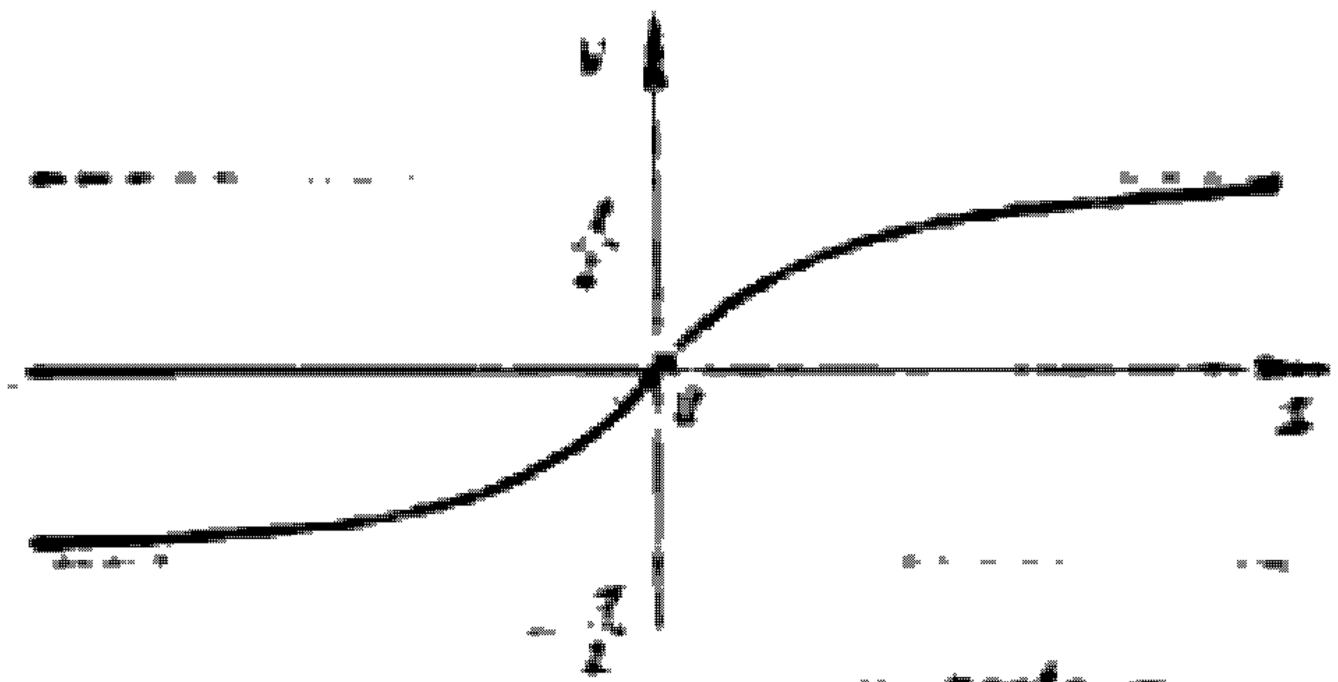
$y = \arcsin x$

Фиг. 4.14



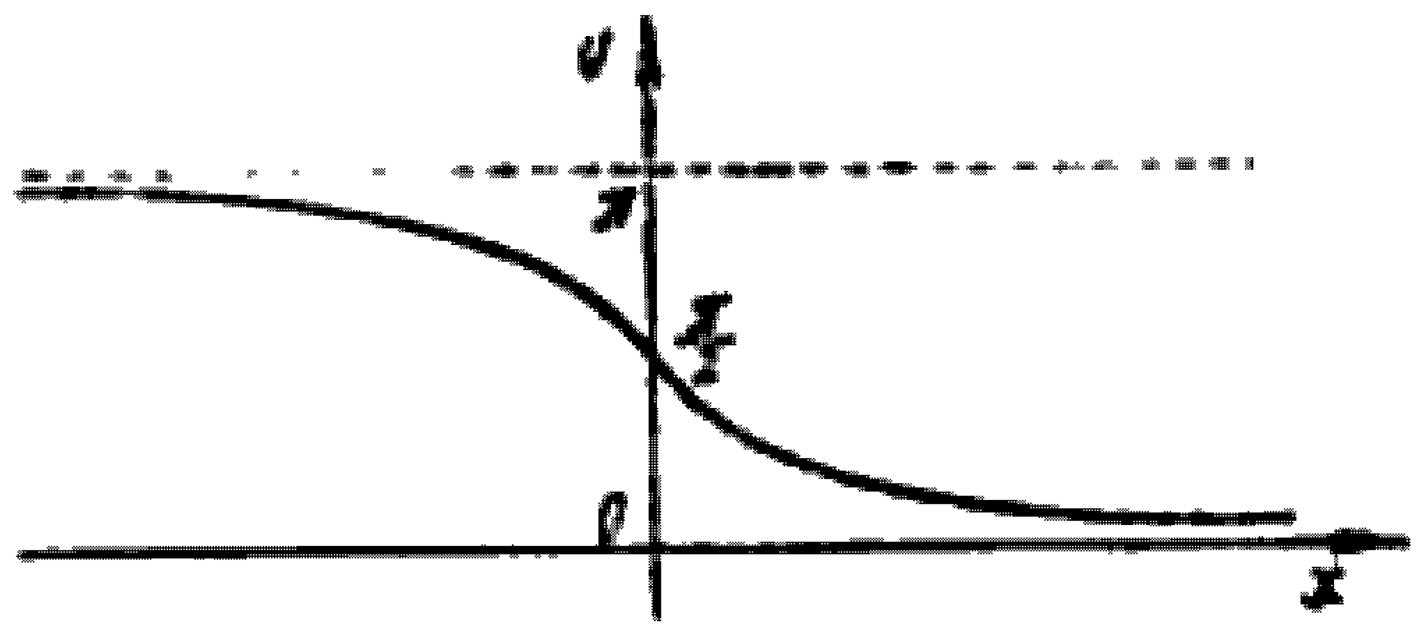
$y = \arccos x$

Фиг. 4.15



$y = \operatorname{arctg} x$

Фиг. 4.16

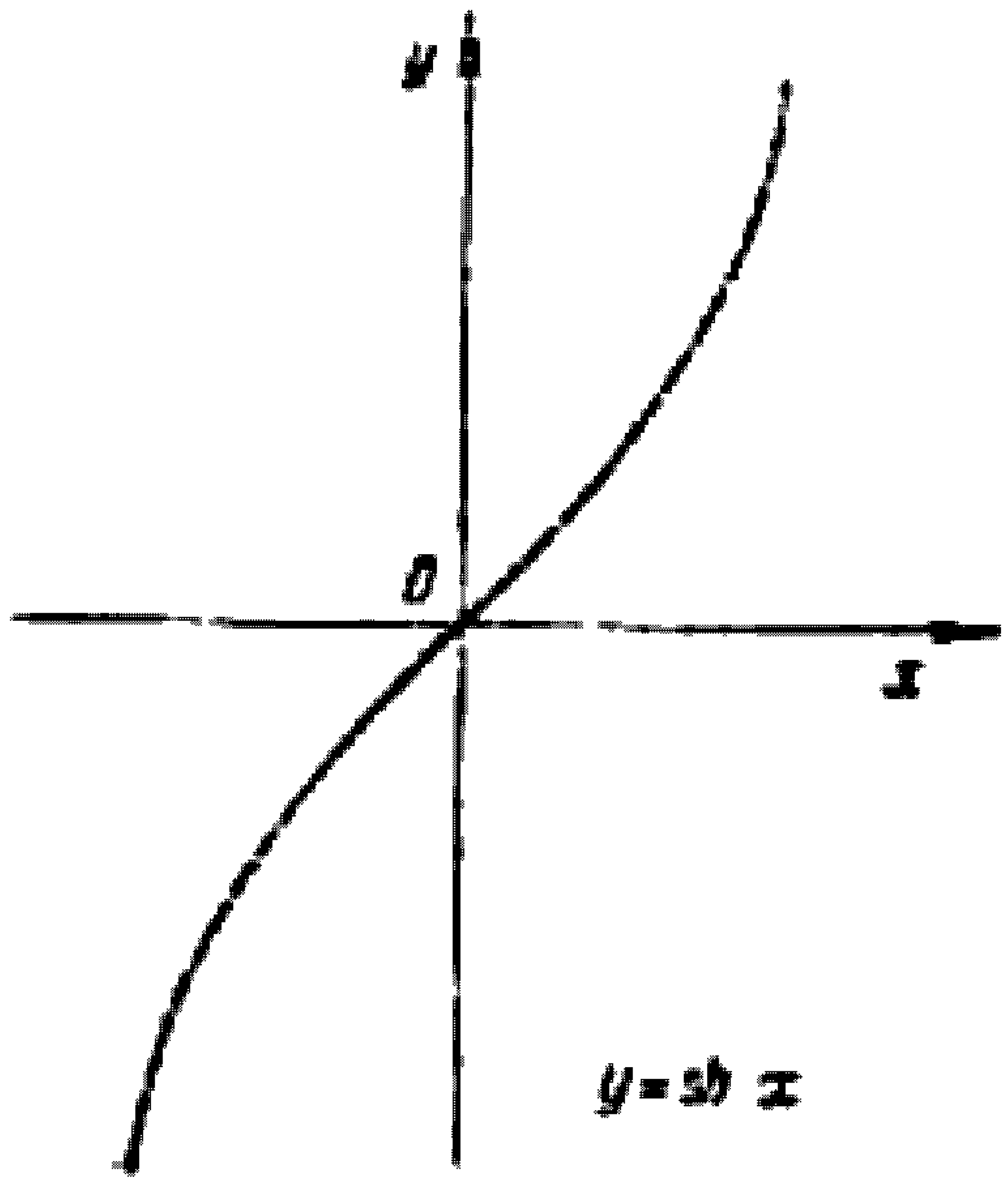


$y = \operatorname{arccotg} x$

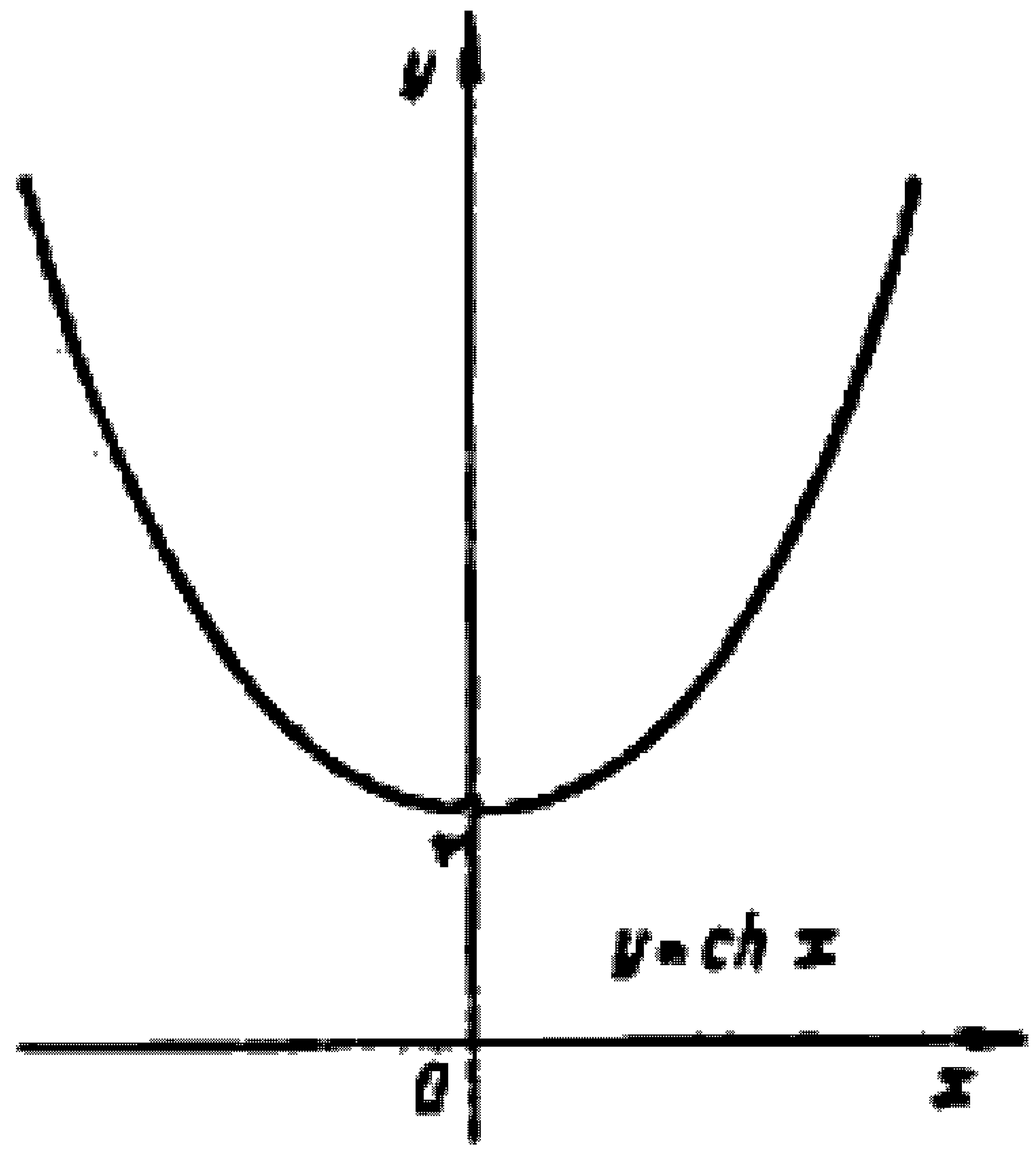
Фиг. 4.17

За дефиниране на функцията arcsin ще разгледаме функцията sin в сегмента $[-\pi/2, \pi/2]$. В този сегмент функцията sin е растяща и непрекъсната (вж. 4.3.4). Множеството от стойностите ѝ е сегментът $[-1, 1]$. Според теорема 4.5 съществува непрекъсната, растяща обратна функция в сегмента $[-1, 1]$, приемаща стойности $-\pi/2$ в точката -1 и $\pi/2$ в точката 1. Тази функция се означава със символа arcsin. По същия начин в сегмента $[-1, 1]$ се дефинира функцията arccos — обратна на функцията cos, намаляваща и непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$.

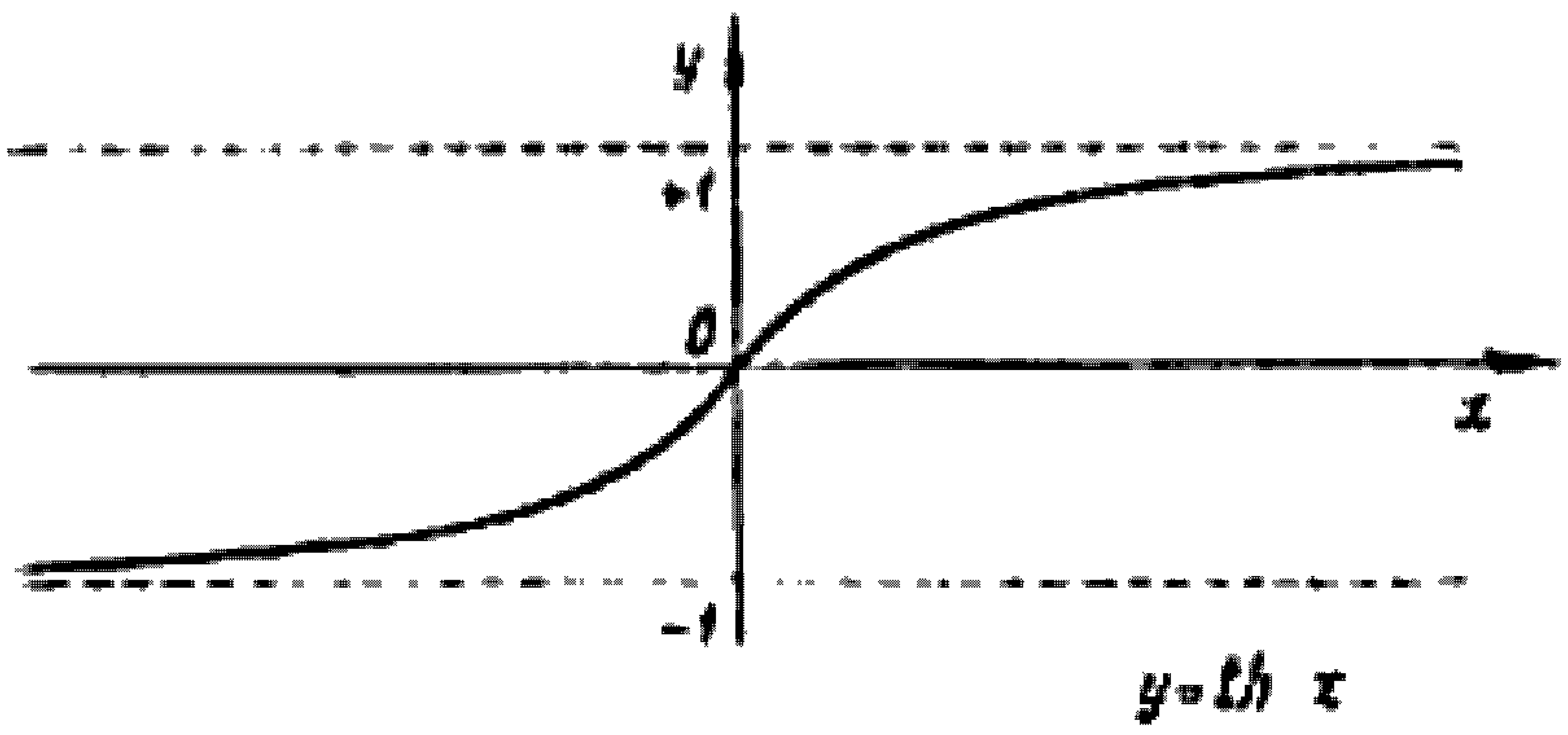
Функцията arccos е намаляваща и непрекъсната в сегмента $[-1, 1]$ и приема в точките $x=-1$ и $x=1$ съответно стойностите π и 0.



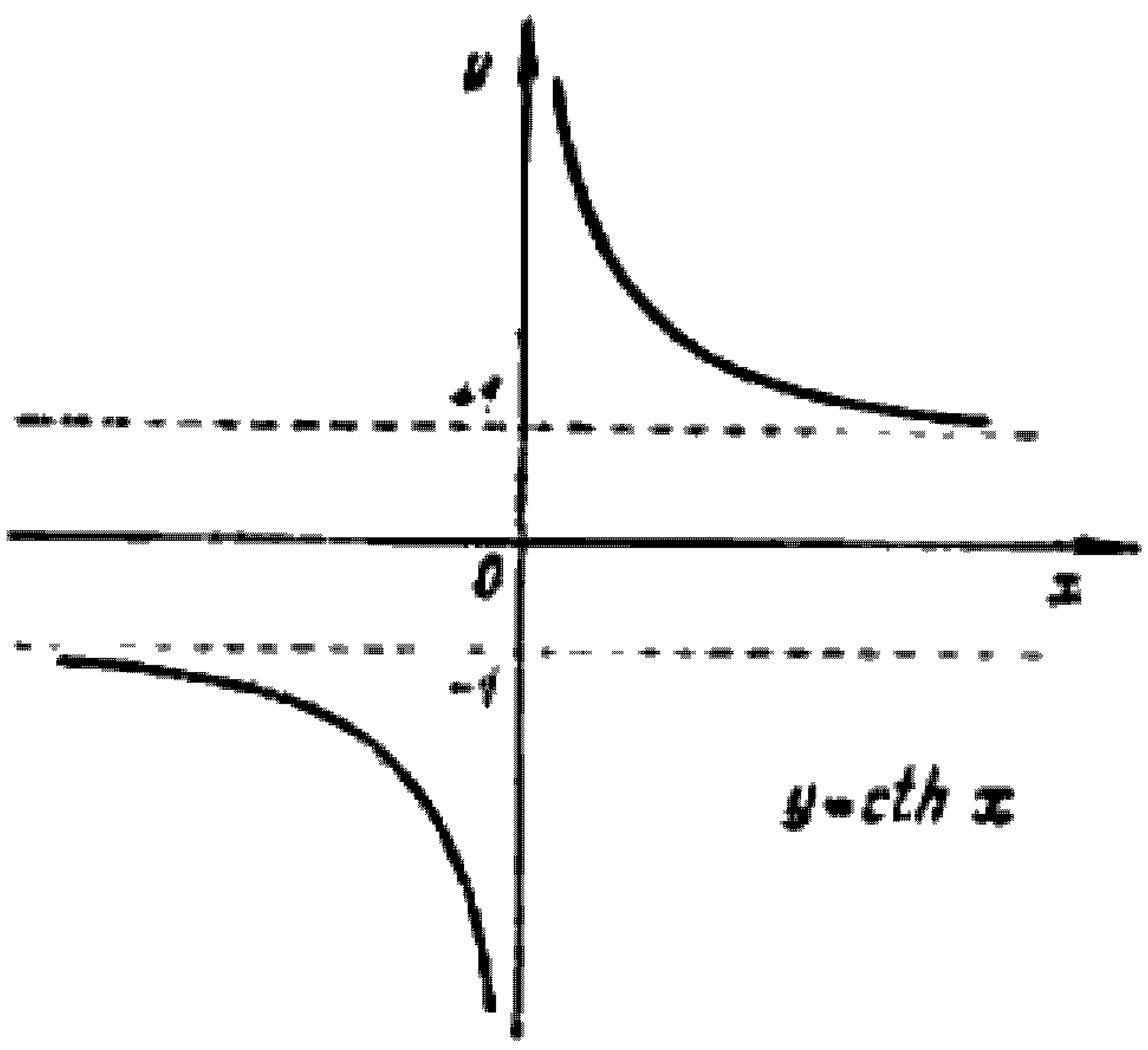
Фиг. 4.18 а



Фиг. 4.18 б



Фиг. 4.18 в



Фиг. 4.18 г

Функциите arctg и arcctg се дефинират като обратни функции на тангенс и котангенс, разглеждани в интервалите $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(0, \pi)$. Тези функции са дефинирани и монотонни върху цялата безкрайна права. На фиг. 4.14—4.17 са изобразени графиките на обратните тригонометрични функции.

4.3.6. Хиперболични функции. Функциите $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ се наричат съответно *хиперболичен косинус* и *хиперболичен синус* и се означават ch и sh:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Хиперболичният тангенс и хиперболичният котангенс се определят съответно от формулите

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

От определението за хиперболични функции следва, че хиперболичният косинус, хиперболичният синус и хиперболичният тангенс са дефинирани върху цялата числова ос, а хиперболичният котангенс — върху цялата числова ос с изключение на точката $x=0$. На фиг. 4.18 а) — 4.18 г) са дадени графиките на тези функции.

Хиперболичните функции са непрекъснати във всяка точка от дефиниционната си област (това следва от непрекъснатостта на показателната функция и от теорема 4.1).

Те притежават редица свойства, аналогични на свойствата на тригонометричните функции. Например за хиперболичните функции са в сила теореми за събиране, аналогични на теоремите за събиране при тригонометричните функции:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Непосредствено се проверяват и формулите $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$. Епитетът „хиперболичен" е свързан с обстоятелството, че формулите $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$ определят хипербола, както формулите $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ определят окръжност. Наистина в първия случай имаме $x^2-y^2=a^2$, т. е. уравнение на хипербола, а във втория $x^2+y^2=a^2$ — уравнение на окръжност.

4.4. Две забележителни граници

4.4.1. Първа забележителна граница. Най-напред ще докажем една теорема, функционален аналог на теорема 3.14.

Теорема 4.6 (функционален аналог на принципа за двустранните ограничения). *Нека в някоя прободена δ-околност Ω на точката a са зададени функциите f, h и g, двете от които f и g имат в точката a обща граница, равна на b. Тогава, ако за всяко $x \in \Omega$ са изпълнени неравенствата*

(4.17) $$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

то и функцията h има граница в точката a, равна на b.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, всички членове на която са различни от a. Тогава съгласно определението на граница по Хайне двете редици от съответните стойности на функциите $\{f(x_n)\}$

и $\{g(x_n)\}$ клонят към b и според (4.17) за всички n са изпълнени неравенствата

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n).$$

Съгласно теорема 3.14 редицата $\{h(x_n)\}$ е сходяща и клони също към b. Това означава, че числото b е граница на функцията h в точката a. □

Теорема 4.7. *Границата на функцията* $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ *в точката* $x=0$ *съществува и*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказателство. Ще тръгнем от неравенствата

$$(4.18)\qquad 0<\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad (\text{при } 0<x<\pi/2),$$

разгледани в 4.3.4. Чрез деление на $\sin x>0$ от (4.18) получаваме следните неравенства:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{при } 0<x<\pi/2.$$

За реципрочните величини очевидно са изпълнени обратните неравенства

$$(4.19)\qquad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \text{при } 0<x<\pi/2.$$

Ще отбележим, че (4.19) са изпълнени и при $-\pi/2<x<0$, понеже функциите $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ и 1 са четни.

Установихме, че неравенствата (4.19) са изпълнени за всички стойности на x от интервала $-\pi/2<x<\pi/2$ с изключение на точката $x=0$, т. е. навсякъде в една прободена δ-околност на точката $x=0$. Тъй като двете функции $f(x)=\cos x$ и $g(x)=1$ имат в точката $x=0$ еднаква граница, равна на единица, то от теорема 4.6 следва, че и функцията $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ има в точката $x=0$ граница, равна на единица. □

4.4.2. Втора забележителна граница.

Теорема 4.8. *Границата на функцията* $f(x)=(1+x)^{1/x}$ *в точката* $x=0$ *съществува и е равна на числото* e.*

Доказателство. Достатъчно е да се докаже, че дясната и лявата граница на функцията $f(x)=(1+x)^{1/x}$ в точката $x=0$ съществуват и са равни на e.

* Числото e бе въведено в 3.2.3 като граница на редицата $\{(1+1/n)^n\}$, когато $n\to\infty$.

1. Първо ще докажем, че дясната граница на тази функция в точката $x=0$ съществува и е равна на e.

Ще използваме определението за дясна граница по Коши и ще покажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че за всяко $x\in(0, \delta)$ да е изпълнено неравенството

$$|(1+x)^{1/x}-e|<\varepsilon. \tag{4.20}$$

Избираме произволно $\varepsilon>0$ и разглеждаме двете редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с членове $a_n=(1+1/(1+n))^n$, $b_n=(1+1/n)^{n+1}$. Ще се убедим, че тези две редици клонят към e. Като използваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$, и теоремите за граница на частно и произведение на две сходящи редици, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/(n+1))^{n+1}}{1+1/(n+1)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}((1+1/n)^n(1+1/n))=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\lim_{n\to\infty}(1+1/n)=e\,.1=e.$$

Тъй като редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към e, то за избраното по-горе $\varepsilon>0$ съществуват такива номера N_1 и N_2, че $|a_n-e|<\varepsilon$ при $n>N_1$, $|b_n-e|<\varepsilon$ при $n\geq N_2$. Нека N е по-голямото от числата N_1 и N_2. Тогава при $n\geq N$ ще са изпълнени и двете неравенства

$$|a_n-e|<\varepsilon \text{ и } |b_n-e|<\varepsilon. \tag{4.21}$$

Нека x е произволно число от интервала $0<x<\delta=1/N$. Тогава $1/x>N$. Означаваме с n цялата част на числото $1/x$, т. е. полагаме $n=[1/x]$. Поради $1/x>N$ имаме $n\geq N$ и са изпълнени неравенствата

$$n\leq 1/x<n+1. \tag{4.22}$$

От (4.22) следват неравенствата

$$1+\frac{1}{n+1}<1+x\leq 1+\frac{1}{n}. \tag{4.23}$$

От неравенствата (4.22), (4.23) и от това, че показателната функция е растяща при основа по-голяма от единица, следва

$$(1+1/(n+1))^n<(1+x)^{1/x}<(1+1/n)^{n+1}, \text{ или } a_n<(1+x)^{1/x}<b_n.$$

И така доказахме, че за всяко x от интервала $0<x<\delta=1/N$ при някое $n\geq N$ (зависещо, разбира се, от x) са изпълнени неравенствата $a_n<(1+x)^{1/x}<b_n$ и неравенствата

$$a_n-e<(1+x)^{1/x}-e<b_n-e. \tag{4.24}$$

Като съпоставим (4.24) с неравенствата (4.21), верни за всяко $n\geq N$, окончателно се убеждаваме, че за всяко x от интервала $0<x<\delta = 1/N$ са изпълнени неравенствата (4.20).

2. Ще докажем сега, че и лявата граница на функцията $f(x) = (1+x)^{1/x}$ в точката $x=0$ съществува и е равна на e.

Съгласно определението за лява граница по Хайне достатъчно е да докажем, че за всяка безкрайно малка редица от отрицателни числа $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(x_n) = (1+x_n)^{1/x_n}$ клони към e.

Нека $\{x_n\}$ е безкрайно малка редица от отрицателни числа. Ще разглеждаме членовете на редицата от този номер N нататък, от който всички елементи x_n са по модул по-малки от единица.

Полагаме $y_n = -x_n/(1+x_n)$. Тогава $x_n = -y_n/(1+y_n)$. Очевидно $\{y_n\}$ ще е безкрайно малка редица, състояща се само от положителни числа и

$$f(x_n) = (1+x_n)^{1/x_n} = (1-y_n/(1+y_n))^{-(1+y_n)/y_n}$$
$$= (1/(1+y_n))^{-(1/y_n+1)} = (1+y_n)^{1+1/y_n}.$$

Следователно

$$(4.25)\qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (1+y_n)^{1/y_n} \cdot \lim_{n\to\infty} (1+y_n) = e \cdot 1 = e.$$

Тъй като редицата $\{y_n\}$ клони към нула и има само положителни членове, то $\lim\limits_{n\to\infty} (1+y_n)^{1/y_n} = e$ (вече доказахме съществуването на дясна граница, равна на e), а $\lim\limits_{n\to\infty} (1+y_n) = 1$. □

Следствие. *Границата на функцията* $f(t) = (1+1/t)^t$ *при* $t\to\infty$ *съществува и е равна на* e.

Съгласно определението на граница при $t\to\infty$ по Хайне трябва да се докаже, че за всяка безкрайно голяма редица $\{t_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(t_n) = (1+1/t_n)^{t_n}$ клони към e. Ще разглеждаме безкрайно голямата редица $\{t_n\}$ от този член с номер N нататък, от който всички нейни членове t_n са по модул по-големи от единица. Полагаме $x_n = 1/t_n$, така че $t_n = 1/x_n$. Според теорема 3.6 редицата $\{x_n\}$ е безкрайно малка и $f(t_n) = (1+1/t_n)^{t_n} = (1+x_n)^{1/x_n}$.

Остава да отбележим, че съгласно теорема 4.8

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

4.5. Точки на прекъсване на функция и тяхната класификация

4.5.1. Класификация на точките на прекъсване на функция. В § 1 нарекохме точки на прекъсване на функцията f онези точки, в които функцията не е непрекъсната. Предполагахме, че функцията е дефинирана в разглежданите точки.

Ще разширим нашите разглеждания, като включим и тези точки, в които функцията f не е дефинирана, но те са точки на сгъстяване за дефиниционната област на функцията.

Ще изясним възможните видове точки на прекъсване.

1°. Отстранимо прекъсване. *Точката a се нарича* ***точка на отстранимо прекъсване*** *на функцията f, ако съществува $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но или функцията f не е дефинирана в точката a, или е дефинирана, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.*

Пример: *Функцията*

$$f(x)=\begin{cases} x^{-1}\sin x & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

има в точката $x=0$ отстранимо прекъсване.

Наистина границата на функцията в точката $x=0$, както показахме в 4.4.1, е равна на 1, но стойността ѝ $f(0)$ в точката 0 е равна на 0.

Ако функцията f има в точката a отстранимо прекъсване, това прекъсване може да се отстрани, без да се изменят стойностите на функцията в точките, различни от a. Достатъчно е да положим стойността на функцията в точката a равна на границата ѝ стойност в тази точка. Така в разгледания пример трябва да положим $f(0)=1$ и тогава $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}\sin x = f(0) = 1$, т. е. функцията f ще бъде непрекъсната в точката $x=0$.

2°. Прекъсване от първи род. *Точката a се нарича* ***точка на прекъсване от първи род*** *на функцията f, ако в тази точка функцията f има дясна и лява граница, но различни една от друга:*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x).$$

Образно казано, прекъсването от първи род може да се нарече краен скок.

Примери:

1. Функцията

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & \text{при } x>0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ -1 & \text{при } x<0 \end{cases}$$

има в точката $x=0$ прекъсване от първи род. Действително

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x=1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x=-1.$$

2. За функцията $f(x)=|x|^{-1}\sin x$ имаме

$$\lim_{x\to 0+0} |x|^{-1}\sin x=1, \quad \lim_{x\to 0-0} |x|^{-1}\sin x=-1.$$

Точката $x=0$ е точка на прекъсване от първи род.

3. Функцията $f(x)=1/(1+2^{1/(x-1)})$, дефинирана навсякъде освен в точката $x=1$, има в точката $x=1$ прекъсване от първи род. Действително, ако $\{x_n\}$ клони към 1 и се състои от членове $x_n>1$, то $\{1/(x_n-1)\}$ е безкрайно голяма редица с положителни членове. Затова $\{1+2^{1/(x_n-1)}\}$ е безкрайно голяма редица и следователно редицата с общ член $f(x_n)=1/(1+2^{1/(x_n-1)})$ е безкрайно малка, т. е. $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=0$.

Ако пък $\{x_n\}$ клони към 1 и се състои от членове $x_n<1$, то $\{1/(x_n-1)\}$ е безкрайно голяма редица с отрицателни членове. Затова $\{2^{1/(x_n-1)}\}$ клони към нула и следователно редицата с общ член $f(x_n)=1/(1+2^{1/(x_n-1)})$ клони към единица, т. е. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$.

3°. Прекъсване от втори род. *Точката a се нарича* ***точка на прекъсване от втори род*** *на функцията f, ако функцията f няма поне една от едностранните граници в тази точка или поне една от едностранните граници е безкрайна.*

Примери:

1. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} x\cos x^{-1} & \text{при } x<0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ \cos x^{-1} & \text{при } x>0 \end{cases}$$

има лява граница в точката $x=0$, равна на нула: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$.
Наистина, ако $\{x_n\}$ е редица, клоняща към нула с членове $x_n<0$, то

$$0\leq |f(x_n)|=|x_n||\cos x_n^{-1}|\leq |x_n|.$$

И понеже $|x_n|\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x_n)=0$.

Разглежданата функция няма дясна граница в точката $x=0$. Наистина да вземем две редици с положителни членове, клонящи към нула: $x_n=1/(\pi/2+\pi n)$ и $x'_n=1/2\pi n$. Ако функцията имаше дясна граница в точката $x=0$, двете редици $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ щяха да клонят към едно и също число.

Обаче $f(x'_n)=\cos 2\pi n=1$, а $f(x_n)=\cos(\pi/2+\pi n)=0$, т. е. $1=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n)\neq\lim f(x_n)=0$.

Следователно разглежданата функция има в точката $x=0$ прекъсване от втори род.

2. Функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ очевидно има прекъсване от втори род във всяка точка $x_k=\pi/2+k\pi$, където $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, тъй като във всяка такава точка

$$\lim_{x\to x_k-0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to x_k+0} f(x)=-\infty.$$

Образно казано, функцията $\operatorname{tg} x$ има във всяка точка x_k безкраен скок.

3. Функцията

$$f(x)=\begin{cases}\sin x^{-1} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 1 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

има прекъсване от втори род в точката $x=0$, тъй като в тази точка тя няма нито дясна, нито лява граница. Понеже $\sin(-1/x)=-\sin(1/x)$, достатъчно е да покажем, че тя няма дясна граница в точката $x=0$, което следва непосредствено от това, че на двете редици от стойности на аргумента $x_n=1/\pi n$ и $x'_n=1/(\pi/2+2\pi n)$ отговарят съответно редиците от стойности на функцията $f(x_n)=\sin\pi n=0$ и $f(x'_n)=\sin(\pi/2+2\pi n)=1$, първата от които клони към нула, а втората — към единица.

Ще въведем понятието частично непрекъсната функция, което често се среща в математиката и нейните приложения.

Една функция се нарича ***частично непрекъсната*** *в сегмента $[a, b]$, ако е дефинирана навсякъде в този сегмент, непрекъсната е във всяка вътрешна точка с изключение евентуално на краен брой точки, в които има прекъсване от първи род, и има дясна граница в точката a и лява граница в точката b.*

Една функция се нарича ***частично непрекъсната в интервал (или върху безкрайната права)****, ако е частично непрекъсната във всеки сегмент, принадлежащ на интервала (безкрайната права).*

Например функцията $f(x)=[x]$ е частично непрекъсната както във всеки сегмент, така и върху безкрайната права.

4.5.2. За точките на прекъсване на монотонна функция. Следващото твърдение хвърля светлина върху характера на точките на прекъсване на монотонните функции.

Теорема 4.9. *Ако функцията f, дефинирана в сегмента $[a, b]$, е монотонна в този сегмент, тя може да има само точки на прекъсване от първи род и множеството от точките й на прекъсване е най-много изброимо множество.*

Доказателство. Според лемата, доказана в 4.2.1, една монотонна функция има крайни десни и леви граници във всички вътрешни точки на сегмента $[a, b]$ и освен това крайна дясна граница в точката a и крайна лява граница в точката b. Оттук следва, че точките на прекъсване на монотонна функция могат да бъдат само от първи род.

За да докажем втората част на теоремата — че точките на прекъсване са най-много изброимо множество, — ще приемем за определеност, че функцията f е ненамаляваща в сегмента $[a, b]$. Достатъчно е да се докаже, че точките на прекъсване в интервала (a, b), т. е. точките, които са вътрешни за сегмента $[a, b]$, са най-много изброимо много. Ще отбележим, че във всяка такава точка на прекъсване x за дясната и лявата граница е изпълнено неравенството $f(x+0)>f(x-0)$ (вж. забележката към посочената по-горе лема). Според лема 2 от глава 2 за всеки две различни реални числа съществува рационално число, заключено между тях.

Тъй като във всяка точка на прекъсване x е изпълнено неравенството $f(x+0)>f(x-0)$, то на всяка точка на прекъсване x може да се съпостави едно рационално число $r(x)$, удовлетворяващо неравенствата $f(x+0)>r(x)>f(x-0)$.

Ще отбележим, че при това на различните точки на прекъсване ще бъдат съпоставени различни рационални числа. Наистина, ако x_1 и x_2 са две точки на прекъсване, за които $x_1<x_2$, то понеже функцията е ненамаляваща, имаме $f(x_1+0)\leq f(x_2-0)$, откъдето $r(x_1)<r(x_2)$.

По такъв начин множеството от всички точки на прекъсване на функцията f, разположени вътре в сегмента $[a, b]$, е подмножество на множеството на рационалните числа, което, както видяхме в 2.7, е изброимо. □

4.6. Локални и глобални свойства на непрекъснатите функции

Локални свойства на една функция са тези, които са валидни в достатъчно малки околности на дадена точка от дефиниционната й област. Тези свойства характеризират поведението на функцията, когато аргументът се приближава към изследваната точка. Например непрекъснатостта на функция в някоя точка на дефиниционната й област е локално свойство на тази функция.

Глобални свойства са тези свойства, които функцията притежава в цялата си дефиниционна област. Например монотонността на функцията f в сегмента $[a, b]$ е нейно глобално свойство.

4.6.1. Локални свойства на непрекъснати функции. Ще въведем някои нови понятия. Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$.

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***ограничена отгоре (отдолу)*** *в множеството $\{x\}$, ако съществува такова реално число M (реално число m), че за всяко $x \in \{x\}$ е изпълнено неравенството $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$). Числото M (числото m) се нарича* ***горна (долна) граница*** *на функцията f в множеството $\{x\}$.*

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***ограничена от двете страни*** *(или просто* ***ограничена****) в множеството $\{x\}$, ако в това множество тя е ограничена и отгоре, и отдолу, т. е. ако съществуват такива реални числа m и M, че за всяко $x \in \{x\}$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$.*

Ограничеността на функцията f в множеството $\{x\}$ фактически означава ограниченост на множеството $\{f(x)\}$ от всички стойности на тази функция (отговарящи на стойностите на аргумента от множеството $\{x\}$).

Примери:

1. Функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$ в интервала $(0, \pi/2)$ е ограничена отдолу (за долна граница може да се вземе число $m \leq 0$) и неограничена отгоре.

2. Функцията на Дирихле, равна на нула в ирационалните точки и на единица в рационалните точки, е ограничена (от двете страни) върху всяко множество $\{x\}$.

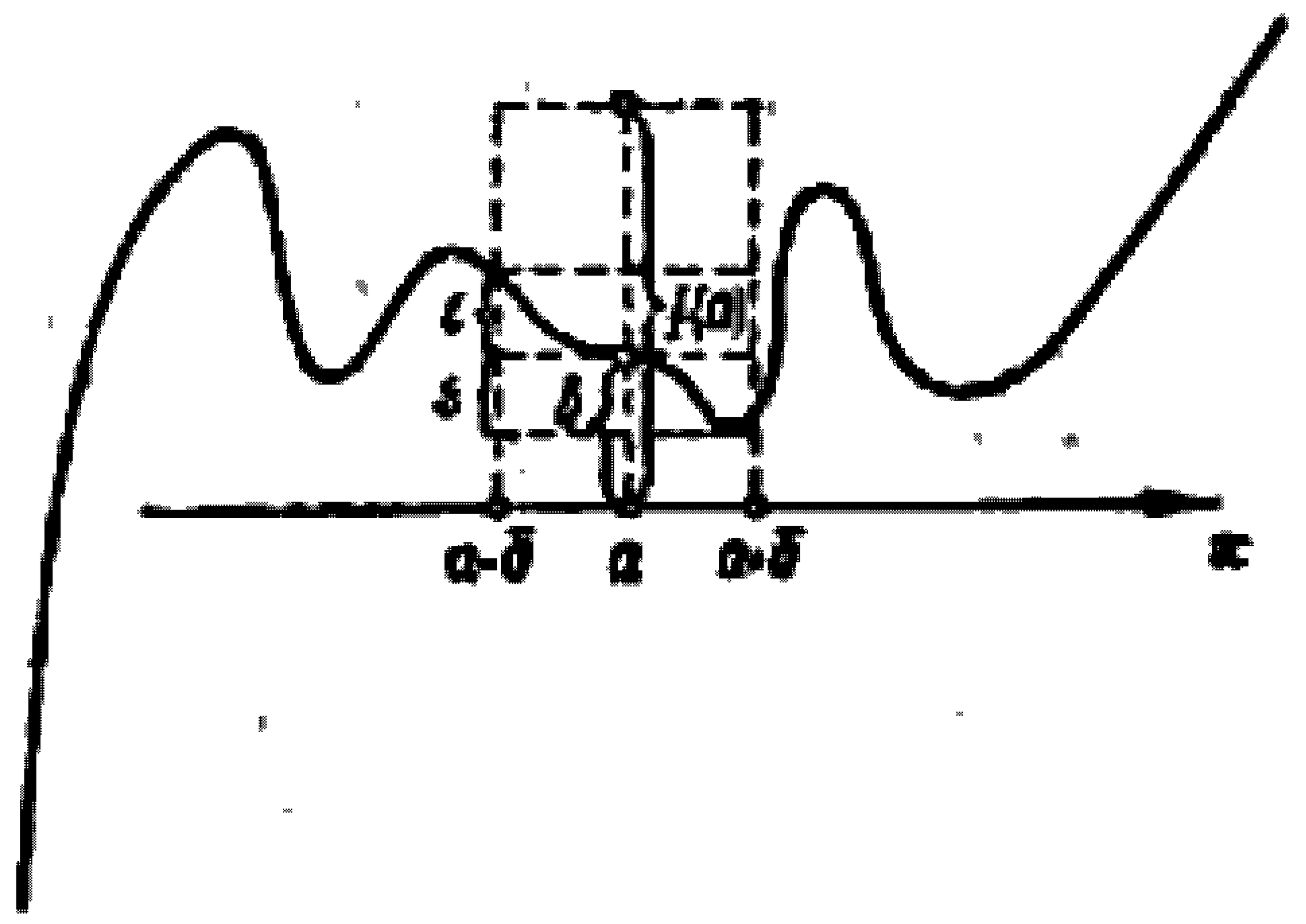
В сила е следната теорема за локална ограниченост на функции с крайни граници:

Теорема 4.10 (за локалната ограниченост на функции, имащи крайна граница). *Нека функцията f, дефинирана в множеството $\{x\}$, има крайна граница в точката a. Тогава съществува такова положително число δ, че функцията f е ограничена в множеството $B_\delta = \{x\} \cap (a-\delta, a+\delta)$.*

Доказателство. Нека границата на f в точката a е равна на b. Според определението на граница по Коши за положителното число $\varepsilon = 1$ съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x от прободената δ-околност на точката a е изпълнено неравенството $|f(x) - b| < 1$, или

$$b - 1 < f(x) < b + 1. \tag{4.26}$$

Ако множеството $\{x\}$ не съдържа точката a, теоремата е доказана, тъй като в този случай неравенствата (4.26) показват, че за всяка точка от множеството B_δ стойностите на функцията f са заключени между числата $m = b - 1$ и $M = b + 1$.



Фиг. 4.19

Ако множеството $\{x\}$ съдържа точката a и стойността на функцията в тази точка е $f(a)$, то, като означим с m по-малкото от двете числа $b-1$ и $f(a)$, а с M по-голямото от $b+1$ и $f(a)$, ще получим, че за всички точки от множеството B_δ са изпълнени неравенствата

(4.27) $$m \leq f(x) \leq M,$$

които показват, че функцията f е ограничена в множеството B_δ. □

Фиг. 4.19 илюстрира доказаната теорема.

Следствие. *Ако функцията f е непрекъсната в точката a, тя е ограничена върху множеството от всички стойности на аргумента си, принадлежащи на някоя δ-околност на точката a.*

Достатъчно е да отбележим, че функция, непрекъсната в точката a, има в тази точка крайна граница.

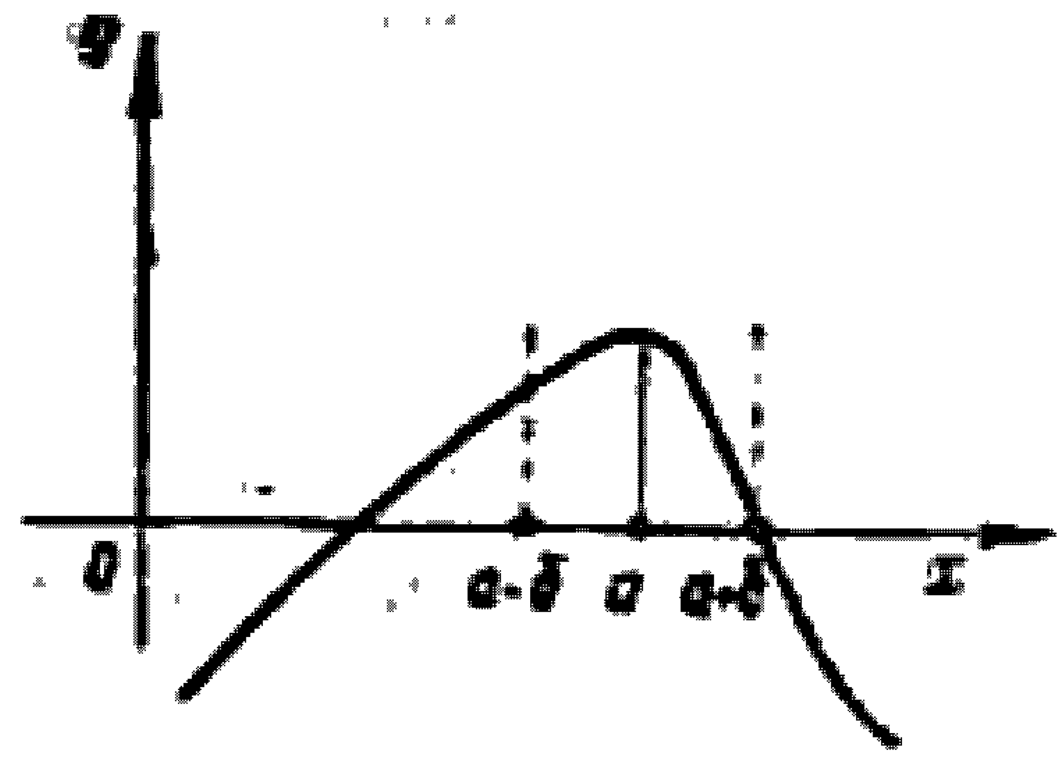
Теорема 4.11 (за неизменността на знака на функция, непрекъсната в точка). *Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, непрекъсната в точката $a \in \{x\}$ и стойността ѝ $f(a)$ е положителна (отрицателна). Тогава съществува такова положително число δ, че функцията f е положителна (отрицателна) навсякъде в множеството $B_\delta = \{x\} \cap (a-\delta,\ a+\delta)$.*

Доказателство. Според определението за непрекъснатост по Коши, каквото и да е положителното число ε, съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x от δ-околността на точката a да е изпълнено неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, или

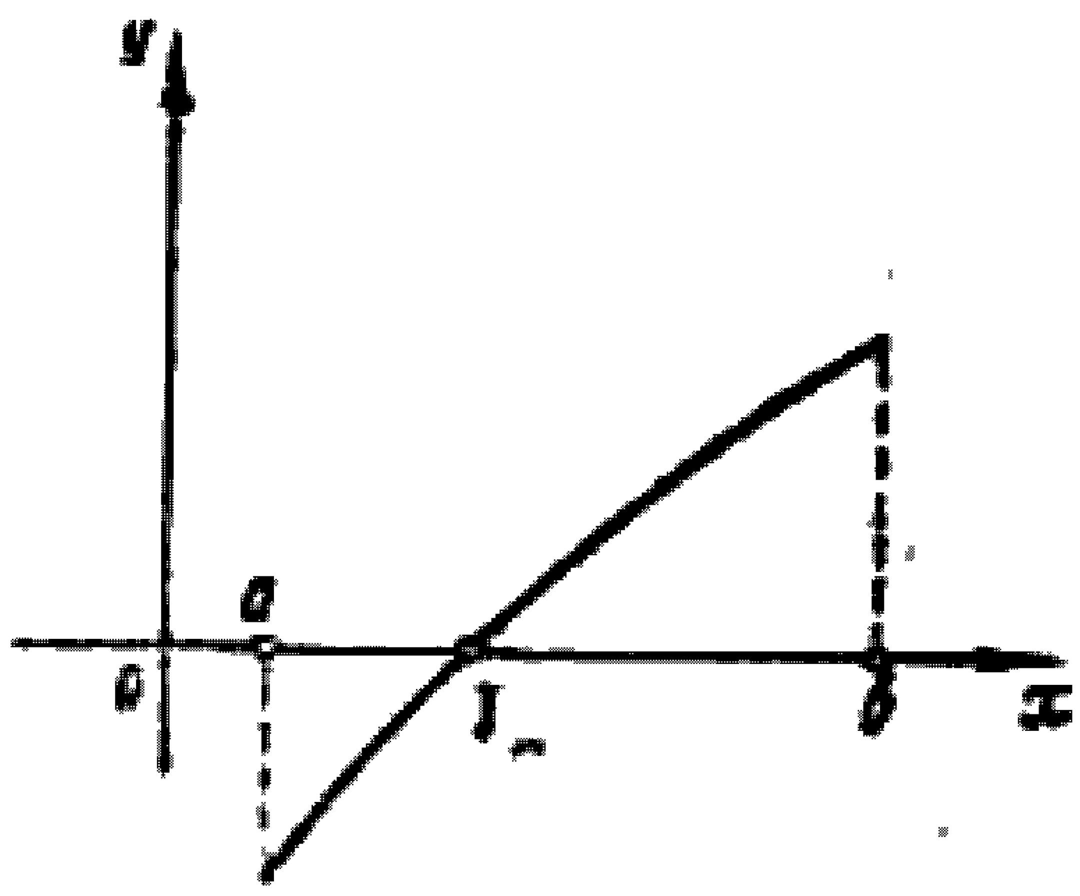
(4.28) $$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon.$$

Ако за ε вземем положителното число $|f(a)|/2$, то двете числа $f(a)-\varepsilon$ и $f(a)+\varepsilon$ ще са положителни при $f(a)>0$ и отрицателни при $f(a)<0$.

Затова неравенствата (4.28) означават, че за всички стойности на аргумента от δ-околността на точката a функцията f е положителна при $f(a)>0$ и отрицателна при $f(a)<0$. □



Фиг. 4.20



Фиг. 4.21

Фиг. 4.20 илюстрира теорема 4.11.

Теорема 4.11 лесно може да се формулира и за случаите, когато функцията f е непрекъсната в точката a само отдясно или само отляво.

Ще се уговорим да наричаме полусегмента $[a, a+\delta)$ *дясна δ-полуоколност на точката a*, а полусегмента $(a-\delta, a]$ — *лява δ-полуоколност на точката a*.

Теорема 4.11'. *Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, непрекъсната отдясно (отляво) в точката a от това множество и стойността ѝ $f(a)$ е различна от нула. Тогава съществува такова положително число $\delta>0$, че функцията f е различна от нула и има същия знак, както в точката a, за всички стойности на x от множеството $\{x\}$, принадлежащи на дясната (лявата) δ-полуоколност на точката a.*

За доказателството на тази теорема трябва дословно да се повтори доказателството на теорема 4.11, като се смени терминът „δ-околност на точката a“ с термина „дясна (лява) δ-полуоколност на точката a“.

Забележка 3. Към локалните свойства на непрекъснатите в дадена точка функции спадат и доказаните теореми 4.1 и 4.2 за непрекъснатост в дадена точка на сума, разлика, произведение и частно на две непрекъснати в тази точка функции и за непрекъснатост на сложна функция.

4.6.2. Глобални свойства на непрекъснати функции.

Теорема 4.12 (анулиране на непрекъсната функция при смяна на знака). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и стойностите ѝ в краищата на този сегмент $f(a)$ и $f(b)$ са числа с различни знаци. Тогава вътре в сегмента $[a, b]$ съществува точка ξ, за която $f(\xi)=0$.*

Доказателство. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $f(a)<0$, $f(b)>0$. Нека $\{x\}$ е множеството от всички стойности на x от сегмента $[a, b]$, за които $f(x)<0$. Това множество не е празно (негов елемент е например точката $x=a$) и е ограничено отгоре (например от числото $x=b$).

Съгласно теорема 2.1 множеството $\{x\}$ има точна горна граница, която ще означим с ξ.

Точката ξ е вътрешна точка за сегмента $[a, b]$, тъй като от непрекъснатостта на функцията f в $[a, b]$ и от условията $f(a)<0$, $f(b)>0$ според теорема 4.11′ следва, че съществува дясна δ-полуоколност на точката a, в която $f(x)<0$, и лява δ-полуоколност на точката b, в която $f(x)>0$.

Ще се убедим, че $f(\xi)=0$. Ако това не е така, според теорема 4.11 ще съществува δ-околност $\xi-\delta<x<\xi+\delta$ на точката ξ, в която функцията f има един и същ знак. Но това е невъзможно, тъй като съгласно определението на точна горна граница съществува поне една стойност на x от полусегмента $\xi-\delta<x\leq\xi$, за която $f(x)<0$, а за всяка стойност x от интервала $\xi<x<\xi+\delta$ имаме $f(x)>0$. Полученото противоречие доказва, че $f(\xi)=0$. □

Фиг. 4.21 илюстрира теорема 4.12.

Теорема 4.13 (преминаване на непрекъснатата функция през всяка междинна стойност). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Нека γ е произволно число между α и β. Тогава съществува точка ξ от сегмента $[a, b]$, за която $f(\xi)=\gamma$.*

Доказателство. Очевидно от доказателство се нуждае само случаят, когато $\alpha\neq\beta$ (в противен случай $\gamma=\alpha=\beta$ и например $\xi=a$). По същите причини отпадат и случаите, когато γ съвпада с едно от числата α или β.

Без ограничаване на общността можем да считаме, че $\alpha<\beta$, $\alpha<\gamma<\beta$. Да разгледаме функцията $\varphi(x)=f(x)-\gamma$. Тази функция е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ (като разлика на непрекъснати функции) и има в краищата му стойности с различни знаци:

$$\varphi(a)=f(a)-\gamma=\alpha-\gamma<0,\quad \varphi(b)=f(b)-\gamma=\beta-\gamma>0.$$

Според теорема 4.12 в сегмента $[a, b]$ съществува такава вътрешна точка ξ, че $\varphi(\xi)=f(\xi)-\gamma=0$, т. е. $f(\xi)=\gamma$. Теорема е доказана.

Като използваме току-що доказаната теорема, ще се убедим във верността на забележка 2 от 4.2.2.

Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и съществува обратна функция на функцията f. Тогава f е строго монотонна в сегмента $[a, b]$.

Доказателство. От съществуването на обратна функция на f следва, че $f(a)\neq f(b)$. Нека $f(a)<f(b)$ ($f(a)>f(b)$). Ще покажем, че f строго монотонно расте (намалява) в сегмента $[a, b]$. Ще разгледаме случая $f(a)<f(b)$. (Ако $f(a)>f(b)$, разсъжденията са аналогични.) Най-напред ще установим верността на неравенството $f(x)<f(b)$ за всяко $x\in(a, b)$. Да допуснем противното — че съществува такова $x_1\in(a, b)$, че $f(x_1)>f(b)$. (Равенството $f(x_1)=f(b)$ е невъзможно поради съществуването на обратна функция на функцията f.) Като приложим теорема 4.13 за сегментите $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ и използваме следващите от $f(a)<f(b)<f(x_1)$ неравенства

$$f(a)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))<f(x_1),$$

$$f(x_1)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))>f(b),$$

се убеждаваме в съществуването на числа $\xi_1\in(a, x_1)$ и $\xi_2\in(x_1, b)$, за които $f(\xi_1)=f(\xi_2)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))$. И така $\xi_1\neq\xi_2$, но $f(\xi_1)=f(\xi_2)$, което противоречи на съществуването на обратна функция на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Ще установим сега, че функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в сегмента $[a, b]$. Да допуснем противното — че съществуват две числа $x_1<x_2$ от полусегмента $[a, b)$, за които $f(x_1)>f(x_2)$. Ще покажем, че това допускане води до противоречие. Като приложим теорема 4.13 за сегментите $[x_1, x_2]$ и $[x_2, b]$ и използваме следващите от $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_1)<f(b)$ неравенства

$$f(x_1)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))>f(x_2),$$

$$f(x_2)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))<f(b),$$

се убеждаваме в съществуването на такива числа $\xi_3\in(x_1, x_2)$ и $\xi_4\in(x_2, b)$, че $f(\xi_3)=f(\xi_4)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. И така $\xi_3\neq\xi_4$, а $f(\xi_3)=f(\xi_4)$, което противоречи на съществуването на обратна функция на функцията f в сегмента $[a, b]$. Понеже условието $f(x_1)=f(x_2)$ за $x_1<x_2$ е също невъзможно, стигаме до извода, че $f(x_1)<f(x_2)$ за всеки $x_1<x_2$ от сегмента $[a, b]$. □

Теорема 4.14 (теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя е ограничена в този сегмент.*

Доказателство. Ще докажем, че функцията f е ограничена отгоре в сегмента $[a, b]$ (ограничеността отдолу се доказва аналогично).

Да допуснем, че f не е ограничена отгоре в сегмента $[a, b]$. Тогава за всяко естествено число n съществува поне една точка x_n от $[a, b]$, за която $f(x_n)>n$. (В противен случай f би била ограничена в сегмента $[a, b]$.)

Намерихме такава редица $\{x_n\}$ от сегмента $[a, b]$, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е безкрайно голяма. Според теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. 3.3.1, следствие 3 от теорема 3.16) от редицата $\{x_n\}$ може да се избере сходяща подредица $\{x_{k_n}\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ с граница някакво число ξ. Тъй като всички членове на редицата $\{x_{k_n}\}$ са от сегмента $[a, b]$, то и точката ξ принадлежи на този сегмент. От непрекъснатостта на функцията f в точката ξ следва, че подредицата от стойности на функцията $\{f(x_{k_n})\}$ клони към $f(\xi)$. Но това ни води до противоречие, тъй като редицата $\{f(x_{k_n})\}$ е безкрайно голяма като подредица на безкрайно голямата редица $\{f(x_n)\}$. □

Забележка 1. За интервал (или полусегмент) твърдението от теорема 4.14 не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на функция в интервал (или полусегмент) не следва нейната ограниченост.

Пример: Функцията $f(x)=1/x$ в интервала $(0, 1)$ (или в полусегмента $(0, 1]$). Тази функция е непрекъсната в посочените множества, но не е ограничена. Наистина редицата $x_n=1/n$, $n=2, 3, 4, \ldots$, принадлежи на интервала $(0, 1)$ (полусегмента $(0, 1]$), а редицата от стойности на функцията $\{f(x_n)\}=\{n\}$ е безкрайно голяма.

Определение. *Числото M (m) се нарича* ***точна горна (точна долна) граница на функцията*** *f в множеството $\{x\}$, ако са изпълнени двете условия: 1) за всяка стойност на x от множеството $\{x\}$ е изпълнено неравенството $f(x)\leq M$ $(f(x)\geq m)$; 2) за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такава стойност на x от множеството $\{x\}$, че за съответната стойност на функцията f е изпълнено неравенството*

$$f(x)>M-\varepsilon \qquad (f(x)<m+\varepsilon).$$

В даденото определение условието 1) означава, че числото M (числото m) е една от горните (долните) граници за функцията f в множеството $\{x\}$, а условието 2) означава, че тази граница е най-малката (най-голямата).

Точната горна граница M на функцията f в множеството $\{x\}$ се означава:

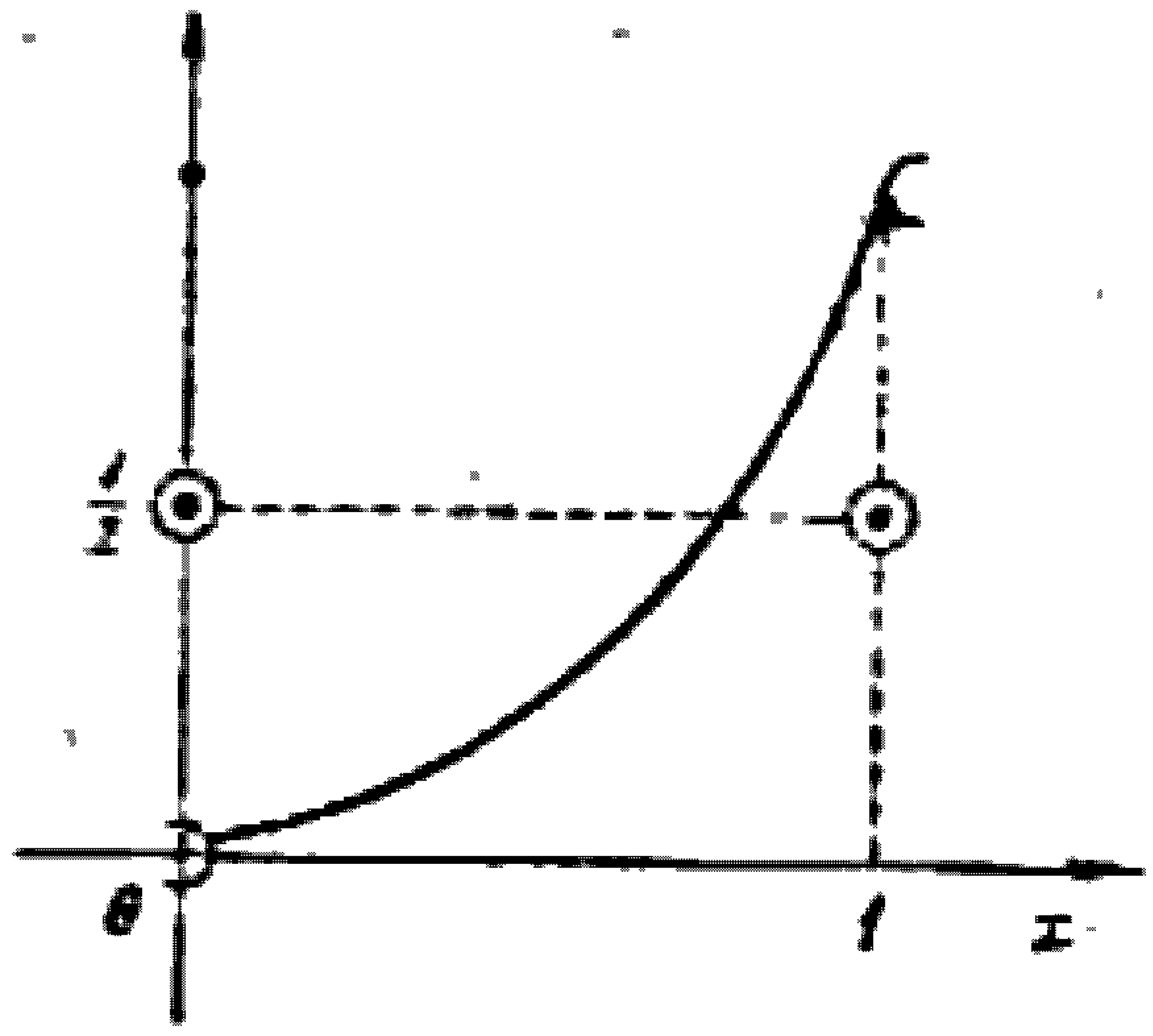
$$M=\sup_{\{x\}} f(x)=\sup\{f(x) : x\in\{x\}\}.$$

Аналогично точната долна граница m на функцията $f(x)$ в множеството $\{x\}$ се означава със символа

$$m=\inf_{\{x\}} f(x)=\inf\{f(x) : x\in\{x\}\}.$$

По-специално точната горна граница на функцията f в сегмента $[a, b]$ се означава по един от следните четири начина:

$$\sup_{a\leq x\leq b} f(x)=\sup_{x\in[a, b]} f(x)=\sup\{f(x) : a\leq x\leq b\}=\sup\{f(x) : x\in[a, b]\}.$$



Фиг. 4.22

Аналогично за точната долна граница:

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x) = \inf_{x \in [a,\ b]} f(x) = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\} = \inf\{f(x) : x \in [a,\ b]\}.$$

В сила са следните твърдения:

1. Ако функцията f е ограничена отгоре (отдолу) в множеството $\{x\}$, то тя има в това множество точна горна (точна долна) граница.

2. Ако функцията f е ограничена (от двете страни) в множеството $\{x\}$, то тя има в това множество както точна горна, така и точна долна граница.

Тези твърдения са пряко следствие от теорема 2.1, тъй като ограничеността отгоре (отдолу) на функцията f в множеството $\{x\}$ означава, че множеството от всички стойности на тази функция е ограничено отгоре (отдолу).

Следващият пример показва, че точните граници на една ограничена върху дадено множество функция в общия случай не се достигат.

Да разгледаме функцията f (вж. фиг. 4.22):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1/2 & \text{при } x = 0,\ x = 1. \end{cases}$$

Тази функция е ограничена върху сегмента $[0,\ 1]$ и има в него точна горна граница $M=1$ и точна долна граница $m=0$. Обаче тези граници не се достигат: сред точките на сегмента $[0,\ 1]$ няма точки, в които стойностите на функцията да са равни на нула или единица.

Ще отбележим, че разглежданата функция f не е непрекъсната в сегмента $[0,\ 1]$ (тя има точки на прекъсване $x=0$ и $x=1$). Оказва се, че това обстоятелство не е случайно, тъй като е в сила следното твърдение:

Теорема 4.15 (втора теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя достига в този сегмент точната си горна и точната си долна граници, т. е. има такива точки x_1 и x_2 от сегмента $[a, b]$, че стойността $f(x_1)$ е равна на точната горна граница на f в сегмента $[a, b]$, а стойността $f(x_2)$ е равна на точната долна граница на f в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Според първата теорема на Вайерщрас 4.14 функцията f е ограничена в сегмента $[a, b]$ и затова тя има в този сегмент точна горна граница M и точна долна граница m.

Ще се спрем на доказателството за достигане на точната горна граница M, тъй като достигането на точната долна граница m се доказва аналогично.

Да предположим, че функцията f не достига точната си горна граница, т. е. че във всички точки от сегмента $[a, b]$ функцията f има стойности, строго по-малки от M. Тогава да разгледаме функцията

$$F(x) = 1/(M-f(x)).$$

Знаменателят $M-f$ е непрекъсната и строго положителна в сегмента $[a, b]$ функция. Затова съгласно теорема 4.1 (за случая на частно) функцията F ще бъде непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Но според първата теорема на Вайерщрас 4.14 функцията F е ограничена в сегмента $[a, b]$, т. е. съществува такова положително число A, че $F(x)=1/(M-f(x))\leq A$ за всички x от сегмента $[a, b]$. Тъй като функцията $M-f$ е строго положителна в $[a, b]$, то последното неравенство е еквивалентно на неравенството $f(x)\leq M-1/A$ за всички x от $[a, b]$. Но последното противоречи на това, че M е точна горна граница, т. е. най-малката от всички горни граници на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Тъй като получихме противоречие, направеното предположение, че точната горна граница не се достига, не е вярно. □

Забележка 2. След като доказахме, че всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция достига точната си горна и точната си долна граница, можем да наречем точната горна граница M максимална стойност, а точната долна граница m — минимална стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$. Теорема 4.15 може да се формулира и така: Всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция има в този сегмент максимална и минимална стойност.

Максималната стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$ се означава с:

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x) = \max_{x\in[a,\,b]} f(x)$$
$$=\max\{f(x): a\leq x\leq b\}=\max\{f(x): x\in[a,\, b]\}.$$

Аналогично за минималната стойност:

$$\min_{a\le x\le b} f(x) = \min_{x\in[a,\,b]} f(x)$$

$$= \min\{f(x) : a\le x\le b\} = \min\{f(x) : x\in[a, b]\}.$$

Забележка 3. Функция, която не е непрекъсната в даден сегмент, може да достигне в този сегмент точната си горна и точната си долна граница. Като пример може да се вземе функцията на Дирихле D, чиито стойности са равни на нула за всички ирационални x и на единица за всички рационални стойности на x. Тази функция е прекъсната във всяка точка на сегмента $[0, 1]$, но очевидно достига в този сегмент точната си горна граница, равна на единица, и точната си долна граница, равна на нула.

Забележка 4. Твърдението в теорема 4.15 не е вярно, ако във формулировката й заменим термина „сегмент" с термина „интервал" или „полусегмент".

Така функцията $f(x)=x$ е непрекъсната в интервала $(0, 1)$ или в полусегмента $[0, 1)$, но не достига точната си горна граница $M=1$ в този интервал или полусегмент.

Трябва да добавим, че за функция, която е непрекъсната в интервал или полусегмент, точните граници могат дори да не съществуват, тъй като тя може да не е ограничена в този интервал или полусегмент (вж. забележка 1).

4.6.3. Понятие за равномерна непрекъснатост на функция. Нека функцията f е дефинирана в множество $\{x\}$, всяка точка на което е точка на сгъстяване за това множество. Примери за такова множество са сегмент, интервал, полусегмент, полуправа, безкрайната права и множеството на всички рационални числа, принадлежащи на всяко от изброените по-горе множества.

Определение. *Функцията f се нарича* ***равномерно непрекъсната в множеството*** *$\{x\}$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|<\delta$, е изпълнено неравенството*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \qquad (4.29)$$

Забележка 1. Ако функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, то тя е непрекъсната във всяка точка x_0 на това множество. Наистина при $x''=x_0$ получаваме определението за непрекъснатост по Коши в точката x_0.

Забележка 2. В определението за равномерна непрекъснатост е основно изискването за всяко $\varepsilon>0$ да съществува универсално $\delta>0$, за което да е изпълнено неравенството (4.29) за всяка двойка точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

Ако поискаме непрекъснатост на функцията f във всяка точка x_0 от множеството $\{x\}$, то за всяко $\varepsilon>0$ и за всяка точка x_0 на множеството $\{x\}$ се гарантира съществуването на „собствено" положително число $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$, което зависи не само от ε, но и от x_0 и осигурява верността на неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ за всички x от множеството $\{x\}$, които удовлетворяват условието $|x-x_0|<\delta(\varepsilon, x_0)$. При това може и да не съществува положителна точна долна граница на числата $\delta(\varepsilon, x_0)$ по всички точки x_0 на множеството $\{x\}$, т. е. равномерната непрекъснатост на функция върху множеството $\{x\}$ не следва от непрекъснатостта на тази функция във всяка точка x_0 от множеството $\{x\}$.

З а б е л е ж к а 3. От даденото определение за равномерна непрекъснатост непосредствено следва, че ако функцията f е равномерно непрекъсната върху множеството $\{x\}$, то тя е равномерно непрекъсната и върху всяко подмножество на множеството $\{x\}$.

Примери:

1. Функцията $f(x)=1/x$ е равномерно непрекъсната върху полуправата $x\geq 1$. Наистина за всеки две точки x' и x'' от тази полуправа е изпълнено

$$|f(x')-f(x'')|=|1/x'-1/x''|=|(x''-x')/x'x''|$$
$$=|x'-x''|/x'x''\leq|x'-x''|.$$

Ако за всяко $\varepsilon>0$ вземем $\delta=\varepsilon$, ще получим, че за всеки две точки x' и x'' от полуправата $[1,+\infty)$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|\leq\delta=\varepsilon$.

2. Функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$, въпреки че е непрекъсната във всяка точка на интервала $(0, 1)$. За да се убедим в това, е достатъчно да докажем, че за н я к о е $\varepsilon>0$ и за п р о и з в о л н о м а л к о $\delta>0$ съществува поне една двойка точки x' и x'' от интервала $(0, 1)$, за които $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$.

Да разгледаме две редици от точки $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, принадлежащи на интервала $(0, 1)$, с членове $x'_n=1/\pi n$, $x''_n=1/(2\pi n+\pi/2)$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Тези две редици, а така и също и тяхната разлика са безкрайно малки редици. Затова за всяко произволно малко $\delta>0$ съществува такъв номер n, че $|x'_n-x''_n|<\delta$. Заедно с това за всеки номер n имаме

$$|f(x'_n)-f(x''_n)|=|\sin\pi n-\sin(2\pi n-\pi/2)|=1.$$

Следователно за $\varepsilon=1/2$ и произволно малко $\delta>0$ съществува двойка точки x_n' и x_n'' от интервала $(0, 1)$, за които

$$|x_n'-x_n''|<\delta \text{ и } |f(x_n')-f(x_n'')|=1>\varepsilon=1/2,$$

а това означава, че разглежданата функция не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$.

Ще отбележим, че ако разгледаме същата функция $f(x)=\sin x^{-1}$ не в интервала $(0, 1)$, а в интервала $(\gamma, 1)$, където γ е произволно число от интервала $(0, 1)$, проведените разсъждения вече не са валидни. По-нататък ще покажем, че тази функция е равномерно непрекъсната в интервала $(\gamma, 1)$ за $0<\gamma<1$.

3. Функцията $f(x)=x^2$ не е равномерно непрекъсната върху полуправата $x\geq 1$.

Ще покажем, че не само за н я к о е $\varepsilon>0$, а за всяко $\varepsilon>0$ и за всяко произволно малко $\delta>0$ съществува такава двойка точки x', x'' от полуправата $x\geq 1$, за която $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$.

За всяка двойка точки x', x'' от полуправата $x\geq 1$ имаме

$$(4.30)\quad |f(x')-f(x'')|=|(x')^2-(x'')^2|=|x'-x''|\,.\,|x'+x''|>|x'-x''|x'.$$

Фиксираме произволни $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, вземаме за x' произволно число, по-голямо от единица и от $2\varepsilon/\delta$, и полагаме $x''=x'+\delta/2$. За такива x' и x'' е изпълнено неравенството $|x''-x'|=\delta/2<\delta$. От друга страна, според (4.30) за същите x' и x'' ще бъде изпълнено и неравенството

$$|f(x')-f(x'')|\geq(\delta/2)\,(2\varepsilon/\delta)=\varepsilon.$$

Ако разглеждаме обаче функцията $f(x)=x^2$ не върху полуправата $[1, +\infty)$, а в произволен сегмент $[1, b]$, където $b>1$ е произволно число, проведените разсъждения нямат място.

Това ще стане ясно от следната основна теорема:

Основна теорема 4.16 (теорема на Кантор*). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя е равномерно непрекъсната в този сегмент.*

Д о к а з а т е л с т в о. Да предположим, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, но не е равномерно непрекъсната. Тогава за някое $\varepsilon>0$ и за произволно малко $\delta>0$ съществуват две такива точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$, че $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$. Да изберем безкрайно малка редица от положителни числа $\delta_n=1/n$, $n=1, 2, 3, \cdots$ Можем да твърдим, че за избраното $\varepsilon>0$ и за всеки номер n съществуват точки x_n' и x_n'' от сегмента $[a, b]$, за които

* Георг Кантор — немски математик (1845—1918).

(4.31) $|x_n' - x_n''| < 1/n$, но $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$.

Тъй като $\{x_n'\}$ е редица от точки на сегмента $[a, b]$, тя е ограничена и съгласно теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. следствие 3 от теорема 3.16) от нея може да се избере сходяща подредица $\{x_{k_n}'\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Границата ξ на тази подредица (според следствие 2 от теорема 3.13) също принадлежи на сегмента $[a, b]$. Лявото неравенство (4.31) показва, че съответната подредица $\{x_{k_n}''\}$ е също сходяща и има за граница точката ξ.

Понеже функцията f е непрекъсната във всяка точка на сегмента $[a, b]$, тя е непрекъсната и в точката ξ.* Но тогава според определението за непрекъснатост по Хайне двете подредици от съответните стойности на функцията $\{f(x_{k_n}')\}$ и $\{f(x_{k_n}'')\}$ са сходящи с граница $f(\xi)$, т. е. разликата на тези подредици $\{f(x_{k_n}') - f(x_{k_n}'')\}$ е безкрайно малка редица. Това противоречи на дясното неравенство (4.31), което е изпълнено за всички номера n и следователно и за всички номера k_n.

Полученото противоречие показва, че нашето допускане не е вярно. □

Ще се върнем сега към разгледания пример 2 и ще покажем, че функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ е равномерно непрекъсната в интервала $(\gamma, 1)$ при всяко γ от интервала $(0, 1)$. Действително при всяко такова γ функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ е непрекъсната в сегмента $[\gamma, 1]$. Следователно по теоремата на Кантор тя е равномерно непрекъсната в сегмента $[\gamma, 1]$. Съгласно забележка 3 към определението за равномерна непрекъснатост функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ е равномерно непрекъсната и в интервала $(\gamma, 1)$, който е подмножество на сегмента $[\gamma, 1]$.

Теоремата на Кантор се формулира удобно чрез понятието осцилация на функция.

Нека функцията f е ограничена върху сегмента $[c, d]$. ***Осцилация на функцията*** *f в сегмента $[c, d]$ ще наричаме разликата $\omega=M-m$ между точната горна и точната долна граници на функцията f в този сегмент.*

За непрекъсната функция f в сегмента $[c, d]$ осцилацията е равна на разликата между максималната и минималната ѝ стойност в този сегмент.

От теоремата на Кантор 4.16 непосредствено се получава следното твърдение:

* Ако ξ съвпада с един от краищата на сегмента $[a, b]$, под непрекъснатост трябва да се разбира едностранна непрекъснатост.

Следствие от теорема 4.16. *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки сегмент с дължина, по-малка от δ, съдържащ се в сегмента $[a, b]$, е по-малка от ε.*

Забележка 4. Като анализираме доказателствата на теоремите 4.14 и 4.15 на Вайерщрас и 4.16 на Кантор, не е трудно да забележим, че в тези три теореми вместо сегмента $[a, b]$ може да се вземе произволно множество $\{x\}$, което удовлетворява условията: 1) множеството $\{x\}$ е ограничено; 2) множеството $\{x\}$ съдържа всичките си точки на сгъстяване (такова множество се нарича *затворено*).

Множество $\{x\}$, което удовлетворява посочените две условия, ще наричаме *компактно множество* или *компакт*. Следователно посочените три теореми (двете теореми на Вайерщрас и теоремата на Кантор) са в сила не само за функции, непрекъснати в сегмент, но и за функции, непрекъснати върху произволен компакт.

4.6.4. Модул на непрекъснатост на функция. Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в някакво множество $\{x\}$, всяка точка на което е точка на сгъстяване.

Определение. *За всяко $\delta>0$* ***модул на непрекъснатост на функцията*** *$f(x)$ в множеството $\{x\}$ ще наричаме точната горна граница на разликата $|f(x')-f(x'')|$ по всички точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|\leq\delta$.*

Модулът на непрекъснатост на функцията f в множеството $\{x\}$ е прието да се означава със символа $\omega(f;\delta)$, т. е.

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\leq\delta,\ x',x''\in\{x\}\}. \tag{4.32}$$

Ще отбележим две свойства на модула на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$.

1°. Модулът на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ е винаги неотрицателен.

Това свойство следва непосредствено от определението за модул на непрекъснатост (4.32).

2°. Модулът на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ е ненамаляваща функция на δ върху полуправата $\delta>0$.

Действително при намаляване на δ множеството, по което се взема супремумът (4.32), се стеснява, а супремум върху част от множество не надминава супремума върху цялото множество.

Примери:

Ще пресметнем модулите на непрекъснатост на някои функции.

1. Ще сметнем модула на непрекъснатост на функцията $f(x)=x^2$ в сегмента $[0, 1]$.

Нека x' и x'' са такива две произволни точки от сегмента $[0, 1]$, че $|x'-x''|\leqq\delta$, където $0<\delta<1$. Тогава очевидно $x'-\delta\leqq x''\leqq x'+\delta$ и получаваме

$$|f(x')-f(x'')|=|(x')^2-(x'')^2|\leqq(x')^2-(x'-\delta)^2=2\delta x'-\delta^2$$
$$\leqq 2\delta-\delta^2.$$

От последното неравенство имаме

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|<\delta,\ x',x''\in\{x\}\}\leqq 2\delta-\delta^2.$$

От друга страна, като вземем $x'=1$ и $x''=1-\delta$, получаваме

$$f(x')-f(x'')=1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2.$$

Следователно $\omega(f;\delta)=\omega(x^2;\delta)=2\delta-\delta^2\leqq 2\delta$.

2. Ще сметнем модула на непрекъснатост на функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ в интервала $(0, 1)$.

Тъй като

$$|f(x')-f(x'')|=|\sin(1/x')-\sin(1/x'')|\leqq|\sin(1/x')|+|\sin(1/x'')|\leqq 2,$$

то $\omega(f;\delta)\leqq 2$.

От друга страна, като вземем две безкрайно малки редици $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ от точки в интервала $(0, 1)$ от вида

$$x_n'=1/(2\pi n+\pi/2),\quad x_n''=1/(2\pi n-\pi/2),$$

където $n=1, 2, 3, \ldots$, за всяко $\delta>0$ можем да изберем такъв номер n, че $0<x_n'<\delta$, $0<x_n''<\delta$ и $|x_n'-x_n''|\leqq\delta$, при което

$$f(x_n')-f(x_n'')=\sin(1/x_n')-\sin(1/x_n'')=2.$$

Оттук следва, че $\omega(f;\delta)=\omega(\sin x^{-1};\delta)=2$.

3. Модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)=1/x$ в интервала $(0, 1)$ е равен на $+\infty$.

Фиксираме произволно $\delta>0$ и разглеждаме само тези точки x' и x'', които удовлетворяват съотношенията $0<x'\leqq\delta$, $x''=\delta$, така че $|x'-x''|\leqq\delta$. Очевидно

$$\omega(x^{-1};\delta)\geqq\sup\{1/x'-1/\delta:\ 0<x'<\delta\}=+\infty.$$

Ще докажем една теорема, която свързва равномерната непрекъснатост на функцията f върху множеството $\{x\}$ с модула на непрекъснатост на тази функция върху същото множество.

Теорема 4.17. *За да бъде функцията f равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно модулът ѝ на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ в това множество да удовлетворява съотношението*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0. \tag{4.33}$$

Доказателство. *Необходимост*. Нека функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$. Трябва да се докаже, че е изпълнено съотношението (4.33), т. е. че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta_\varepsilon>0$, че за всяко δ, удовлетворяващо условието $0<\delta<\delta_\varepsilon$, да е изпълнено неравенството $\omega(f;\delta)<\varepsilon$.

Според определението за равномерна непрекъснатост за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta_\varepsilon>0$, че за всички x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$. Но това означава, че за всяко δ от интервала $0<\delta<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\leq\delta,\ x',x''\in\{x\}\}\leq\varepsilon/2<\varepsilon.$$

Достатъчност. Нека е изпълнено съотношението (4.33), т. е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta_\varepsilon>0$, че за всяко δ, удовлетворяващо условието $0<\delta<\delta_\varepsilon$, да е изпълнено неравенството $\omega(f;\delta)<\varepsilon$.

От определението на модул на непрекъснатост следва, че за всички x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|\leq\delta<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, а това означава, че функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$. □

По-рано пресметнахме модулите на непрекъснатост на три функции: функцията x^2 в сегмента $[0,1]$ и функциите $\sin x^{-1}$ и $1/x$ в интервала $(0,1)$.

Тъй като $\omega(x^2;\delta)=2\delta-\delta^2$, $\omega(\sin x^{-1};\delta)=2$, $\omega(1/x;\delta)=+\infty$, от теорема 4.17 следва, че функцията x^2 е равномерно непрекъсната в сегмента $[0,1]$, а функциите $\sin x^{-1}$ и $1/x$ не са равномерно непрекъснати в интервала $(0,1)$.

4.7. Понятието компактност на множество

4.7.1. Отворени и затворени множества. Нека $\{x\}$ е произволно множество от реални числа.

Определение 1. *Точката x на множеството $\{x\}$ се нарича **вътрешна точка** за това множество, ако съществува такова положително число δ, че δ-околността на точката x да се съдържа в множество $\{x\}$.*

Определение 2. *Множеството $\{x\}$ се нарича **отворено**, ако всяка негова точка е вътрешна точка за множеството.*

Примери за отворени множества са интервалите, отворената полуправа, безкрайната права и обединението на няколко непресичащи се интервала.

Определение 3. *Множеството $\{x\}$ се нарича **затворено**, ако неговото допълнение (т. е. разликата $(-\infty,+\infty)\setminus\{x\}$) е отворено множество.*

Определение 3′. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***затворено,*** *ако съдържа всичките си точки на сгъстяване.*

Ще се убедим, че за произволни числови множества определенията 3 и 3′ са еквивалентни.

1. Нека множеството $\{x\}$ е допълнение на отворено множество. Ще докажем, че всяка точка на сгъстяване на това множество $\{x\}$ му принадлежи.

Наистина, ако предположим, че точката на сгъстяване x не принадлежи на множеството $\{x\}$, то x ще принадлежи на допълнението на множеството $\{x\}$, което е отворено множество. Но тогава x ще принадлежи на това отворено множество заедно с някоя своя δ-околност, т. е. някоя δ-околност на точката x няма да съдържа точки от множеството $\{x\}$. Последното противоречи на това, че x е точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$.

2. Нека сега всяка точка на сгъстяване x на множеството $\{x\}$ принадлежи на това множество. Ще докажем, че множеството $\{x\}$ е допълнение на отворено множество. Нека x е произволна точка от допълнението на множеството $\{x\}$. Трябва да се докаже, че в допълнението се съдържа и някоя δ-околност на точката x.

Ако това не е така, то всяка δ-околност на точката x ще съдържа точки от множеството $\{x\}$, т. е. точката x ще бъде точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$ и по условие принадлежи към него, което противоречи на това, че x е точка от допълнението на множеството $\{x\}$.

4.7.2. Покритие на множество със система от отворени множества

Определение 1. *Ще казваме, че системата $\{\Sigma_\alpha\}$ от множества Σ_α е* ***покритие*** *на множеството $\{x\}$, ако всяко от множествата Σ_α е отворено и всяка точка x от множеството $\{x\}$ принадлежи на поне едно от множествата на системата $\{\Sigma_\alpha\}$.*

Ще докажем две забележителни леми за покритие на множество със системи от отворени множества.

Лема на Хайне—Борел* за сегмент. *От всяко покритие на сегмента $[a, b]$ може да се избере крайна подсистема, която също е покритие на този сегмент.*

Доказателство. Ако системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на сегмента $[a, b]$ и не е безкрайна, лемата е доказана. Нека системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на сегмента $[a, b]$ и е безкрайна.

Допускаме, че системата $I=[a, b]$ не може да се покрие от краен брой множества на системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Ако разделим този сегмент наполовина, поне една от двете му половини също не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Да означим тази половина с I_1. Разделяме I_1 наполовина и получаваме,

* Емил Борел — френски математик (1871—1956).

че поне едната от двете половини на I_1 (означаваме я с I_2) не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$.

Продължавайки така, ще получим система от включващи се сегменти $\{I_n\}$, всеки от които не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Дължината на n-тия сегмент I_n е 2^{-n}-та част от дължината на основния сегмент и клони към нула при $n \to \infty$.

Съгласно следствието от теорема 3.15 (вж. 3.2.2) съществува, и то единствена точка c, съдържаща се във всички сегменти I_n. Понеже тази точка c се съдържа и в сегмента $I=[a, b]$, то в системата $\{\Sigma_\alpha\}$ има множество Σ_{α_0}, което съдържа точката c. От това, че множеството Σ_{α_0} е отворено, следва съществуването на такова $\delta>0$, че δ-околността на точката c, т. е. интервалът $(c-\delta, c+\delta)$, също принадлежи на множеството Σ_{α_0}.

Тъй като всички сегменти I_n съдържат точката c и дължината им клони към нула при $n \to \infty$, можем да твърдим, че съществува такъв номер n_0, че при $n \geq n_0$ всички сегменти I_n се съдържат в интервала $(c-\delta, c+\delta)$.

Но това означава, че всеки сегмент I_n при $n \geq n_0$ може да бъде покрит само от множеството Σ_{α_0} на сегмента $\{\Sigma_\alpha\}$. Така стигнахме до противоречие с това, че нито един от сегментите I_n не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. □

Ще докажем сега едно по-общо твърдение.

Лема на Хайне — Борел за затворено ограничено множество. *От всяко покритие на затворено ограничено множество $\{x\}$ може да се избере крайна подсистема, също образуваща покритие на множеството $\{x\}$.*

Доказателство. Нека $\{x\}$ е затворено ограничено множество, а $\{\Sigma_\alpha\}$ — система от отворени множества, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

Тъй като множеството $\{x\}$ е ограничено, има сегмент $[a, b]$, който го съдържа. Означаваме със Σ_β отвореното множество, което е допълнение на затвореното множество $\{x\}$. Тогава обединението на системата $\{\Sigma_\alpha\}$ с отвореното множество Σ_β образува покритие на сегмента $[a, b]$. Според лемата на Хайне — Борел за сегмент от това покритие може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на сегмента $[a, b]$.

Ако множеството Σ_β влиза в тази крайна подсистема, като го изключим от нея, ще получим крайна подсистема на системата $\{\Sigma_\alpha\}$, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.*

Ако множеството Σ_β не влиза в крайната подсистема, образуваща покритие на сегмента $[a, b]$, то тази крайна подсистема

* Множеството Σ_β е допълнение към множеството $\{x\}$ и не съдържа нито една точка от множеството $\{x\}$.

ще се състои от множества Σ_n на системата $\{\Sigma_n\}$ и ще образува крайно покритие на множеството $\{x\}$, което се съдържа в сегмента $[a, b]$. □

4.7.3. Понятието компактност на множество. Нека $\{x\}$ е произволно множество от реални числа.

Определение 1. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***компактно множество*** (или ***компакт***), *ако от всяка система, образуваща покритие на множеството $\{x\}$, може да се избере крайна подсистема, която е също покритие на множеството $\{x\}$.*

В забележка 4 на 6.3 беше дадено друго определение за компактно множество. Ще напомним неговата формулировка.

Определение 1'. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***компактно,*** *ако е затворено и ограничено.*

Ще докажем, че за произволни числови множества определенията 1 и 1' са еквивалентни.

1. Нека множеството $\{x\}$ е затворено и ограничено. Тогава от лемата на Хайне — Борел следва, че от всяко покритие на множеството $\{x\}$ може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

2. Нека множеството $\{x\}$ е такова, че от всяко негово покритие да може да се избере крайна подсистема, образуваща също покритие на $\{x\}$.

Ще докажем, че множеството $\{x\}$ е затворено и ограничено.

Най-напред ще докажем затвореността на множеството $\{x\}$. Достатъчно е да се докаже, че допълнението D на множеството $\{x\}$ е отворено множество.

Нека y е произволна точка от допълнението D. Трябва да се докаже, че съществува δ-околност на точката y, която се съдържа в допълнението D.

Нека x е произволна точка на множеството $\{x\}$. Тъй като $x \neq y$, то числото $\delta(x) = |x-y|/2$ е положително и $\delta(x)$-околностите на точките x и y

$$\Sigma_x = (x-\delta(x),\ x+\delta(x)),\quad \Psi_x = (y-\delta(x),\ y+\delta(x))$$

не се пресичат.

Понеже системата от отворени множества $\{\Sigma_x\}$, съответстващи на всички точки x от множеството $\{x\}$, образува покритие на множеството $\{x\}$, то от тази система може да се избере крайна подсистема $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

Означаваме с $\Psi_{x_1}, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_n}$ съответната крайна подсистема от δ-околности на точката y. Най-малката от тези δ-околности ще се съдържа във всички множества $\Psi_{x_1}, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_n}$ и няма да има общи точки нито с едно от множествата $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2},$

. . . , Σ_{x_n}. Но тогава, тъй като подсистемата $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$ образува покритие на множеството $\{x\}$, посочената най-малка δ-околност на точката y няма да съдържа точки от множеството $\{x\}$, т. е. изцяло ще се съдържа в допълнението D на множеството $\{x\}$.

С това е доказано, че множеството D е отворено, и следователно множеството $\{x\}$ е затворено.

Сега ще докажем, че множеството $\{x\}$ е ограничено. Ако това не е така, ще съществува редица $\{x_n\}$ от точки на множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието

$$|x_n| > n, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Тъй като тази редица няма крайна точка на сгъстяване, то всяка точка x_n има δ-околност Σ_{x_n}, несъдържаща други точки от редицата $\{x_n\}$.

Очевидно, че от системата отворени множества $\{\Sigma_{x_n}\}$, образуваща покритие на множеството от точки $\{x_n\}$, не може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на всички точки $\{x_n\}$.

Тъй като множеството $\{x_n\}$ е подмножество на $\{x\}$, то няма да може и от всяка система отворени множества, образуващи покритие на множеството $\{x\}$, да се избере крайна подсистема, покриваща множеството $\{x\}$. Полученото противоречие доказва ограничеността на множеството $\{x\}$.

4.8. Горна и долна функция на Бер*

Нека в сегмента $[a, b]$ е дефинирана функцията f, която приема както крайни, така и безкрайни стойности.

Избираме произволна точка x_0 от сегмента $[a, b]$ и произволно положително число δ и означаваме с $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ съответно точната долна и точната горна граница функцията f в множеството от тези точки на сегмента $[a, b]$, които принадлежат на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, т. е. полагаме

$$m_\delta(x_0)=\inf\{f(x): x \in [a, b], \ x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

$$M_\delta(x_0)=\sup\{f(x): x \in [a, b], \ x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

Очевидно, че за всяко $\delta>0$

$$m_\delta(x_0) \leq f(x_0) \leq M_\delta(x_0). \tag{4.34}$$

Ако положителното число δ намалява, то $m_\delta(x_0)$ не намалява а $M_\delta(x_0)$ не нараства. Затова съществуват границите

$$m(x_0) = \lim_{\delta\to 0} m_\delta(x_0), \quad M(x_0)=\lim_{\delta\to 0} M_\delta(x_0),$$

* Р. Бер — френски математик (1874 — 1932).

при това очевидно са изпълнени неравенствата

$$m_\delta(x_0) \leq m(x_0) \leq f(x_0) \leq M(x_0) \leq M_\delta(x_0).$$

Определение 1. *Функциите M и m се наричат съответно* ***горна и долна функция на Бер*** *за функцията f.*

Теорема. *Нека функцията f е крайна* (т. е. приема крайна стойност) *в точката x_0. Тогава, за да бъде функцията f непрекъсната в точката x_0, е необходимо и достатъчно да е изпълнено равенството*

$$M(x_0) = m(x_0).$$

Доказателство. 1. *Необходимост.* Нека функцията f е непрекъсната в точката x_0. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и намираме такова $\delta > 0$, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. С други думи, ако $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, то

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Но оттук следва, че

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_\delta(x_0) \leq M_\delta(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

(тъй като $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ са точната долна и точната горна граница на функцията f в интервала $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$).

Следователно

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m(x_0) \leq M(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

От последните неравенства поради произволния избор на $\varepsilon > 0$ получаваме

$$M(x_0) = m(x_0) = f(x_0).$$

2. *Достатъчност.* Ако $M(x_0) = m(x_0)$, то очевидно $M(x_0) = m(x_0) = f(x_0)$ и общата стойност на функциите на Бер в точката x_0 е крайна.

Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и вземаме такова $\delta > 0$, че

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leq m(x_0),\ M(x_0) \leq M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Тези неравенства показват, че

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0),\ M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Ако точката x принадлежи на $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, то, както видяхме, стойността $f(x)$ лежи между $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$. Затова, ако x принадлежи на $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, то

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

С други думи, за всички x от $[a, b]$, за които $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено неравенството $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т. е. функцията f е непрекъсната в точката x_0. □

Забележка. За дефиниционна област на функцията f вместо сегмента $[a, b]$ може да се вземе произволно множество $\{x\}$, за което точката x_0 е точка на сгъстяване.

Определение 2. *Функцията f, дефинирана в сегмента $[a, b]$, се нарича* ***полунепрекъсната отгоре*** (***отдолу***) *в точката x_0 от сегмента $[a, b]$, ако**

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=f(x_0) \quad (\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=f(x_0)).$$

В това определение не се предполага крайност на функцията $f(x)$ нито в точката x_0, нито в другите точки от сегмента $[a, b]$. По-специално функцията $f(x)$ е полунепрекъсната отгоре (отдолу) във всяка точка x_0, където

$$f(x_0)=M(x_0) \quad [f(x_0)=m(x_0)].$$

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то тя е и полунепрекъсната и отгоре, и отдолу в тази точка. Обратно, ако функцията е крайна в точката x_0 и полунепрекъсната както отгоре, така и отдолу в точката x_0, тя е непрекъсната в тази точка.

Тези твърдения са друга формулировка на твърденията, съдържащи се в доказаната по-рано теорема за горната и долната функция на Бер.

* За всяка редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, различни от x_0, която клони към x_0, разглеждаме $\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)$. Най-голямата от $\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)$ означаваме с $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$. Аналогично се определя $\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$. Например

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \sin x^{-1} = 1, \quad \underline{\lim_{x\to 0}} \sin x^{-1} = -1,$$

$$\overline{\lim_{x\to 0}} (x^{-2}\sin x^{-1}) = +\infty, \quad \underline{\lim_{x\to 0}} (x^{-2}\sin x^{-1}) = -\infty.$$

5. Диференциално смятане

В тази глава ще бъдат въведени основните понятия производна и диференциал на функция. Ще установим основните правила за диференциране и ще пресметнем производните на всички основни елементарни функции. В края на главата ще бъдат разгледани производни и диференциали от по-висок ред и въпросът за диференциране на функции, зададени параметрично.

5.1. Понятие за производна

5.1.1. Нарастване на функция. Диференчна форма на условието за непрекъснатост. Да разгледаме функцията f, дефинирана в интервала (a, b).* Нека x е произволна точка от интервала (a, b), а Δx е произволно число, толкова малко, че числото $x+\Delta x$ също да принадлежи на интервала (a, b). Числото Δx ще наричаме нарастване на аргумента.

Нарастване на функцията *f в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, ще наричаме числото*

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{5.1}$$

Така за функцията $y=\sin x$ нарастването ѝ в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, е

$$\Delta \sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2). \tag{5.2}$$

В сила е следното твърдение:

За да бъде функцията f непрекъсната в точката x, е необходимо и достатъчно нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, да бъде безкрайно малко при $\Delta x \to 0$.

* За дефиниционна област на функцията вместо интервала (a, b) може да се вземе всяко гъсто в себе си множество $\{x\}$.

Действително според определението за непрекъснатост на функцията f в точката x трябва да имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x). \tag{5.3}$$

Съгласно 3.4.4 съществуването на границата (5.3) е еквивалентно на това, че функцията $[f(x+\Delta x)-f(x)]$ на аргумента Δx е безкрайно малка при $\Delta x \to 0$.

Доказаното твърдение позволява условието за непрекъснатост на функцията f в точката x да се изкаже в следната форма: *Функцията f е непрекъсната в точката x, ако нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е безкрайно малко при $\Delta x \to 0$, т. е. ако*

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x)-f(x)] = 0. \tag{5.4}$$

*Условието (5.4) ще наричаме **диференчна форма** на условието за непрекъснатост на функцията f в точката x.* Това условие нееднократно ще използваме по-нататък.

С помощта на условието (5.4) още веднъж ще се убедим, че $\sin x$ е непрекъсната във всяка точка x от безкрайната Наистина от (5.2), от условието $|\cos(x+\Delta x/2)| \leq 1$ и от $\lim_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x/2) = 0$ непосредствено следва, че $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Определение на производна. Нека функцията f е дефинирана (a, b), x фиксирана точка от този интервал и Δx е на аргумента, за което $x+\Delta x$ принадлежи също на (a, b).

смятаме, че $\Delta x \neq 0$, и ще разгледаме в избраната точка x стното на функцията f в тази точка и съответното нарастване аргумента Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Частното (5.5) ще наричаме ***диференчно частно*** (в дадената x). Тъй като x е фиксирано, диференчното частно (5.5) е на аргумента Δx. Тази функция е дефинирана за всички на аргумента Δx от някоя достатъчно малка δ-околност $\Delta x = 0$ с изключение на точката $\Delta x = 0$, т. е. дефинире навсякъде в достатъчно малка прободена δ-околност на $\Delta x = 0$. Това ни дава право да разглеждаме въпроса за на граница на тази функция при $\Delta x \to 0$ ($\Delta x \neq 0$).

1. ***Производна на функцията** f в дадена точка се нарича границата на диференчното частно* (5.5) *при $\Delta x \to 0$ условие, че тази граница съществува).*

Производната на функцията f в дадена точка x ще означаваме със символа $f'(x)$.

И така по определение

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ако функцията има производна във всяка точка x на интервала (a, b), то тази производна ще бъде също функция на аргумента x, дефинирана в интервала (a, b).

Примери:

1. $f(x)=C=\text{const}$. Очевидно производната $f'(x)$ на тази функция е тъждествено равна на нула, тъй като нарастването на функцията $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ е равно на нула за всяко x и всяко Δx.

2. $f(x)=x$. За тази функция диференчното частно (5.5) е

$$\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Оттук следва, че производната на тази функция е равна на единица във всяка точка x от безкрайната права.

Напълно аналогично на понятията дясна и лява граница на функция в дадена точка се въвеждат понятията дясна и лява производна на функцията f в дадена точка x.

Определение 2. ***Дясна (лява) производна на функцията*** *f в дадена точка x се нарича дясната (лявата) граница на диференчното частно (5.5) в точката $\Delta x=0$ (при условие, че тази граница съществува).*

За означаване на дясната (лявата) производна на функцият f в точката x се използва символът $f'(x+0)$ $(f'(x-0))$.

От съпоставянето на определенията 1 и 2 и от свойството на дясна и лява граница на функция, установено в 3.4.2, следват твърденията:

1) *Ако функцията f има в точката x производна $f'(x)$, то тази функция има в точката x както дясна, така и лява производна и $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$.*

2) *Ако функцията f има в точката x дясна и лява производна и ако тези производни са равни помежду си, то функцията f има в точката x производна $f'(x)$ и $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$.*

В допълнение на твърдение 2) ще отбележим, че ако функцията f има дясна и лява производна в точката x, но тези производни не са равни помежду си, то функцията няма производна в точката x. Иначе ще получим противоречие с твърдение 1). Пример за такава функция е

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{при } x\geq 0,\\ -x & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Тази функция има в точката $x=0$ дясна производна, равна на $\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x/\Delta x)=1$, и лява производна, равна на $\lim_{\Delta x \to 0} ((-\Delta x)/\Delta x)=-1$, но няма производна в точката $x=0$.

5.1.3. Геометричен смисъл на производната. Да разгледаме графиката на функцията f, дефинирана и непрекъсната в интервала (a, b).

Избираме произволна точка x от интервала (a, b) и даваме нарастване $\Delta x \neq 0$ на аргумента x, толкова малко, че числото $x+\Delta x$ да принадлежи също на интервала (a, b). Нека M и P са точки от графиката на функцията f с абсциси, съответно равни на x и $x+\Delta x$ (вж. фиг. 5.1). Точките M и P ще имат очевидно координати

$$M(x, f(x)), \quad P(x+\Delta x, f(x+\Delta x)).$$

Правата, минаваща през точките M и P от графиката на функцията f, ще наричаме *секуща*. Понеже точката M е фиксирана, то ъгълът, който всяка секуща MP сключва с оста Ox, е функция на аргумента Δx (тъй като стойността на Δx еднозначно определя точката P от графиката на функцията f). Ще означим ъгъла между секущата MP и оста Ox със символа $\varphi(\Delta x)$.

Определение. *Ако съществува гранично положение на секущата MP, когато точката P клони към точката M по графиката на функцията* (*т. е. когато $\Delta x \to 0$*), *то това гранично положение се нарича* ***допирателна*** *към графиката на функцията f в точката M от тази графика.*

От това определение следва, че за да съществува допирателна към графиката на функцията f в точката M, е достатъчно да съществува границата $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)=\varphi_0$, при това тази граница φ_0 е равна на ъгъла, който допирателната сключва с оста Ox.

Ще докажем следното твърдение:

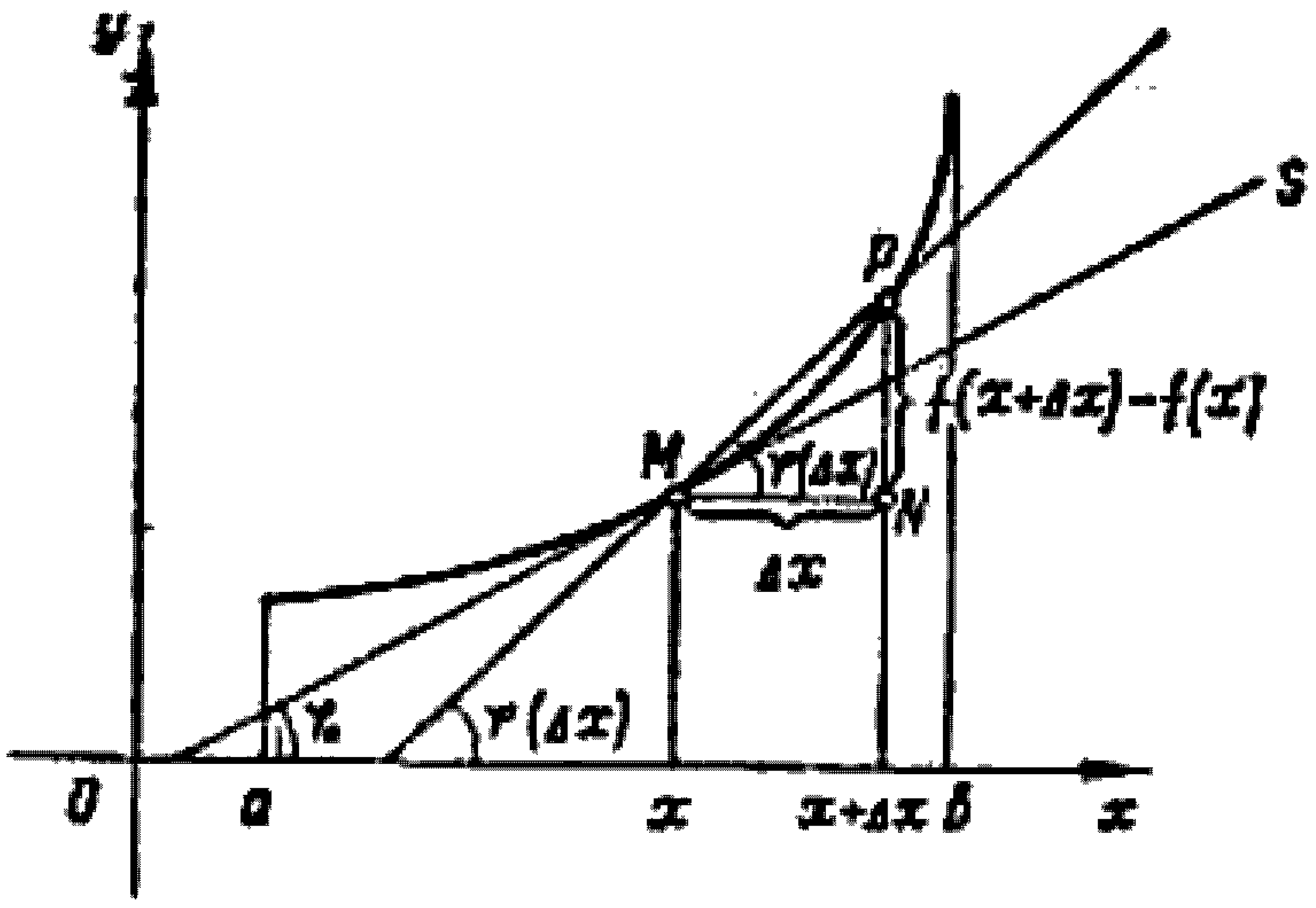
Ако функцията f има в дадена точка x производна, то съществува допирателна към графиката на функцията f в точката $M(x, f(x))$ и ъгловият коефициент на тази допирателна (т. е. тангенсът на ъгъла, който тя сключва с оста Ox) е равен на производната $f'(x)$.

Спускаме от точките M и P перпендикуляри към абсцисната ос (вж. фиг. 5.1). Прекарваме права през точката M, успоредна на абсцисната ос, и означаваме с N точката на пресичане на тази права с перпендикуляра, спуснат от P към абсцисната ос. От триъгълника MNP имаме

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

така че

(5.6) $$\varphi(\Delta x)=\operatorname{arc\,tg}(\Delta y/\Delta x).$$



Фиг. 5.1

Ще се убедим, че съществува граница на дясната (а следователно и на лявата) страна на (5.6) при $\Delta x \to 0$. Действително от съществуването на производната $f'(x)$ следва съществуването на границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta f(x)/\Delta x) = f'(x)$. Оттук и от непрекъснатостта на функцията $\operatorname{arc\,tg} u$ за всички u следва, че съществува границата на дясната страна на (5.6) и тя е равна на $\operatorname{arc\,tg} f'(x)$.

И така доказахме, че съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arc\,tg} f'(x).$$

Но това означава, че съществува гранично положение на секущите, т. е. съществува допирателната към графиката на функцията в точката $M(x, f(x))$ и ъгълът φ_0 между тази допирателна и оста Ox е равен на $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} f'(x)$. Следователно ъгловият коефициент на тази допирателна $\operatorname{tg} \varphi_0$ е равен на $f'(x)$. С това твърдението е доказано.

5.2. Понятие за диференцируемост на функция

5.2.1. Определение за диференцируемост на функция. Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b), x е произволно число от този интервал, Δx е такова нарастване на аргумента, че $x + \Delta x$ принадлежи също на интервала (a, b) и $f(x+\Delta x) - f(x)$ е нарастването на функцията в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx.

Определение. *Функцията f се нарича **диференцируема** в точката x, ако нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точка-*

та x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, може да се представи във вида

$$\Delta f(x)=A\,.\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,.\,\Delta x, \tag{5.7}$$

където A е число, независещо от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ е функция на аргумента Δx, безкрайно малка в точката $\Delta x=0$.

В точката $\Delta x=0$ функцията $\alpha(\Delta x)$ е неопределена и можем да ѝ припишем в тази точка произволна стойност. За в бъдеще ще бъде удобно да считаме $\alpha(0)=0$. Така функцията α ще бъде непрекъсната в точката $\Delta x=0$ и равенството (5.7) може да се разпространи и за стойността $\Delta x=0$.

Забележка. Второто събираемо в дясната страна на (5.7) $\alpha(\Delta x)\,.\,\Delta x$ може да се запише във вида $o(\Delta x)$*. Наистина, тъй като и двете функции $\alpha=\alpha(\Delta x)$ и Δx са безкрайно малки в точката Δx, то и произведението им е безкрайно малка функция в точката $\Delta x=0$ от по-висок ред, отколкото Δx (вж. 3.4.5). Тогава (5.7) може да се запише във вида

$$\Delta f(x)=A\,\Delta x+o(\Delta x).$$

Ще докажем следното твърдение:

Теорема 5.1. *За да бъде функцията f диференцируема в точката x, е необходимо и достатъчно тя да има в тази точка крайна производна $f'(x)$.*

Доказателство. *1. Необходимост.* Нека функцията f е диференцируема в точката x, т. е. нарастването ѝ $\Delta f(x)$ в тази точка, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е представимо във вида (5.7). Като разделим (5.7) на Δx (приемаме, че $\Delta x\neq 0$), получаваме

$$\Delta f(x)/\Delta x=A+\alpha(\Delta x). \tag{5.8}$$

Дясната (следователно и лявата) страна на (5.8) има граница, равна на A, в точката $\Delta x=0$. Остава да отбележим, че границата при $\Delta x\to 0$ на лявата страна на (5.8) (в случай че тя съществува) по определение е равна на производната $f'(x)$.

И така доказахме, че ако за функцията f е в сила представянето (5.7), то тази функция има в точката x производна $f'(x)$ и $f'(x)=A$.

2. Достатъчност. Нека съществува крайна производна $f'(x)$, т. е. съществува крайната граница

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x). \tag{5.9}$$

Да означим със символа $\alpha(\Delta x)$ разликата $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)$, т. е. да положим

* Ще напомним, че символът $o(\Delta x)$ означава безкрайно малка функция от по-висок ред от Δx в точката $\Delta x=0$.

(5.10) $$\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x).$$

От съществуването на границата (5.9) следва, че функцията $\alpha(\Delta x)$, определена от (5.10), има граница при $\Delta x\to 0$, равна на нула.

Като умножим съотношението (5.10) с Δx, ще получим представянето

$$\Delta f(x)=f'(x)\,.\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,.\,\Delta x,$$

което съвпада с представянето (5.7) при $A=f'(x)$. □

С това е доказано, че от съществуването на крайна производна $f'(x)$ следва диференцируемостта на функцията f в точката x, при това в условието за диференцируемост (5.7) числото A съвпада с $f'(x)$.

Доказаната теорема позволява да отъждествяваме диференцируемост на функция в дадена точка със съществуване на производна на тази функция в тази точка.

Операцията намиране на производна ще наричаме *диференциране*.

5.2.2. Диференцируемост и непрекъснатост. Лесно се доказва следното твърдение:

Теорема 5.2. *Ако функцията f е диференцируема в дадена точка x, тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство. Тъй като функцията f е диференцируема в точката x, то за нарастването ѝ $\Delta f(x)$ в тази точка е валидно представянето (5.7), от което следва, че $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$, а това означава, че функцията f е непрекъсната в точката x (според диференчната форма на условието за непрекъснатост (5.4). □

Ще отбележим, че обратното твърдение на теорема 5.2 не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на функцията f в дадена точка x не следва диференцируемостта ѝ в тази точка.

За пример може да служи функцията $y=|x|$, която е очевидно непрекъсната в точката $x=0$, но няма в тази точка производна.

Ще отбележим, че съществуват функции, непрекъснати във всяка точка на даден интервал, но нямащи производна нито в една точка на този интервал. (Първият пример за такава функция е бил построен от Вайерщрас. Един пример на такава функция е даден в допълнението към глава 10.)

5.2.3. Понятие за диференциал на функция. Разглеждаме функцията f, диференцируема в дадена точка x. Нарастването $\Delta f(x)$ на такава функция в точката x може да се представи във вида (5.7).

Ще отбележим, че нарастването (5.7) е сума от две събираеми, първото от които $A.\Delta x$ е линейно относно Δx, а второто $\alpha(\Delta x).\Delta x$ в точката $\Delta x=0$ е безкрайно малка функция от по-висок ред, отколкото Δx.

Ако числото A, равно съгласно теорема 5.1 на производната $f'(x)$, е различно от нула, то първото събираемо $A\Delta x-f'(x)\Delta x$ представлява ***главната част*** на нарастването $\Delta f(x)$ на диференцируемата функция f. Тази главна част на нарастването е линейна хомогенна функция на аргумента* Δx и се нарича ***диференциал*** на функцията f.

В случай че $A=f'(x)=0$, диференциалът на функцията се приема равен на нула по определение.

И така диференциалът на функцията f в дадена точка x, отговарящ на нарастване на аргумента Δx, се означава със символа df и

(5.11) $$df=f'(x)\Delta x.$$

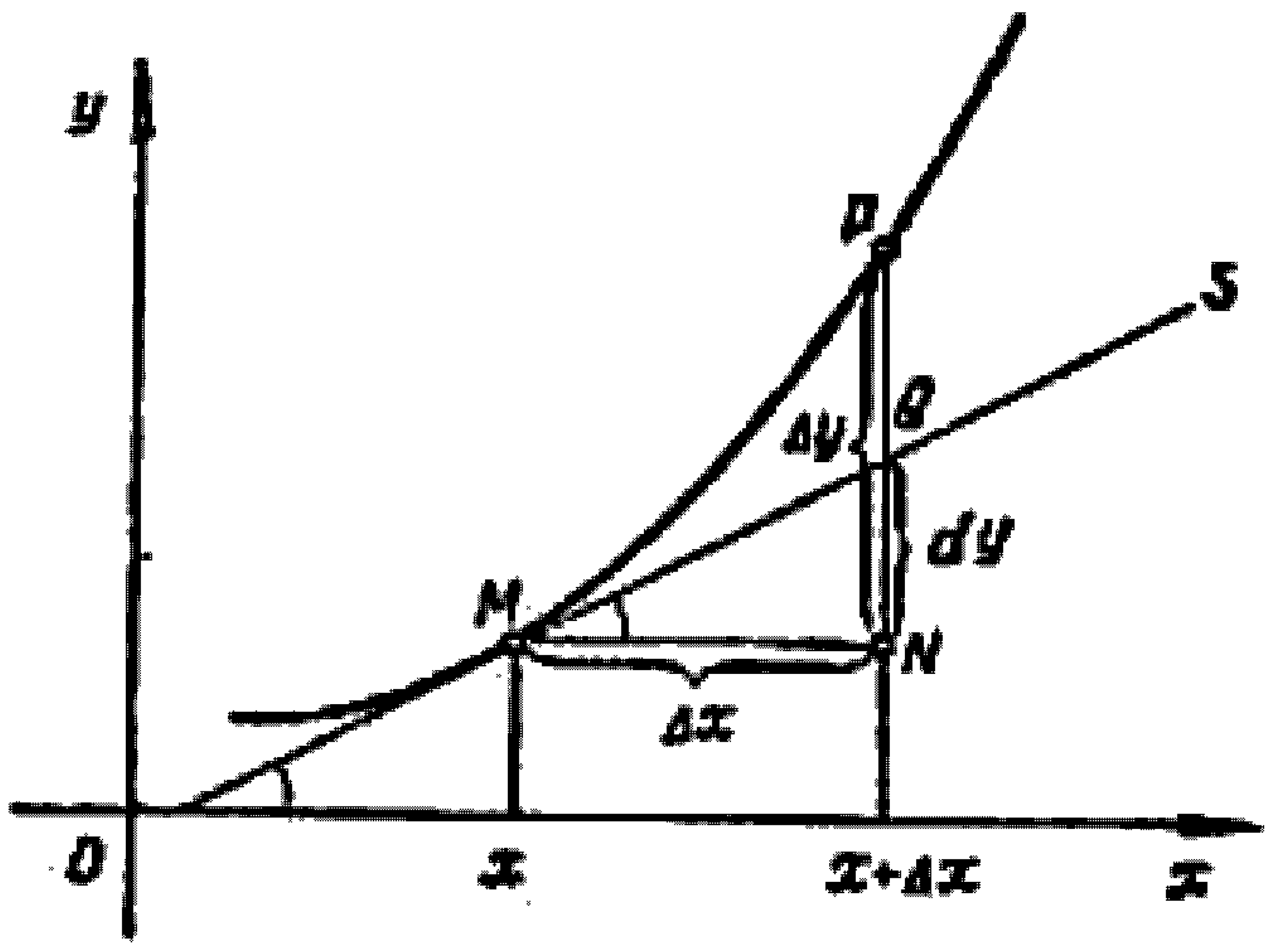
Когато $f'(x)\neq 0$, това число представлява главната част на нарастването на функцията f, която е линейна и хомогенна относно нарастването на аргумента Δx.

Веднага ще отбележим, че диференциалът df и нарастването Δf на функцията f в дадена точка, отговарящи на едно и също нарастване на аргумента Δx, изобщо не са равни помежду си. Това лесно се вижда от графиката на f (вж. фиг. 5.2). Нека M и P са точки от графиката на функцията f, отговарящи съответно на аргумента x и $x+\Delta x$, MS е допирателната към графиката в точката M, $MN \parallel Ox$, $NP \parallel Oy$, Q е пресечната точка на допирателната MS с правата PN. Тогава нарастването Δf на функцията f в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е очевидно равно на дължината на отсечката NP, а диференциалът df на функцията в точката x, отговарящ на същото нарастване на аргумента Δx, е равен на дължината на отсечката NQ. (Това непосредствено следва от формула (5.11) и от факта, че в правоъгълния триъгълник MQN отсечката MN е равна на Δx, а тангенсът на ъгъла QMN е равен на $f'(x)$.) Ясно е, че дължините на отсечките NP и NQ в общия случай са различни.

Много удобно е да се въведе и понятието ***диференциал на аргумента*** x, но трябва да се различават двата случая: 1) когато аргументът x е независима променлива, и 2) когато аргументът x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя нова променлива t, която можем да считаме независима.

Ще се уговорим в случая, когато аргументът x е независима променлива, да отъждествяваме диференциала на този аргумент dx

* Ще напомним, че линейна функция на аргумента t се нарича функция от вида $y=At+B$, където A и B са константи. В случай че $B=0$, линейната функция се нарича хомогенна.



Фиг. 5.2

с нарастването* му Δx, т. е. ще считаме, че $dx=\Delta x$. Като следствие на тази уговорка равенство (5.11) приема вида

(5.12) $$df=f'(x)\,.\,dx.$$

По такъв начин в случая, когато аргументът x е независима променлива, за диференциала на функцията f е валидно представянето (5.12).

По-нататък в 5.3.3 ще докажем, че представянето (5.12) има универсален характер и е валидно и в случая, когато аргументът x не е независима променлива, а е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. (В този случай във формулата (5.12) dx не трябва да се смята равно на Δx, тъй като от казаното по-горе имаме $dx=\varphi'(t)\,dt$.)

5.3. Диференциране на сложна функция и обратна функция

5.3.1. Диференциране на сложна функция. Ще установим правило за намиране производната на сложна функция $y=f(\varphi(t))$ в точката t при условие, че са известни производните на съставящите я функции φ и f съответно в точките t и $x=\varphi(t)$.

Теорема 5.3. *Нека функцията φ е диференцируема в точката t, а функцията f е диференцируема в съответната точка $x=\varphi(t)$. Тогава сложната функция $f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t и производната ѝ в тази точка е*

(5.13) $$\{f(\varphi(t))\}'=f'(x)\,.\,\varphi'(t)=f'(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

* Тази уговорка се съгласува с разглеждането на независимата променлива x като функция от вида $f(x)=x$, за която $f'(x)\,.\,\Delta x=\Delta x$, т. е. $dx=\Delta x$.

Доказателство. Да дадем на аргумента на функцията φ в дадена точка t произволно, различно от нула нарастване Δt. На това нарастване отговаря нарастването $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ на функцията $x=\varphi(t)$, при това нарастването Δx може да бъде и нула.

На нарастването Δx отговаря нарастване $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ на функцията f в съответната точка $x=\varphi(t)$. Тъй като функцията f по условие е диференцируема в точката $x=\varphi(t)$, то нарастването ѝ Δf в тази точка може да се представи във вида

$$\Delta f=f'(x).\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x, \tag{5.14}$$

където $\alpha(\Delta x)$ клони към нула при $\Delta x\to 0$.

Ще подчертаем, че както беше казано в 5.2.1, представянето (5.14) е в сила и при $\Delta x=0$.

Разделяме (5.14) на $\Delta t\neq 0$ и получаваме

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha(\Delta x).\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5.15}$$

Ще докажем, че дясната (следователно и лявата) страна на (5.15) има граница при $\Delta t\to 0$, равна на дясната страна на (5.13). С това ще бъдат доказани диференцируемостта на сложната функция и формула (5.13) за нейната производна.

От диференцируемостта на функцията $x=\varphi(t)$ в точката t следва, че частното $\Delta x/\Delta t$ има граница при $\Delta t\to 0$, равна на $\varphi'(t)$. Остава да се докаже, че функцията $\alpha(\Delta x)$ при $\Delta t\to 0$ клони към нула, което непосредствено следва от това, че $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и че $\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$, въз основа на диференчната форма на условията за непрекъснатост на диференцируемата в точката t функция $x=\varphi(t)$. И така цялата дясна страна на (5.15) има граница при $\Delta t\to 0$ и тази граница е равна на дясната страна на (5.13). Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 5.3 и съдържащото се в нея правило за пресмятане на производна на сложна функция могат да се пренесат последователно за сложни функции, които са суперпозиции на три и повече функции. Така за сложна функция, която е суперпозиция на три функции $F(f(\varphi(t)))$, правилото за диференциране има вида

$$\{F(f(\varphi(t)))\}'=F'(f(\varphi(t))).f'(\varphi(t)).\varphi'(t), \tag{5.16}$$

при което формулата (5.16) е валидна, ако функцията φ е диференцируема в точката t, функцията f е диференцируема в съответната точка $\varphi(t)$, а функцията $F(u)$ е диференцируема в съответната точка $f(\varphi(t))$.

5.3.2. Диференциране на обратна функция

Теорема 5.4. *Нека функцията f расте (намалява) и е непрекъсната в някоя околност на точката x. Нека освен това тази функция е диференцируема в точката x и производната ѝ $f'(x)$ е различна от нула. Тогава в някоя околност на съответната точка $y=f(x)$ е дефинирана функцията $x=f^{-1}(y)$, обратна на функцията f, която е диференцируема в точката $y=f(x)$ и за производната ѝ в точката y е валидна формулата*

$$\{f^{-1}(y)\}'=1/f'(x). \tag{5.17}$$

Доказателство. Понеже функцията f е строго монотонна и непрекъсната в някоя околност на точката x, то според теорема 4.5 (вж. 4.2) обратната ѝ функция f^{-1} е дефинирана, строго монотонна и непрекъсната в някоя околност на съответната точка $y=f(x)$.

Даваме на аргумента на обратната функция в точката y произволно, достатъчно малко и различно от нула нарастване Δy. На това нарастване Δy отговаря нарастване на обратната функция $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$ в съответната точка $y=f(x)$, което поради строгата монотонност на функцията е различно от нула.

Това ни дава право да напишем следното тъждество*:

$$\Delta x/\Delta y=1/(\Delta y/\Delta x). \tag{5.18}$$

Нека сега в тъждеството (5.18) нарастването Δy клони към нула. Тогава съгласно диференчната форма на условието за непрекъснатост на обратната функция $x=f^{-1}(y)$ в съответната точка $y=f(x)$ нарастването на тази функция Δx ще клони също към нула. Ще се убедим, че в този случай съществува граница на дясната страна на (5.18), равна на дясната страна на (5.17). С това ще бъде доказано, че същата граница има и лявата страна на (5.18), т. е. че обратната функция има производна в съответната точка $y=f(x)$ и за тази производна е вярно равенството (5.17).

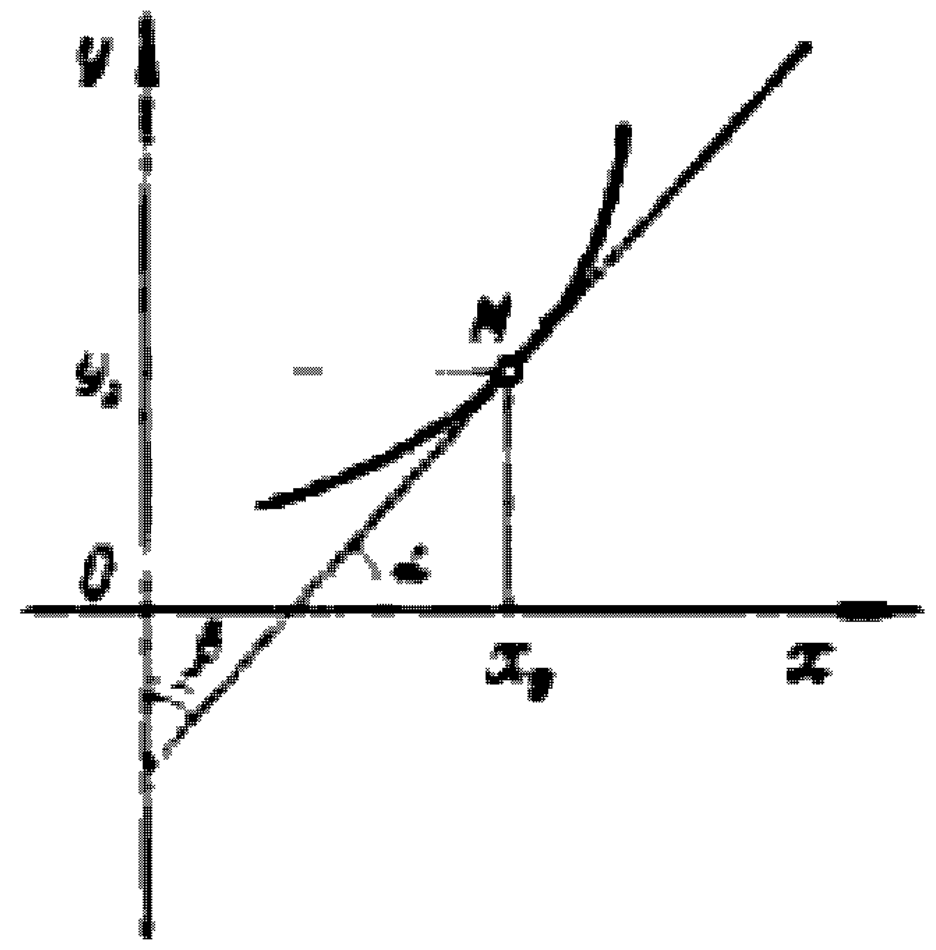
И така, за да завършим доказателството на теоремата, остава да се убедим, че дясната страна на (5.18) има граница при $\Delta x\to 0$, равна на $1/f'(x)$, където x е дадената точка.

Тъй като $x=f^{-1}(y)$, $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$, то $x+\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)$, т. е. $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ и $\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Оттук следва, че дясната страна на (5.18) може да бъде записана във вида

$$1/(\Delta y/\Delta x)=1/\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$

* Това тъждество може да се напише за всеки две числа Δy и Δx, различни от нула.



Фиг. 5.3

От последното равенство съгласно определението за производна $f'(x)$ и предположението $f'(x) \neq 0$ веднага следва, че границата на дясната страна на (5.18) съществува при $\Delta x \to 0$ и е равна на $1/f'(x)$. Теоремата е доказана.

Примери за приложение на доказаната теорема ще бъдат дадени в следващия параграф.

Доказаната теорема има просто геометрично тълкуване. Нека M е точка от графиката на функцията $y=f(x)$, отговаряща на дадена стойност на аргумента x (вж. фиг. 5.3). Тогава очевидно производната $f'(x)$ е равна на тангенса на ъгъла α, който допирателната в точката M сключва с оста Ox, а производната на обратната функция $\{f^{-1}(y)\}'$ в съответната точка $y=f(x)$ е равна на тангенса на ъгъла β, който тази допирателна сключва с оста Oy. Тъй като сумата на ъглите α и β е равна на $\pi/2$, то формулата (5.17) изразява очевидния факт: $\operatorname{tg}\beta = 1/\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha+\beta=\pi/2$.

5.3.3. Инвариантност на формата на първия диференциал. В 5.2.3 се убедихме, че когато аргументът x на диференцируемата функция f е независима променлива, за диференциала df на тази функция имаме представянето (5.12)

$$df = f'(x) \, . \, dx.$$

Сега ще докажем, че представянето (5.12) е универсално и е в сила и в случая, когато аргументът x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. Това свойство на диференциала на функциите е прието да се нарича ***инвариантност на неговата форма.***

И така нека аргументът x на диференцируемата функция f е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. В този случай f може да се разглежда като сложна функция от вида $f(\varphi(t))$ на аргумента t. Понеже този аргумент t

е независима променлива, то за сложната функция $f(\varphi(t))$ и за функцията $x=\varphi(t)$ диференциалите са представими във формата (5.12), т. е. във вида

$$df=\{f(\varphi(t))\}'\,dt,\quad dx=\varphi'(t)\,dt. \tag{5.19}$$

По правилото за диференциране на сложна функция

$$\{f(\varphi(t))\}'=f'(x)\cdot\varphi'(t). \tag{5.13}$$

Замествайки (5.13) в първата от формулите (5.19), получаваме

$$df=f'(x)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.20}$$

Като съпоставим полученото равенство (5.20) с второто от равенствата от (5.19), получаваме окончателно за df израза

$$df=f'(x)\,dx,$$

който съвпада с представянето (5.12). □

Забележка. Може да се даде и друга еквивалентна формулировка на свойството инвариантност на формата на първия диференциал, непосредствено следваща от универсалността на представянето (5.12): *Производната на диференцируемата функция f е равна на отношението на диференциала на тази функция df и диференциала на аргумента ѝ dx, т. е. се определя от равенството*

$$f'(x)=df/dx, \tag{5.21}$$

както в случая, когато аргументът x е независима променлива, така и в случая, когато самият аргумент x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t.

Универсалността на представянето на производната (5.21) позволява да се използва отношението df/dx за означаване на производната на функцията f относно аргумента x.

5.3.4. Приложение на диференциала за намиране на приближени формули. Нека за простота аргументът x на функцията f е независима променлива. В 5.2.3 показахме, че диференциалът df на функцията f в общия случай не е равен на нарастването Δf на тази функция. Обаче с точност до безкрайно малка функция от по-висок ред в сравнение с Δx е изпълнено следното приближено равенство:

$$\Delta f\approx df. \tag{5.22}$$

Частното $(\Delta f-df)/\Delta x$ е естествено да се нарича относителна грешка на равенството (5.22). Тъй като $\Delta f-df=o(\Delta x)$, то относителната грешка на неравенството (5.22) става произволно малка при намаляване на $|\Delta x|$.

Съотношението (5.22) позволява да заменяме с известно приближение нарастването Δf на диференцируема функция f с диференциала df на тази функция. Целесъобразността на тази замяна се оправдава с това, че диференциалът df е линейна функция на Δx, докато нарастването Δf в общия случай е по-сложна функция на аргумента Δx.

Като вземем пред вид, че $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, $df=f'(x)dx$, можем да запишем приближеното равенство (5.22) във вида $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$ или във вида

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,.\,\Delta x. \tag{5.23}$$

Приближеното равенство (5.23), също както и (5.22), е валидно за всяка диференцируема функция f в дадена точка x с точност до величината $o(\Delta x)$, която е безкрайно малка от по-висок ред, отколкото Δx.

Това приближено равенство позволява с грешка $o(\Delta x)$ да се замени функцията f в малка околност на точката x (т. е. за малки Δx) с линейната функция на аргумента Δx от дясната страна на (5.23). Приближената формула (5.23) се използва много често в практиката.

5.4. Диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции

Теорема 5.5. *Ако всяка от функциите u и v е диференцируема в дадена точка x, то сумата, разликата, произведението и частното на тези функции (частното при условие, че $v(x)\neq 0$) са също диференцируеми в тази точка и са в сила формулите*

$$\begin{gathered}[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),\\ [u(x)\,.\,v(x)]'=u'(x)\,.\,v(x)+u(x)\,.\,v'(x),\\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\,.\end{gathered} \tag{5.24}$$

Доказателство. Ще разгледаме поотделно случаите на сума (разлика), произведение и частно.

1°. Нека $y(x)=u(x)\pm v(x)$. Означаваме с Δu, Δv и Δy нарастванията на функциите u, v и y в точката x, отговарящи на нарастване на аргумента Δx. Тогава очевидно

$$\begin{gathered}\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]\\ -[u(x)\pm v(x)]=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u\pm\Delta v.\end{gathered}$$

Следователно

$$\Delta y/\Delta x=\Delta u/\Delta x\pm\Delta v/\Delta x. \tag{5.25}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. От съществуването на производните на функциите u и v в точката x следва, че съществува граница на дясната страна на (5.25), която е равна на $u'(x) \pm v'(x)$. Следователно съществува граница (при $\Delta x \to 0$) и на лявата страна на (5.25). Според определението за производна тази граница е равна на $y'(x)$ и така получаваме $y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

2°. Нека $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Запазвайки за Δu, Δv и Δy същия смисъл, ще имаме

$$\begin{aligned}\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) \\ &= (u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x)) + (u(x+\Delta x)v(x) \\ &\quad - u(x)v(x))\end{aligned}$$

(прибавяме и изваждаме събираемото $u(x+\Delta x)v(x)$).

По-нататък можем да запишем

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)(v(x+\Delta x) - v(x)) + v(x)(u(x+\Delta x) - u(x)) \\ &= u(x+\Delta x) \cdot \Delta v + v(x) \Delta u,\end{aligned}$$

така че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.26}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. Тогава от диференцируемостта на функциите u и v в точката x следва, че съществуват границите на отношенията $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ и са съответно равни на $u'(x)$ и $v'(x)$. По-нататък от диференцируемостта на функцията u в точката x и от теорема 5.2 следва непрекъснатостта на u в тази точка. Следователно съществува границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)$ и тя е равна на $u(x)$.

Тогава съществува границата на дясната страна на (5.26) при $\Delta x \to 0$ и тя е равна на $u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$.

Следователно съществува и граница (при $\Delta x \to 0$) на лявата страна на (5.26). Според определението на производна тази граница е равна на $y'(x)$ и получаваме търсената формула $y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

3°. Нека накрая $y(x) = u(x)/v(x)$. Понеже $v(x) \neq 0$, съгласно теорема 4.11 за постоянството на знака на непрекъснатите функции $v(x+\Delta x) \neq 0$ за всички достатъчно малки Δx и можем да напишем, че

$$\begin{aligned}\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) &= \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ &= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)}.\end{aligned}$$

Като прибавим и извадим в числителя събираемото $u(x) \cdot v(x)$, ще получим

$$\Delta y = \frac{[u(x+\Delta x)\,.\,v(x)-u(x)\,.\,v(x)]-[v(x+\Delta x)\,u(x)-u(x)\,v(x)]}{v(x)\,.\,v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x)\,.\,v(x+\Delta x)}=\frac{v(x)\,\Delta u-u(x)\,\Delta v}{v(x)\,.\,v(x+\Delta x)},$$

така че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\,.\,v(x+\Delta x)}. \tag{5.27}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. От диференцируемостта (и следващата от нея непрекъснатост) на функциите u и v в точката x следва съществуването на границите:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)}{\Delta x}=v'(x),\ \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)=v(x).$$

Тъй като $v(x)\neq 0$, границата на дясната страна на (5.27) при $\Delta x \to 0$ съществува и е равна на

$$\frac{v(x)\,.\,u'(x)-u(x)\,.\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Следователно границата (при $\Delta x \to 0$) и на лявата страна на (5.27) съществува. По определението за производна тази граница е равна на $y'(x)$, откъдето получаваме търсената формула

$$y'(x)=\frac{u'(x)\,.\,v(x)-u(x)\,.\,v'(x)}{v^2(x)}.\ \square$$

Следствие. *Ако за функциите u и v в дадена точка x са изпълнени същите предположения, както и в теорема 5.5, то в тази точка x са верни следните равенства за диференциалите:*

$$\begin{cases} d(u\pm v)=du\pm dv,\\ d(uv)=v\,du+u\,dv\\ d(u/v)=(v\,du-u\,dv)/v^2. \end{cases} \tag{5.28}$$

За доказателството на (5.28) е достатъчно да се умножат равенствата (5.24) с dx и да се използва универсалното представяне (5.12) на диференциала на произволна функция f.

5.5. Производни на основните елементарни функции

Вече знаем, че ***основни елементарни функции*** са: показателната функция $y=a^x$ и логаритмичната функция $y=\log_a x$, разглеждани за всяка фиксирана стойност на a, такава, че $0<a\neq 1$;

степенната функция $y=x^{\alpha}$, където α е фиксирано реално число; четирите тригонометрични функции sin, cos, tg и ctg и четирите обратни тригонометрични функции arc sin, arc cos, arc tg и arc ctg.

В този параграф ще пресметнем и систематизираме в таблица производните на всички основни елементарни функции.

5.5.1. Производни на тригонометричните функции

1°. Производна на функцията $y=\sin x$. Тъй като за тази функция

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2),$$

то при всяко $\Delta x\neq 0$ диференчното частно ще има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos(x+\Delta x/2)\,.\,\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\,.$$

По определението на производна

$$(5.29)\qquad (\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos(x+\Delta x/2)\,.\,\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\right\}.$$

Поради непрекъснатостта на функцията $y=\cos x$ във всяка точка x на безкрайната права имаме

$$(5.30)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x.$$

По-нататък, като използваме първата забележителна граница, с елементарната смяна на променливата $t=\Delta x/2$ получаваме

$$(5.31)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

От съществуването на границите (5.30), (5.31) и от теоремата за граница на произведение на две функции следват съществуването на граница на дясната страна на (5.29) и равенството

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos(x+\Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\right\}=\cos x,$$

или

$$(5.32)\qquad (\sin x)'=\cos x$$

за всяка точка x от безкрайната права.

2°. Производна на функцията $y=\cos x$. Тъй като за всяка точка x от безкрайната права

$$\cos x=\sin(\pi/2-x),$$

то по правилото за диференциране на сложна функция и по формула (5.32) имаме

$$(\cos x)' = (\sin(\pi/2-x))' = \cos(\pi/2-x)\,.\,(\pi/2-x)'$$
$$= \cos(\pi/2-x)\,.\,(-1) = -\sin x,$$

или

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5.33}$$

3°. Производна на функцията $y=\operatorname{tg} x$. Тъй като $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$, то по правилото за диференциране на частно и от (5.32) и (5.33) във всяка точка x, в която $\cos x \neq 0$, ще имаме

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\,.\,\cos x - (\cos x)'\,.\,\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

И така

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \tag{3.34}$$

във всяка точка $x \neq \pi n + \pi/2$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4°. Производна на функцията $y=\operatorname{ctg} x$. Понеже $\operatorname{ctg} x = \cos x/\sin x$, като използваме правилото за диференциране на частно и (5.32), (5.33), за всяка точка x, в която $\sin x \neq 0$, ще имаме

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\,.\,\sin x - (\sin x)'\,.\,\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Получихме

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\operatorname{ctg}^2 x) \tag{5.35}$$

във всяка точка $x \neq \pi n$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5.5.2. Производна на логаритмичната функция. Нека $y=\log_a x$, където $0<a\neq 1$ и $x>0$ е фиксирана точка. Тогава за всяко достатъчно малко $\Delta x \neq 0$ имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x}\,.\,\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

По определението на производна

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}. \tag{5.36}$$

Като използваме втората забележителна граница и елементарната смяна на променливата $t=\Delta x/x$, имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e. \tag{5.37}$$

От съществуването на границата (5.37) и от непрекъснатостта на функцията $y=\log_a x$ в точката x следва, че границата в дясната страна на (5.36) съществува и е равна на $\frac{1}{x}\log_a e$.

И така

$$(\log_a x)'=x^{-1}\log_a e \tag{5.38}$$

за всяко $0<a\neq 1$ и $x>0$.

По-специално при $a=e$ имаме

$$(\ln x)'=1/x \text{ за всяко } x>0.$$

5.5.3. Производни на показателната и обратните тригонометрични функции. За намирането на производните на тези функции ще използваме теорема 5.4 за диференциране на обратна функция, доказана в 5.3.2.

1°. Производна на функцията $y=a^x$, $0<a\neq 1$. Тъй като функцията $y=a^x$, дефинирана върху цялата безкрайна права $-\infty<x<+\infty$, е обратна на функцията $x=\log_a y$, дефинирана от своя страна върху полуправата $0<y<+\infty$, и за функцията $x=\log_a y$ в околност на всяка точка от полуправата $0<y<+\infty$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4, то функцията $y=a^x$ е диференцируема във всяка точка $x=\log_a y$ и за производната ѝ е вярна формулата

$$(a^x)'=1/(\log_a y)'=1/(y^{-1}\log_a e)=y/\log_a e$$

(използвахме израза (5.38) за производна на логаритмичната функция).

От последното равенство и от равенствата $y=a^x$, $1/\log_a e=\ln a$ получаваме окончателно

$$(a^x)'=a^x.\ln a \tag{5.39}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

По-специално при $a=e$ имаме

$$(e^x)'=e^x.$$

2°. Производна на функцията $y=\arcsin x$. Функцията $y=\arcsin x$ е дефинирана в интервала $-1<x<1$ и е обратна на функцията $x=\sin y$, дефинирана в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$. За функцията $x=\sin y$ в околност на всяка точка y от интервала $-\pi/2<y<\pi/2$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Сле дователно функцията $y=\arccos x$ е диференцируема във всяка точка $x=\sin y$ и за производната ѝ имаме формулата

(5.40) $$(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y}.$$

Използвахме равенството (5.32) със знак „+“ пред корена, понеже $\cos y$ е положителен в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$.

Като вземем пред вид, че $\sin y=x$, от (5.40) получаваме окончателно

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(за всички x от интервала $-1<x<1$).

3°. Производна на функцията $y=\arccos x$. Функцията $y=\arccos x$ е дефинирана в интервала $-1<x<1$ и е обратна на функцията $x=\cos y$, дефинирана в интервала $0<y<\pi$. За функцията $x=\cos y$ в околност на всяка точка y от интервала $0<y<\pi$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\arccos x$ е диференцируема във всяка точка $x=\cos y$ и производната ѝ е

5.41) $$(\arccos x)' = 1/(\cos x)' = 1/(-\sin x) = -1/\sqrt{1-\cos^2 y}.$$

Тук използвахме равенството (5.33) със знак „+“ пред корена понеже $\sin y$ е положителен в интервала $0<y<\pi$.

От това, че $\cos y=x$, и от (5.41) получаваме

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

за всички x от интервала $-1<x<1$.

4°. Производна на функцията $y=\operatorname{arctg} x$. Функцията $y=\operatorname{arctg} x$ е дефинирана върху безкрайната права $-\infty<x<\infty$ и е обратна на функцията $x=\operatorname{tg} y$, дефинирана в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$. За функцията $x=\operatorname{tg} y$ в околност на всяка точка y от интервала $-\pi/2<y<\pi/2$ са изпълнени условията на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\operatorname{arctg} x$ е диференцируема във всяка точка $x=\operatorname{tg} y$ и за производната ѝ имаме формулата

$$(\operatorname{arctg} x)' = 1/(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

(използвахме съотношението (5.34)).

И така

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

5°. Производна на функцията $y=\operatorname{arcctg} x$. Функцията $y=\operatorname{arcctg} x$ е дефинирана върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$ и е обратна на функцията $x=\operatorname{ctg} y$, дефинирана в интервала $0<y<\pi$. За функцията $x=\operatorname{ctg} y$ в околност на всяка точка y от интервала $0<y<\pi$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\operatorname{arcctg} x$ е диференцируема във всяка точка $x=\operatorname{tg} y$ и за производната ѝ в тази точка имаме

$$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'}=\frac{1}{-(1+\operatorname{ctg}^2 x)}=\frac{-1}{1+x^2}$$

(използвахме (5.35)).

Така

$$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

5.5.4. Производна на степенната функция. Нека $y=x^\alpha$, където α е произволно реално число и x е произволна точка от полуправата $0<x<+\infty$. В глава 4 вече разгледахме степенната функция $y=x^\alpha$ като суперпозиция на логаритмичната и показателната функция:

$$y=x^\alpha=(a^{\log_a x})^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$$

(където a е произволно фиксирано число, по-голямо от единица).

По правилото за диференциране на сложната функция $y=a^u$, където $u=\alpha\log_a x$, ще получим

$$y'=(a^u)'\,.\,(\alpha\log_a x)'=a^u\ln a\,.\,\alpha\, x^{-1}\log_a e$$

$$=a^{\alpha\log_a x}\,.\,\alpha\,.\,x^{-1}=x^\alpha\,.\,\alpha\,.\,x^{-1}=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\,.$$

И така окончателно имаме

$$(x^\alpha)'=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}$$

за всяко $x>0$.

5.5.5. Таблица за производните на основните елементарни функции. Ще подредим в таблица производните на всички основни елементарни функции:

1°. $(x^\alpha)'=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}$ $(x>0)$.

Специално $(1/x)'=-1/x^2$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2°. $(\log_a x)'=x^{-1}\log_a e$ $(0<a\neq1,\ x>0)$.

Специално $(\ln x)'=1/x$.

3°. $(a^x)'=a^x\ln a$ $(0<a\neq1)$.

Специално $(e^x)'=e^x$.

4°. $(\sin x)'=\cos x$.

5°. $(\cos x)'=-\sin x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)'=\cos^{-2} x=1+\operatorname{tg}^2 x \quad (x\neq\pi n+\pi/2;\ n=0,\ \pm 1,\cdots)$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)'=-\sin^{-2}x=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,(x\neq\pi n;\ n=0,+1,\ \pm 2,\ldots)$.

8°. $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2} \qquad (-1<x<1)$.

9°. $(\arccos x)'=-(1-x^2)^{-1/2} \qquad (-1<x<1)$.

10°. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=1/(1+x^2)$.

11°. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-1/(1+x^2)$.

В глава 4 разгледахме хиперболичните функции $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{th} x$ и $y=\operatorname{cth} x$, които са прости комбинации на показателната функция. От представянето на тези функции чрез показателната функция елементарно се получават следните изрази за производните им:

12°. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.

13°. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

14°. $(\operatorname{th} x)'=\operatorname{ch}^{-2} x$.

15°. $(\operatorname{cth} x)'=-\operatorname{sh}^{-2} x \qquad (x\neq 0)$.

Таблицата на производните заедно с правилото за диференциране на сложна функция и правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно са изчислителният апарат на тази част от математическия анализ, която се нарича ***диференциално смятане***.

В глави 1 и 4 вече въведохме понятието елементарна функция като функция, изразяваща се чрез основните елементарни функции посредством четирите аритметични действия и краен брой суперпозиции.

От дадената таблица на производните и правилата за диференциране на сума, разлика, произведение, частно и сложна функция следва важният извод, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда вън от класа на елементарните функции.

5.5.6. Таблица за диференциалите на основните елементарни функции. В 5.3.3 установихме, че диференциалът df на функцията f е винаги равен на производната на тази функция $f'(x)$, умножена с диференциала на аргумента dx. Затова от таблицата на производните непосредствено се получава таблицата на диференциалите на основните елементарни функции:

1°. $d(x^\alpha)=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,dx \quad (x>0)$.

Специално $d(1/x)=-x^{-2}.dx$, $d(\sqrt{x})=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2°. $d(\log_a x)=x^{-1}\log_a e\,.\,dx$ $(0<a\neq 1,\ x>0)$.

Специално $d(\ln x)=\frac{dx}{x}$.

3°. $d(a^x)=a^x\ln a\,.\,dx$ $(0<a\neq 1)$.

Специално $d(e^x)=e^x.dx$.

4°. $d(\sin x)=\cos x\,.\,dx$.

5°. $d(\cos x)=-\sin x\,.\,dx$.

6°. $d(\operatorname{tg} x)=\cos^{-2}x\,.\,dx=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,.\,dx$ $(x\neq\pi n+\pi/2;$
$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$.

7°. $d(\operatorname{ctg} x)=-\sin^{-2}x\,.\,dx=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,.\,dx$ $(x\neq\pi n;$
$n=0,\ \pm 1,\cdots)$.

8°. $d(\arcsin x)=(1-x^2)^{-1/2}.dx$ $(-1<x<1)$.

9°. $d(\arccos x)=-(1-x^2)^{-1/2}.dx$ $(-1<x<1)$.

10°. $d(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$.

11°. $d(\operatorname{arc\,ctg} x)=-\frac{dx}{1+x^2}$.

5.5.7. Логаритмична производна. Производна на степенно-показателната функция. Нека функцията f е положителна и диференцируема в дадена точка x. Тогава и сложната функция на аргумента x от вида $w=\ln f$ е също диференцируема в точката x съгласно теорема 5.3 и за производната на тази сложна функция относно аргумента x имаме

$$(\ln f(x))'=f'(x)/f(x). \tag{5.42}$$

Величината (5.42) е прието да се нарича ***логаритмична производна*** на функцията f в точката x.

Логаритмичната производна може да се използва при пресмятането на някои функции. За пример ще пресметнем производната на функцията $y=u(x)^{v(x)}$, където u и v са две функции, диференцируеми в точката x, като $u(x)$ е строго положителна в тази точка.

При тези ограничения функцията $w=\ln y=v(x).\ln u(x)$ ще бъде диференцируема в точката x. Наистина според теорема 5.3 функцията $\ln u(x)$ е диференцируема в точката x. Следователно въз основа на теоремата за диференцируемост на произведение на две диференцируеми функции функцията $w=\ln y=v(x)\ln u(x)$ е диференцируема в точката x и по втората формула на (5.24) получаваме

$$(5.43)\qquad (\ln y)' = v'(x)\,.\,\ln u(x) + v(x)\,(\ln u(x))'$$
$$= v'(x)\,.\,\ln u(x) + v(x)\,.\,u'(x)/u(x).$$

От (5.42) и (5.43) имаме

$$y'/y = v'(x)\,.\,\ln u(x) + v(x)\,.\,u'(x)/u(x).$$

Отчитайки, че $y = u(x)^{v(x)}$, получаваме окончателно

$$(5.44)\qquad (u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)}\,(v'(x)\ln u(x) + v(x)\,u'(x)/u(x)).$$

Формула (5.44) е вярна при предположение, че u и v са диференцируеми в точката x и $u(x) > 0$ в тази точка.

5.6. Производни и диференциали от по-висок ред

5.6.1. Понятие за производна от n-ти ред. Производната f' на функцията f, дефинирана и диференцируема в интервала (a, b), е също функция, дефинирана в интервала (a, b). Възможно е тази функция да бъде диференцируема в някоя точка x на интервала (a, b), т. е. да има в тази точка производна. Тогава тази производна се нарича ***втора производна*** (или ***производна от 2-ри ред***) на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(2)}(x)$, или $f''(x)$.

След като е въведено понятието втора производна, последователно могат да се въведат понятията трета производна, четвърта производна и т. н. Ако предположим, че вече сме въвели понятието $(n-1)$-ва производна и че $(n-1)$-вата производна е диференцируема в някоя точка на интервала (a, b), т. е. има в тази точка производна, то тази производна се нарича ***n-та производна*** (или ***производна от n-ти ред***) на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(n)}(x)$.

По този начин определяме понятието n-та производна индуктивно

$$(5.45)\qquad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Функция, която има в дадено множество $\{x\}$ производна от n-ти ред и няма производна от по-висок ред, се нарича n пъти диференцируема в даденото множество.

Понятието производна от по-висок ред има голямо приложение. Тук ще се ограничим с това да покажем механичния смисъл на втората производна. Ако функцията f описва закона за движение на материална точка по оста Oy, то, както знаем от глава 1, първата производна $f'(x)$ изразява моментната скорост на движещата се точка в момента x. Тогава втората производна $f''(x)$ е равна на скоростта на изменение на скоростта, т. е. на ускорението на движещата се точка в момента x.

Методиката за пресмятане на производните от по-висок ред изисква само умение за пресмятане на производни от първи ред, тъй като последователното прилагане на формулите (5.45) представлява многократно пресмятане на първи производни. За пример ще пресметнем производните от n-ти ред на някои от основните елементарни функции.

5.6.2. n-ти производни на някои функции

1°. Ще пресметнем n-тата производна на степенната функция $y=x^{\alpha}$ ($x>0$, α — произволно реално число). Диференцирайки последователно, получаваме

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ y^{(3)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \dots,$$

откъдето лесно се вижда общият закон

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Строгото доказателство на този закон става лесно с метода на индукцията.

В частния случай при $\alpha=m$, където m е естествено число, имаме

$$(x^m)^{(m)}=m!,$$
$$(x^m)^{(n)}=0 \qquad \text{при } n>m.$$

Следователно n-тата производна на полином от степен m при $n>m$ е равна на нула.

2°. Сега ще пресметнем n-тата производна на показателната функция $y=a^x$ ($0<a\neq 1$). Диференцирайки последователно, ще получим

$$y'=a^x\ln a,\ y^{(2)}=a^x\ln^2 a,\ y^{(3)}=a^x\ln^3 a,\ \dots$$

Общата формула се установява лесно посредством индукция и има вида $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$.

В частност

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

3°. Ще сметнем сега n-тата производна на функцията $y=\sin x$. Първата производна на тази функция може да се запише във вида $y'=\cos x=\sin(x+\pi/2)$. По този начин диференцирането на функцията $y=\sin x$ прибавя към аргумента ѝ величината $\pi/2$. Оттук получаваме формулата:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2).$$

4°. Съвсем аналогично установяваме формулата

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2).$$

5°. Следващата, n-тата производна, която ще пресметнем, е на функцията $y = \operatorname{arctg} x$. Ще докажем с помощта на метода на индукцията, че е в сила следната формула:

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = (n-1)!\,(1+x^2)^{-n/2} \sin[n(\pi/2 + \operatorname{arctg} x)]. \tag{5.46}$$

Тъй като $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $1/(1+x^2) = 1/(1+\operatorname{tg}^2 y) = \cos^2 y$, можем да препишем формулата във вида

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \,.\, \sin[n(\pi/2 + y)]. \tag{5.46'}$$

Ще се убедим индуктивно във верността на формулата (5.46').

При $n=1$ $y' = (\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2) = \cos^2 y$. Същия израз получаваме и при $n=1$ от (5.46') (достатъчно е да отчетем, че $\sin(\pi/2 + y) = \cos y$).

Следователно при $n=1$ формула (5.46') е вярна.

Ще предположим сега, че формула (5.46') е вярна за някое n, и ще се убедим, че тя е вярна и за $n+1$.

Наистина, диференцирайки (5.46'), получаваме

$$y^{(n+1)} = (n-1)!\,\frac{d}{dx}\{\cos^n y \,.\, \sin[n(\pi/2+y)]\}$$

$$= (n-1)!\,\frac{d}{dy}\{\cos^n y \,.\, \sin[n(\pi/2+y)]\}\,\frac{dy}{dx}$$

$$= (n-1)!\left\{\frac{d}{dy}(\cos^n y)\,.\,\sin[n(\pi/2+y)] + \cos^n y \,.\, \frac{d}{dy}(\sin[n(\pi/2+y)])\right\} y'.$$

Като отчетем, че $y' = \cos^2 y$, $\frac{d}{dy}(\cos^n y) = n\cos^{n-1} y \,.\, (-\sin y)$,

$\frac{d}{dy}(\sin[n(\pi/2+y)]) = n\cos[n(\pi/2+y)]$, ще получим

$$y^{(n+1)} = n!\,\cos^{n+1} y \,.\, \{-\sin y \,.\, \sin[n(\pi/2+y)] + \cos y \,.\, \cos[n(\pi/2+y)]\}$$

$$= n!\cos^{n+1} y \,.\, \cos[(n+1)y + n\pi/2] = n!\cos^{n+1} y \,.\, \sin[(n+1)(\pi/2+y)].$$

Получихме за $y^{(n+1)}$ формула от вида (5.46') при номер $n+1$. С това индукцията е завършена и формула (5.46') е доказана.

6°. Накрая ще пресметнем n-тата производна на дробно-линейна функция $y = (ax+b)/(cx+d)$, където a, b, c и d са произволни константи. Диференцираме последователно функцията и получаваме

$$y' = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = (ad-bc)\,.\,(cx+d)^{-2},$$

$$y^{(2)} = (ad-bc)(-2)\,.\,(cx+d)^{-3}\,.\,c,$$

$$y^{(3)} = (ad-bc)(-2)\,.\,(-3)\,.\,(cx+d)^{-4}\,.\,c^2,\ \ldots$$

Лесно се вижда общият закон

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\,n\,!\,(ad-bc)\,c^{n-1}\,(cx+d)^{-n-1},$$

който се доказва по метода на индукцията.

5.6.3. Формула на Лайбниц за n-тата производна на произведение от две функции. Докато установеното по-рано правило за пресмятане на първата производна на сума или разлика от две функции $(u\pm v)'=u'\pm v'$ се пренася лесно (например по метода на индукцията) и в случая на производна от n-ти ред $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$, то при пресмятането на n-тата производна на произведение на две функции нещата са по-сложни.

Съответното правило носи наименованието ***формула на Лайбниц*** и има следния вид

$$(5.47)\qquad (u\,.\,v)^{(n)} = u^{(n)}\,.\,v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}\,.\,v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}\,.\,v'' + \ldots + u\,.\,v^{(n)}.$$

Лесно се вижда законът, по който е построена дясната страна на формулата на Лайбниц (5.47): тя съвпада с формулата за развитие на бинома $(u+v)^n$, но вместо степените на u и v са взети производните от съответния ред. Това сходство става още по-пълно, ако вместо самите функции u и v напишем съответно $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$ (т. е. ако разглеждаме функцията като производна от нулев ред).

Ще докажем формулата на Лайбниц по метода на индукцията. При $n=1$ тя има вида $(u\,.\,v)'=u'\,.\,v+u\,.\,v'$, който съвпада с правилото за диференциране на произведение на две функции. Затова достатъчно е да предположим верността на (5.47) за някое n и да докажем верността ѝ за $n+1$. И така нека за някой номер n формулата (5.47) да е вярна. Ще диференцираме тази формула и ще обединим събираемите в дясната страна по следния начин:

$$(5.48)\quad (u\,.\,v)^{(n+1)} = u^{(n+1)}\,.\,v + \left[\binom{n}{0} u^{(n)}\,.\,v' + \binom{n}{1} u^{(n)}\,.\,v'\right]$$
$$+ \left[\binom{n}{1} u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)} + \binom{n}{2} u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}\right]$$
$$+ \left[\binom{n}{2} u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)} + \binom{n}{3} u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)}\right] + \ldots + u\,.\,v^{(n+1)}$$

(използвахме, че $1=\binom{n}{0}$).

Лесно се проверява, че за всеки номер k, който не надминава n, е в сила

$$(5.49)\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

За да се убедим във верността на формула (5.49), е достатъчно да видим, че

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},\ \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!},$$
$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)n\ \ldots\ (n-k+2)}{k!}.$$

От написаните съотношения следва, че

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!}$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1) + n(n-1)\ldots(n-k+2)\,.\,k}{k!}$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1+k)}{k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}$$
$$= \binom{n+1}{k}.$$

Като използваме формула (5.49), можем да препишем съотношението (5.48) във вида

$$(u\,.\,v)^{(n+1)} = u^{(n+1)} v + \binom{n+1}{1} u^{(n)}\,.\,v' + \binom{n+1}{2} u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}$$
$$+ \binom{n+1}{3} u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)} + \ldots + u\,.\,v^{(n+1)}.$$

С това се убеждаваме във верността на формула (5.47) за $n+1$. □

Пример: Да пресметнем n-тата производна на функцията $y=x^2 . e^x$. Полагаме във формулата на Лайбниц (5.47) $u=e^x$, $v=x^2$ и отчитайки, че $u^{(k)}=e^x$ (за всяко k), $v'=2x$, $v^{(2)}=2$, $v^{(3)}=v^{(4)}=\cdots=0$, ще получим

$$(x^2 . e^x)^{(n)}=e^x . x^2+\binom{n}{1}e^x . 2x+\binom{n}{2}e^x . 2$$
$$=(x^2+2nx+n(n-1))e^x.$$

Ще подчертаем, че формулата на Лайбниц е много удобна, когато едната функция-множител има само к р а е н б р о й, р а з л и ч н и о т н у л а п р о и з в о д н и, а пресмятането на всички производни на другата функция-множител не представлява затруднение.

5.6.4. Диференциали от по-висок ред. По-рано за означаване на диференциала на аргумента и съответния диференциал на функцията използвахме символите dx и df. В тази точка ще се наложи да използваме и други символи за означаване на тези диференциали. По-специално ще означаваме диференциала на аргумента и съответствуващия му диференциал на функцията със символите δx и δf. В тези означения инвариантният по форма израз за първия диференциал на функцията f ще има вида $\delta f = f'(x) . \delta x$.

Ще разгледаме израза за първия диференциал на диференцируема в дадена точка x функция f:

(5.50) $$df=f'(x)\,dx.$$

Да предположим, че величината в дясната страна на (5.50) е функция на аргумента x, диференцируема в дадената точка x. За това е достатъчно да поискаме функцията f да бъде два пъти диференцируема в дадената точка x, а аргументът x или да бъде независима променлива, или два пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

При тези предположения можем да разглеждаме диференциала

$$\delta(df)=\delta(f'(x)\,dx)$$

на величината (5.50).

Определение 1. *Стойността $\delta(df)$ на диференциала на първия диференциал* (5.50), *взета при $\delta x=dx$, се нарича* ***втори диференциал на функцията*** *f (в дадената точка x) и се означава със символа $d^2 f$.*

И така по определение*

* Символът $\{\ldots\}|_{\delta x=dx}$ означава, че в израза, заключен в големите скоби, трябва да се положи $\delta x=dx$.

$$d^2 f = \delta(df)\,|_{\delta x = dx} = \{\delta[f'(x)\,dx]\}\,|_{\delta x = dx}.$$

Диференциалът $d^n f$ от произволен ред n се определя по индукция.

Нека вече е определен диференциалът $d^{n-1} f$ от ред $n-1$ и нека функцията f е n пъти диференцируема в дадената точка x, а аргументът ѝ x е или независима променлива, или n пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

Определение 2. *Стойността $\delta(d^{n-1} f)$ на диференциала от $(n-1)$-вия диференциал $d^{n-1} f$, взет при $\delta x = dx$, се нарича* ***n-ти диференциал*** *на функцията f (в дадената точка x) и се означава със символа $d^n f$.*

И така по определение

$$d^n f = \delta(d^{n-1} f)_{\delta x = dx}.$$

При пресмятането на втория и следващите диференциали трябва съществено да се различават двата случая: 1) когато аргументът x е независима променлива; 2) когато аргументът x е съответствуващ брой пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

В първия случай, когато x е независима променлива, имаме право да считаме, че dx не зависи от x и е равно на едно и също нарастване на аргумента Δx (за всички точки x). При това ще получим $\delta(dx) = (dx)'\delta x = 0$.

Последното равенство и второто съотношение в (5.28) ни дават право да напишем следните равенства:

$$\begin{aligned} (5.51)\qquad d^2 f &= \delta(df)\,|_{\delta x = dx} = \{\delta[f'(x)\,.\,dx]\}\,|_{\delta x = dx} \\ &= \{\delta[f'(x)]\,dx + f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x = dx} \\ &= \{\delta[f'(x)]\,dx\}\,|_{\delta x = dx} = \{f^{(2)}(x)\,.\,\delta x\,.\,dx\}\,|_{\delta x = dx} \\ &= f^{(2)}(x)\,(dx)^2. \end{aligned}$$

И така в случая, когато аргументът x е независима променлива, за втория диференциал на функцията f в точката x имаме

$$(5.52)\qquad d^2 f = f^{(2)}(x)\,(dx)^2.$$

Съвсем аналогично (лесно се убеждаваме в това по индукция), когато аргументът x е независима променлива, за n-тия диференциал на n пъти диференцируема функция f имаме

$$d^n f = f^{(n)}(x)\,.\,(dx)^n.$$

Следователно в случая, когато аргументът x е независима променлива, производната от ред n на функцията f е равна на отношението на n-тия диференциал на тази функция $d^n f$ към n-тата степен на диференциала на аргумента dx.

Съвсем друг вид имат вторият и следващите диференциали в случая, когато аргументът x е съответно n пъти диференцируема фукция на някоя независима променлива t. Ще пресметнем втория диференциал при предположение, че функцията f е два пъти диференцируема в дадена точка x, а аргументът ѝ x е два пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

Като повторим разсъжденията от (5.51), този път ще получим

$$d^2 f = \delta(dy)\,|_{\delta x = dx} = \{\delta[f'(x)\,.\,dx]\}\,|_{\delta x = dx}$$
$$= \{\delta[f'(x)]\,.\,dx + f'(x)\,.\,\delta(dx)\}\,|_{\delta x = dx}$$
$$= \{f^{(2)}(x)\,.\,\delta x\,.\,dx\}\,|_{\delta x = dx} + \{f'(x)\,\delta(dx)\}\,|_{\delta x = dx}\,.$$

Съгласно определението за втори диференциал на функцията x имаме

$$\delta(dx)\,|_{\delta x = dx} = d^2 x$$

и следователно

(5.53) $$d^2 f = f^{(2)}(x)\,(dx)^2 + f'(x)\,.\,d^2 x\,.$$

Като сравним (5.53) с (5.52), виждаме, че (за разлика от първия диференциал) вторият диференциал няма свойството инвариантност на формата.

Толкова повече диференциалите от по-висок ред не притежават свойството инвариантност на формата.

6. Основни теореми за диференцируемите функции

В тази глава са дадени редица важни теореми на диференцируемите функции. Тези теореми са удобни при изследване поведението на функции както в околности на отделни точки, така и в цели участъци от дефиниционните им области.

6.1. Нарастване (намаляване) на функция в точка. Локален екстремум

Нека функцията f е дефинирана навсякъде в някоя околност на точката c.

Определение 1. *Ще казваме, че функцията f* ***нараства в точката*** *c, ако съществува δ-околност на тази точка, в която $f(x)<f(c)$ при $x<c$ и $f(x)>f(c)$ при $x>c$.*

Определение 2. *Ще казваме, че функцията f* ***намалява в точката*** *c, ако съществува δ-околност на тази точка, в която $f(x)>f(c)$ при $x<c$ и $f(x)<f(c)$ при $x>c$.*

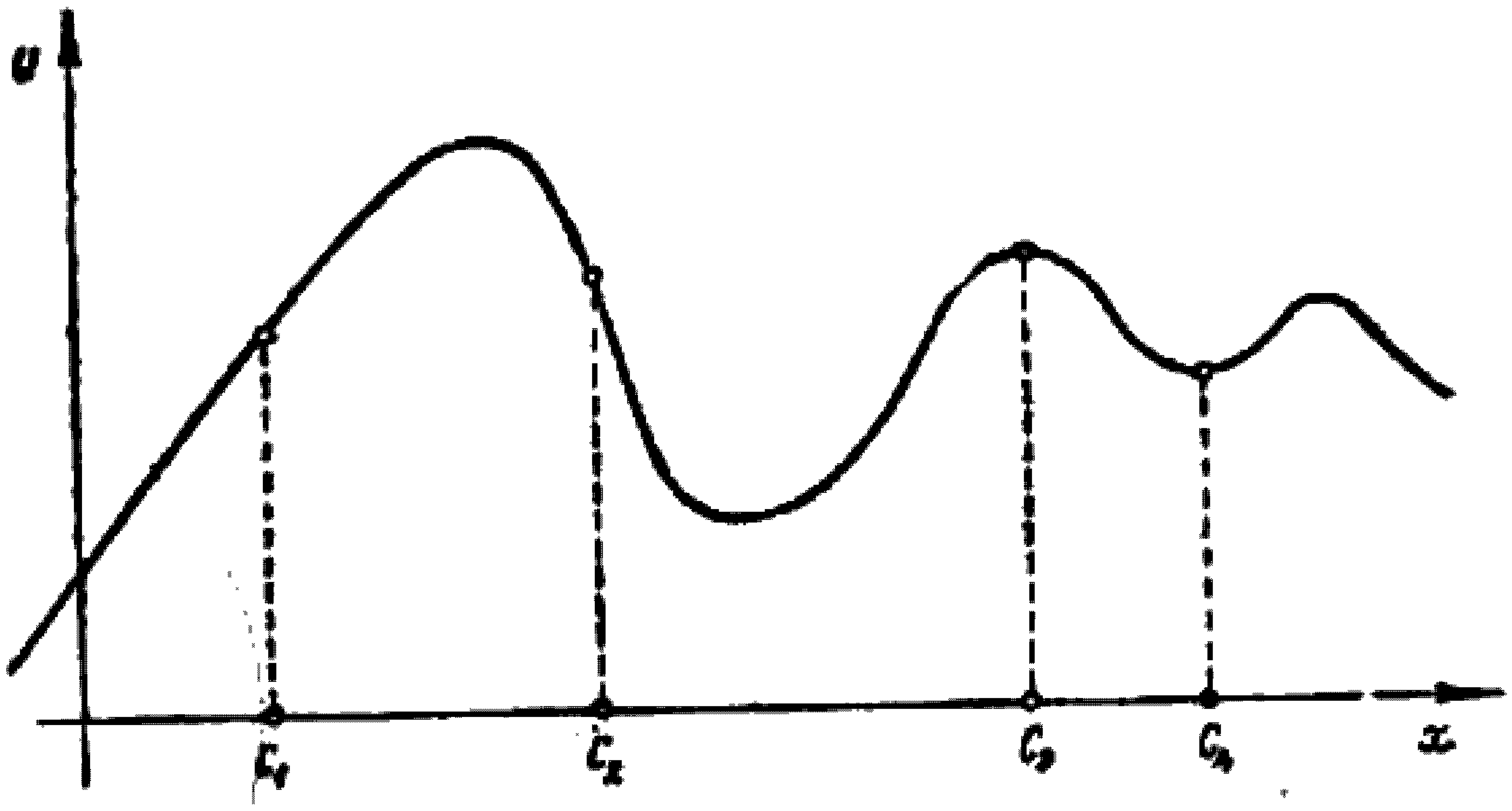
Определение 3. *Ще казваме, че функцията f има в точката c* ***локален максимум (локален минимум),*** *ако съществува такава δ-околност на точката c, че $f(c)$ е най-голямата (най-малката) измежду всички стойности $f(x)$ на функцията в тази околност.*

Определение 4. *Ще казваме, че функцията f има в точката c* ***локален екстремум,*** *ако тя има в тази точка или локален максимум, или локален минимум.*

На фиг. 6.1 е изобразена функция, нарастваща в точката c_1, намаляваща в точката c_2, имаща локален максимум в точката c_3 и локален минимум в точката c_4.

Ще докажем следните две теореми:

Теорема 6.1 (достатъчно условие за нарастване или намаляване на функция в точка). *Ако функцията f е диференцируема в*



Фиг. 6.1

точката c и производната ѝ $f'(c)$ е положителна (отрицателна) в тази точка, то тя е нарастваща (намаляваща) в точката c.

Доказателство. Ще разгледаме случая $f'(c)>0$ (понеже случаят $f'(c)<0$ е аналогичен).

Тъй като

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

то според определението за граница на функция по Хайне за положителното число $\varepsilon=f'(c)$ съществува такова $\delta>0$, че

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<f'(c) \text{ при } 0<|x-c|<\delta,$$

или

$$0<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<2f'(c) \quad \text{при} \quad c-\delta<x<c+\delta, \quad x\neq c.$$

Така навсякъде в прободената δ-околност на точката c имаме

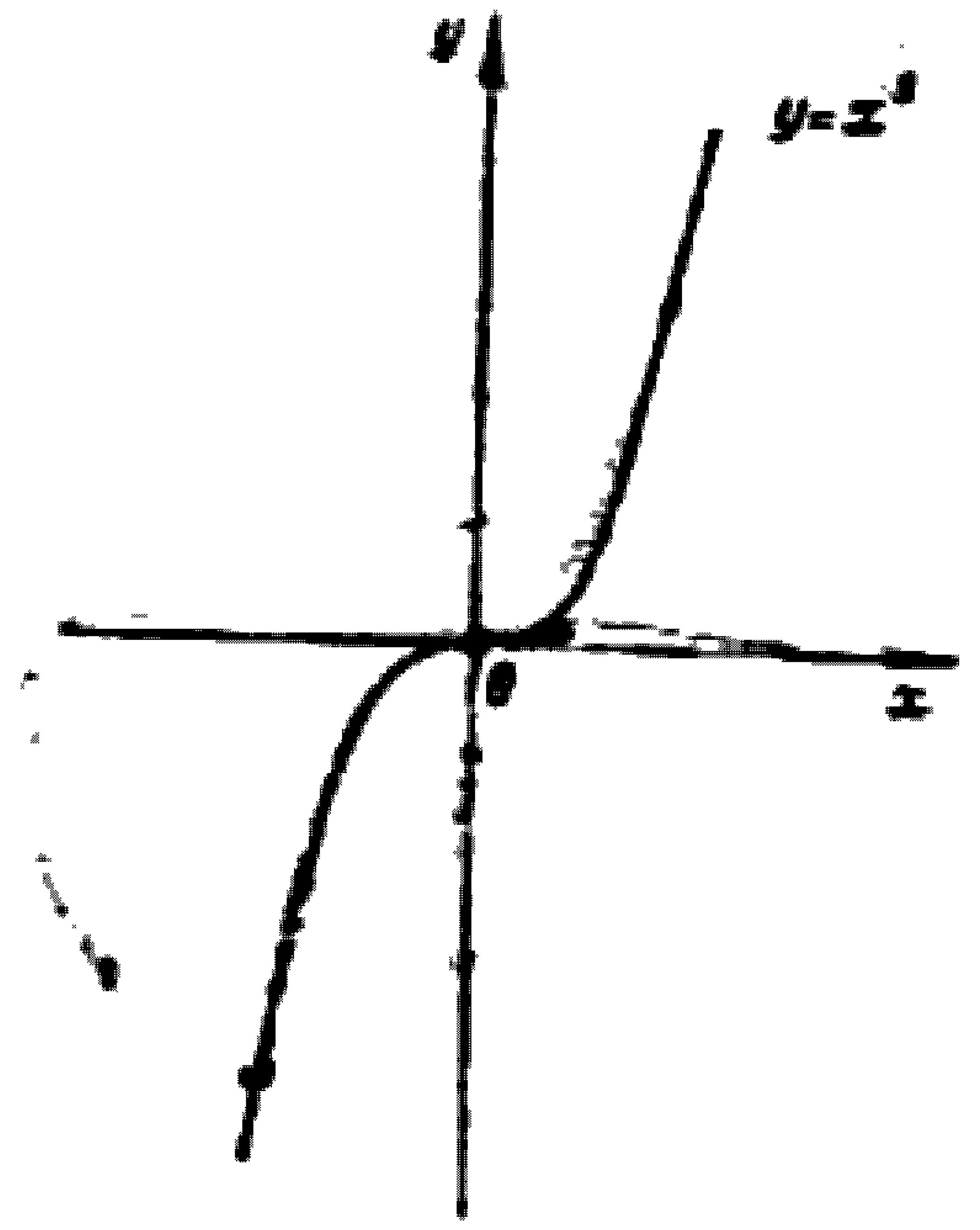
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

Следователно в тази δ-околност на точката c

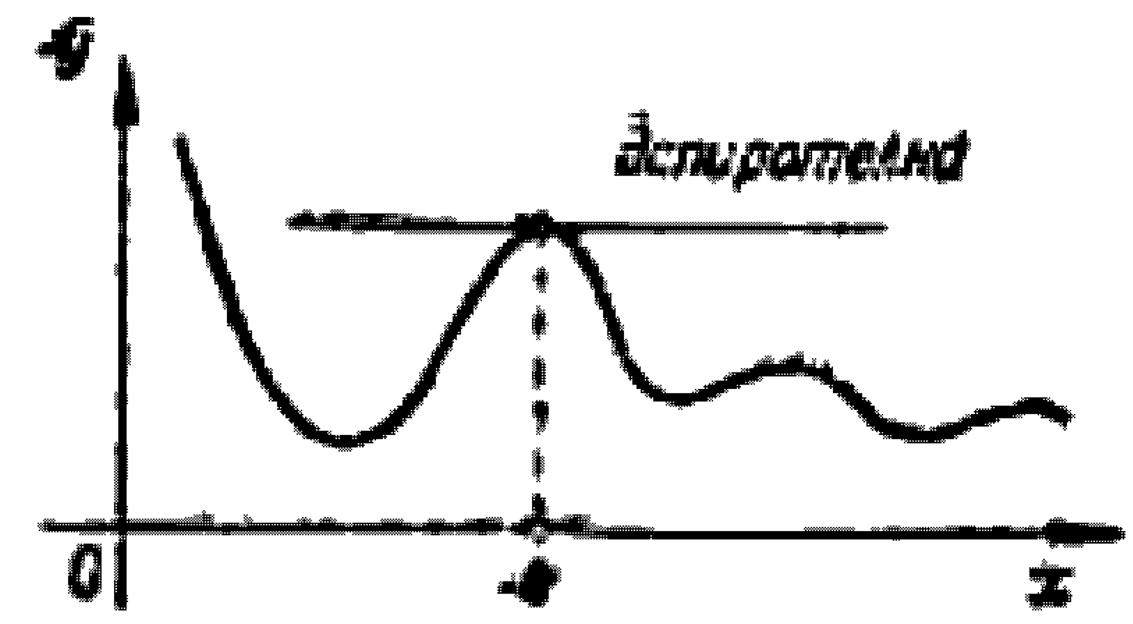
$$f(x)>f(c) \text{ при } x>c,$$
$$f(x)<f(c) \text{ при } x<c,$$

т. е. функцията f е нарастваща в точката c. □

Забележка 1. Положителността (отрицателността) на производната $f'(c)$ не е необходимо условие за нарастването (намаляването) на функцията f в точката c. Така функцията $f(x)=x^3$



Фиг. 6.2



Фиг. 6.3

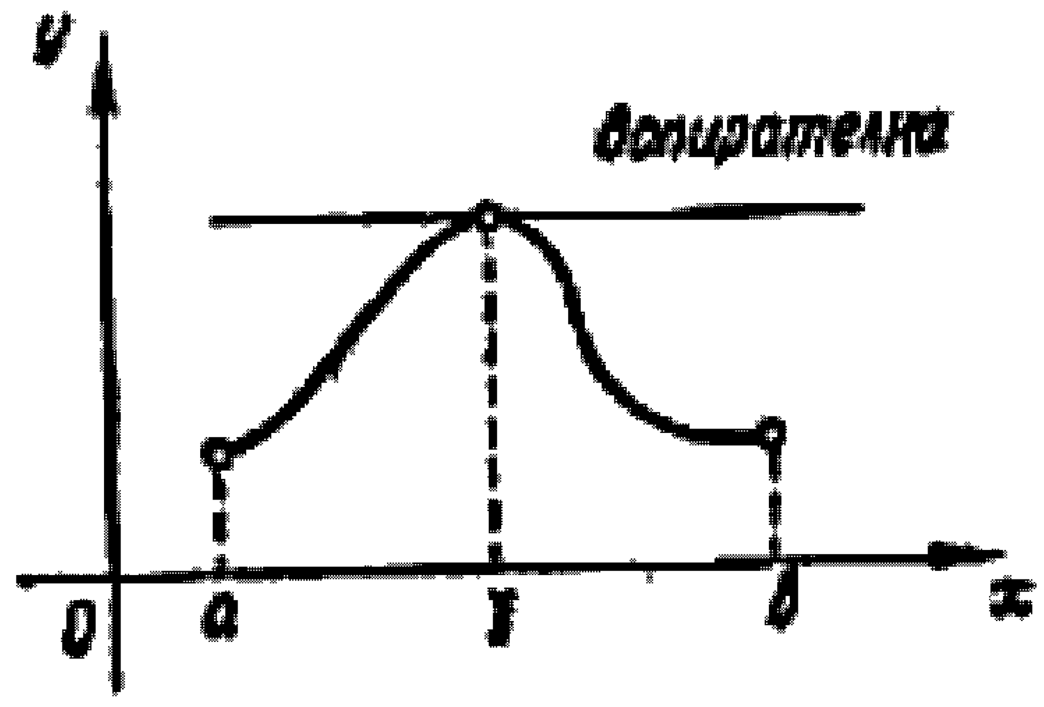
нараства в точката $c=0$, а производната ѝ в тази точка е равна на нула (вж. фиг. 6.2).

Теорема 6.2 (необходимо условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция). *Ако функцията f е диференцируема в точката c и има в тази точка локален екстремум, то $f'(c)=0$.*

Доказателство. Съгласно условието на теоремата съществува крайна производна $f'(c)$. Тъй като функцията f има в точката c локален екстремум, то в тази точка тя не е нито нарастваща, нито намаляваща. Следователно според теорема 6.1 производната ѝ $f'(c)$ не може да бъде нито положителна, нито отрицателна. □

Теорема 6.2 има много прост геометричен смисъл: ако в някоя точка на кривата $y=f(x)$ се достига локален екстремум и съществува допирателна в тази точка, тя е успоредна на оста Ox (вж. фиг. 6.3).

Забележка 2. Примерът с функцията $f(x)=x^3$ (вж. фиг. 6.2) показва, че анулирането на производната е само необходимо условие, но не е достатъчно за локален екстремум (производната $f'(x)=3x^2$ на тази функция се анулира в точката $x=0$, но в тази точка функцията няма екстремум).



Фиг. 6.4

6.2. Теорема за анулиране на производната

Теорема 6.3 (теорема на Рол*). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, диференцируема във всички вътрешни точки на този сегмент и $f(a)=f(b)$. Тогава съществува такава вътрешна точка ξ от сегмента $[a, b]$, че стойността на производната $f'(\xi)$ в тази точка е равна на нула.*

Накратко: между две равни стойности на диференцируема функция непременно има нула на производната на тази функция.

Доказателство. Тъй като функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то съгласно теорема 4.15 тази функция достига в този сегмент максималната си стойност M и минималната си стойност m. Възможни са два случая: 1) $M=m$; 2) $M>m$. В случая 1) $f(x)=M=m=\mathrm{const}$. Затова производната $f'(x)$ е равна на нула във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$. В случая $M>m$, тъй като $f(a)=f(b)$, то функцията достига в някоя вътрешна точка ξ на сегмента $[a, b]$ поне една от двете стойности M или m. Но тогава функцията f има в точката ξ локален екстремум. Понеже функцията f е диференцируема в точката ξ, то съгласно теорема 6.2 $f'(\xi)=0$. □

Теоремата на Рол има просто геометрично тълкуване: Ако в краищата на сегмента ординатите на кривата $y=f(x)$ са равни, то съгласно теоремата на Рол има точка, в която допирателната към тази крива е успоредна на оста Ox (фиг. 6.4).

Както ще видим по-нататък, теоремата на Рол е в основата на много формули и теореми на математическия анализ.

* Мишел Рол — френски математик (1652 — 1719).

6.3. Формула за крайните нараствания (формула на Лагранж)

Голямо значение в анализа и неговите приложения има следната теорема, принадлежаща на Лагранж*.

Теорема 6.4 (теорема на Лагранж). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема в интервала (a, b), то съществува точка ξ от интервала (a, b), за която е в сила формулата*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi). \tag{6.1}$$

Формулата (6.1) се нарича ***формула на Лагранж*** или ***формула за крайните нараствания.***

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)(f(b)-f(a))/(b-a), \tag{6.2}$$

за която са изпълнени всички условия от теоремата на Рол. Наистина F е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ (като разлика между функцията f и една линейна функция) и във всички точки на интервала (a, b) има производна, равна на

$$F'(x)=f'(x)-(f(b)-f(a))/(b-a).$$

От формула (6.2) е очевидно, че $F(a)=F(b)=0$.

Съгласно теоремата на Рол вътре в сегмента $[a, b]$ има такава точка ξ, че

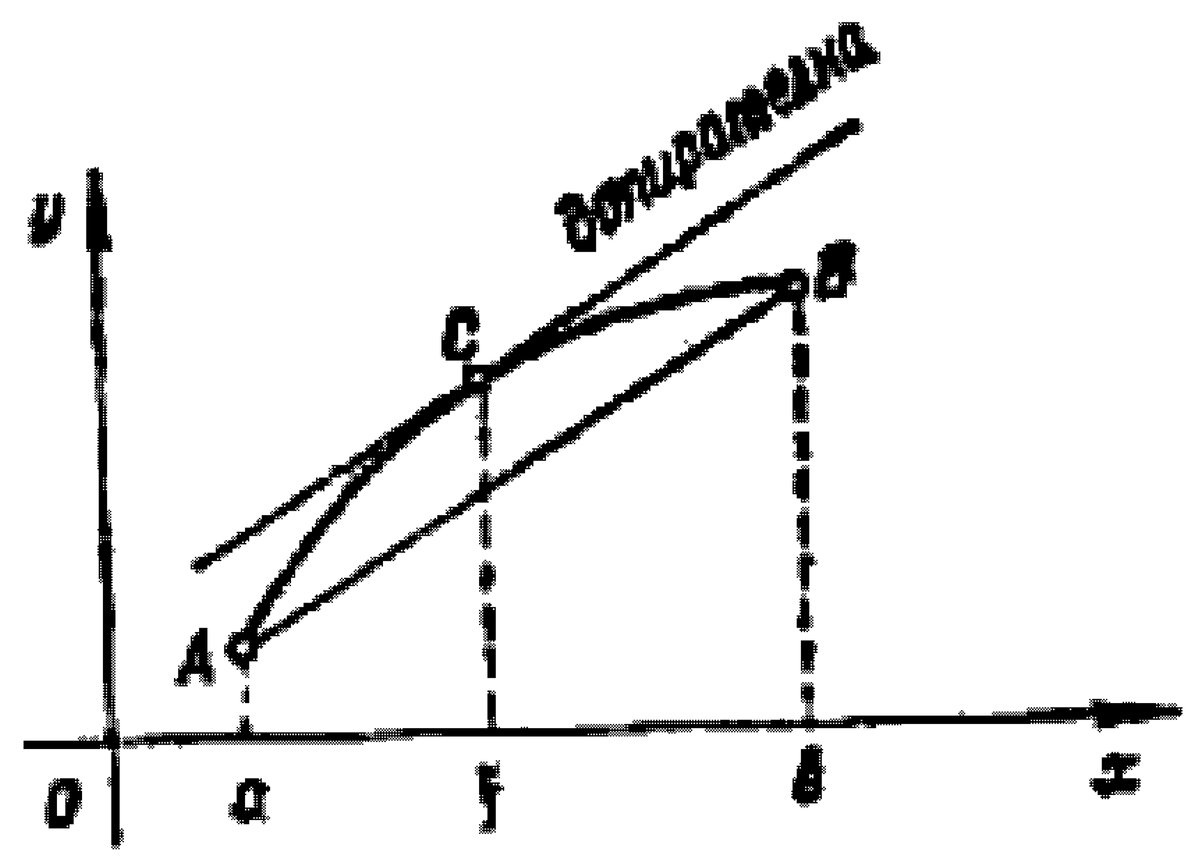
$$F'(\xi)=f'(\xi)-(f(b)-f(a))/(b-a)=0. \tag{6.3}$$

От равенството (6.3) следва формулата на Лагранж (6.1). Ще подчертаем, че във формула (6.1) не е необходимо $b>a$. Формулата е вярна и при $b<a$.

Забележка. Ние получихме теоремата на Лагранж като следствие от теоремата на Рол. Ще отбележим заедно с това, че теоремата на Рол е частен случай от теоремата на Лагранж (при $f(a)=f(b)$).

За изясняване геометричния смисъл на теоремата на Лагранж ще отбележим, че величината $(f(b)-f(a))/(b-a)$ е ъгловият коефициент на секущата, минаваща през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ на кривата $y=f(x)$, а $f'(\xi)$ е ъгловият коефициент на допирателната към кривата $y=f(x)$ в точката $C(\xi, f(\xi))$. Формулата на Лагранж означава, че има точка C от кривата $y=f(x)$ между точките A и B, допирателната в която е успоредна на секущата AB (фиг. 6.5).

* Жозеф Луи Лагранж — френски математик и механик (1736—1813).



Фиг. 6.5

Формулата на Лагранж за сегмента $[x_0, x_0+\Delta x]$ ще има вида

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x \,.\, f'(\xi), \tag{6.4}$$

където ξ е някоя точка, заключена между x_0 и $x_0+\Delta x$. Тогава има такова число θ от интервала $0<\theta<1$, че

$$\xi=x_0+\theta \,.\, \Delta x.$$

По този начин формула (6.4) добива вида

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x \,.\, f'(x_0+\theta \,.\, \Delta x), \tag{6.5}$$

където θ е някое число от интервала $0<\theta<1$. Формулата на Лагранж във вида (6.5) ни дава нарастването на функцията, предизвикано от произволното крайно нарастване Δx на аргумента. Този вид на формулата на Лагранж оправдава термина ***формула за крайните нараствания.***

6.4. Някои следствия от формулата на Лагранж

6.4.1. Константност на функция, която има нулева производна в даден интервал.

Теорема 6.5. *Ако функцията f е диференцируема навсякъде в интервала (a, b) и ако навсякъде в този интервал $f'(x)=0$, то функцията f е константа в интервала (a, b).*

Доказателство. Нека x_0 е някоя фиксирана точка в интервала (a, b), а x е произволна точка от този интервал.

Сегментът $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) се съдържа в интервала (a, b). Затова функцията f е диференцируема (а също така и непрекъсната) в този сегмент. Това ни дава право да приложим теоремата на Лагранж за функцията f в сегмента $[x_0, x]$. Съгласно тази теорема вътре в сегмента $[x_0, x]$ има точка ξ, за която

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi). \tag{6.6}$$

По условие производната на функцията f е равна на нула навсякъде в интервала (a, b) и следователно $f'(\xi)=0$. Тогава от (6.6) получаваме

$$f(x)=f(x_0). \tag{6.7}$$

Равенството (6.7) показва, че стойността на функцията f във всяка точка x на интервала (a, b) е равна на стойността ѝ във фиксираната точка x_0. Това означава, че функцията f е константа в интервала (a, b). □

6.4.2. Условия за монотонност на функция в интервал. Като второ следствие от формулата на Лагранж ще разгледаме въпроса за условията, които осигуряват ненамаляване (ненарастване) на функцията в даден интервал. Ще напомним определенията за ненамаляваща, ненарастваща, растяща и намаляваща функция в даден интервал.

1°. Казва се, че функцията f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството

$$f(x_1)\leqq f(x_2) \quad (f(x_1)\geqq f(x_2)).$$

2°. Казва се, че функцията f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Теорема 6.6. *Необходимо и достатъчно условие функцията f, диференцируема в интервала (a, b), да бъде ненамаляваща (ненарастваща) в този интервал е производната ѝ да бъде неотрицателна (неположителна) в този интервал.*

Доказателство. 1. *Достатъчност.* Нека $f'(x)\geqq 0\ (\leqq 0)$ навсякъде в интервала (a, b). Трябва да се докаже, че f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b). Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала (a, b), за които $x_1<x_2$. Функцията f е диференцируема (следователно и непрекъсната) в сегмента $[x_1, x_2]$. Като приложим теоремата на Лагранж за функцията f в сегмента $[x_1, x_2]$, ще получим

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi), \tag{6.8}$$

където $x_1<\xi<x_2$.

По условие $f'(\xi)\geqq 0\ (\leqq 0)$ и $x_2-x_1>0$. Затова дясната, а следователно и лявата страна на (6.8) е неотрицателна (неположителна), което доказва, че f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b).

2. *Необходимост.* Нека функцията f е диференцируема и ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b). Трябва да се докаже, че $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) в този интервал. Тъй като f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b), то тя е ненамаляваща (ненарастваща) във всяка точка на интервала (a, b). Следователно съгласно теорема 6.1 производната f' не може да бъде отрицателна (положителна) в нито една точка на интервала (a, b). □

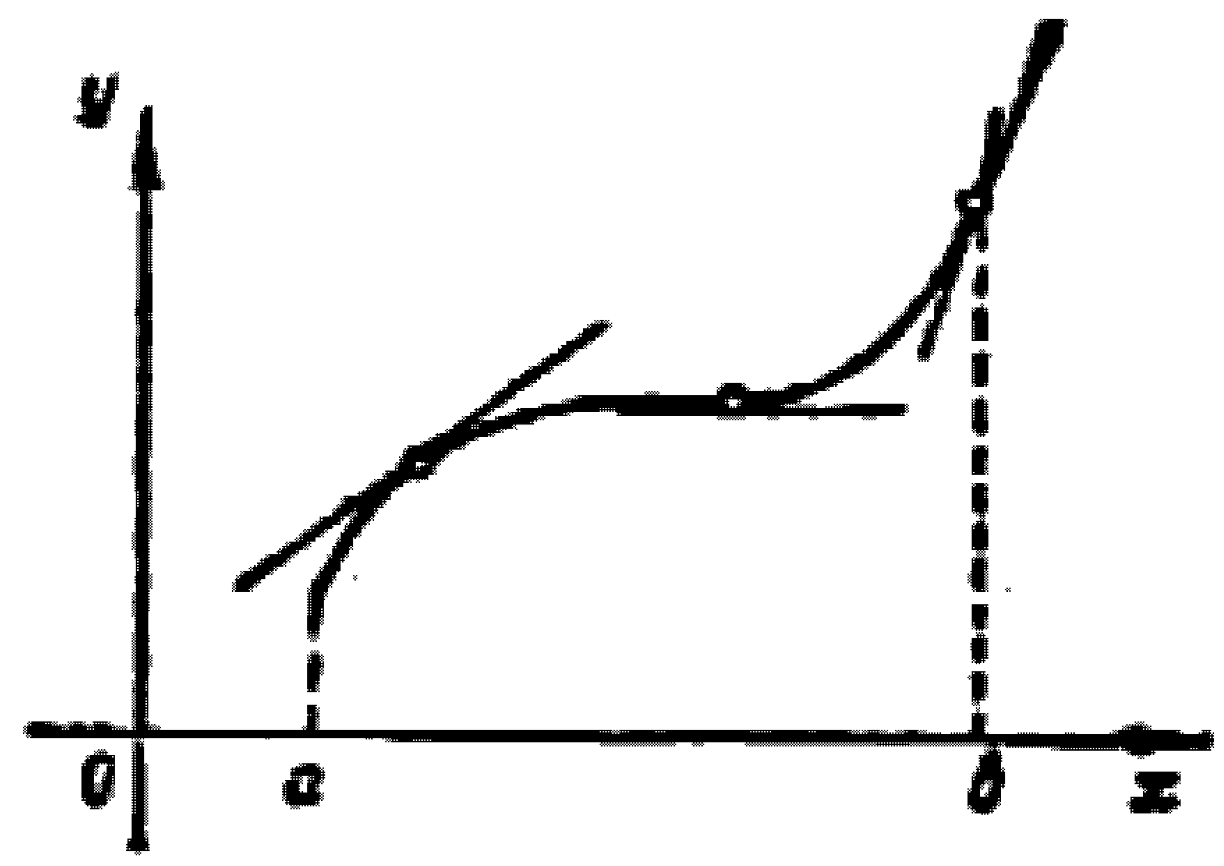
Теорема 6.7. *За да бъде функцията f растяща (намаляваща) в интервала (a, b), е достатъчно производната ѝ f' да бъде положителна (отрицателна) в този интервал.*

Доказателството е аналогично на доказателството за достатъчността в теорема 6.6. Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала (a, b), удовлетворяващи условието $x_1<x_2$. Като запишем формулата на Лагранж за сегмента $[x_1, x_2]$, ще получим равенството (6.8), но сега в това равенство $f'(\xi)>0$ (<0).

Поради това лявата страна на (6.8) е положителна (отрицателна), което доказва, че f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b).

Забележка. Положителността (отрицателността) на производната f' в интервала (a, b) не е необходимо условие за нарастването (намаляването) на функцията f в интервала (a, b). Така например функцията $f(x)=x^3$ расте в интервала $(-1, 1)$, но производната ѝ $f'(x)=3x^2$ не е навсякъде положителна в този интервал (тя е нула в точката $x=0$). Въобще лесно се доказва, че функцията f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b), ако производната ѝ f' е положителна (отрицателна) навсякъде в този интервал с изключение на краен брой точки, в които тази производна е равна на нула. (За да докажем това, е достатъчно да приложим теорема 6.7 към всеки от крайния брой интервали, в които f' е строго положителна (отрицателна), и да отчетем, че f е непрекъсната в точките, в които производната е равна на нула.)

Установената в теорема 6.7 връзка между знака на производната и посоката на изменението на функцията се разбира лесно по геометрични съображения. Тъй като производната е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията $y=f(x)$, то знакът на производната показва дали допирателната сключва с положителната посока на оста Ox остър или тъп ъгъл. Ако $f'(x)>0$ навсякъде в интервала (a, b), то навсякъде в този интервал допирателната сключва с оста Ox остър ъгъл и очевидно кривата $y=f(x)$ се „изкачва нагоре" навсякъде в този интервал (фиг. 6.6).



Фиг. 6.6

6.4.3. Липса на прекъсвания от първи род и отстраними прекъсвания на производната. Теоремата на Лагранж позволява да се установи едно забележително свойство на производната. Ще започнем с доказателството на следната лема:

Лема 1. *Нека функцията f има крайна производна f' навсякъде в интервала $(c, c+\delta)$ $((c-\delta, c))$, където δ е някое положително число, и освен това има дясна производна $f'(c+0)$ (лява производна $f'(c-0)$). Тогава, ако производната f' има в точката c дясна (лява) граница, то тази граница съвпада с дясната производна $f'(c+0)$ (лявата производна $f'(c-0)$).*

Доказателство. От съществуването на дясна производна $f'(c+0)$ (лява производна $f'(c-0)$) следва съществуването на крайната граница

$$\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\quad\left(\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right).$$

Но това означава, че

$$\lim_{x\to c+0}(f(x)-f(c))=0\quad(\lim_{x\to c-0}(f(x)-f(c))=0),$$

т. е. функцията f е непрекъсната в точката c отдясно (отляво).

Фиксираме произволно x в интервала $(c, c+\delta)$ $((c-\delta, c))$. Тъй като функцията f е диференцируема (следователно непрекъсната) в този интервал и освен това непрекъсната отдясно (отляво) в точката c, то за тази функция в сегмента $[c, c+\delta]$ (в $[c-\delta, c]$) са изпълнени всички условия от теоремата на Лагранж 6.4.

Съгласно тази теорема между x и c съществува такава точка ξ, че е изпълнено равенството

$$(f(x)-f(c))/(x-c)=f'(\xi). \tag{6.9}$$

Да направим в (6.9) граничен преход при $x\to c+0$ $(x\to c-0)$. Ако производната $f'(x)$ има в точката c крайна дясна граница $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ (крайна лява граница $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$), то дясната страна на

(6.9) ще клони към тази граница (тъй като $\xi \to c+0$ ($\xi \to c-0$) при $x \to c+0$ ($x \to c-0$).

Същата граница при $x \to c+0$ ($x \to c-0$) трябва да има и лявата страна на (6.9). Но границата на лявата страна на (6.9) при $x \to c+0$ ($x \to c-0$) по определение е равна на дясната производна $f'(c+0)$ (лявата производна $f'(c-0)$). □

Прилагайки лема 1 за всяка точка c на даден интервал (a, b), идваме до следното твърдение: Ако функцията f има крайна производна навсякъде в интервала (a, b), то производната f' не може да има в този интервал нито точки на отстранимо прекъсване, нито точки на прекъсване от първи род.

Наистина, ако в някоя точка c на интервала (a, b) съществуват крайни дясна и лява граница на функцията f', то f' е непрекъсната в точката c (според доказаната лема*). Ако не съществува нито една от границите $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$, то функцията f' по определение има в точката c прекъсване от втори род. И така производната f' във всяка точка c на интервала (a, b) е или непрекъсната, или има прекъсване от втори род. □

Ще приведем пример на функция, чиято производна съществува и е крайна навсякъде в даден интервал и има в дадена точка от този интервал прекъсване от втори род.

Ще разгледаме в интервала $(-1, 1)$ функцията

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos x^{-1} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Очевидно за всяко $x\neq 0$ производната на тази функция съществува и е $f'(x)=2x\cos x^{-1}+\sin x^{-1}$. Съществуването на производната f' в точката $x=0$ непосредствено следва от съществуването на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cos(1/\Delta x)=0.$$

Производната f' няма в точката $x=0$ нито дясна, нито лява граница, тъй като събираемото $2x\cos x^{-1}$ има в точката $x=0$ граница, равна на нула, а второто събираемо $\sin x^{-1}$ няма в точката $x=0$ нито дясна, нито лява граница.

6.4.4. Извеждане на някои неравенства. В заключение ще покажем как с помощта на теоремата на Лагранж могат да бъдат по-

* Според тази лема $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)=f'(c+0)$, $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)=f'(c-0)$, а тъй като $f'(c+0)=f'(c-0)=f'(c)$, то $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)=\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)=f'(c)$. Следователно $f'(x)$ е непрекъсната в точката c.

лучени някои полезни неравенства. За пример ще докажем следните две неравенства:

(6.10) $$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|,$$

(6.11) $$|\operatorname{arc\,tg} x_1 - \operatorname{arc\,tg} x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

(тук x_1 и x_2 са какви да е стойности на аргумента). За да установим неравенството (6.10), ще приложим теоремата на Лагранж за функцията $f(x)=\sin x$ в сегмента $[x_1, x_2]$. Получаваме

(6.12) $$\sin x_1 - \sin x_2 = (x_1 - x_2) \cdot f'(\xi).$$

Като отчетем, че $f'(\xi)=\cos\xi$ и че $|\cos\xi| \leq 1$ за всяко ξ, и като вземем абсолютните стойности в (6.12), получаваме неравенството (6.10).

За доказване на неравенството (6.11) ще приложим теоремата на Лагранж към функцията $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ в сегмента $[x_1, x_2]$ и ще вземем пред вид, че $f'(\xi)=1/(1+\xi^2) \leq 1$.

6.5. Обобщение на формулата на крайните нараствания (формула на Коши)

В този параграф ще докажем теорема, принадлежаща на Коши, която обобщава доказаната теорема на Лагранж.

Теорема 6.8 (теорема на Коши). *Ако всяка от двете функции f и g е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема във всяка вътрешна точка на този сегмент и освен това производната $g'(x)$ е различна от нула навсякъде вътре в сегмента $[a, b]$, то съществува такава точка ξ от вътрешността на този сегмент, че да е изпълнено равенството*

(6.13) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Формула (6.13) се нарича ***обобщена формула на крайните нараствания*** или ***формула на Коши.***

Доказателство. Най-напред ще докажем, че $g(a) \neq g(b)$. Наистина, ако това не е така, за функцията g в сегмента $[a, b]$ ще са изпълнени всички условия от теорема 6.3 (теоремата на Рол) и следователно вътре в сегмента $[a, b]$ ще съществува точка ξ, в която $g'(\xi)=0$. Това противоречи на условието на теоремата. И така $g(a) \neq g(b)$ и можем да разгледаме следната помощна функция:

(6.14) $$F(x)=f(x)-f(a)-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)).$$

Поради изискванията, наложени на функциите f и g, функцията $F(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема във всич ки вътрешни точки на този сегмент. Освен това е очевидно, че $F(a)=F(b)$. Тогава за F са изпълнени всички условия на теорема 6.3 (на Рол). Съгласно тази теорема съществува вътрешна за сегмента $[a, b]$ точка ξ, за която

$$F'(\xi)=0. \tag{6.15}$$

Тъй като $F'(x)=f'(x)-g'(x)(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))$, то от (6.15) получаваме

$$f'(\xi)-g'(\xi)(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)). \tag{6.16}$$

Отчитайки, че $g'(\xi)\neq 0$, от равенството (6.16) получаваме формулата на Коши (6.13). □

Забележка 1. Формулата на Лагранж (6.1) е частен случай от формулата на Коши (6.13) при $g(x)=x$.

Забележка 2. Във формула (6.13) не е задължително да имаме $b>a$. Формулата е вярна и при $b<a$.

6.6. Разкриване на неопределености (правило на Лопитал)

6.6.1. Разкриване на неопределеност от вида 0/0. Ще казваме, че отношението на две функции f/g е неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$, ако

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Да се разкрие тази неопределеност, означава да се пресметне границата $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$ (при условие, че тя съществува).

Аналогично се въвеждат понятията неопределеност от вида 0/0 при $x\to a+0\,(x\to a-0)$, при $x\to\infty$, а също и при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Следващата теорема ни дава правило за разкриване на неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$.

Теорема 6.9 (правило на Лопитал*). *Нека множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a, функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в C_δ и производната g' не се анулира в C_δ. Нека също*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0. \tag{6.17}$$

Тогава, ако съществува (крайна или безкрайна) граница

* Гийом Франсоа дьо Лопитал — френски математик (1661—1704).

(6.18) $$\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)),$$

то съществува и

(6.19) $$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$$

и е в сила съотношението

(6.20) $$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)).$$

Теоремата 6.9 ни дава правило за разкриване на неопределеност от вида 0/0, което свежда пресмятането на границата на частното на две функции в точката a до пресмятане на границата на частното на производните на тези функции в същата точка.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a, чиито членове x_n са различни от a. Ще додефинираме функциите f и g в точката a, като ще ги положим равни на нула в тази точка. При това додефиниране на функциите f и g те са непрекъснати навсякъде в множеството C_δ, допълнено с точката a, т. е. навсякъде в δ-околността на точката a. Наистина непрекъснатостта на f и g във всички точки на δ-околността на точката a с изключение на точката a следва от тяхната диференцируемост в тези точки, а непрекъснатостта на f и g в точката a следва от това, че границите им в точката a са равни на стойностите им в тази точка съгласно додефинирането на тези функции.

Отчитайки, че всички елементи на редицата $\{x_n\}$ принадлежат на множеството C_δ, ще разгледаме произволен сегмент, ограничен от точките a и x_n.

Според казаното двете функции f и g са непрекъснати върху такъв сегмент. Освен това функциите f и g са диференцируеми във всяка вътрешна точка на избрания сегмент и производната g' не се анулира във вътрешните му точки.

Това ни дава право да приложим към функциите f и g в сегмента, ограничен от точките a и x_n, теоремата на Коши 6.8.

Според тази теорема между точките a и x_n съществува такава точка ξ_n, че да е изпълнено равенството

(6.21) $$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Като вземем пред вид, че $f(a)=g(a)=0$, можем да напишем съотношението (6.21) във вида

(6.22) $$f(x_n)/g(x_n)=f'(\xi_n)/g'(\xi_n).$$

Нека сега в (6.22) n расте неограничено, т. е. $x_n\to a$. Понеже ξ_n е заключено между a и x_n, то и $\xi_n\to a$ при $n\to\infty$. От съществуването на границата (6.18) и от определението за граница на функция по Хайне следва, че дясната страна на (6.22) има граница при $n \to \infty$, равна на границата (6.18). Следователно същата граница при $n \to \infty$ има и лявата страна на (6.22). Понеже клонящата към a редица $\{x_n\}$ е произволна и според определението за граница на функция по Хайне съществуването на граница при $n \to \infty$ на лявата страна на (6.22), равна на (6.18), означава съществуване на граница на функцията (6.19), която също е равна на (6.18).

И така чрез граничен преход в (6.22) при $n \to \infty$ получаваме съотношението (6.20). □

Забележка 1. Правилото на Лопитал не винаги „действува", т. е. границата на частното на функциите (6.19) може да съществува и в случаи, когато границата на частното на производните (6.18) не съществува.

Например при $a=0$, $f(x)=x^2\cos x^{-1}$, $g(x)=\sin x$ съществува

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x^{-1}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\cos x^{-1}=0,$$

докато

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^{-1}+\sin x^{-1}}{\cos x}$$

не съществува.

Забележка 2. Ако към условията (6.9) добавим изискването за непрекъснатост на производните f' и g' в точката a, то при условие $g'(a)\neq 0$ съотношението (6.20) може да се напише във вида

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=f'(a)/g'(a).$$

Забележка 3. Ако производните f' и g' удовлетворяват същите изисквания, както и функциите f и g, то правилото на Лопитал може да се приложи повторно, т. е. границата на частното на първите производни на функциите f и g може да се замени с границата на частното на вторите производни на тези функции. Така ще получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Примери:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=1/2.$

2. Следващата граница се намира с двукратно прилагане на правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=1/6.$$

3. С трикратно прилагане на правилото на Лопитал се пресмята следната граница:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{24x}{2\sin x}=12.$$

Ние разгледахме въпроса за разкриване на неопределеност от вида 0/0 за случая на граница в точката a. Съвършено аналогични резултати са в сила и за случаите на граница в точката a отдясно (отляво), граница при $x\to\infty$, а също така и за граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Сега ще се убедим, че теорема 6.9 е в сила във всеки от следните три случая:

1. Когато в теорема 6.9 за множество C_δ вземем интервала $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$), а всички граници (6.17) — (6.20) са взети при $x\to a+0$ (съответно при $x\to a-0$).

2. Когато в теорема 6.9 за C_δ вземем множеството от всички точки, лежащи вън от сегмента $[-\delta, \delta]$, а границите (6.17)—(6.20) са взети при $x\to\infty$.

3. Когато в теорема 6.9 за множество C_δ е взета полуправата $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, \delta)$), а границите (6.17)—(6.20) са при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

Случай 1. В сила е цялата схема на доказателството на теорема 6.9, само че вместо редицата $\{x_n\}$, клоняща към a, от точки x_n, различни от a, трябва да вземем редица $\{x_n\}$ от интервала $(a, a+\delta)$ (съответно от $(a-\delta, a)$), клоняща към a.

Случай 2. Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми навсякъде вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ при някое $\delta>0$ и производната g' не се анулира вън от посочения сегмент. Нека освен това съществува границата

$$\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x)). \tag{6.18'}$$

Да направим смяна на променливата $t=1/x$ и да положим $G(t)=g(1/t)=g(x)$, $F(t)=f(1/t)=f(x)$. Тогава очевидно функциите F и G са дефинирани и диференцируеми в прободената $1/\delta$-околност на точката $t=0$ и производната

$$G'(t)=g'(1/t)(-1/t^2)=g'(x)(-x^2)$$

не се анулира в тази прободена $1/\delta$-околност.

Освен това поради съществуването на границата (6.18′) съществува и границата

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{6.23}$$

Но тогава според теорема 6.9 ще съществува и границата

(6.24) $$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)},$$

при това е изпълнено съотношението (6.20), което приема (поради (6.23) и (6.24)) вида

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \square$$

Случай 3. Използваме същата смяна $t=1/x$, както в случай 2, но сега тази смяна води вместо до разглеждане на границата при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) до границата при $x\to 0+0$ ($x\to 0-0$), разгледана в случай 1.

Примери: 1. Да се пресметне $\lim_{x\to 0+0}\frac{x^\delta}{\ln(1+x)}$ за всяко $\delta>1$ (този пример се отнася към случай 1).

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^\delta}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\delta x^{\delta-1}}{(1/(1+x))}=\lim_{x\to 0+0}\delta x^{\delta-1}(1+x)=0.$$

2. Да се пресметне $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi/4-\operatorname{arc\,tg}(1-1/x)}{\sin(1/x)}$ (този пример се отнася към случай 2).

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi/4-\operatorname{arc\,tg}(1-1/x)}{\sin(1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+(1-1/x)^2}\cdot\frac{1}{x^2}}{(-1/x^2)\cos(1/x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+(1-1/x)^2}}{\cos(1/x)}=\frac{1}{2}.$$

6.6.2. Разкриване на неопределеност от вида ∞/∞. Ще казваме, че отношението на две дефинирани в околност на точката a функции f и g представлява неопределеност от вида ∞/∞ при $x\to a$, ако

(6.25) $$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty.^*$$

За разкриване на тази неопределеност, т. е. за пресмятане на границата $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$, е в сила твърдение, напълно аналогично на теорема 6.9.

* Вместо ∞ в (6.25) може да имаме $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 6.9* (второ правило на Лопитал). *Нека множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a, функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в C_δ и производната g' не се анулира в C_δ. Нека по-нататък*

(6.17′) $$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty.$$

Тогава, ако съществува (крайна или безкрайна) границата

(6.18′) $$\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)),$$

то съществува и границата

(6.19′) $$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)),$$

при което е в сила съотношението

(6.20′) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. 1. Ще предположим най-напред, че съществува крайна граница (6.18′) и тя е равна на числото b. Ще докажем, че в този случай съществува и границата (6.19′) и е също равна на b.

Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a или отдясно, или отляво. Тъй като всички членове на тази редица принадлежат на множеството C_δ, то каквито и да са двата члена от редицата x_m и x_n, за функциите f и g в сегмента $[x_m, x_n]$ са изпълнени всички условия на теоремата на Коши (6.8). Според тази теорема между x_m и x_n съществува такава точка $\xi_{m,n}$, че е изпълнено равенството

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\cdot\frac{1-f(x_m)/f(x_n)}{1-g(x_m)/g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{m,n})}{g'(\xi_{m,n})}.$$

От това равенство заключаваме, че

(6.26) $$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{m,n})}{g'(\xi_{m,n})}\cdot\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}.$$

Сега избираме произволно положително число ε. Тъй като по условие $\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x))=b$, а редицата $\{x_n\}$ клони към a, то за положителното число $\varepsilon/2$ може да се намери такъв номер m, че за всеки номер n, по-голям от m, да са изпълнени условията

(6.27) $$f'(\xi_{m,n})/g'(\xi_{m,n})=b+\alpha_{m,n} \quad \text{и} \quad |\alpha_{m,n}|<\varepsilon/2.$$

Ще отбележим, че според условие (6.17′) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\infty$ и тъй като номерът m е фиксиран, съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}=1.$$

Това означава, че за положителното число $\frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2}$ и за избрания номер m съществува такъв номер n_0, че при всички $n>n_0$ имаме

$$\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}=1+\beta_{m,n}, \tag{6.28}$$

където $|\beta_{m,n}|<\frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2}$.

От (6.26), (6.27) и (6.28) следва, че

$$f(x_n)/g(x_n)=(b+\alpha_{m,n})(1+\beta_{m,n})=b+(b+\alpha_{m,n})\beta_{m,n}+\alpha_{m,n}.$$

Следователно е изпълнено неравенството

$$|f(x_n)/g(x_n)-b|\leq(|b|+|\alpha_{m,n}|)\cdot|\beta_{m,n}|+|\alpha_{m,n}|.$$

Отчитайки условията (6.27) и (6.28), при всички $n\geq n_0$ получаваме

$$(|b|+|\alpha_{m,n}|)\cdot|\beta_{m,n}|+|\alpha_{m,n}|<(|b|+\varepsilon/2)\frac{\varepsilon/2}{(|b|+\varepsilon/2)}+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

И така за произволно избраното $\varepsilon>0$ намерихме такъв номер n_0, че при всички $n>n_0$ да имаме

$$|f(x_n)/g(x_n)-b|<\varepsilon.$$

Това означава, че границата (6.19′) е равна на числото b и е изпълнено (6.20′). По такъв начин теоремата е доказана за случая на крайна граница (6.18′).

2. Нека сега границата (6.18′) е равна на безкрайност. Тогава очевидно границата на реципрочното отношение $\lim(g'(x)/f'(x))$ е равна на нула и съгласно току-що разгледания случай на крайна граница (6.18′) ще получим*, че $\lim\limits_{x\to a}(g(x)/f(x))=0$.

Последното съотношение поради (6.18′) е еквивалентно на

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\infty. \ \square$$

Също както и теорема 6.9, теорема 6.9* е вярна и за всеки от следните три случая:

1) Когато за множество C_δ се вземе интервалът $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$), а границите (6.17′)—(6.20′) се разглеждат при $x\to a+0$ (съответно при $x\to a-0$).

* Отчитаме, че за реципрочното отношение са изпълнени всички условия на теорема 6.9*. По-специално производната f' не се анулира в достатъчно малка прободена δ-околност на точката a (това следва от съществуването на границата (6.18′), равна на ∞, и от неанулирането на производната g' в посочената прободена δ-околност).

2) Когато за множество C_δ се избере съвкупността от всички x, лежащи вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ и всички граници (6.17′)—(6.20′) са взети при $x \to \infty$.

3) Когато за множество C_δ се вземе полуправата $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, -\delta)$) и всички граници (6.17′)—(6.20′) се взсмат при $x \to +\infty$ (съответно при $x \to -\infty$).

Доказателството на теорема 6.9* в тези три случая може да се заимствува от предишната точка.

Примери:

1. $$\lim_{x\to 0+0} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{(-1/2)\,x^{-3/2}} = -2 \lim_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0.$$

2. С n-кратно прилагане на правилото на Лопитал се пресмята

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

6.6.3. Разкриване на други видове неопределености. Освен изучените по-горе неопределености от вида $0/0$ и ∞/∞ често се срещат и неопределености от следните видове: $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞ 0^0, ∞^0.

Всички тези неопределености се свеждат до изучените две неопределености с помощта на алгебрични преобразувания. Ще покажем това за последните три от изброените неопределености. Всяка от тях има вида

$$f^g, \tag{6.29}$$

където f клони съответно към 1, 0 или ∞ при $x \to a$, g — съответно към ∞ или 0. Като логаритмуваме израза (6.29), получаваме (считаме, че $f(x) > 0$)

$$g \ln f. \tag{6.30}$$

За да намерим границата на израза (6.29), достатъчно е да намерим границата на (6.30).

Ще отбележим, че за всеки от разглежданите три случая изразът (6.30) е неопределеност от вида $0.\infty$ при $x \to a$. Следователно е достатъчно да се научим да привеждаме неопределеност от вида $0.\infty$ към неопределеност от вида $0/0$ или ∞/∞. Ще покажем как се прави това. Нека

$$z = \varphi . \psi, \tag{6.31}$$

при това

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Можем да запишем (6.31) във вида

$$z=\varphi\cdot\psi=\frac{\varphi}{1/\psi}. \tag{6.32}$$

Очевидно изразът (6.32) е неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$. Нашата цел е достигната.

Примери:

1. Да пресметнем $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$. Означаваме $y=x^x$. Тогава $\ln y=x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0}x=0,$$

откъдето е ясно, че $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$. Нека $y=(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$. Тогава да пресметнем

$$\ln y=\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}.$$

Като използваме правилото на Лопитал, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)\,2x}=2,$$

откъдето е ясно, че $\lim\limits_{x\to 0} y=e^2$.

6.7. Формула на Тейлор

В този параграф ще получим една от най-важните формули в математическия анализ, която има многобройни приложения както в математиката, така и в близките ѝ дисциплини.

Теорема 6.10 (теорема на Тейлор*). *Нека функцията f има в някоя околност на точката a производна от $(n+1)$-ви ред (n е произволно естествено число).* Нека x е произволна точка от тази околност, *а p — произволно положително число. Тогава между точките a и x съществува такава точка ξ, че е в сила формулата*

* Брук Тейлор — английски математик (1685—1731).

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n+1}(x), \tag{6.33}$$

където

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,.\,p}f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.34}$$

Забележка. Тъй като точката ξ е между x и a, то дробта $(x-a)/(x-\xi)$ е винаги положителна и за всяко $p>0$ е определена степента $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$.

Формула (6.33) се нарича ***формула на Тейлор*** (с център в точката a), а изразът $R_{n+1}(x)$ се нарича ***остатъчен член***. Както ще видим по-нататък, остатъчният член може да се запише не само във вида (6.34), но и по друг начин. Остатъчният член, записан във вида (6.34), е прието да се нарича ***остатъчен член в обща форма***.

Доказателство. Да положим

$$\varphi(x,\ a)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{6.35}$$

и да означим със символа $R_{n+1}(x)$ разликата

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,\ a). \tag{6.36}$$

Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че $R_{n+1}(x)$ се определя от формулата (6.34).

Фиксираме произволно x от посочената във формулировката на теоремата околност. За определеност можем да приемем, че $x>a$. Означаваме с t променлива, която се изменя в сегмента $[a,\ x]$, и разглеждаме помощната функция:

$$\psi(t)=f(x)-\varphi(x,\ t)-(x-t)^p\,.\,Q(x), \tag{6.37}$$

където

$$Q(x)=(x-a)^{-p}R_{n+1}(x). \tag{6.38}$$

Подробно ψ може да се запише и така:

$$\psi(t)=f(x)-f(t)-\frac{(x-t)}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t)-\cdots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-(x-t)^p\,.\,Q(x). \tag{6.39}$$

Нашата цел е да определим Q, като използваме свойствата на помощната функция ψ. Ще покажем, че функцията ψ удовлетворява всички условия на теоремата 6.3 (на Рол) в сегмента $[a, x]$.

От формула (6.39) и от условията, наложени на функцията f, е очевидно, че функцията ψ е непрекъсната в сегмента $[a, x]$ и диференцируема във всички вътрешни точки на този сегмент.* Ще се убедим, че $\psi(a)=\psi(x)=0$. Полагайки в (6.37) $t=a$, като вземем пред вид равенство (6.38), имаме

$$\psi(a)=f(x)-\varphi(x, a)-R_{n+1}(x).$$

Оттук въз основа на (6.36) получаваме $\psi(a)=0$. Равенството $\psi(x)=0$ следва непосредствено от формула (6.39).

И така за функцията ψ са изпълнени всички условия на теорема 6.3 (на Рол) в сегмента $[a, x]$. Според тази теорема съществува точка ξ, вътрешна за сегмента $[a, x]$, за която

$$\psi'(\xi)=0. \tag{6.40}$$

Като диференцираме равенството (6.39), получаваме

$$\psi'(t)=-f'(t)+\frac{1}{1!}f'(t)-\frac{x-t}{1!}f^{(2)}(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f^{(2)}(t) - \dots + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{6.41}$$

Лесно се вижда, че всички членове в дясната страна на (6.41) с изключение на последните два, се унищожават взаимно. Следователно

$$\psi'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{6.42}$$

Полагаме във формула (6.42) $t=\xi$ и като използваме равенството (6.40), получаваме

$$Q(x)=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.43}$$

Като съпоставим (6.43) и (6.38), намираме окончателно

$$R_{n+1}(x)=(x-a)^p Q(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Случаят, когато $x<a$, се разглежда съвършено аналогично. □

* От условието за съществуване на производна от $(n+1)$-ви ред за функцията f в околност на точката a следва непрекъснатостта на функцията и всичките ѝ производни до n-ти ред в тази околност, а оттук и в сегмента $[a, x]$. По-нататък може да се твърди, че функцията f и всичките ѝ производни до n-ти ред са един път диференцируеми в посочената околност на точката a и следователно навсякъде вътре в сегмента $[a, x]$.

Ще намерим разлагането по формулата на Тейлор на алгебричните полиноми от n-та степен. Нека

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n.$$

Тогава, понеже $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, остатъчният член $R_{n+1}(x)=0$, и формулата на Тейлор (6.33) приема вида

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

(Тук за точка a може да се вземе всяка точка от безкрайната права.) Следователно формулата на Тейлор дава възможност всеки полином f да се представи във вид на полином по степените на $x-a$, където a е произволно реално число.

Нека сега f е произволна функция, удовлетворяваща условията на теорема 6.10. Ще се постараем да изясним какви свойства притежава полиномът (6.35), фигуриращ във формулата на Тейлор за тази функция. Както и по-рано, ще означаваме този полином със символа $\varphi(x, a)$. Със символа $\varphi^{(n)}(x, a)$ означаваме n-тата производна на $\varphi(x, a)$ относно x. Като диференцираме формула (6.35) по x и положим след това $x=a$, получаваме следните равенства:

$$\begin{aligned}
&\varphi(a, a)=f(a),\\
&\varphi'(a, a)=f'(a),\\
&\varphi^{(2)}(a, a)=f^{(2)}(a),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi^{(n)}(a, a)=f^{(n)}(a).
\end{aligned}\tag{6.44}$$

Тогава фигуриращият във формулата на Тейлор полином $\varphi(x, a)$ за произволна функция f има следните свойства: той и производните му до n-ти ред включително в точката $x=a$ са равни съответно на f и производните ѝ до n-ти ред.

6.8. Различни форми на остатъчния член. Формула на Маклорен

6.8.1. Остатъчният член във форма на Лагранж, Коши и Пеано. По-рано получихме формулата на Тейлор с остатъчен член в обща форма. Сега ще установим други възможни представяния на остатъчния член. Две от тях могат да бъдат получени като частен случай от общата формула.

Най-напред ще преобразуваме формулата за остатъчния член (6.34). Тъй като точката ξ е между точките a и x, то има такова число* θ от интервала $0<\theta<1$, че $\xi-a=\theta(x-a)$. При това $\xi=a+\theta(x-a)$, $x-\xi=(x-a)(1-\theta)$. Така формула (6.34) може да се запише във вида

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.45}$$

Ще разгледаме сега два важни частни случая на формула (6.45): 1) $p=n+1$; 2) $p=1$ (ще напомним, че във формулите (6.34) и (6.45) p може да бъде произволно положително число). Първият от тези частни случаи ($p=n+1$) довежда до ***остатъчен член във форма на Лагранж***

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.46}$$

Тази форма на остатъчния член се употребява най-често в приложенията. Остатъчният член във формата на Лагранж напомня поредния член във формулата на Тейлор, само че $(n+1)$-вата производна на функцията f се пресмята не в точката a, а в някоя точка $\xi=a+\theta(x-a)$ между a и x.

Вторият от посочените по-горе частни случаи ($p=1$) води до ***остатъчен член във формата на Коши***:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.47}$$

Тъй като формите на Лагранж и Коши отговарят на различни стойности на p, а θ зависи от p, то стойностите на θ във формулите (6.46) и (6.47) са в общия случай различни. За оценка на някои функции формата на Коши е за предпочитане пред формата на Лагранж. Тези две форми на остатъчния член се използват обикновено в случаите, когато се иска при една или друга фиксирана стойност на x, различна от a, да се пресметне приближено стойността на функцията f.

Естествено е да заменим стойността на функцията $f(x)$ със стойността на полинома $\varphi(x, a)$ и да оценим грешката при това приближение. Срещат се задачи, в които ни интересува не числената стойност на тази грешка, а само порядъкът ѝ относно величината $(x-a)$. За тази цел е удобна друга форма за записване на остатъчния член, която сега ще изведем.

Ще докажем предварително една лема.

Лема 2. *Нека функцията g е дефинирана в околността Ω на точката a, има производни до ред $n-1$ в Ω и n-та производна в*

* Трябва да подчертаем, че ξ, а следователно и θ зависят от p.

точката a. Ако $g(a)=g'(a)=\dots=g^{(n)}(a)=0$, то за всяко $x\in\Omega$ е в сила съотношението

$$g(x)=o((x-a)^n). \tag{6.48}$$

Доказателство. Ще извършим доказателството индуктивно по отношение на натуралното число n.

За $n=1$ представянето (6.48) е в сила, тъй като g е диференцируема в точката a и $g'(a)=0$.

Да допуснем, че твърдението е вярно за n и да го докажем за $n+1$. От направеното допускане следва, че за всяко $x\in\Omega$ е в сила представянето

$$g'(x)=o((x-a)^n). \tag{6.49}$$

От друга страна, от теоремата за крайните нараствания имаме, че за всяко $x\in\Omega$ е в сила равенството

$$g(x)=g(x)-g(a)=(x-a)\,g'(\xi), \tag{6.50}$$

където ξ е между x и a, т. е. $|\xi-a|<|x-a|$.
От (6.49) и (6.50) получаваме

$$g(x)=(x-a)\,o((\xi-a)^n)=(x-a)\,o((x-a)^n)=o((x-a)^{n+1}). \quad \Box$$

Ще предполагаме, че функцията f има производна от $(n-1)$-ви ред в някоя околност на точката a и производна от n-ти ред в самата точка a.

При тези предположения ще разгледаме полинома $\varphi(x, a)$, определен от съотношението (6.35). Разликата между $f(x)$ и този полином, както и при доказателството на теорема 6.10, ще означим със символа $R_{n+1}(x)$, т. е. полагаме $R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x, a)$.

Ще докажем, че при направените предположения за остатъчния член $R_{n+1}(x)$ е в сила следното представяне:

$$R_{n+1}(x)=o((x-a)^n). \tag{6.51}$$

Представянето (6.51) е прието да се нарича ***остатъчен член във форма на Пеано****.

Като използваме установеното в края на предишния параграф свойство на полинома $\varphi(x, a)$, изразяващо се с равенствата (6.44), получаваме следните равенства:

$$R_{n+1}(a)=0,\ R'_{n+1}(a)=0,\ R''_{n+1}(a)=0,\ \dots,\ R^{(n)}_{n+1}(a)=0. \tag{6.52}$$

От равенствата (6.52) и лема 2 следва представянето (6.51).

В заключение ще запишем формулата на Тейлор с остатъчен член във формата на Пеано

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+o((x-a)^n).$$

* Джузепе Пеано — италиански математик (1853—1932).

6.8.2. Друго записване на формулата на Тейлор. Полагаме в (6.33) $a=x_0$, $x-a=\Delta x$ и вземаме остатъчния член във формата на Лагранж (6.46). При това $x=x_0+\Delta x$ и получаваме

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\frac{f'(x_0)}{1!}+(\Delta x)^2\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} + \cdots + (\Delta x)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+(\Delta x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\,.\,\Delta x)}{(n+1)!} \tag{6.53}$$

(тук θ е число от интервала $0<\theta<1$). Формулата на Тейлор (6.53) е естествено обобщение на формулата на Лагранж (6.5). Формулата на Лагранж (6.5) се получава от формулата (6.53) при $n=0$.

6.8.3. Формула на Маклорен. Формулата на Тейлор (6.33) с център в точката $a=0$ е прието да се нарича ***формула на Маклорен****, така че формулата на Маклорен представя функцията в околност на точката $x=0$. Ще запишем формулата на Маклорен за произволна функция f с остатъчен член във формите на Лагранж, Коши и Пеано:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_{n+1}(x), \tag{6.54}$$

където остатъчният член има вида:

1) във форма на Лагранж

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1); \tag{6.55}$$

2) във форма на Коши

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1); \tag{6.56}$$

3) във форма на Пеано

$$R_{n+1}(x)=o(x^n). \tag{6.57}$$

(Използвахме формулите (6.46), (6.47) и (6.48).)

Ще преминем към оценка на остатъчния член във формулата на Тейлор — Маклорен, намиране на разлаганията по формулата на Маклорен на най-важните елементарни функции и разглеждане на различни приложения на тази формула.

* Колин Маклорен — английски математик (1698—1746).

6.9. Оценка на остатъчния член. Разлагания на някои елементарни функции

6.9.1. Оценка на остатъчния член за произволна функция. Ще оценим остатъчния член за произволна функция f във формулата на Маклорен (6.54), взет във формата на Лагранж (6.55).

Ще предположим, че разглежданата функция f притежава следните свойства: съществува такова реално число M, че за всички номера n и за всички стойности на аргумента x от разглежданата околност на точката $x=0$ да е изпълнено неравенството

(6.58) $$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

От неравенството (6.58) следва

(6.59) $$|f^{(n)}(\theta x)| \leq M \quad \text{за } 0<\theta<1$$

и затова от формулата (6.55) получаваме

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}|f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M|x|^{n+1}/(n+1)!.$$

Така получаваме следната универсална оценка за остатъчния член в околност на точката $x=0$:

(6.60) $$|R_{n+1}(x)| \leq M|x|^{n+1}/(n+1)!.$$

Напомняме, при всяко фиксирано x

$$\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1}/(n+1)! = 0$$

(вж. примера от 3.2.4). Оттук следва, че ако изберем достатъчно голям номер n, можем да направим дясната страна на (6.60) произволно малка Това дава възможност да се използва формулата на Маклорен за приближено пресмятане на функции, притежаващи посоченото свойство, с произволна отнапред зададена точност. Ще приведем примери на функции, съвкупността от всички производни на които е ограничена в околност на точката $x=0$.

1. $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$. Съвкупността на всички производни на тази функция е ограничена във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ от числото $M=e^r$.

2. $f(x)=\cos x$ или $f(x)=\sin x$. Съвкупността от всички производни на всяка от тези функции е ограничена навсякъде върху безкрайната права от числото $M=1$.

6.9.2. Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции.

1°. $f(x)=e^x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ за всяко n, формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.61) $$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),$$

където остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\ (0<\theta<1). \tag{6.62}$$

Във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ поради $|e^{\theta x}|<e^r$ получаваме следната оценка за остатъчния член:

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r. \tag{6.62'}$$

2°. $f(x)=\sin x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\sin(n\pi/2)=\begin{cases} 0 & \text{при четно } n,\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при нечетно } n,\end{cases}$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x), \tag{6.63}$$

където n е нечетно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin(\theta x+(n+2)\pi/2)\quad (0<\theta<1).$$

Очевидно във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ за остатъчния член е в сила следната оценка:

$$|R_{n+2}(x)|\leqq r^{n+2}/(n+2)!. \tag{6.64}$$

3°. $f(x)=\cos x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\cos(n\pi/2)=\begin{cases} 0 & \text{при нечетно } n,\\ (-1)^{n/2} & \text{при четно } n,\end{cases}$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x), \tag{6.65}$$

където n е четно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos(\theta x+(n+2)\pi/2)\qquad (0<\theta<1).$$

Във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ получаваме за остатъчния член оценката (6.64).

4°. $f(x)=\ln(1+x)$. Тъй като

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!,\ \ f(0)=0,\ \ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x). \tag{6.66}$$

Остатъчния член този път ще запишем и оценим във формите на Лагранж и Коши:

(6.67) $R_{n+1}(x)=(-1)^n x^{n+1}(1+\theta x)^{-n-1}/(n+1)$ (форма на Лагранж),

(6.68) $R_{n+1}(x)=(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{-n-1}$ (форма на Коши).

За оценка на R_{n+1} за стойност на x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$ е удобно да се използва формата на Лагранж (6.67). Ако във формулата (6.67) вземем абсолютните стойности, получаваме за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$

(6.69) $$|R_{n+1}(x)|<1/(n+1).$$

От оценката (6.69) е очевидно, че за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$ $R_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Да оценим сега R_{n+1} за отрицателни стойности на x от сегмента $-r\leqq x\leqq 0$, където $0<r<1$. За тази цел ще използваме формата на Коши (6.68).

Преписваме този остатъчен член във вида

(6.70) $$R_{n+1}(x)=(-1)^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Като вземем под внимание, че за разглежданите стойности на x $(1-\theta)/(1+\theta x)<1$, от (6.70) за модула на остатъчния член получаваме

(6.71) $$|R_{n+1}(x)|<r^{n+1}/(1-r).$$

Тъй като $r<1$, то от оценката (6.71) следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$.

5°. $f(x)=(1+x)^\alpha$, където α е реално число и $x>-1$. Тъй като

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot\cdot(\alpha-n+1),$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.72) $$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdot\cdot\cdot+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x),$$

където остатъчният член във формата на Лагранж е

(6.73) $$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

В частния случай, когато, $\alpha=n$ е цяло число, $R_{n+1}(x)=0$ и получаваме известната от елементарния курс формула за бинома на Нютон:

(6.74) $$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdot\cdot\cdot+x^n.$$

Ако трябва да получим разлагане не на двучлена $(1+x)^n$, а на двучлена $(a+x)^n$, то можем да изнесем a^n пред скоби и да използваме формула (6.74). Така ще получим

$$(a+x)^n=a^n(1+x/a)^n$$
$$=a^n\left(1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right).$$

Следователно общият случай на бинома на Нютон е частен случай от формулата на Маклорен.

6°. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$. Понеже

$$f^{(n)}(x)=(1+x^2)^{-n/2}(n-1)!\,\sin(n(\operatorname{arc\,tg} x+\pi/2))$$

(вж. пример 5 от 5.6.2), то

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & \text{при нечетно } n\end{cases}$$

и формулата на Маклорен приема вида

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n}+R_{n+2}(x), \tag{6.75}$$

където n е нечетно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=x^{n+2}(n+2)^{-1}(1+(\theta x)^2)^{-(n+2)/2}\sin((n+2)(\operatorname{arc\,tg} x+\pi/2))$$
$$(0<\theta<1).$$

За остатъчния член във всеки сегмент $[-r, r]$ (където $r>0$) имаме оценката

$$|R_{n+2}(x)|<r^{n+2}/(n+2). \tag{6.76}$$

От оценката (6.76) е очевидно, че при всяко $r\leqq 1$ остатъчният член $R_{n+2}(x)$ клони към нула при $n\to\infty$.

6.10. Примери за приложения на формулата на Маклорен

6.10.1. Пресмятане на числото e на АСМ. В 3.2.3 въведохме числото e като граница на редицата $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и получихме за e груба оценка от вида $2\leqq e\leqq 3$. В тази точка ще покажем как може да се пресметне числото e с произволна точност.

Ще използваме формулата на Маклорен (6.61) и оценката на остатъчния член (6.62'), като ще положим в тях $x=r=1$. Ще получим

(6.77) $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1),$$

където

(6.78) $$|R_{n+1}(1)|\leq e/(n+1)!<3/(n+1)!.$$

Като изберем в (6.77) и (6.78) n достатъчно голямо, можем да пресметнем с помощта на тези формули числото e с произволна отнапред зададена точност.

6.10.2. Доказателство за ирационалността на числото *e*. С помощта на формулата на Маклорен (6.77) ще докажем, че числото e е ирационално.

Като използваме за $R_{n+1}(1)$ представянето (6.62), при $x=1$ ще получим

(6.79) $$R_{n+1}(1)=e^{\theta}/(n+1)!,$$

където $0<\theta<1$. Следователно $R_{n+1}(1)$ удовлетворява неравенствата

(6.80) $$1/(n+1)!<R_{n+1}(1)<3/(n+1)!.$$

И така за e е в сила представянето (6.77) с неравенствата (6.80) за $R_{n+1}(1)$.

Ще предположим сега, че числото e е рационално, т. е. може да се представи във вида $e=m/n$, $n\geq 2$.

Като изберем във формулата на Маклорен (6.77) номера n, равен на знаменателя на рационалната дроб $e=m/n$, и като умножим (6.77) с $n!$, ще получим, че всяко от числата $n!e$ и $n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ е цяло, докато числото $n!\,R_{n+1}(1)$ поради неравенството (6.80) удовлетворява условията $1/(n+1)<n!\,R_{n+1}(1)<3/(n+1)$ и следователно не е цяло. Така при умножаване на формулата на Маклорен (6.77) с числото $n!$ получаваме съотношението

$$n!\,e-n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=n!\,R_{n+1}(1),$$

лявата страна на което е цяло число, а дясната не е цяло число. □

6.10.3. Пресмятане стойностите на тригонометричните функции. Лесно е да се убедим, че стойностите на тригонометричните функции $\sin x$ и $\cos x$ за x от сегмента $[0, \pi/4]$ напълно определят стойностите на тези функции за всяко x. Затова можем да се ограничим с пресмятането на $\sin x$ и $\cos x$ за стойности на x само от този сегмент. За да осигурим точност 10^{-4}, ще положим във формула (6.63) и в оценката (6.64) $n=5$, $r=\pi/4$. Тогава

$$|R_{n+2}(x)|=|R_7(x)|\leq(\pi/4)^7/7!<10^{-4}$$

и затова за всяко x, удовлетворяващо условието $|x|\leq\pi/4$, с точност до 10^{-4} имаме

$$\sin x\approx x-x^3/6+x^5/120.$$

Аналогично, като положим във формулата (6.65) и в оценката (6.64) $n=6$, $r=\pi/4$, получаваме

$$|R_{n+2}(x)|=|R_8(x)|\leq(\pi/4)^8/8!<10^{-5}$$

и затова за всяко x, удовлетворяващо условието $|x|\leq\pi/4$, с точност до 10^{-5}

$$\cos x\approx 1-x^2/2+x^4/24-x^6/720.$$

6.10.4. Пресмятане стойностите на логаритмичната функция. Всяко положително число a се представя, и то по единствен начин, във вида

$$a=2^p\,.\,M, \tag{6.81}$$

където p е цяло число (с произволен знак), а M удовлетворява неравенствата*

$$1/2\leq M<1. \tag{6.82}$$

От (6.81) следва

$$\ln a=p\ln 2+\ln M. \tag{6.83}$$

Като въведем вместо M нова променлива x, свързана с M чрез изразите

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+x}{1-x},\quad x=\frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1}, \tag{6.84}$$

ще получим от (6.82) и втората от формулите (6.84), че x не напуска границите на интервала**

$$|x|<0{,}172. \tag{6.85}$$

* Наистина за всяко $a>0$, като положим $p=[\log_2 a]+1$, където $[x]$ е цялата част на числото x, $M=a\,.\,2^{-p}$, ще получим, че $p-1\leq\log_2 a<p$, и затова $2^{p-1}\leq a<2^p$, така че $a=2^p\,.\,M$, където $1/2\leq M<1$.

** Достатъчно е да се намери максималната и минималната стойност на функцията, определена с втората от формулите (6.84) и сегмента $[1/2,1]$.

От (6.83) и първата от формулите на (6.84) следва

$$\ln a=(p-1/2)\ln 2+\ln\frac{1+x}{1-x}. \tag{6.86}$$

За пресмятане стойността на $\ln a$ ще използваме формулата (6.86), като ще развием в нея функцията $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ по формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж и ще отчетем, че x удовлетворява неравенството (6.85).

Тъй като при $n\geq 1$ за тази функция f имаме

$$f^{(n)}(x)=(\ln(1+x))^{(n)}-(\ln(1-x))^{(n)}$$
$$=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!+(1-x)^{-n}(n-1)!,$$
$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ 2(n-1)! & \text{при нечетно } n,\end{cases}$$

то формулата на Маклорен (6.54) с остатъчен член във формата на Лагранж има вида

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\dots+\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+3}(x), \tag{6.87}$$

където

$$R_{2n+3}(x)=x^{2n+3}(2n+3)^{-1}\{(1+\theta x)^{-2n-3}+(1-\theta x)^{-2n-3}\},\quad 0<\theta<1. \tag{6.88}$$

Ще оценим остатъчния член (6.88). От (6.85) получаваме, че изразът в големите скоби на (6.88) не надминава сумата $1+(1-0{,}172)^{-2n-3}$. Следователно за целия остатъчен член R_{2n+3} ще бъде в сила оценката

$$|R_{2n+3}(x)|\leq(0{,}172)^{2n+3}(2n+3)^{-1}\{1+(1-0{,}172)^{-2n-3}\}$$
$$\leq(2n+3)^{-1}\{(0{,}172)^{2n+3}+(0{,}208)^{2n+3}\}. \tag{6.89}$$

От (6.86) и (6.87) следва, че за пресмятане на $\ln a$ може да се използва приближената формула

$$\ln a\approx(p-1/2)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right), \tag{6.90}$$

при която грешката не надминава стоящата в дясната страна на (6.89) величина.

При пресмятания с помощта на АСМ обикновено се използва формулата (6.90) при $n=6$. Ще отбележим, че при $n=6$ получаваме

$$\ln a\approx(p-1/2)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{13}}{13}\right)$$

с грешка, не по-голяма от $15^{-1}((0{,}172)^{15}+(0{,}208)^{15})<5\cdot 10^{-12}$.

6.10.5. Пресмятане стойностите на обратните тригонометрични функции. Достатъчно е да се ограничим с пресмятането на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$, тъй като пресмятането на стойностите на функцията $\operatorname{arc\,ctg} x$, $\arcsin x$ и $\arccos x$ се свежда до пресмятане на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$ с помощта на формулите:

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} x, \quad \arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Освен това достатъчно е да можем да пресмятаме стойностите на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ само за положителни стойности на аргумента, тъй като при произволен знак на x имаме $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{sgn} x \,.\, \operatorname{arc\,tg} |x|$. Нещо повече, пресмятането на стойностите на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ за всяка стойност на аргумента x се свежда лесно към пресмятане стойностите на тази функция за стойности на аргумента, принадлежащи на сегмента $0 \leq x \leq 1/8$.

Нека отначало аргументът x на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ удовлетворява условието $x > 1$. Полагаме

$$x_1 = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} 1) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x - \pi/4).$$

Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x_1 = \operatorname{arc\,tg} x - \pi/4, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} x_1 + \pi/4, \tag{6.91}$$

при което

$$x_1 = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) \,.\, \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1)} = \frac{x-1}{x+1} < 1.$$

Така формулата (6.91) свежда пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на $x \geq 1$ до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на $x_1 \leq 1$.

Нека сега k е кое да е от числата 0, 1, 2 или 3. Ако стойността $\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}$ е известна при всяко $k = 0$, 1, 2 и 3, ще покажем как пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за x от сегмента $2^{-k-1} \leq x \leq 2^{-k}$ се свежда до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на x_1 от сегмента $0 \leq x_1 \leq 2^{-k-1}$. Полагаме

$$x_1 = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}).$$

Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}, \tag{6.92}$$

при което

$$x_1 = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1})}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1})} = \frac{x - 2^{-k-1}}{1 + x \,.\, 2^{-k-1}}. \tag{6.93}$$

Понеже $2^{-k-1} \leq x \leq 2^{-k}$, от (6.93) е очевидно, че $0 \leq x_1 \leq 2^{-k-1}$. Затова равенството (6.92) свежда пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента $2^{-k-1} \leq x \leq 2^{-k}$ до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на x_1 от сегмента $0 < x_1 < 2^{-k-1}$.

Като приложим формула (6.92) най-много четири пъти (за $k=0, 1, 2$ и 3), пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента $[0, 1]$ се свежда до пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента $[0, 1/8]$.

За пресмятането на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на аргумента x от сегмента $[0, 1/8]$ използваме формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж

$$(6.94)\qquad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+3}(x),$$

където

$$(6.95)\qquad R_{2n+3}(x) = x^{2n+3}(2n+3)^{-1}(1+(\theta x)^2)^{-(2n+3)/2}$$
$$\times \sin((2n+3)\operatorname{arc\,tg}(\theta x) + \pi/2)), \quad 0<\theta<1.$$

При всяко x от сегмента $0 \leq x \leq 1/8$ за остатъчния член (6.95) е в сила оценката

$$(6.96)\qquad |R_{2n+3}(x)| \leq (2n+3)^{-1} \cdot 8^{-2n-3}.$$

От (6.94) следва, че за пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на аргумента от сегмента $0 \leq x \leq 1/8 - 0{,}125$ може да се използва приближената формула

$$(6.97)\qquad \operatorname{arc\,tg} x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

при която грешката не надминава величината от дясната страна на (6.96).

При смятане на АСМ може да се използва формула (6.97) при $n=6$. Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{13}}{13}$$

с грешка, която не надминава $15^{-1} \cdot 8^{-15} < 2 \cdot 10^{-15}$.

6.10.6. Асимптотична оценка на елементарните функции и пресмятане на граници. Формулата на Тейлор — Маклорен е мощно средство за пресмятане на граници. От установеното в 6.9.2 разлагане на елементарните функции следват асимптотични оценки за тези функции, характеризиращи тяхното поведение в околността на точката $x=0$, т. е. при малки стойности на $|x|$, с точност до членовете от произволна степен n на малката величина x.

Като вземем във формулата на Маклорен за функциите e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ остатъчния член във формата на Пеано, ще получим, че за всяко n са в сила следните оценки:

(6.98)
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$
$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$$
$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$
$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}).$$

Примери;

1. Като използваме втората от оценките (6.98), взета при $n=1$, пресмятаме границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3/3!+o(x^3)-x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}(-1/3!+o(x))=-1/3!.$$

2. $$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\,.\,\sin x}.$$

От вида на знаменателя може да се заключи, че определяща роля имат членовете от четвърта степен спрямо x (понеже $\sin x=x+o(x)$). Ползвайки формулите (6.98), записваме

(6.99) $$\cos x=1-x^2/2!+x^4/4!+o(x^5),$$

(6.100) $$\sin x=x+o(x),$$

(6.101) $$e^z=1+z+z^2/2+o(z^2).$$

Очевидно при $z=-x^2/2$ от (6.101) получаваме

(6.102) $$e^{-x^2/2}=1-x^2/2+x^4/8+o(x^4).$$

формулите (6.99), (6.100) и (6.102) търсената гранична да се запише във вида

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2/2+x^4/8+o(x^4)-1+x^2/2-x^4/24}{x^4+o(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/8+1/24+\alpha(x)}{1+\alpha(x)}=1/8-1/24=1/12.$$

със символа $\alpha(x)$ сме означили величината $x^{-4}o(x^4)$, която малка при $x\to 0$.)

3. $I=\lim_{x\to 0}(\cos x+x^2/2)^{-x(\sin x-x)}$.

y величината $y=(\cos x+x^2/2)^{-x(\sin x-x)}$. Тогава $I=\lim_{x\to 0} y$. логаритмуваме* израза за y, ще имаме

$$\ln y=\frac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}.$$

$\cos x=1-x^2/2+x^4/24+o(x^5)$, $\sin x=x-x^3/6+o(x^4)$, ще

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^4/24+o(x^5))}{-x^4/6+o(x^5)}.$$

сега, че $\ln(1+z)=z+o(z)$. От тази формула следва $\ln(1+x^4/24+o(x^5))=x^4/24+o(x^4)$,

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/24+o(x^4)}{-x^4/6+o(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{1/24+x^{-4}o(x^4)}{-1/6+o(x)}=-1/4,$$

$$I=\lim_{x\to 0}y=e^{-1/4}.$$

стойности на x изразът $\cos x+x^2/2$ е очевидно положителен.

7. Изследване графиката на функция и намиране на екстремални стойности

Разработеният в предишните две глави апарат на диференциалното смятане се прилага в тази глава за изследване графиката на функция и за намиране както на локалните, така и на глобалните екстремални стойности на функция.

7.1. Стационарни точки

7.1.1. Признаци за монотонност на функция. От
вече знаем, че изучаването на участъците на на
ференцируема функция се свежда до изследване знака на
производна на тази функция.

За удобство ще формулираме още веднъж намерените в предишната глава условия за монотонност на функция.

1°. *За да бъде диференцируемата в интервала (a, b) функция f ненамаляваща (нерастяща), е необходимо и достатъчно производната ѝ f' да бъде неотрицателна (неположителна) навсякъде в този интервал.*

2°. *За да бъде диференцируемата в интервала (a, b) функция f растяща (намаляваща), е достатъчно производната ѝ f' да бъде положителна (отрицателна) навсякъде в този*

Ще намерим областите на монотонност на нята
$=x^3-3x^2-4$. Производната $f'(x)=3x(x-2)$ на тази я
положителна при $-\infty<x<0$, отрицателна при $0<x<2$ положителна при $2<x<+\infty$. Затова съгласно казаното дадената функция f расте на полуправата $(-\infty, 0)$, намалява в интервала $(0, 2)$ и расте на полуправата $(2, +\infty)$. Графиката на тази функция е изобразена на фигура 7.1.

7.1.2. Намиране на стационарни точки. Ще напомним определенията за локален максимум и локален минимум на функция.

Нека функцията f е дефинирана навсякъде в някоя окол-

ност на точката c. Тогава тази функция има в точката c ***локален максимум*** *(или съответно* ***локален минимум****), ако съществува такава околност на точката c, че стойността $f(c)$ да е най-голяма (или съответно най-малка) измежду всички стойности $f(x)$ на тази функция от тази околност.*

Локалният максимум и локалният минимум се обединяват под общото название ***локален екстремум.***

В 6.1 установихме необходимо условие за екстремум на диференцируема в дадена точка функция.

Ако функцията f е диференцируема в точка c и има в тази точка локален екстремум, то $f'(c)=0$.

Заедно с това в 6.1 беше показано, че анулирането на производната е само необходимо, но не и достатъчно условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция.

Така функцията $f(x)=x^3$ има производна $f'(x)=3x^2$, която се анулира в точката $x=0$, но няма екстремум в тази точка (вж. графиката на тази функция на фиг. 6.2).

Точките, в които производната f' на функцията f се анулира, ще наричаме ***стационарни точки*** на функцията f.

Всяка стационарна точка е точка на възможен екстремум на функцията. Обаче, за да се направи заключението, че в дадена стационарна точка действително има екстремум, са необходими допълнителни изследвания, за които трябва да разполагаме с достатъчни условия за екстремум.

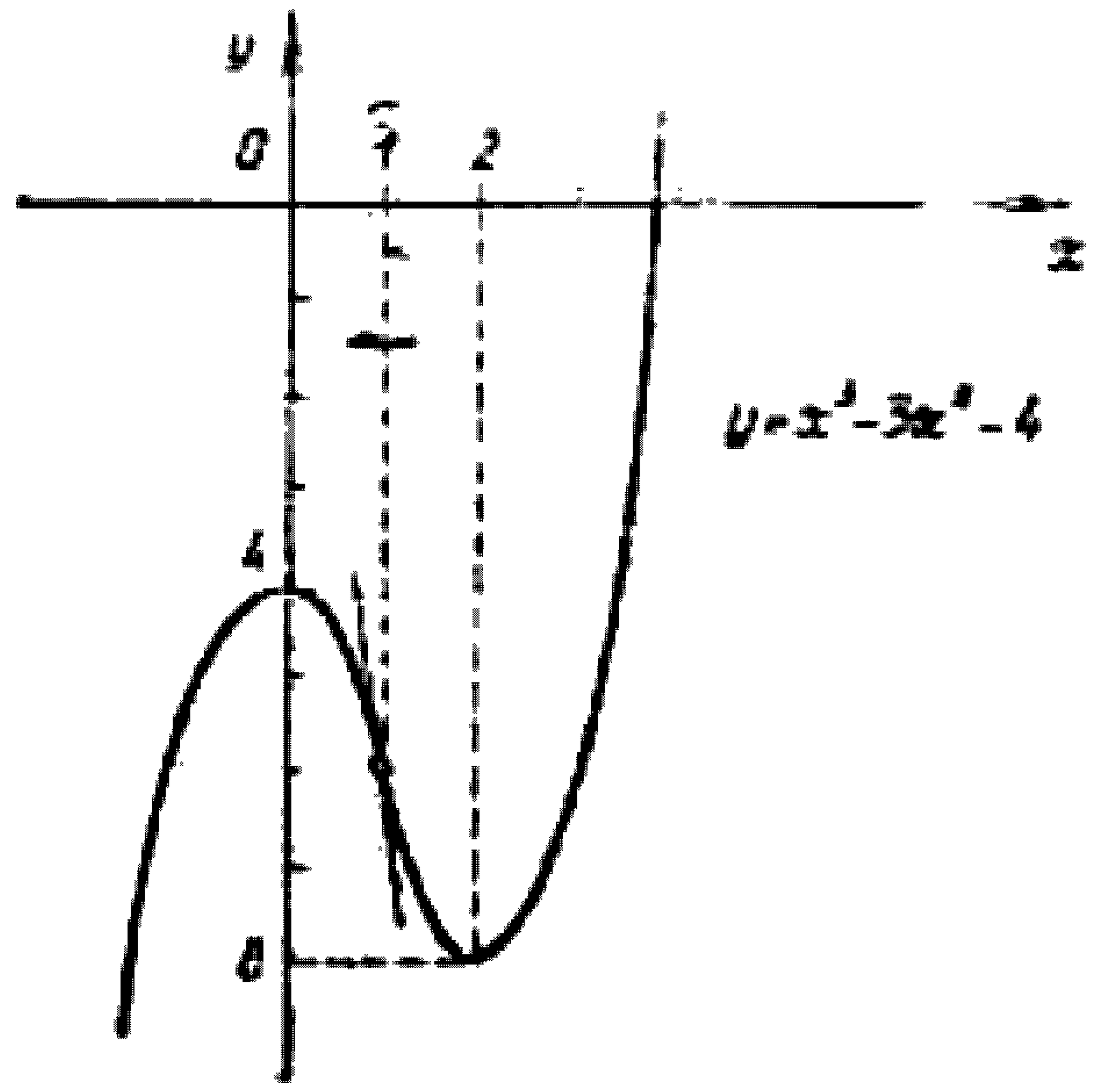
Такива условия ще бъдат установени в следващите три точки.

7.1.3. Първо достатъчно условие за екстремум.

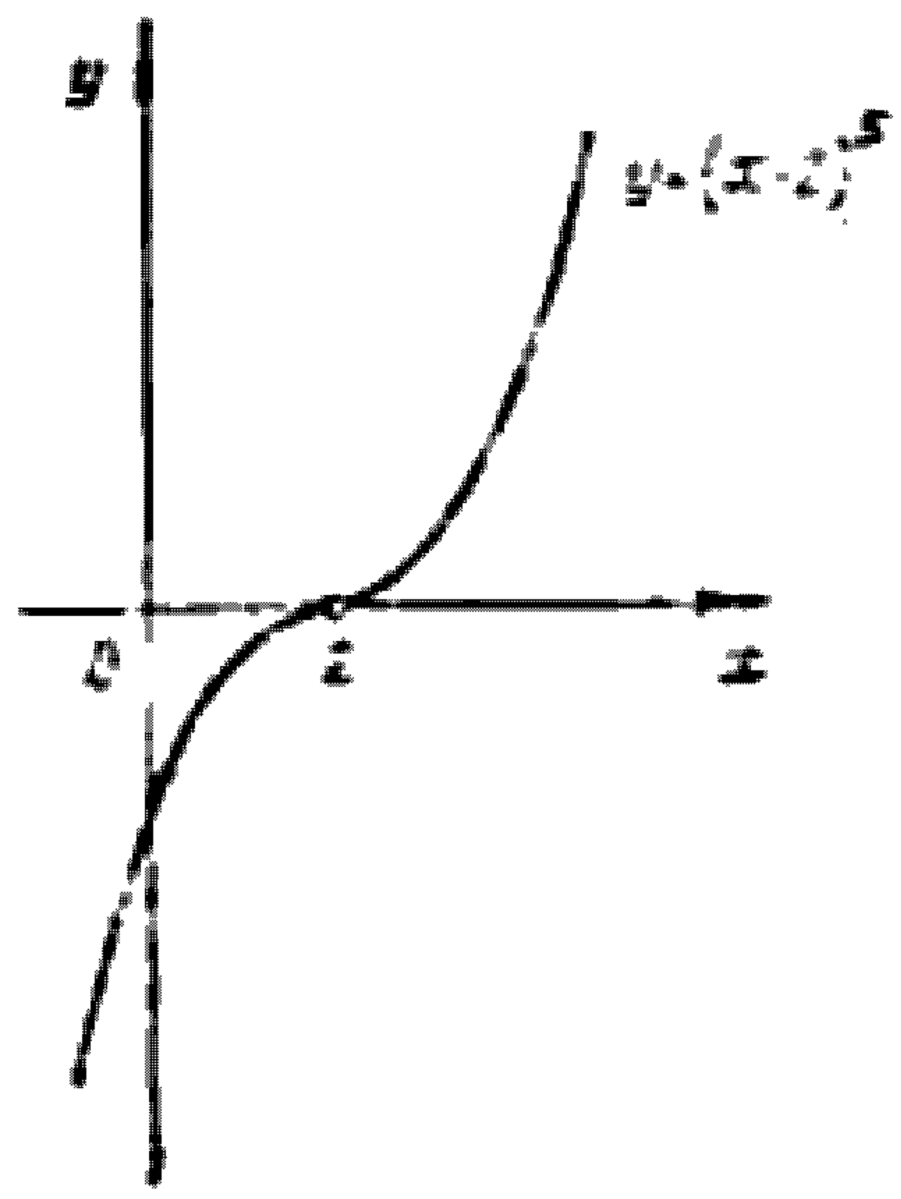
Теорема 7.1. *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката c и нека c е стационарна точка за функцията f. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c, функцията f има в точката c локален максимум (минимум). Ако производната f' има в тази околност един и същ знак отляво и отдясно на точката c, то функцията f няма екстремум в точката c.*

Доказателство. 1. Нека отначало производната f' в разглежданата околност е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c. Трябва да се докаже, че стойността $f(c)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности $f(x)$ в разглежданата околност. Означаваме с x_0 произволна точка от разглежданата околност, различна от c. Достатъчно е да се докаже, че $f(c)-f(x_0)>0$ (<0).

Тъй като функцията f е диференцируема навсякъде в разглежданата околност на точката c, то в сегмента, ограничен от



Фиг. 7.1



Фиг. 7.2

точките c и x_0, за функцията f са изпълнени всички условия на теорема 6.4 на Лагранж. Според тази теорема

$$f(c)-f(x_0)=(c-x_0)f'(\xi), \tag{7.1}$$

където ξ е някоя стойност на аргумента между x_0 и c. Тъй като производната $f'(\xi)$ е положителна (отрицателна) при $x_0<c$ и отрицателна (положителна) при $x_0>c$, дясната страна на (7.1) е положителна (отрицателна).

2. Нека сега производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на c. Означавайки, както по-рано, с x_0 произволна точка от разглежданата околност, различна от c, и повтаряйки горните разсъждения, ще получим, че дясната страна на (7.1) има различни знаци при $x_0<c$ и $x_0>c$. Това доказва, че в точката c нямаме екстремум. □

Следващото от теорема 7.1 правило може да се формулира така:

1. *Ако при преминаването през дадена стационарна точка c производната f' сменя знака си от плюс на минус (от минус на плюс), то функцията f има в точката c локален максимум (минимум).* 2. *Ако при преминаването през дадена стационарна точка c производната f' не сменя знака си, то функцията няма екстремум в точката c.*

Примери:

1. Намерете точките на екстремум на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Тъй като $f'(x)=3x(x-2)$, функцията f има две стационарни точки $x=0$ и $x=2$. При преминаване през точката $c=0$ производната сменя знака си от плюс на минус, а при преминаване

през точката $c=2$ — от минус на плюс. Следователно $x=0$ е точка на локален максимум, а $x=2$ е точка на локален минимум (вж. фиг. 7.1).

2. Намерете точките на екстремум на функцията $f(x)=(x-2)^5$. Производната $f'(x)=5(x-2)^4$ се анулира единствено в точката $x=2$. Тъй като $f'(x)$ е положителна както отляво, така и отдясно на тази точка, то функцията $f(x)=(x-2)^5$ няма точка на екстремум. Графиката на тази функция е дадена на фиг. 7.2.

Понякога изследването на знака на първата производна отляво и отдясно на стационарна точка може да се окаже доста трудно. За такива случаи ще дадем друго достатъчно условие за екстремум в дадена стационарна точка c, което не изисква изследване на знака на f' в околност на точката c, но предполага съществуването на различна от нула втора производна $f^{(2)}(x)$ в точката c.

7.1.4. Второ достатъчно условие за екстремум

Теорема 7.2. *Нека функцията f има в дадена стационарна точка c крайна втора производна. Тогава функцията $f(x)$ има в точката c локален максимум, ако $f^{(2)}(c)<0$, и локален минимум, ако $f^{(2)}(c)>0$.*

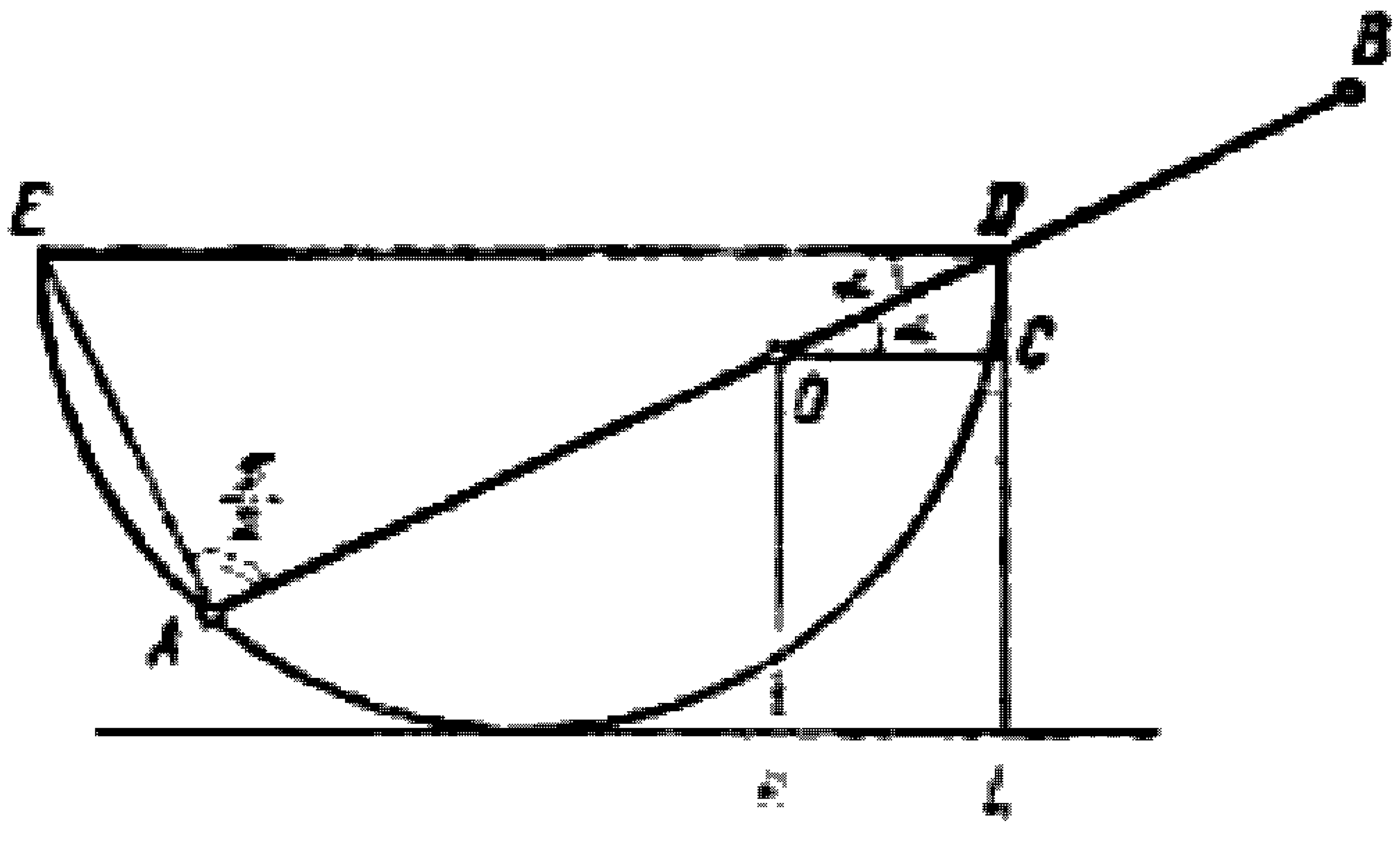
Доказателство. От условието $f^{(2)}(c)<0(>0)$ и от теорема 6.1 следва, че функцията f' намалява (расте) в точката c. Тъй като по условие $f'(c)=0$, то съществува околност на точката c, в която $f'(c)$ е положителна (отрицателна) отляво на c и отрицателна (положителна) отдясно на c. Но тогава съгласно предишната теорема f има в точката c локален максимум (минимум). □

Забележка. Теорема 7.2 има, общо казано, по-тясна сфера на действие от теорема 7.1. Така например теорема 7.2 не решава въпроса за екстремум, когато втората производна $f^{(2)}(x)$ не съществува в точката c и когато $f^{(2)}(c)=0$. В последния случай при решаване на въпроса за наличие на екстремум е необходимо да се изучи в точката c и поведението на производните от по-висок ред, което ще направим по-нататък.

Примери:

1. В чаша с формата на полукълбо с радиус r е сложен хомогенен прът с дължина l (фиг. 7.3). При предположението, че $2r<l<4r$, да се намери равновесното положение на пръта.

Равновесното положение на пръта съответствува на минималната стойност на потенциалната му енергия, т. е. на най-ниското положение на центъра на тежестта му O (тъй като прътът е хомогенен, центърът на тежестта му съвпада с неговата среда). Като означим с OK перпендикуляра към равнината, на която стои чашата, ще сведем задачата до намирането на такова положение



Фиг. 7.3

на пръта AB, при което отсечката OK има най-малка дължина. Най-напред ще пресметнем дължината на отсечката OK като функция от ъгъла α на наклона на пръта към равнината, на която стои чашата. Нека DL е успоредна на OK, а OC е перпендикулярна на OK (D е точката, в която прътът се опира в ръба на чашата).

От правоъгълния триъгълник EAD имаме $AD=ED\cos\alpha=2r\cos\alpha$. По условие $AO=l/2$, така че

$$OD=AD-AO=2r\cos\alpha-l/2.$$

От друга страна, $DC=DL-OK=r-OK$. Затова от правоъгълния триъгълник ODC имаме

$$\sin\alpha=\frac{DC}{OD}=\frac{r-OK}{2r\cdot\cos\alpha-l/2}.$$

Следователно дължината на отсечката OK, която ще означим с f, е $f(\alpha)=r+\frac{l}{2}\sin\alpha-r\sin 2\alpha$. Преминаваме към определянето на тази стойност на ъгъла α, за която f има минимум. (Ясно е, че можем да се ограничим със стойности за ъгъл α от първия квадрант.) Тъй като

$$f'(\alpha)=\frac{l}{2}\cos\alpha-2r\cos 2\alpha=\frac{l}{2}\cos\alpha+2r-4r\cos^2\alpha,$$

то стационарните точки ще са решения на квадратното уравнение $4r\cos^2\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha-2r=0$. Понеже $\cos\alpha$ е положителен в първия квадрант, то ще ни интересува само положителният корен на това уравнение

$$\cos\alpha_0=\frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}. \tag{7.2}$$

Макар и от смисъла на задачата да е ясно, че единствената стационарна точка α_0 е точка на минимум за функцията f, ще установим това с помощта на теорема 7.2. Достатъчно е да се убедим, че $f^{(2)}(\alpha_0)>0$. Тъй като

$$f^{(2)}(\alpha)=-\frac{l}{2}\sin\alpha+4r\sin 2\alpha=8r\sin\alpha.(\cos\alpha-l/16r),$$

то от (7.2) имаме

$$f^{(2)}(\alpha_0)=8r\sin\alpha_0(\cos\alpha_0-l/16r)=\frac{1}{2}\sin\alpha_0.\sqrt{l^2+128r^2}>0.$$

С това е установено, че на равновесното положение на пръта отговаря определеният от формула (7.2) ъгъл на наклона му към равнината, на която стои чашата.

2. Още веднъж ще намерим точките на екстремум на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Стационарните точки на тази функция, както вече видяхме, са $x=0$ и $x=2$. Понеже

$$f^{(2)}(x)=6x-6,\ f^{(2)}(0)=-6<0,\ f^{(2)}(2)=6>0,$$

то според теорема 7.2 функцията f има максимум в точката 0 и минимум в точката 2. Екстремалните стойности на тази функция са

$$f_{\max}=f(0)=-4,\ f_{\min}=f(2)=-8.$$

7.1.5 Трето достатъчно условие на екстремум

Теорема 7.3. *Нека $n\geq 1$ е нечетно число и нека функцията f има производни от ред n в някоя околност на точката c и производна от ред $n+1$ в точката c. Тогава, ако са изпълнени съотношенията*

$$(7.3)\qquad f'(c)=f^{(2)}(c)=\cdots=f^{(n)}(c)=0,\ f^{(n+1)}(c)\neq 0,$$

функцията f има в точката c локален екстремум, по-точно локален максимум при $f^{(n+1)}(c)<0$ и локален минимум при $f^{(n+1)}(c)>0$.

Доказателство. При $n=1$ теорема 7.3 съвпада с доказаната теорема 7.2, така че трябва да проведем доказателството само за нечетно $n\geq 3$.

Нека нечетното число n удовлетворява условието $n\geq 3$ и нека за определеност $f^{(n+1)}(c)>0$. Ще докажем, че функцията f има в точката c локален минимум.

Тъй като $f^{(n+1)}(c)>0$, функцията $f^{(n)}$ расте в точката c съгласно теорема 6.1. Но тогава, понеже $f^{(n)}(c)=0$, може да се твърди, че навсякъде в достатъчно малка околност на точката c функцията $f^{(n)}$ е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c.

Като имаме пред вид това, ще развием функцията f' в околност на точката c по формулата на Тейлор, като ще запишем остатъчния член във формата на Лагранж (вж. 6.8.7). Ще получим, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c съществува такава точка ξ между x и c, че

$$f'(x) = f'(c) + \frac{(x-c)}{1!} f^{(2)}(c) + \cdots + \frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(c)$$
$$+ \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi).$$

Съгласно съотношенията (7.3) това разлагане добива вида

$$f'(x) = \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi). \tag{7.4}$$

По-рано установихме, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(n)}$ е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c. Тъй като ξ е между x и c, то за всяко x от достатъчно малка околност на точката c величината $f^{(n)}(\xi)$ (а очевидно поради нечетността на n и цялата дясна страна на (7.4)) е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c.

И така с помощта на равенство (7.4) доказахме, че производната $f'(x)$ за всички x от достатъчно малка околност на точката c е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c. В този случай според първото достатъчно условие за екстремум (т. е. теорема 7.1) функцията f има в точката c локален минимум.

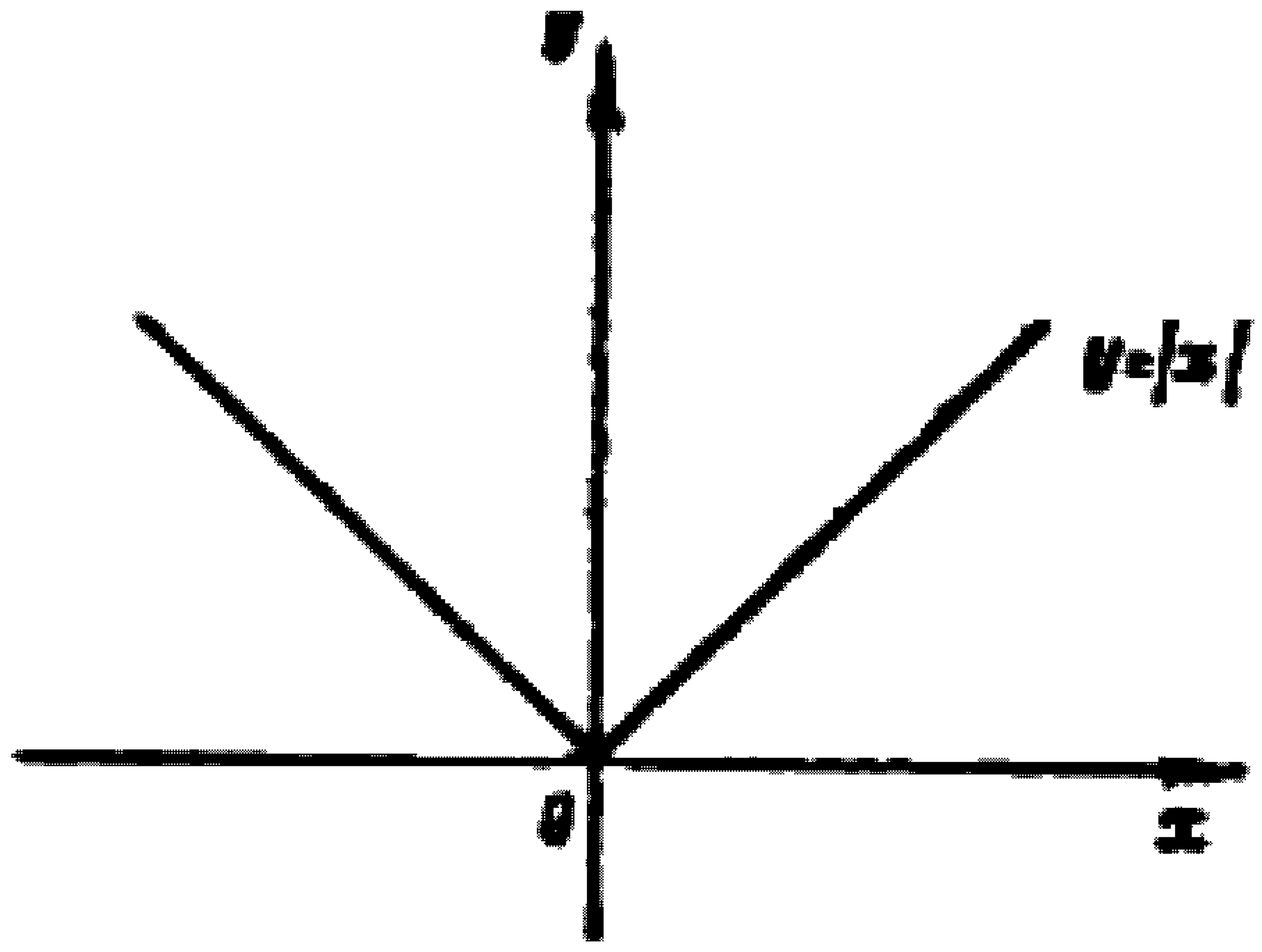
Случаят $f^{(n+1)}(c) < 0$ се разглежда съвършено аналогично. Същите разсъждения и формула (7.4) в този случай дават възможност да се заключи, че функцията f има в точката c локален максимум.

З а б е л е ж к а. Много важно е изискването за нечетност на числото n в теорема 7.3. При четно n и при запазване на всички останали условия на теорема 7.3 функцията f няма да има екстремум в точката c (вж. по този повод теорема 7.10).

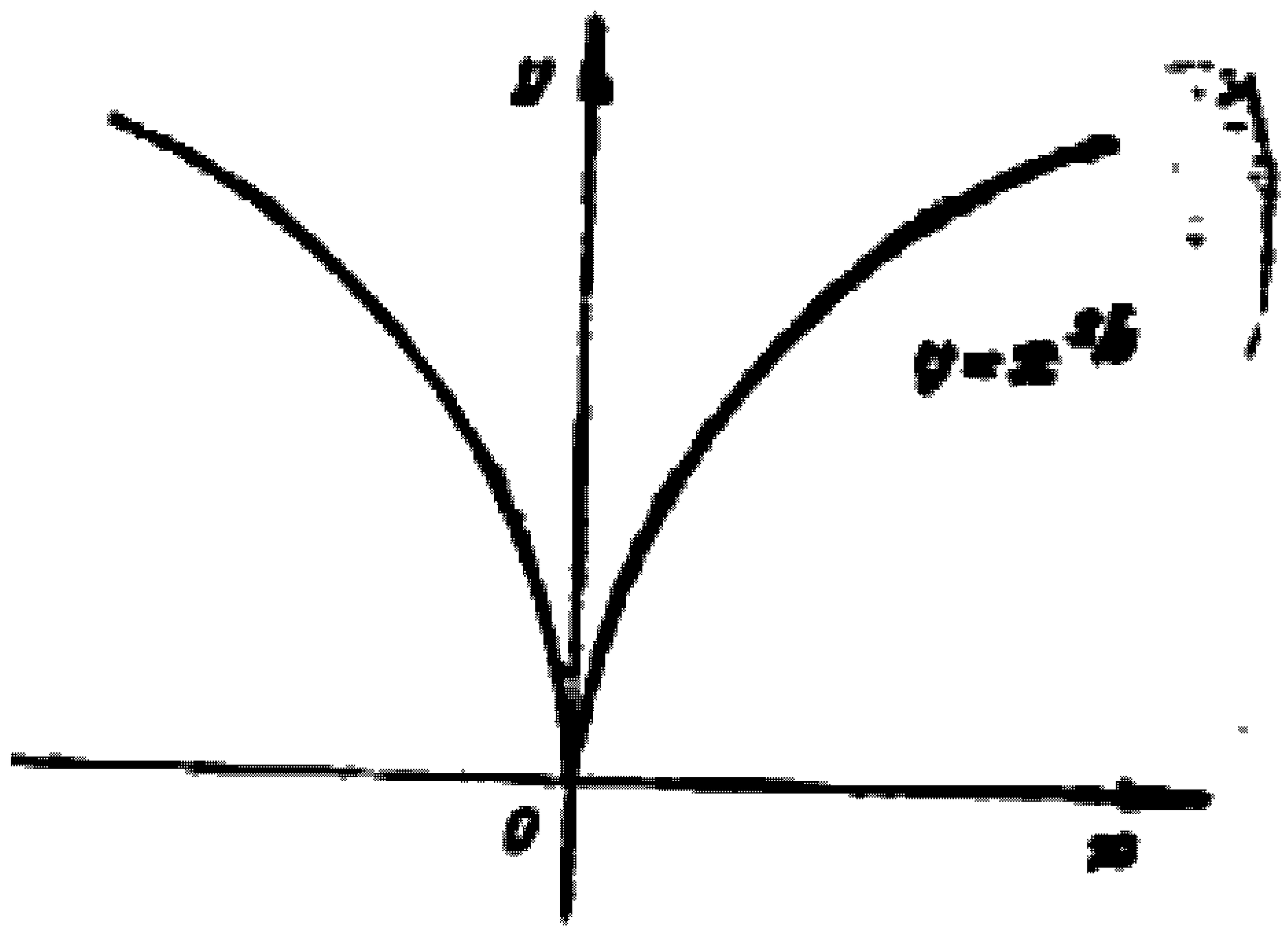
7.1.6. Екстремум на функция, която не е диференцируема в дадена точка. По-рано разгледахме въпроса за съществуване на екстремум на функцията f в точката c, в която функцията f е диференцируема. В тази точка ще изучим въпроса за съществуване на екстремум в точката c на такава функция, която не е диференцируема в точката c, но е диференцируема във всяка друга точка на някоя околност на точката c и освен това е непрекъсната в точката c.

Оказва се, че теорема 7.1 може да бъде обобщена в случай на такава функция. В сила е следното твърдение:

Теорема 7.4. *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката c с изключение евентуално на точката c и е непрекъсната в точката c. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката*



Фиг. 7.4



Фиг. 7.5

c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c, функцият f има в точката c локален максимум (минимум). Ако производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на точката c, функцията няма екстремум в точката c.

Доказателството съвпада напълно с доказателството на теорема 7.1.

Достатъчно е да отбележим, че условията на теорема 7.4 и този път осигуряват приложимостта на теорема 6.4 на Лагранж към функцията f в сегмента, ограничен от точките c и x_0, където x_0 е произволна точка от достатъчно малка околност на точката c.

Примери:

1. Да се намерят точките на екстремум на функцията $f(x)=|x|$. Тази функция е диференцируема навсякъде върху безкрайната права освен в точката $x=0$ и е непрекъсната в точката $x=0$; при това $f'(x)=1$ при $x>0$ и $f'(x)=-1$ при $x<0$.

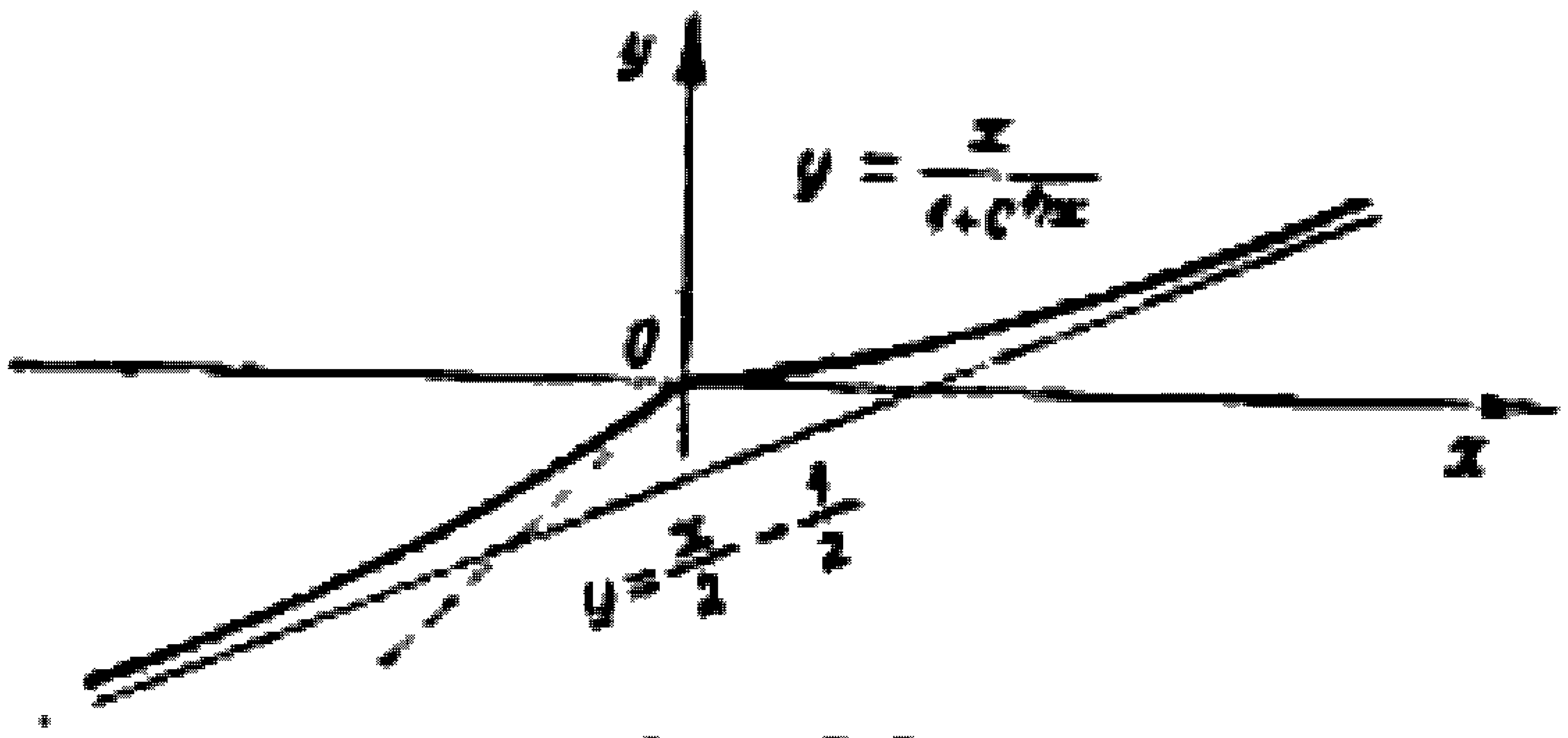
Теорема 7.1 не е приложима за тази функция, а съгласно теорема 7.4 тя има минимум при $x=0$ (фиг. 7.4).

2. Да се намерят точките на екстремум на функцията $f(x)=x^{2/3}$. Тази функция е непрекъсната върху цялата безкрайна права и е диференцируема навсякъде върху тази права с изключение на точката $x=0$. Производната ѝ при $x\neq 0$ е

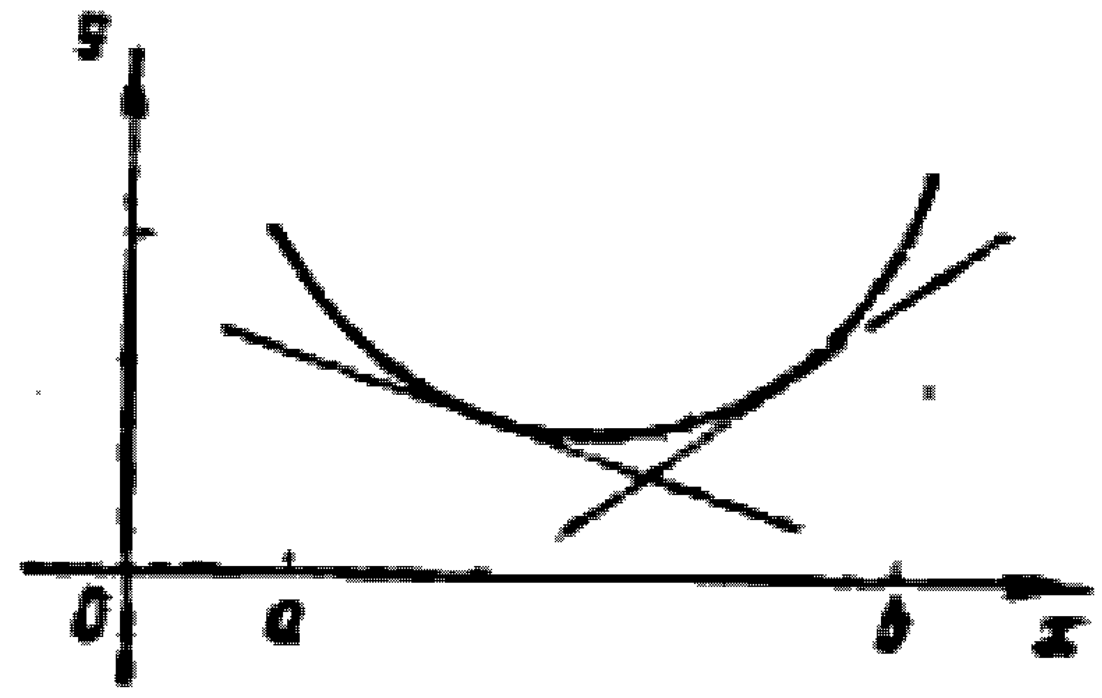
$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

В предишния пример производната имаше в точката $x=0$ прекъсване от първи род*; този път производната има в точката $x=0$ прекъсване от втори род („безкраен скок"). От израза за производната заключаваме, че тя е отрицателна отляво на точката $x=0$

* Въпреки че тази производна не съществува в точката $x=0$, тя има в тази точка крайни дясна и лява граница, несъвпадащи помежду си.



Фиг. 7.6



Фиг. 7.7

и положителна отдясно на тази точка. Следователно теорема 7.4 позволява да твърдим, че разглежданата функция има минимум в точката $x=0$ (графиката на тази функция е дадена на фиг. 7.5).

3. Да се намерят точките на екстремум на функцията

$$f(x)=\begin{cases} x/(1+e^{1/x}) & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че функцията е непрекъсната върху цялата безкрайна права. Действително единствената „съмнителна" точка е $x=0$, но и в тази точка функцията е непрекъсната, тъй като

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=0.$$

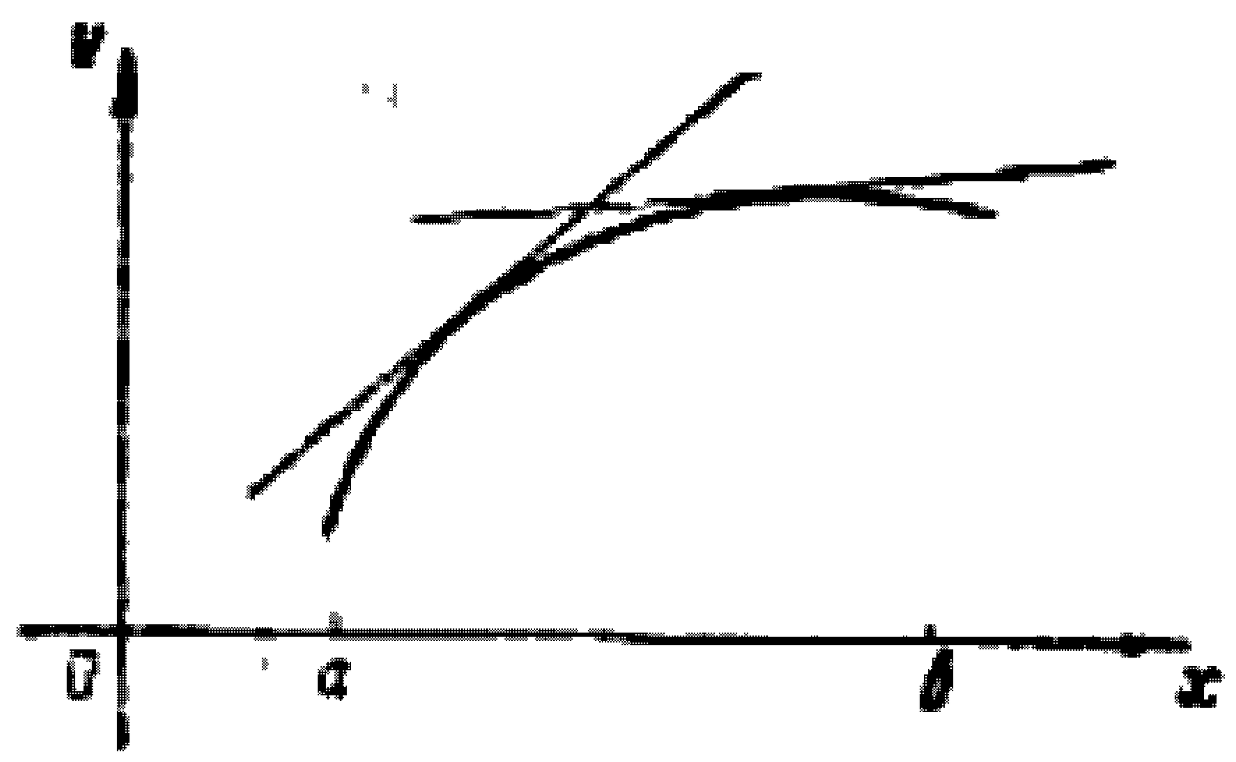
Очевидно разглежданата функция е диференцируема върху цялата безкрайна права с изключение на точката $x=0$. Навсякъде освен в тази точка производната се определя от формулата

$$f'(x)=(1+e^{1/x}+x^{-1}e^{1/x})(1+e^{1/x})^{-2}.$$

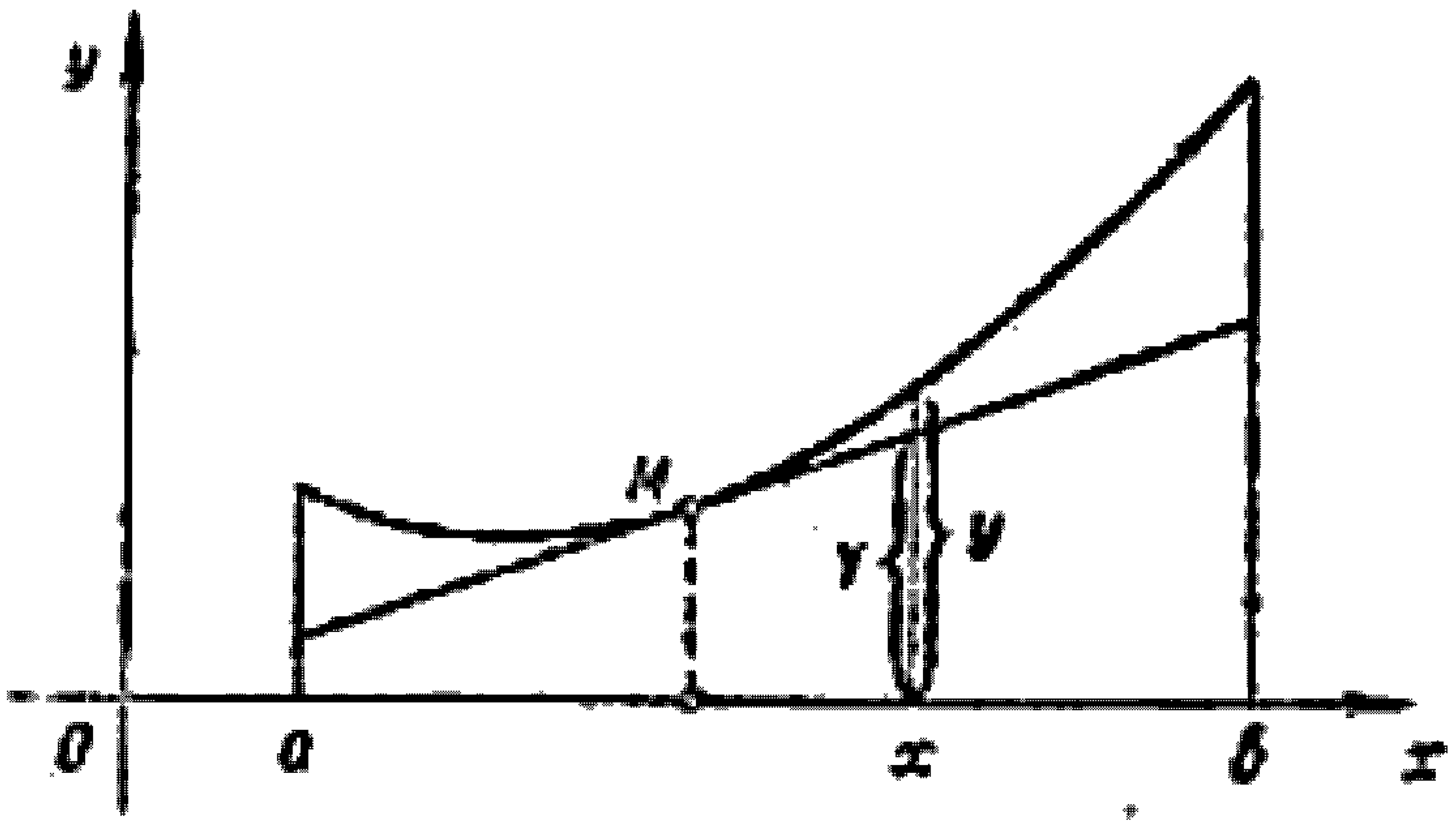
Тъй като $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ не съществува, функцията f не е диференцируема в точката $x=0$. Понеже производната f' е положителна и отляво, и отдясно на точката $x=0$, то съгласно теорема 7.4 разглежданата функция няма екстремум в точката $x=0$ и следователно въобще няма екстремум. (Графиката на функцията е изобразена на фиг. 7.6.)

7.1.7. Обща схема за намиране на екстремум. Ще предполагаме, че функцията f е непрекъсната в интервала* (a, b) и производната ѝ f' съществува и непрекъсната в този интервал с изключение евентуално на краен брой точки. Освен това ще предполагаме, че

* Вместо интервала (a, b) може да се разглежда безкрайната права или отворена полуправа.



Фиг. 7.8



Фиг. 7.9

производната f' се анулира в интервала (a, b) само в краен брой точки. С други думи, предполагаме, че интервалът (a, b) има само краен брой точки, в които производната f' не съществува или се анулира. Означаваме тези точки с $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ $(a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b)$. Съгласно направените предположения производната f' запазва постоянен знак във всеки от интервалите (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_n, b). Следователно въпросът за съществуване на екстремум във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да бъде решен (в положителен или отрицателен смисъл) с помощта на теорема 7.4.

7.2. Изпъкналост на графиката на функция

Да предположим, че функцията f е диференцируема във всяка точка на интервала (a, b). Тогава, както установихме в 5.1.3, съществува допирателна към графиката на функцията във всяка точка $M(x, f(x))$ на тази графика $(a<x<b)$, при това тази допирателна не е успоредна на оста Oy.

Определение. *Ще казваме, че графиката на функцията f има в интервала (a, b)* ***изпъкналост, насочена надолу (нагоре)****, ако графиката ѝ в този интервал няма точки под (над) всяка своя допирателна.*

Забележка 1. Терминът *над* (*или под*) има смисъл, кйкато допирателната не е успоредна на оста Oy.

На фиг. 7.7 е дадена графиката на функция, която има в интервала (a, b) изпъкналост, насочена надолу, а на фиг. 7.8 — графиката на функция, която има изпъкналост, насочена нагоре.

Теорема 7.5. *Ако функцията f има в интервала (a, b) крайна втора производна и ако тази производна е неотрицателна (неположителна) навсякъде в този интервал, то графиката на функ-*

цията f има в интервала (a, b) изпъкналост, насочена надолу (нагоре).

Доказателство. За определеност ще разгледаме случая, когато $f^{(2)}(x) \geq 0$ навсякъде в (a, b). Ще означим с c произволна точка от интервала (a, b) (фиг. 7.9). Трябва да се докаже, че графиката на функцията f в интервала (a, b) няма точки под допирателната, минаваща през точката $M(c, f(c))$. Записваме уравнението на тази допирателна, означавайки текущата й ордината с Y. Тъй като ъгловият коефициент на допирателната е равен на $f'(c)$, то уравнението й има вида

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c). \tag{7.5}$$

Разлагаме функцията f по формулата на Тейлор при $n = 1$ в околност на точката c:

$$f(x) = f(c) + \frac{x-c}{1!} f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} f^{(2)}(\xi), \tag{7.6}$$

където остатъчният член е във формата на Лагранж, ξ е … c и x. (Понеже по условие f има втора производна в … (a, b), формулата (7.6) е вярна за всяко x от интервала (a, b) (вж. 6.8.7).

Като съпоставим (7.6) и (7.5), ще имаме

$$f(x) - Y = \frac{1}{2}(x-c)^2 f^{(2)}(\xi). \tag{7.7}$$

Тъй като втората производна по условие е неотрицателна навсякъде в (a, b), то дясната страна на (7.7) е неотрицателна, т. е. за всяко x от (a, b) имаме $f(x) \geq Y$.

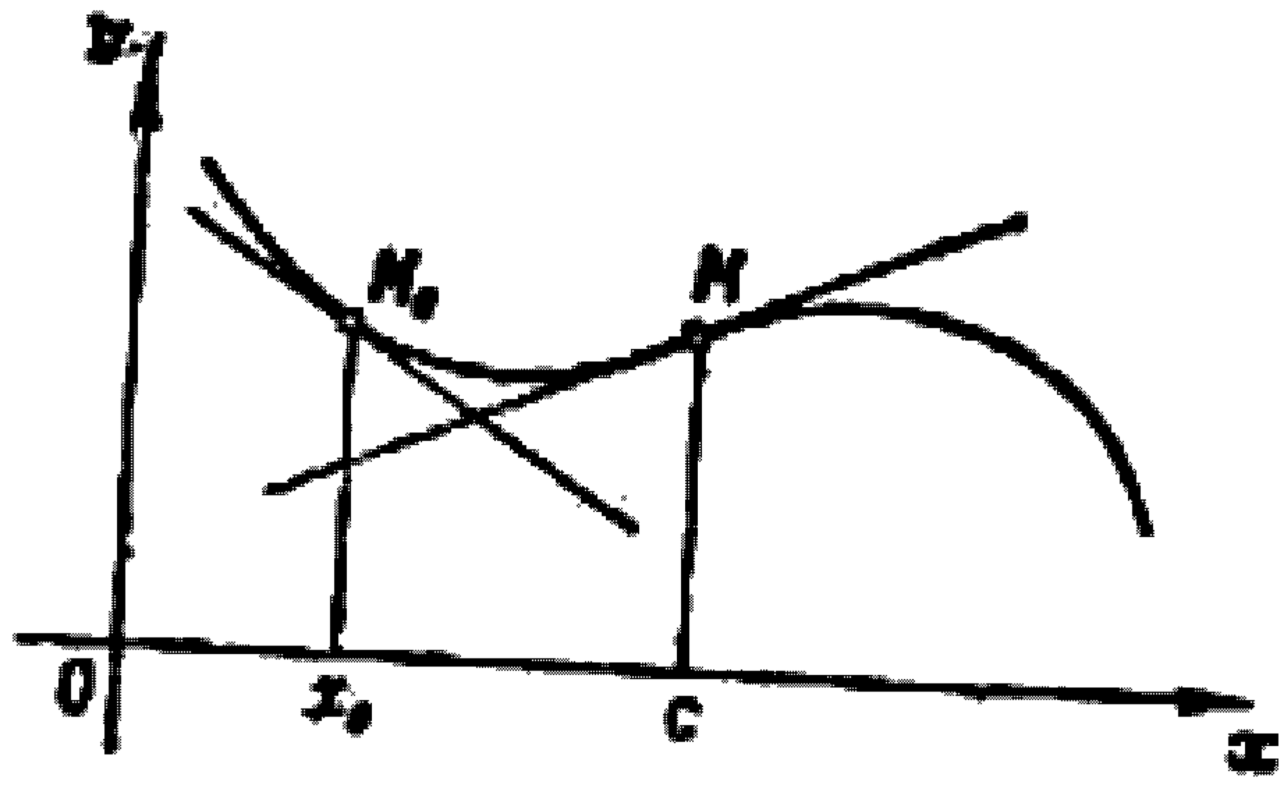
Последното неравенство доказва, че графиката на функцията f навсякъде в интервала (a, b) лежи над допирателната (7.5).

Теоремата се доказва аналогично за случая $f^{(2)}(x) \leq 0$. □

Забележка 2. Ако $f^{(2)}(x) = 0$ навсякъде в интервала (a, b), то, както лесно можем да се убедим, f е линейна функция, т. е. графиката й е права линия. В този случай можем да считаме посоката на изпъкналостта й произволна.

Теорема 7.6. *Нека втората производна на функцията f е непрекъсната и положителна (отрицателна) в точката c. Тогава съществува околност на точката c, в която графиката на функцията f има изпъкналост, насочена надолу (нагоре).*

Доказателство. Според теоремата за постоянство на знака на непрекъснатата функция съществува околност на точката c, в която втората й производна $f^{(2)}$ е положителна (отрицателна). От предишната теорема следва, че графиката на функцията f има в тази околност изпъкналост, насочена надолу (нагоре).



Фиг. 7.10

Следователно посоката на изпъкналост на графиката на функция се характеризира напълно със знака на втората производна на тази функция.

Пример :

Да се изследва посоката на изпъкналост на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. От вида на втората ѝ производна $f^{(2)}(x)=6(x-1)$ следва, че тази производна е отрицателна при $x<1$ и положителна при $x>1$. Следователно изпъкналостта на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$ е насочена нагоре в интервала $(-\infty, 1)$ и надолу в интервала $(1, +\infty)$ (вж. фиг. 7.1).

7.3. Точки на инфлексия

7.3.1. Определение на инфлексна точка. Необходимо условие за инфлексия. Нека a, b и c са три числа, за които $a<c<b$. Ще предполагаме, че функцията f е диференцируема в интервала (a, b), т. е. съществува допирателна към графиката на тази функция във всички точки, абсцисите на които принадлежат на интервала (a, b). Ще предполагаме още, че графиката на функцията f има определена посока на изпъкналост във всеки от интервалите (a, c) и (c, b).

Определение. *Точката $M(c, f(c))$ от графиката на функцията f се нарича* ***точка на инфлексия*** *(**инфлексна точка**) на тази графика, ако съществува околност на точката c от абсцисната ос, в която графиката на функцията f има отляво и отдясно на точката c различни посоки на изпъкналост.*

На фиг. 7.10 е изобразена графиката на функция, която има ***инфлексия*** в точката $M(c, f(c))$.

Понякога при определянето на инфлексна точка на графиката на функцията f се иска допълнително в достатъчно малка околност на точката c от абсцисната ос графиката отдясно и отляво на точката c да лежи от различни страни на допирателната ѝ в точката $M(c, f(c))$. По-нататък ще докажем, че това свойство следва от даденото определение при предположението, че производната е непрекъсната в точката c.

Ще докажем следните две леми:

Лема 1. *Нека функцията f има производна f' навсякъде в една δ-околност на точката c, при това тази производна е непрекъсната в точката c. Тогава, ако графиката на функцията f има в интервала $(c, c+\delta)$ изпъкналост, насочена надолу (нагоре), то навсякъде в интервала $(c, c+\delta)$ няма точки от тази графика, които да са под (над) допирателната към графиката в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. Да разгледаме редицата $\{x_n\}$ от точки на интервала $(c, c+\delta)$, клоняща към c. През всяка точка $M_n(x_n, f(x_n))$ на графиката на функцията f да прекараме допирателната към тази графика, т. е. правата

$$Y_n = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n).$$

Тъй като по условие графиката на функцията f има в интервала $(c, c+\delta)$ изпъкналост, насочена надолу (нагоре), то за всяко n и всяка фиксирана точка x на интервала $(c, c+\delta)$ имаме

$$f(x) - Y_n = f(x) - f(x_n) - (x - x_n) f'(x_n) \geq 0 \ (\leq 0). \tag{7.8}$$

От условието за непрекъснатост на f' (и още повече на f) в точката c и от определението за непрекъснатост по Хайне следва, че съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - Y_n) = \lim_{n\to\infty} \{f(x) - f(x_n) - (x - x_n) f'(x_n)\}$$
$$= f(x) - f(c) - (x - c) f'(c).$$

Ще означим тази граница с $f(x) - Y$, където под Y се разбира текущата ордината на допирателната към графиката на функцията f в точката $M(c, f(c))$ (уравнението на тази допирателна има вида $Y = f(c) + (x - c) f'(c)$).

Като извършим в неравенството (7.8) граничен преход при $n \to \infty$ и използваме теорема 3.13, ще получим, че $f(x) - Y \geq 0$ (≤ 0) за всяка фиксирана точка x от интервала $(c, c+\delta)$, при което Y означава текущата ордината на допирателната в точката $M(c, f(c))$. □

Забележка. Аналогично се формулира и доказва лема 1 и в случая, когато графиката на функцията има определена посока на изпъкналост в интервала $(c-\delta, c)$.

Лема 2. *Нека функцията f има производна f' в някоя околност на точката c и тази производна е непрекъсната в точката c. Тогава, ако графиката на функцията f има инфлексия в точката c, то в достатъчно малка δ-околност на тази точка отдясно и отляво на c тази графика лежи в различни полуравнини, определени от допирателната в точката $M(c, f(c))$.*

За доказване на тази лема трябва да се избере $\delta>0$ толкова малко, че във всеки от интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ графиката на функцията f да има определена посока на изпъкналост (тези посоки ще бъдат различни в интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$). След това прилагаме лема 1 за функцията f за всеки от интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$. □

Лема 2 дава необходимо условие за инфлексия в графиката на два пъти диференцируема в дадена точка функция.

Теорема 7.7 (необходимо условие за инфлексия в графиката на два пъти диференцируема функция). *Ако функцията f има в точката c втора производна и графиката ѝ има инфлексия в точката $M(c, f(c))$, то $f^{(2)}(c)=0$.*

Доказателство. Нека, както и по-горе, Y е текущата ордината на допирателната $Y=f(c)+(x-c)f'(c)$, минаваща през точката $M(c, f(c))$ от графиката на функцията.

Ще разгледаме функцията

$$F(x)=f(x)-Y=f(x)-f(c)-(x-c)f'(c).$$

Тази функция F, както и функцията f, има в точката c втора производна (и затова има и първа производна в някоя околност на c, при това тя е непрекъсната в точката c). Според лема 2 в достатъчно малка околност на точката c графиката на функцията $y=f$ лежи в различни полуравнини, определени от допирателната в точката $M(c, f(c))$ отляво и отдясно на c.

Затова в достатъчно малка околност на точката c не могат да се намерят две точки $x_1<c<x_2$, за които $F(x_1).F(x_2)>0$, т. е. в тези две точки $F(x)$ да има еднакъв знак.

Да допуснем, че $f^{(2)}(c)\neq 0$. Понеже $F'(x)=f'(x)-f'(c)$, $F^{(2)}(x)=f^{(2)}(x)$, то $F'(c)=0$, $F^{(2)}(c)\neq 0$ и съгласно теорема 7.2 функцията F има в точката c локален екстремум. Полученото противоречи на това, че в достатъчно малка околност на точката c не могат да се намерят две точки $x_1<c<x_2$, за които $F(x_1)$ и $F(x_2)$ да имат еднакъв знак. □

Анулирането на втората производна е само необходимо условие за инфлексия на два пъти диференцируема функция. Това се вижда например от графиката на функцията $f(x)=x^4$. За тази функция втората производна $f''(x)=12x^2$ се анулира в точката $x=0$, но графиката ѝ няма инфлексия в точката $M(0, 0)$.

Според теорема 7.7, за да се намерят всички инфлексни точки на графиката на два пъти диференцируема функция f, трябва да се разгледат всички корени на уравнението $f''(x)=0$.

Тъй като анулирането на втората производна е само необходимо условие за инфлексия, нужно е допълнително изследване за съществуване на инфлексия във всяка точка, за която $f''(x)$

$=0$. За провеждането на такова изследване трябва да се намерят и достатъчни условия за инфлексия, към което преминаваме.

7.3.2. Първо достатъчно условие за инфлексия

Теорема 7.8. *Нека функцията f има втора производна в някоя околност на точката c и $f''(c)=0$. Тогава, ако в тази* *втората производна f'' има различни знаци отдясно и* *на c, то графиката на тази функция има инфлексия в* $M(c, f(c))$.

Доказателство. Графиката на функцията f има допирателна в точката $M(c, f(c))$, тъй като от условията на теоремата следва съществуването на крайна производна $f'(c)$. От това, че f'' отляво и отдясно на c има различни знаци, и от теорема 7.4 следва, че посоката на изпъкналост отляво и отдясно на c е различна. □

Пример:

Да се намерят инфлексните точки на графиката на $f(x)=x^3-3x^2-4$. Тази функция разглеждахме фиката ѝ е изобразена на фиг. 7.1). Понеже f'' то единствената стойност на аргумента, при която е инфлексия, е $x=1$. На тази стойност на аргумента точката $M(1, -6)$ от графиката. Тъй като f'' има различни при $x>1$ и при $x<1$, то $M(1, -6)$ е инфлексна точка за графиката на разглежданата функция.

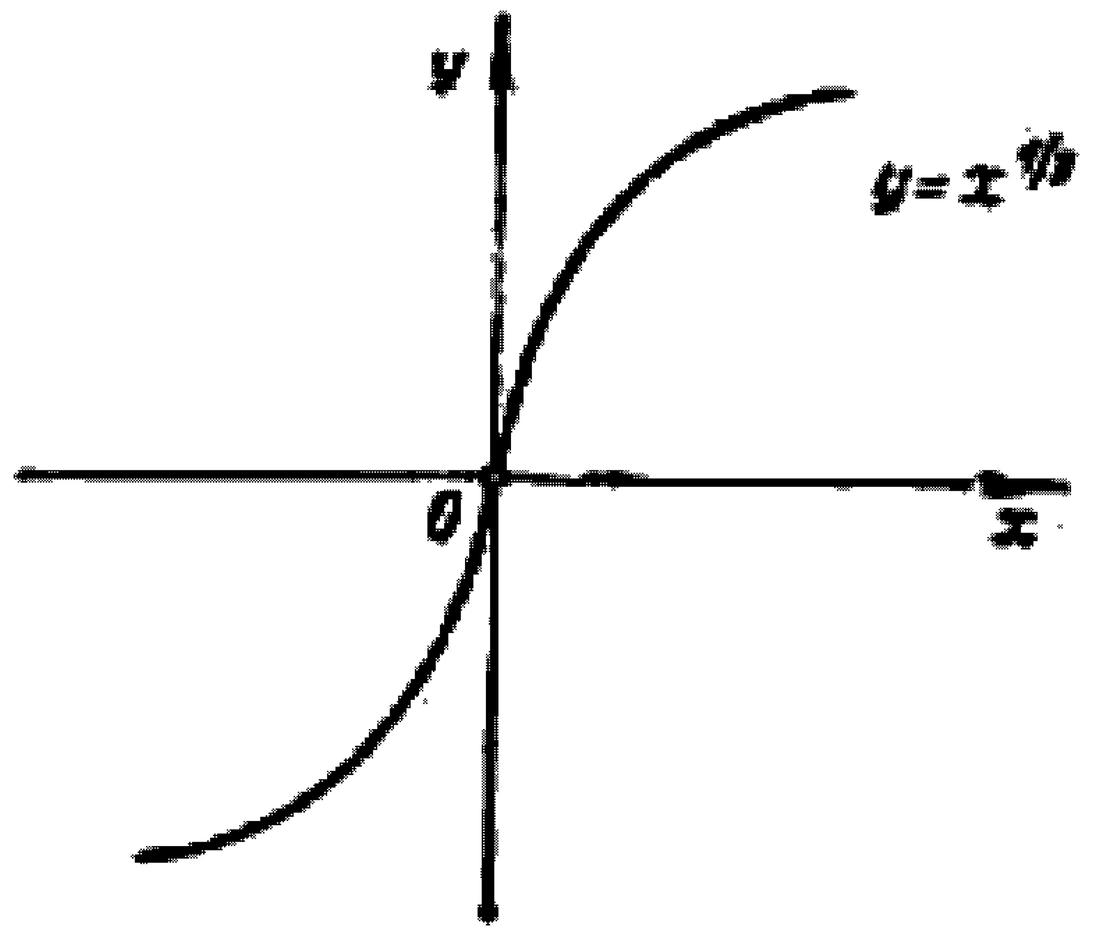
7.3.3. Някои обобщения на първото достатъчно условие за инфлексия. В условията на теорема 7.8 можем да се откажем от изискването за двукратна диференцируемост на функцията f в самата точка c, като запазим това изискване само за точките, които лежат в някоя околност отляво и отдясно на тази точка. При това трябва допълнително да предположим обаче съществуването на крайна производна $f'(c)$.

Доказателството на теорема 7.8 с посочените изменения дословно съвпада с приведеното доказателство.

По-нататък можем да се условим при определянето на инфлексните точки да не изключваме случая, когато допирателната към графиката в разглежданата точка е успоредна на оста Oy.* При това условие в теорема 7.8 можем да се откажем даже от изискването за еднократна диференцируемост в самата точка c и да формулираме тази теорема по следния начин:

Нека функцията f има крайна втора производна навсякъде в някоя околност на точката c с изключение евентуално в точката c. Нека освен това функцията f е непрекъсната в точка c и гра-

* В този случай първата производна f' е безкрайна в точката c.



Фиг. 7.11

фиката ѝ има допирателна в точката $M(c, f(c))$, евентуално успоредна на оста Oy. Тогава, ако в разглежданата околност втората производна $f^{(2)}$ има различни знаци отляво и отдясно на точката c, то графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.

Доказателството на формулираното твърдение е напълно аналогично на доказателството на теорема 7.8.

Пример:

Да се намерят инфлексните точки на графиката на функцията $y=x^{1/3}$. Тази функция има втора производна навсякъде върху безкрайната права с изключение на точката $x=0$. В точката $x=0$ разглежданата функция е непрекъсната, но вече първата ѝ производна е безкрайност. Обаче графиката на функцията $y=x^{1/3}$ има в точката $(0, 0)$ допирателна, успоредна на оста Oy* (фиг. 7.11). Тъй като втората производна има отляво и отдясно на точката $x=0$ различни знаци, то графиката на функцията $y=x^{1/3}$ има инфлексия в точката $(0, 0)$.

7.3.4. Второ достатъчно условие за инфлексия

Теорема 7.9. *Ако функцията f има в точката c крайна трета производна и удовлетворява в тази точка условията $f^{(2)}(c)=0$, $f^{(3)}(c)\neq 0$, то графиката ѝ има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. От условието $f^{(3)}(c)\neq 0$ и от теорема 6.1 следва, че функцията $f^{(2)}(x)$ или расте, или намалява в точката c. Тъй като $f^{(2)}(c)=0$, то и в единия, и в другия случай съществува околност на точката c, в която $f^{(2)}(x)$ има различни знаци отляво и отдясно на c. Но тогава съгласно предишната теорема графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$. □

* Следва например от това, че графиката на обратната функция $x=y^3$ има в тази точка допирателна.

Забележка. Разбира се, теорема 7.9 има по-тясна сфера на действие, отколкото теорема 7.8. Така теорема 7.9 не решава въпроса за наличие на инфлексия, когато функцията f няма крайна трета производна, а също така и когато $f^{(3)}(c)=0$. В последния случай, за да се реши въпросът за наличие на инфлексия, е нужно да се изучи поведението на производните от по-висок ред в точката c, което ще бъде направено по-нататък.

Ще се върнем към примера, разгледан в предишната точка, и ще покажем, че въпросът за наличие на инфлексия на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$ може да бъде решен и с помощта на теорема 7.9. Наистина $f^{(3)}(x)=6\neq 0$, следователно $M(1, -6)$ е инфлексна точка съгласно теорема 7.9.

7.3.5. Трето достатъчно условие за инфлексия. Ще установим още едно достатъчно условие за инфлексия, приложимо за случая, когато в дадена точка c се анулират както втората, така и третата производна на разглежданата функция.

Аналог на теорема 7.3 е следното твърдение:

Теорема 7.10. *Нека $n\geq 2$ е четно число и нека функцията f има производни до n-ти ред в някоя околност на точката c и производна от $(n+1)$-ви ред в самата точка c. Тогава, ако са изпълнени съотношенията*

$$f^{(2)}(c)=f^{(3)}(c)=\dots=f^{(n)}(c)=0,\quad f^{(n+1)}(c)\neq 0, \tag{7.3'}$$

то графиката на функцията f има инфлексия в точката $M=(c, f(c))$.

Доказателство. При $n=2$ теорема 7.10 съвпада с вече доказаната теорема 7.9, така че е нужно да се даде доказателство само за четно $n\geq 4$.

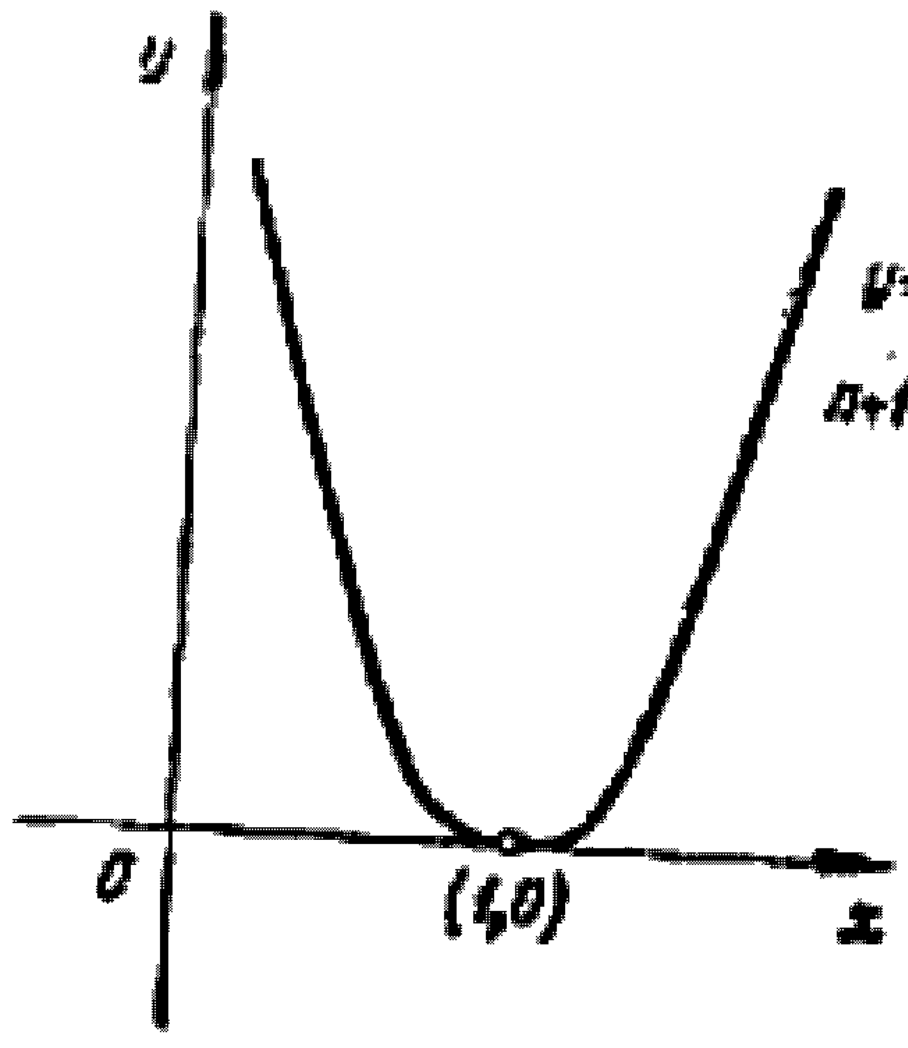
Нека четното число n удовлетворява условието $n\geq 4$ и нека $f^{(n+1)}(c)\neq 0$. Тогава според теорема 6.1 функцията $f^{(n)}$ или намалява в точката c (при $f^{(n+1)}(c)<0$), или расте в тази точка (при $f^{(n+1)}(c)>0$). Понеже освен това $f^{(n)}(c)=0$, то и в двата случая функцията $f^{(n)}$ има в достатъчно малка околност на точката c различни знаци отдясно и отляво на c.

Да разложим функцията $f^{(2)}$ в околността на точката c по формулата на Тейлор, като запишем остатъчния член във формата на Лагранж (вж. 6.8.7). Ще получим, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c съществува точка ξ между x и c, за която

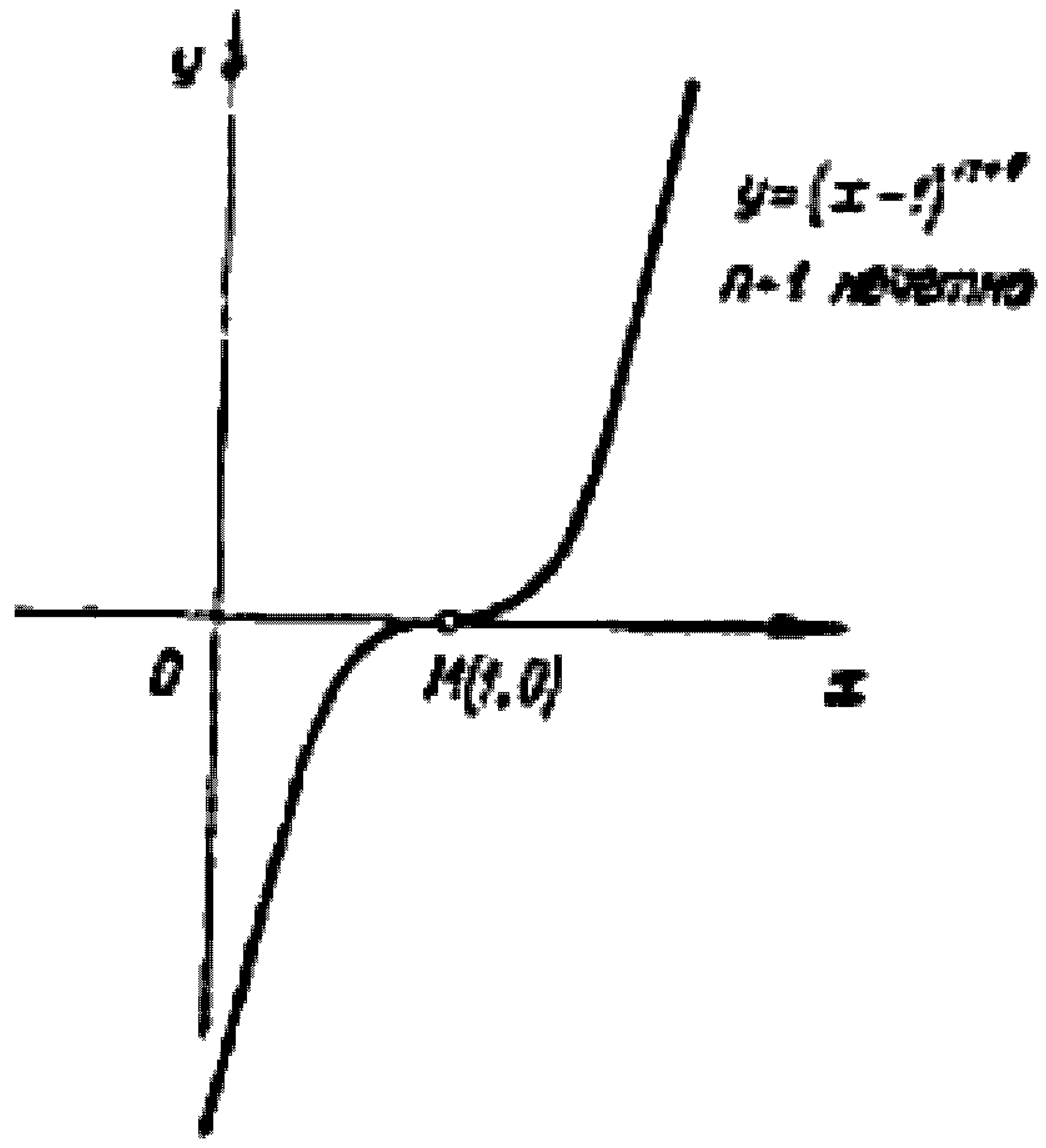
$$f^{(2)}(x)=f^{(2)}(c)+\frac{x-c}{1!}f^{(3)}(c)+\dots+\frac{(x-c)^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-1)}(c)+\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(\xi).$$

Поради съотношенията (7.3') написаното разлагане добива вида

$$f^{(2)}(x)=\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(\xi). \tag{7.4'}$$



Фиг. 7.12



Фиг. 7.13

По-рано установихме, че за всички x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(n)}$ има различни знаци отдясно и отляво на c. Тъй като ξ лежи между x и c, то за всяко x от достатъчно малка околност на точката c величината $f^{(n)}(\xi)$ (а очевидно поради четността на n и цялата дясна страна на (7.4')) има различни знаци отдясно и отляво на c. И така съгласно равенството (7.4') за всяко x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(2)}$ има различни знаци отдясно и отляво на c. Според теорема 7.8 графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$. □

Забележка. Много важно е изискването за четност на n в теорема 7.10 (сравнете тази теорема с теорема 7.3). (Вж. фиг. 7.12, 3.13.)

7.4. Асимптоти на графиката на функция

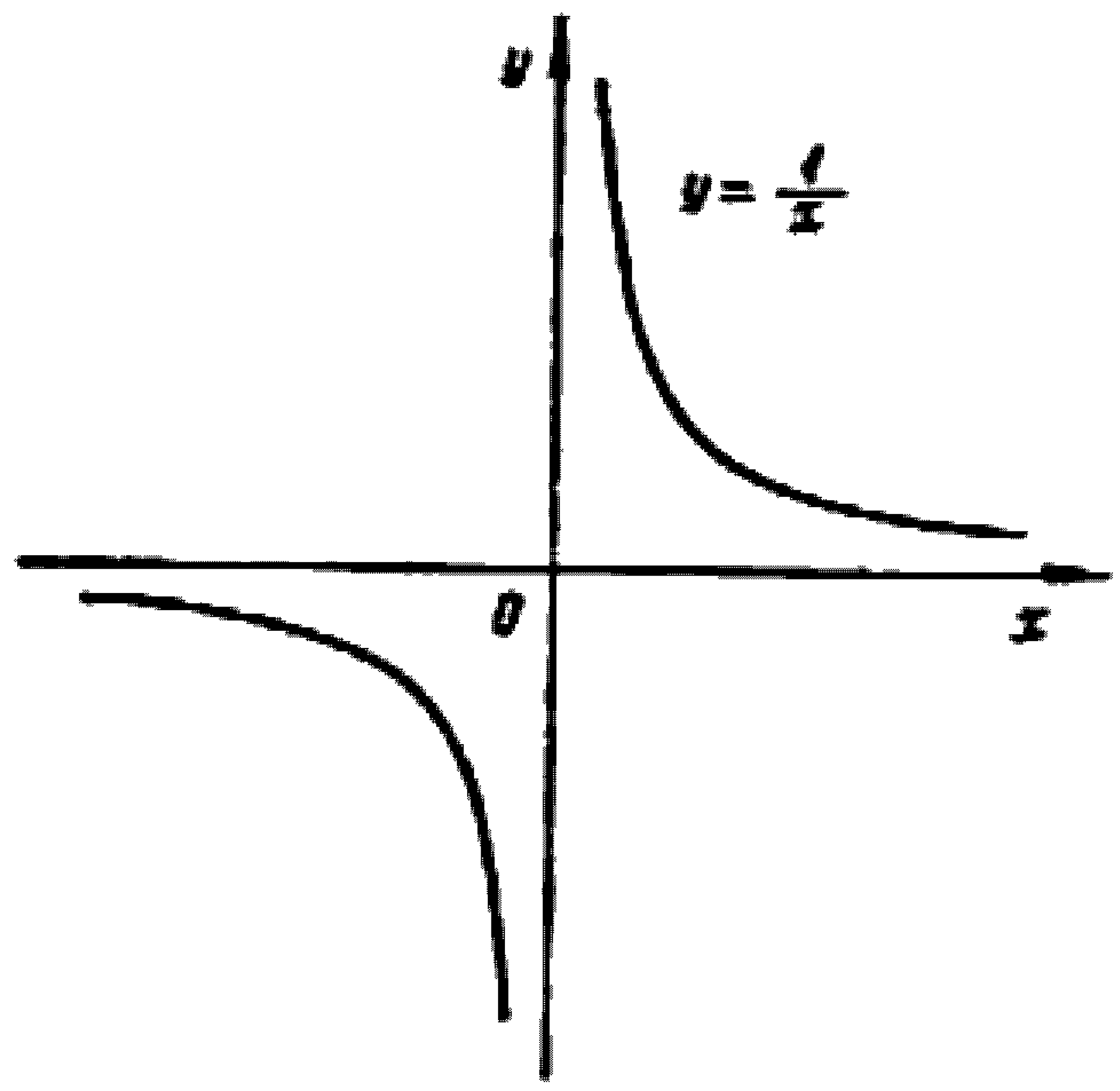
Определение 1. *Казва се, че правата $x=a$ е* ***вертикална асимптота*** *на графиката на функцията f, ако поне една от границите*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

е равна на $+\infty$ *или* $-\infty$.

Пример:

Графиката на функцията $f(x)=1/x$ има вертикална асимптота $x=0$, тъй като $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} x^{-1}=-\infty$ (фиг. 7.14).



Фиг. 7.14

Да предположим по-нататък, че функцията f е дефинирана за произволно големи стойности на аргумента. За определеност ще разглеждаме произволно големи положителни стойности.

Определение 2. *Правата $Y=kx+b$ се нарича* ***наклонена асимптота*** *към графиката на функцията f при $x\to+\infty$, ако функцията f се представя във вида*

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{7.9}$$

където $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

Теорема 7.11. *Необходимо и достатъчно условие функцията f да има наклонена асимптота при $x\to+\infty$ е да съществуват двете граници*

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}f(x)=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b. \tag{7.10}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека графиката на функцията f има при $x\to+\infty$ наклонена асимптота, т. е. за f е в сила представянето (7.9). Тогава

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}(kx+b+\alpha(x))=\lim_{x\to+\infty}(k+b/x+\alpha(x)/x)=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Достатъчност. Нека съществуват границите (7.10). Втората от тези граници ни дава право да твърдим, че разликата $f(x)-kx-b$ е безкрайно малка при $x\to+\infty$. Като означим тази безкрайно малка с α, ще получим за f представянето (7.9). □

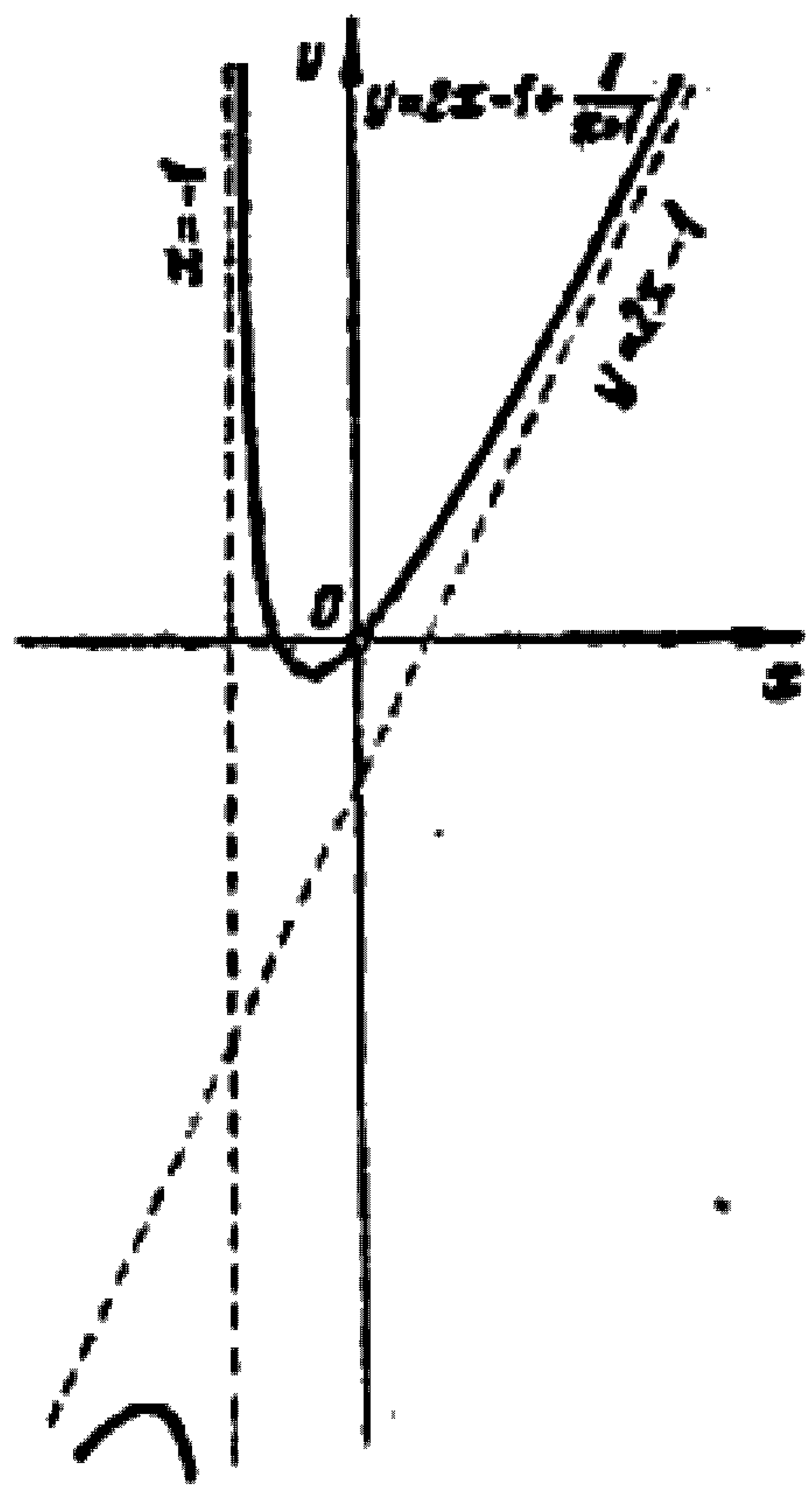
Забележка. Аналогично се определя наклонена асимптота и се доказва теорема 7.11 и за случая $x \to -\infty$.

Пример: Графиката на функцията $f(x) = (2x^2 + x)/(x+1)$ има наклонена асимптота $Y = 2x - 1$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ и освен това има вертикална асимптота $x = -1$ (фиг. 7.15). Действително

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-1} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (2x+1)/(x+1) = 2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} (-1 + 1/(x+1)) = -1,$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty.$$



Фиг. 7.15

Наред с линейните асимптоти се разглеждат и асимптоти от по-сложен вид.

Казва се, че параболата от n-ти ред, определена от многочлена

$$(7.11)\quad Y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

***е асимптота** за графиката на функцията f при $x \to +\infty$, ако функцията f се представя във вида*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \alpha(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

Лесно се доказва следващото твърдение.

Необходимо и достатъчно условие графиката на функцията f при $x \to +\infty$ да има асимптота (7.11) е да съществуват следните $n+1$ граници:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-n} f(x) = a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-(n-1)} (f(x) - a_n x^n) = a_{n-1},$$

$$\ldots, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-1} (f(x) - (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2)) = a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x)) = a_0.$$

7.5. Построяване на графиката на функция

В този параграф ще изложим схема, по която е целесъобразно да се провеждат изследванията на графиката на функция, и ще илюстрираме тази схема с пример.

При изучаването на графиката на дадена функция f е целесъобразно да се направят следните изследвания:

1°. Да се уточни дефиниционната област на функцията.

2°. Да се изясни въпросът за съществуване на асимптоти (вертикални и наклонени).

3°. Да се намерят областите на растене и намаляване на функцията и точките на екстремум.

4°. Да се намерят областите, в които се запазва посоката на изпъкналост, и инфлексните точки.

5°. Да се намерят точките, в които графиката на функцията пресича оста Ox.

По получените данни лесно се построява ескиз на графиката на функцията. За пример ще построим графиката на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}. \tag{7.12}$$

Ще следваме изложената по-горе схема.

1°. Понеже функцията (7.12) е рационална дроб, тя е дефинирана и непрекъсната навсякъде върху безкрайната права освен в точката $x=0$, в която знаменателят се анулира.

2°. Ще изясним въпроса за съществуване на асимптоти. Очевидно

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\infty$$

и затова графиката на функцията има вертикална асимптота $x=0$. Освен това от съществуването на границите

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-1} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x/2)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\frac{5}{4}$$

следва, че при $x\to\infty$ и при $x\to-\infty$ графиката на функцията има наклонена асимптота $Y=x/2-5/4$.

3°. За да намерим областите на растене и намаляване, ще пресметнем първата производна на функцията (7.12)

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}=\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Като вземем пред вид освен това, че функцията и първата ѝ производна не съществуват при $x=0$, ще получим следните области, в които f' запазва постоянен знак:

Област на стойностите на x	$-\infty<x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<+\infty$
Знак на f'	+	−	+	−	+
Поведение на функцията f	расте	намалява	расте	намалява	расте

От приведената таблица е очевидно, че функцията има екстремуми в следните точки:

1) максимум при $x=-3$ и $f(-3)=-49/12$,
2) максимум при $x=1$ и $f(1)=5/4$,
3) минимум при $x=2$ и $f(2)=9/8$.

4°. За да намерим областите, в които се запазва посоката на изпъкналост, пресмятаме втората производна:

$$f^{(2)}(x)=\frac{7x-9}{x^4}=\frac{7(x-9/7)}{x^4}.$$

Отчитаме също, че функцията и производните ѝ не съществуват в точката $x=0$, и получаваме следните области:

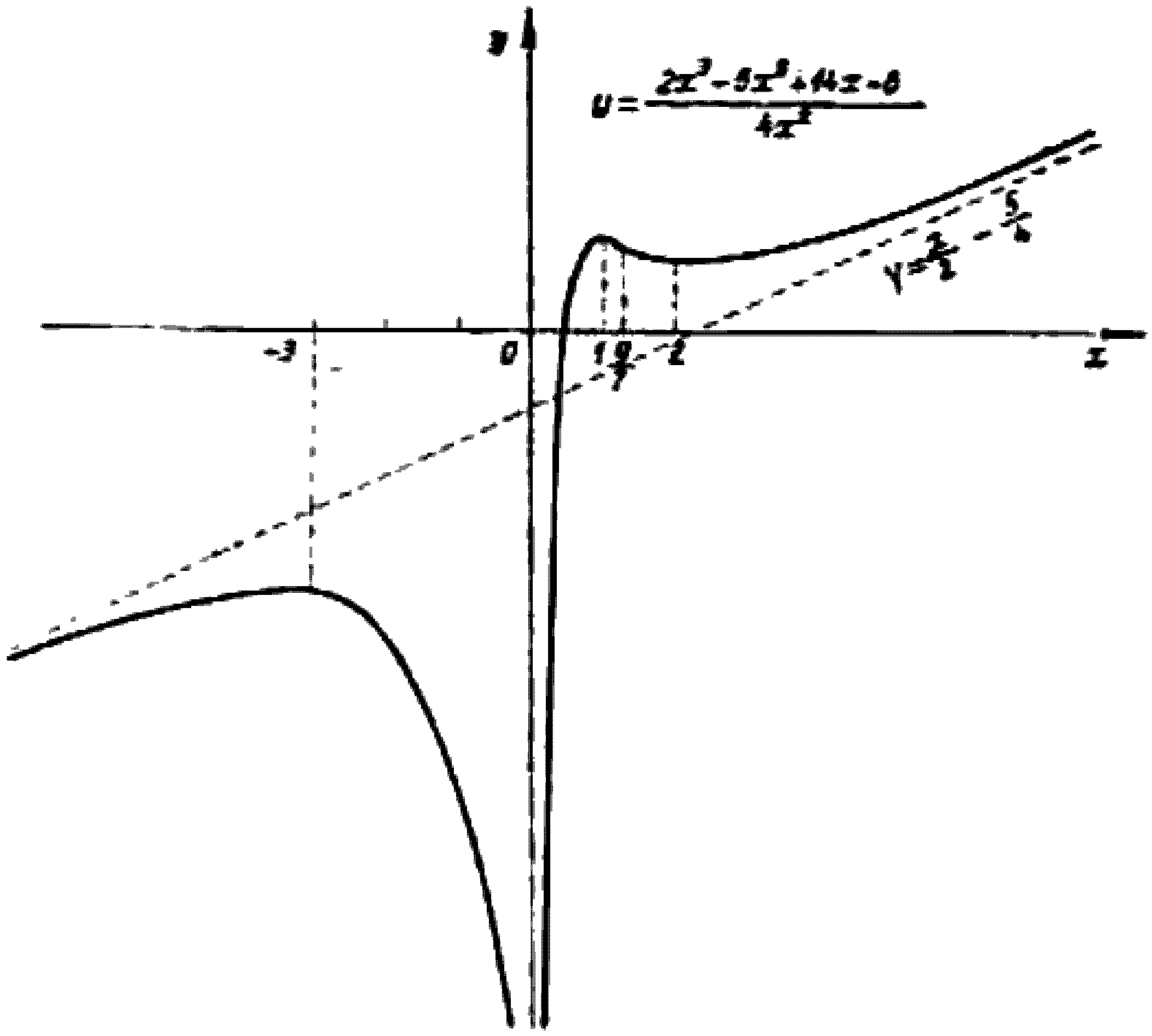
Област на стойностите на x	$-\infty<x<0$	$0<x<9/7$	$9/7<x<+\infty$
Знак на $f^{(2)}$	−	−	+
Посока на изпъкналост на f	нагоре	нагоре	надолу

От приведената таблица е очевидно, че графиката на функцията има инфлексия в точката $(9/7, f(9/7))$ и $f(9/7)=913/756$.

5°. Остава да намерим точките, в които графиката пресича оста Ox. Тези точки съответстват на реалните корени на уравнението

$$2x^3-5x^2+14x-6=0.$$

Лесно се вижда, че $2x^3-5x^2+14x-6=2(x-1/2)(x^2-2x+6)$. Понеже квадратният тричлен x^2-2x+6 има комплексни корени, то уравнението има само един реален корен $x=1/2$, така че графиката на функцията пресича оста Ox в точката $(1/2, 0)$. По получените данни построяваме ескиз на графиката на разглежданата функция (фиг. 7.16).

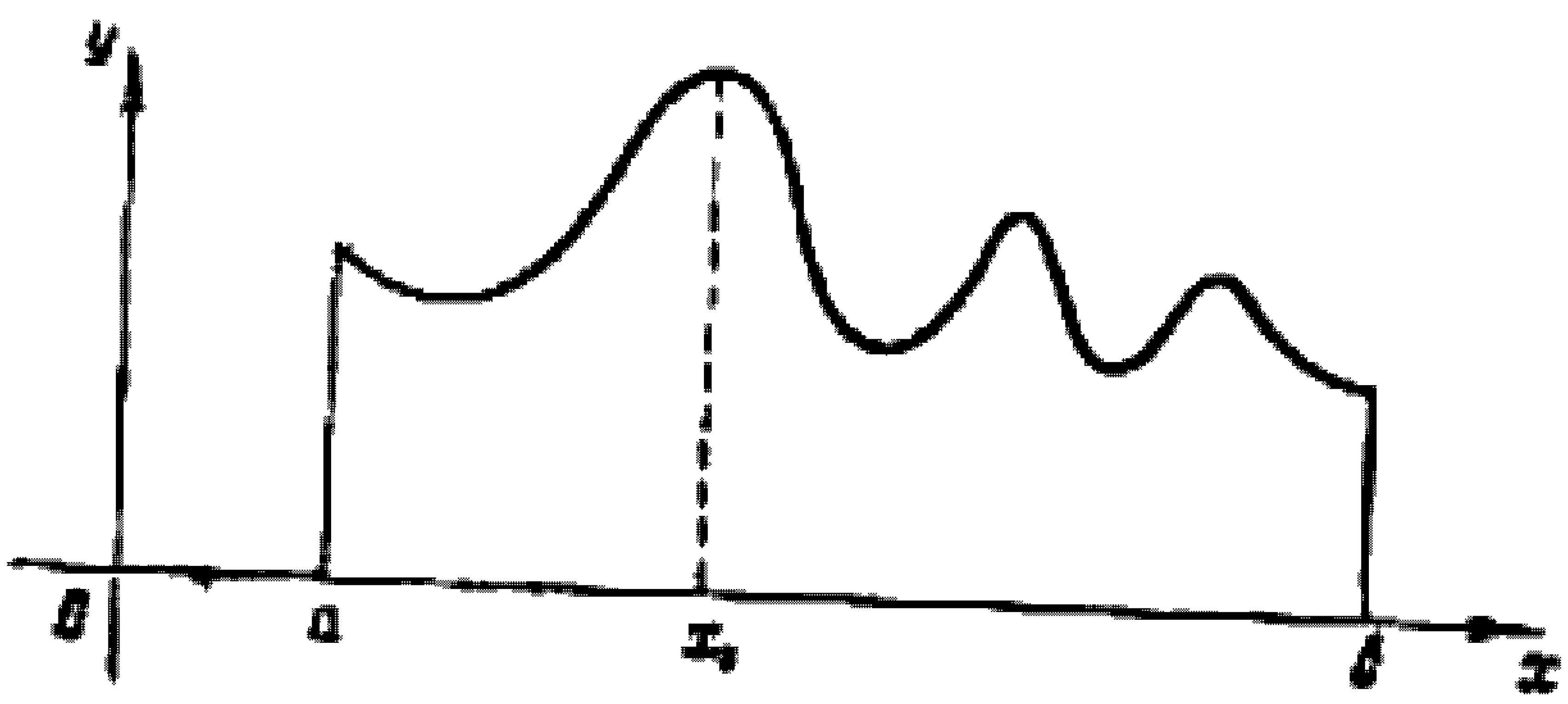


Фиг. 7.16

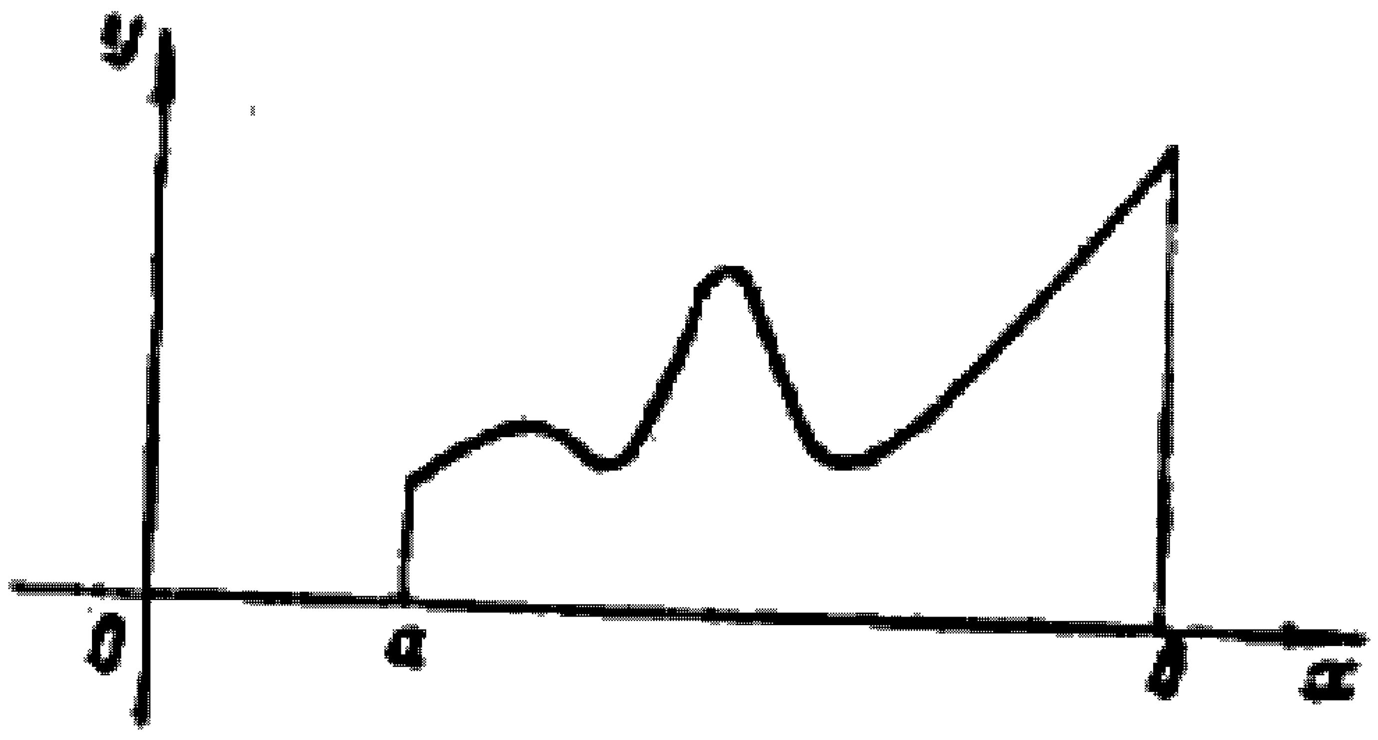
7.6. Глобален максимум и глобален минимум на функция в сегмент. Граничен (контурен) екстремум

7.6.1. Определяне на максималната и минималната стойност на функция, дефинирана в сегмент. Да разгледаме функцията f, дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Досега се занимавахме само с намирането на локалните максимуми и минимуми на функция. Сега ще поставим задачата за намиране на глобалните максимуми и минимуми, т. е. на максималната и минималната стойност на функцията в сегмента $[a, b]$. Ще подчертаем, че според теоремата на Вайерщрас (вж. теорема 4.15) непрекъснатата функция f в сегмента $[a, b]$ непременно достига максималната и минималната си стойност. За определеност ще се спрем на намирането на максималната стойност на f в сегмента $[a, b]$.

Максималната си стойност функцията f може да достига или във вътрешна точка x_0 от сегмента $[a, b]$ (тогава тя съвпада с един от локалните максимуми на функцията f, вж. фиг. 7.17), или в



Фиг. 7.17



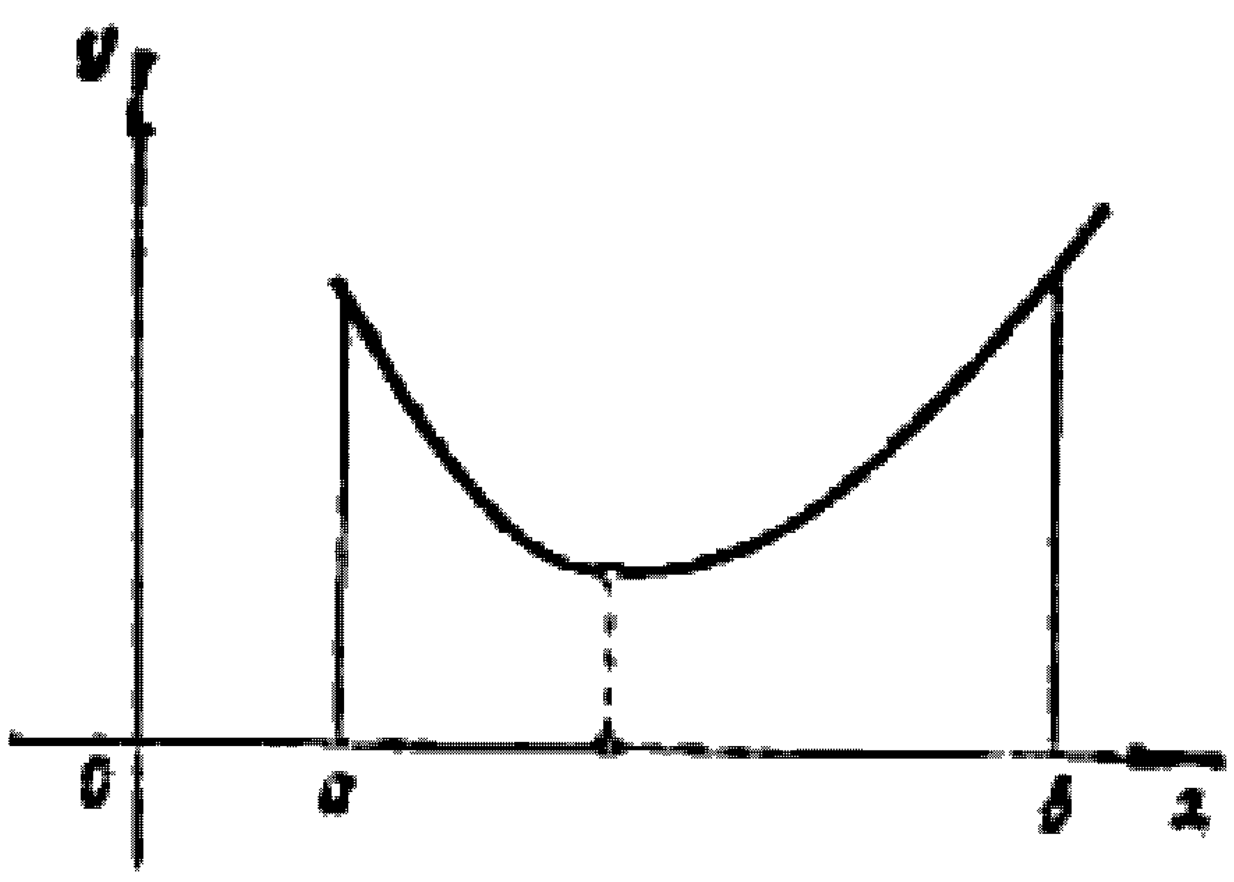
Фиг. 7.18

един от краищата на сегмента $[a, b]$ (фиг. 7.18). Оттук е ясно, че за намиране на максималната стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$ трябва да сравним стойностите на функцията f във всички точки на локален максимум и в крайните точки на сегмента a и b. Най-голямата от тези стойности ще бъде максималната стойност на f в сегмента $[a, b]$. Аналогично се намира и минималната стойност на f в сегмента $[a, b]$.

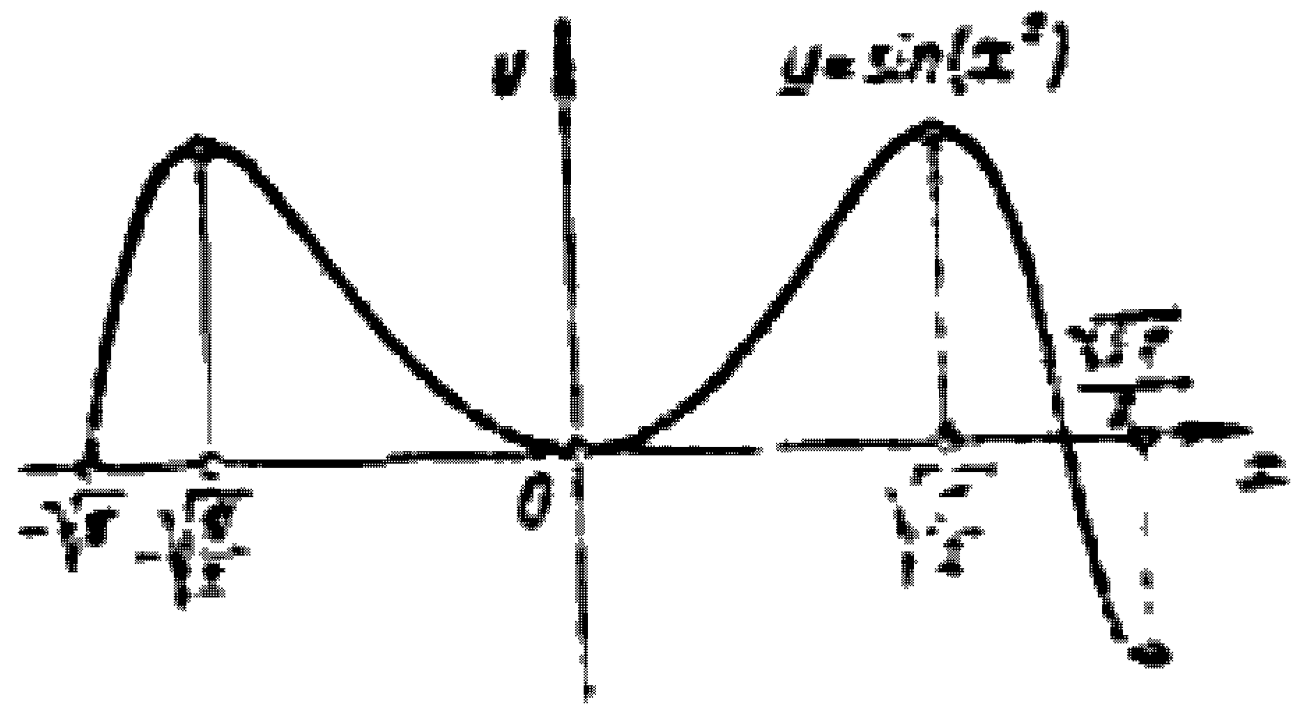
Изследването на стационарните точки може да се избегне, като се сравнят стойностите на f във всички стационарни точки и в крайните точки a и b. Най-голямата (най-малката) от тези стойности е очевидно максималната (минималната) стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Ще отбележим, че ако f има в сегмента $[a, b]$ само една точка на локален максимум (или на локален минимум), то, без да сравняваме стойността на f в тази точка с $f(a)$ и $f(b)$, можем да твърдим, че тази стойност е максималната (минималната) стойност на f в сегмента $[a, b]$ (фиг. 7.19). С аналогични средства се решава въпросът за намиране на максималната (минималната) стойност на функцията f в интервал, полуправа и безкрайната права (при условие, че тази стойност се достига).

Може да се случи така, че диференцируема функция да няма в сегмента $[a, b]$ (или полуправата $a \leq x < \infty$) стационарни точки



Фиг. 7.19



Фиг. 7.20

В такъв случай f е монотонна в този сегмент (полуправа) и нейната максимална и минимална стойност се достигат в краищата на сегмента (полуправата).

За пример ще разгледаме задачата за намиране на максималната и минималната стойност на функцията $f(x)=\sin x^2$ в сегмента $-\sqrt{\pi}\leq x\leq\sqrt{5\pi/2}$.

Тъй като $f'(x)=2x\cos x^2$, то в разглеждания интервал функцията има стационарни точки $x=0$ и $x=\pm\sqrt{\pi/2}$. Като сравним стойностите на функцията в тези точки и в краищата на сегмента

$$f(0)=0,\ f(\pm\sqrt{\pi/2})=1,\ f(-\sqrt{\pi})=0,$$

$$f(\sqrt{5\pi/2})=\sin(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2,$$

виждаме, че максималната стойност на разглежданата функция е 1 и се достига в две вътрешни точки на сегмента $x_1=-\sqrt{\pi/2}$ и $x_2=\sqrt{\pi/2}$, а минималната ѝ стойност е равна на $-\sqrt{2}/2$ и се достига в десния край на сегмента $\sqrt{5\pi/2}$. Графиката на разгледаната функция е изобразена на фиг. 7.20.

7.6.2. Граничен (контурен) екстремум. Нека функцията f е дефинирана в някой сегмент $[a, b]$. *Ще казваме, че тази функция има в крайната (контурната) точка b на този сегмент* ***граничен (контурен) максимум (минимум)****, ако съществува лява полуоколност на точката b, в която стойността $f(b)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности на тази функция.*

Аналогично се определя граничен (контурен) максимум и граничен (контурен) минимум в крайната (контурната) точка a на сегмента $[a, b]$.

Граничният максимум и граничният минимум се обединяват с общото название ***граничен (контурен) екстремум.***

В сила е следното достатъчно условие за граничен екстремум: За да има функцията f в точката b на сегмента $[a, b]$ граничен максимум (граничен минимум), е достатъчно тя да има в точката b положителна (отрицателна) лява производна.* (Доказателството е съвършено аналогично на доказателството на теорема 6.1.) От това достатъчно условие за граничен екстремум непосредствено се получава и следното необходимо условие за граничен екстремум на функция, имаща в точката b лява производна: Функцията f, имаща в точката b лява производна, има в тази точка граничен максимум (граничен минимум) само тогава, когато производната в точката b е неотрицателна (неположителна).

Аналогично необходимо условие функцията f, имаща в точката a дясна производна, да има в тази точка граничен максимум (граничен минимум) е производната в точката a да бъде неположителна (неотрицателна).

7.6.3. Теорема на Дарбу**.

Определение. *Ще казваме, че функцията f има* ***производна*** *в сегмента $[a, b]$, ако f има крайна производна във всяка вътрешна точка на $[a, b]$ и освен това има крайни едностранни производни $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.*

Очевидно функция, която има производна в сегмента $[a, b]$, е непрекъсната в този сегмент.

Ще докажем сега следващата теорема.

Теорема 7.12 (теорема на Дарбу). *Нека функцията f има производна в сегмента $[a, b]$. Тогава каквото и да е числото C, заключено между $A=f'(a+0)$ и $B=f'(b-0)$, съществува точка ξ от този сегмент, за която $f'(\xi)=C$.*

Доказателство. Най-напред ще докажем следното твърдение: Ако F има производна в $[a, b]$ и ако $F'(a+0)$ и $F'(b-0)$ са числа с различни знаци, то съществува такава точка ξ от сегмента $[a, b]$, че $F'(\xi)=0$.

Нека за определеност $F'(a+0)<0$, $F'(b-0)>0$. Тогава функцията F има граничен максимум и в двата края на сегмента $[a, b]$. Но това означава, че минималната стойност на F в сегмента $[a, b]$ се достига в някоя вътрешна точка ξ на този сегмент (функцията F е диференцируема, а очевидно и непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и затова достига минимума си в този сегмент). В точката ξ функцията F има локален минимум и затова $F'(\xi)=0$.

* За контурната точка a достатъчно условие за граничен максимум (граничен минимум) е отрицателността (положителността) на дясната производна в точката a.

** Гастон Дарбу — френски математик (1842—1917).

За доказателството на теорема 7.12 остава да положим $F(x) = f(x) - Cx$* и да приложим към F току-що доказаното твърдение. □

Ще отбележим, че не предполагахме непрекъснатост на производната f'.

Допълнение към глава 7

АЛГОРИТЪМ ЗА НАМИРАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИТЕ СТОЙНОСТИ НА ФУНКЦИЯ, ИЗПОЛЗУВАЩ САМО СТОЙНОСТИТЕ НА ТАЗИ ФУНКЦИЯ

Да предположим, че функцията f е зададена в сегмента $[a, b]$ и знаем стойностите ѝ във възлите на мрежа, която се получава при деление на сегмента $[a, b]$ на 2^n равни части ($n=1, 2, 3, \dots$). За определеност ще разгледаме случая за намиране точка на минимум за функцията f. При това ще предполагаме, че са изпълнени следните две условия: 1) функцията f има в сегмента $[a, b]$ единствена точка на минимум c; 2) при $a<c$ функцията f намалява в сегмента $[a, c]$ (т. е. намалява наляво от точката на минимума), а при $c<b$ функцията f расте в сегмента $[c, b]$ (т. е. расте надясно от точката на минимума).

Тези условия са изпълнени например, ако функцията f е два пъти диференцируема в сегмента $[a, b]$ и $f'(c)=0$, а f'' е строго положителна в $[a, b]$. Разбира се, функцията f може да удовлетворява двете условия и без да е диференцируема.

Ще дадем един алгоритъм за построяване на свиваща се система от сегменти, съдържащи точката c, в която функцията f достига минимума си.

Ще се спрем на построяването на първия сегмент на свиващата се система, тъй като всички останали сегменти се строят по същия начин. Разделяме сегмента $[a, b]$ с помощта на точките $a=x_0, x_1, x_2, x_3, x_4=b$ на четири равни подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$.

Един подсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ *ще наричаме* ***сегмент на намаляване,*** *ако* $f(x_{i-1})>f(x_i)$, *т. е. ако стойността на функцията* f *в левия му край е строго по-голяма от стойността ѝ в десния край, и съответно* ***сегмент на нарастване,*** *ако* $f(x_{i-1})<f(x_i)$.

* При това без ограничения на общността предполагаме, че $f'(a+0)=A<C<B=f'(b-0)$.

т. е. ако стойността на функцията f в левия край е строго по-малка от стойността ѝ в десния край.

Понеже функцията f има в сегмента $[a, b]$ единствена точка на минимум c, то тази точка c ще принадлежи на един от четирите подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Подсегментът $[x_{i-1}, x_i]$, съдържащ точката c, е или сегмент на намаляване, или сегмент на нарастване, или сегмент, в краищата на който функцията приема равни стойности.

Понеже функцията f по условие намалява наляво от точката на минимума c и расте надясно от тази точка, ако даден подсегмент съдържа точката на минимума c, то всеки подсегмент, лежащ наляво от него, е сегмент на намаляване и всеки подсегмент надясно от него е сегмент на нарастване. Следователно можем да твърдим, че подсегментът, който съдържа точката на минимума c, е или най-десният от сегментите на намаляване, или най-левият от сегментите на нарастване, или подсегмент, в краищата на който функцията f приема равни стойности.

Това твърдение позволява да се даде алгоритъм за построяване на първия сегмент $[a_1, b_1]$ от свиващата се система сегменти $\{[a_n, b_n]\}$, всеки от които съдържа точката на минимума c.

Ще разгледаме четирите възможни случая.

1. Между подсегментите $[x_{i-1}, x_i]$ има сегмент, в краищата на който f приема равни стойности. Тогава този сегмент съдържа точката на минимума c и го приемаме за първи сегмент $[a_1, b_1]$ на свиващата се система.

2. Всички подсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, са сегменти на намаляване. В този случай точката на минимума се съдържа в най-десния сегмент, т. е. в сегмента $[x_3, x_4]$, който приемаме за $[a_1, b_1]$.

3. Всички подсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, са сегменти на нарастване. Тогава минимумът лежи в най-левия от подсегментите, т. е. в сегмента $[x_0, x_1]$, който приемаме за $[a_1, b_1]$.

4. Измежду подсегментите има както сегменти на намаляване, така и лежащи надясно от тях сегменти на нарастване. В този случай може да се твърди, че точката на минимума c лежи в обединението на най-десния сегмент на намаляване и най-левия сегмент на нарастване. Обединението на тези два сегмента приемаме за $[a_1, b_1]$.

Така определихме еднозначен алгоритъм за построяване на първия сегмент $[a_1, b_1]$ за свиващата се система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$.

Вторият сегмент на тази система $[a_2, b_2]$ се построява, като тръгнем от $[a_1, b_1]$, по същия начин, както построихме сегмента $[a_1, b_1]$, тръгвайки от $[a, b]$. По същия начин, тръгвайки от n-тия сегмент $[a_n, b_n]$, се построява $(n+1)$-вия сегмент $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ на свиващата се система.

Ясно е, че така построената система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$ е свиваща се, и понеже всички те съдържат точката на минимума c, и двете редици от десните краища $\{b_n\}$ и левите краища $\{a_n\}$ на тези сегменти клонят към точката на минимума c.

Аналогично се построява алгоритъм за намиране на точката на максимума на функцията f, имаща в сегмента $[a, b]$ единствена точка на максимум c, при условие, че функцията расте наляво от c при $c>a$ и намалява надясно от c при $c<b$.

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

В тази глава ще изучим обратната операция на операцията диференциране, т. е. ще се заемем с въпроса за възстановяване на функция, ако е известна нейната производна. Изучаването на този въпрос ще ни доведе естествено до понятията ***примитивна функция*** и ***неопределен интеграл*** (вече споменати в глава 1).

Ще отложим въпроса за съществуване на примитивна функция и неопределен интеграл до глава 9, а тук ще изучим най-важните методи за интегриране, както и класовете функции, чиито неопределени интеграли се изразяват чрез елементарни функции.

8.1. Понятие за примитивна функция и неопределен интеграл

8.1.1. Понятие за примитивна функция.

Определение. *Функцията F се нарича* ***примитивна функция*** *(или просто* ***примитивна****) на функцията f в интервала (a, b), ако тя е диференцируема във всяка точка x на този интервал и производната ѝ F' е равна на f.*

Забележка. Аналогично се определя примитивна на функцията f върху безкрайната права и върху полуправа.*

Примери:

1. Функцията $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ е примитивна на функцията $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$ в интервала $(-1, 1)$, тъй като във всяка точка x на този интервал $(\sqrt{1-x^2})' = -x/\sqrt{1-x^2}$.

* Може да се въведе примитивна на функция f и в сегмента $[a, b]$ като такава функция F, която има производна F' във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$, равна на f, и освен това има дясна производна $F'(a+0)$, равна на $f(a)$, и лява производна $F'(b-0)$, равна на $f(b)$.

2. Функцията $F(x)=\sin x$ е примитивна на функцията $f(x)=\cos x$ върху безкрайната права $(-\infty, +\infty)$, тъй като във всяка точка x на безкрайната права $(\sin x)'=\cos x$.

3. Функцията $F(x)=\ln x$ примитивна на функцията $f(x)=1/x$ върху отворената полуправа $x>0$, тъй като във всяка точка x на тази полуправа $(\ln x)'=1/x$.

Ако F е примитивна на функцията f в интервала (a, b), то очевидно и функцията $F+C$, където C е произволна константа, е примитивна на функцията f в същия интервал.

Естествено възниква въпросът, каква е връзката между различните примитивни на една и съща функция f. В сила е следната основна теорема:

Теорема 8.1. *Ако F_1 и F_2 са примитивни на функцията f в интервала (a, b), то навсякъде в този интервал $F_1(x)-F_2(x)=C$, където C е константа.*

С други думи, две произволни примитивни на една и съща функция могат да се различават само с константа.

Доказателство. Полагаме $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Тъй
всяка от функциите F_1 и F_2 е диференцируема в интервала $(a,$
то според теорема 5.5 и функцията Φ е диференцируема в
вала (a, b), при това навсякъде в този интервал $\Phi'(x)=F_1$
$-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

В 6.4.1 беше доказана теорема 6.5 със следното съдържание: Ако функцията Φ е диференцируема навсякъде в интервала (a, b) и ако навсякъде в този интервал $\Phi'(x)=0$, то функцията Φ е константа в интервала (a, b).

От тази теорема получаваме, че $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)=C=\text{const}$. □

Следствие. *Ако F е една от примитивните на функцията f в интервала (a, b), то всяка примитивна Φ на функцията f интервал има вида $\Phi(x)=F(x)+C$, където C е константа.*

8.1.2. Неопределен интеграл.

Определение. *Съвкупността от всички примитивни функции на дадена функция f в интервала (a, b) се нарича* ***неопределен интеграл*** *от функцията f (в този интервал) и произволен елемент на тази съвкупност се означава със символа*

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

В това означение знакът $\int$ се нарича интеграл, изразът $f(x)\,dx$ — подинтегрален израз, а функцията f — подинтегрална функция.

Ако F е една от примитивните на функцията f в интервала (a, b), то според следствието от теорема 8.1

(8.2) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

където C е произволна константа.

Ще подчертаем, че ако примитивната (а следователно и неопределеният интеграл) на функцията f в интервала (a, b) съществува, то подинтегралният израз във формулата (8.1) представлява диференциалът на всяка от тези примитивни. Действително нека F е произволна примитивна на функцията f в интервала (a, b), т. е. за всяко x от интервала (a, b) имаме $F'(x)=f(x)$. Тогава $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF$.

Примери:

1. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$ в интервала $-1<x<1$, тъй като функцията $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ е една от примитивните на функцията $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$ в този интервал.

2. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ върху безкрайната права $-\infty<x<\infty$, тъй като функцията $F(x)=\sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x)=\cos x$ върху безкрайната права.

В тази глава няма да се занимаваме с въпроса за съществуването на примитивни (или неопределени интеграли). Тук само ще отбележим, че в 9.4 ще бъде доказано, че за всяка функция f, непрекъсната в интервала (a, b), съществува примитивна функция (и неопределен интеграл) в този интервал.

8.1.3. Основни свойства на неопределения интеграл. Най-напред ще отбележим две свойства, непосредствено следващи от определението на неопределен интеграл:

1°. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$

2°. $\int dF(x) = F(x) + C.$

Свойство 1° означава, че знаците d и $\int$ „взаимно се съкращават", когато знакът на диференциала стои пред знака на интеграла.

Свойство 2° означава, че знаците $\int$ и d „взаимно се съкращават" и когато знакът на интеграла стои пред знака на диференциала, но в този случай към F трябва да се добави произволна константа C.

За установяването на свойство 1^0 е достатъчно да се вземе диференциалът на двете страни на формула (8.2) и да се вземе пред вид, че $dF(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx$.

За установяването на свойство 2^0 е достатъчно в лявата страна на (8.2) да използваме равенството $dF(x)=f(x)\,dx$.

Следващите две свойства се наричат ***линейни свойства на интеграла***:

3^0. $\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

4^0. $\int[Af(x)]\,dx=A\int f(x)\,dx\quad(A=\text{const}).$

Равенствата във формулите на 3^0 и 4^0 имат условен характер: те трябва да се разбират като равенства на дясната и лявата страна с точност до събираемо произволна константа (това е разбираемо, тъй като всеки от интегралите, фигуриращи във формулите на 3^0 и 4^0, е определен с точност до произволна константа).

Понеже две примитивни на една и съща функция могат да се различават само с константа, то за доказателството на свойство 3^0 е достатъчно да се покаже, че ако F е примитивна f, а G — примитивна на g, то функцията $F\pm G$ е примитивна $f\pm g$, което непосредствено следва от това, че производната на (алгебричната) сума на функции е равна на сумата от производните на тези функции, т. е. $(F\pm G)'=F'\pm G'=f\pm g$. Аналогично се доказва и свойство 4^0. В този случай се използва равенството $(AF(x))'=AF'(x)=Af(x)$.

8.1.4. Таблица на основните неопределени интеграли. В глава получихме таблицата на производните на основните функции, което е основа на апарата за смятане в смятане. Всяка формула на тази таблица, че функция F има производна, равна на f, ни води съгласно лението за неопределен интеграл към съответна формула на гралното смятане

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

По този начин идваме до следната таблица на основните неопределени интеграли:

1^0. $\int 0\,dx=C.$

2^0. $\int 1\,dx=x+C.$

3°. $\int x^{\alpha}\,dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C \qquad (\alpha \neq -1).$

4°. $\int x^{-1}\,dx = \ln|x|+C \qquad (x\neq 0).$

5°. $\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C \ (0<a\neq 1), \int e^x\,dx = e^x + C.$

6°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

7°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \pi n + \pi/2,$ където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

9°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n,$ където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

10°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \qquad (-1<x<1).$$

11°. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + C, \\ -\operatorname{arc\,ctg} x + C. \end{cases}$$

12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right| + C$ (в случая на знак минус се разглежда $|x|>1$).

13°. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1).$

Към тези формули могат да се присъединят и съответните формули за хиперболичните функции:

14°. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

15°. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

16°. $\int \operatorname{ch}^{-2} x\,dx = \operatorname{th} x + C.$

17°. $\int \operatorname{sh}^{-2} x\,dx = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

Ще направим някои бележки по отношение на формулите 4°, 12° и 13°. Формула 4° е вярна за всеки интервал, несъдържащ $x=0$. Наистина, ако $x>0$, то от формулата $(\ln x)'=1/x$ заключаваме, че $\int x^{-1}\,dx=\ln x+C$, а ако $x<0$, то от $(\ln(-x))'=1/x$ заключаваме, че $\int x^{-1}\,dx=\ln(-x)+C$. Следователно формула 4° е вярна за всяко $x\neq 0$.

Формулите 12° и 13° заемат изключително положение в нашата таблица, тъй като те нямат аналози сред формулите от таблицата на производните.

Разбира се, за проверка на формулите 12° и 13° е достатъчно да се убедим, че производните на изразите в десните страни на тези формули съвпадат със съответните подинтегрални функции.

Нашата най-близка цел е да допълним таблицата на неопределените интеграли с основни начини и методи за интегриране. Но преди да пристъпим към реализацията на тази цел, ще направим една важна забележка.

В главите 1 и 4 въведохме понятието елементарна функция, а в 5.5.5 установихме, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция. С други думи, установихме, че операцията диференциране не ни извежда от класа на елементарните функции. Ще отбележим веднага, че при операцията интегриране нещата стоят другояче. Може да се докаже, че интеграли от някои елементарни функции вече не са елементарни функции. Примери за такива интеграли са следните:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx$. 2°. $\int \cos(x^2)\,dx$.

3°. $\int \sin(x^2)\,dx$. 4°. $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(0<x\neq 1)$.

5°. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ $(x\neq 0)$. 6°. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Никой от изброените интеграли не е елементарна функция. Разгледаните функции не само че реално съществуват, но и играят голяма роля в различни въпроси на физиката. Така например интегралът 1°, наречен ***интеграл на Поасон*** или ***интеграл на грешките***, се използува широко в статистическата физика, в теорията на топлопроводността и дифузията, интеграли 2° и 3°, наречени ***интеграли на Френел***, се прилагат широко в оптиката. Често се срещат в приложенията и интегралите 4°—6°, първият от които се нарича ***интегрален логаритъм***, а последните два — ***интегрален косинус*** и ***интегрален синус***.

8.2. Основни методи за интегриране

8.2.1. Интегриране чрез смяна на променливата (субституция). Смяната на променливата е един от най-ефективните методи за интегриране. Той се основава на следното елементарно твърдение:

Нека функцията φ е дефинирана и диференцируема в множеството $\{x\}$, което представлява или интервал, или отворена полуправа, или безкрайната права, и нека $\{t\}$ е множеството от всички стойности на тази функция. Нека освен това за функцията g да съществува в множеството $\{t\}$ примитивна функция G, т. е.

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C. \tag{8.3}$$

Тогава навсякъде в множеството $\{x\}$ за функцията $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ съществува примитивна функция, равна на $G(\varphi(x))$, т. е.

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C. \tag{8.4}$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно да използуваме правилото за диференциране на сложна функция

$$\frac{d}{dx}\{G(\varphi(x))\} = G'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

и да отчетем, че по определението на примитивна $G' = g$. Да предположим сега, че трябва да пресметнем интеграла

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.5}$$

В редица случаи е удобно за нова променлива да се избере такава диференцируема функция $t = \varphi(x)$, че да е изпълнено равенството

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \tag{8.6}$$

при което функцията g се интегрира лесно, т. е. интегралът

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C$$

се пресмята просто. Доказаното твърдение ни позволява да напишем следната формула за интеграла (8.5):

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C. \tag{8.7}$$

Този начин за пресмятане на интеграла (8.5) се нарича именно ***интегриране чрез смяна на променливата.***

Разбира се, той не е приложим към всеки интеграл. Освен това трябва да подчертаем, че изборът на сполучлива субституция в голяма степен се определя от умението на този, който смята.

Примери:

1. Да се пресметне $\int \sin 3x\,dx$. За пресмятането на този интеграл трябва да се направи простата субституция $t=3x$, $dt=3dx$. В резултат от тази смяна ще получим

$$\int \sin 3x\,dx=\int \frac{1}{3}\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=-\frac{1}{3}\cos 3x+C.$$

2. Да се пресметне $\int \frac{dx}{x+a}$. Този интеграл се пресмята посредством смяната $t=x+a$, $dt=dx$. При това получаваме

$$\int \frac{dx}{x+a}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+a|+C \quad (x\neq -a).$$

3. Да се пресметне $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$. Лесно се вижда, че този интеграл се пресмята със субституцията $t=\cos x$. Наистина при това $dt=-\sin x\,dx$ и

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int e^t\,dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C.$$

4. Да се пресметне $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$. За пресмятането на този интеграл е удобна субституцията $t=\operatorname{arc\,tg} x$. Наистина при тази субституция $dt=\frac{dx}{1+x^2}$ и

$$\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx=\int t^{100}\,dt=\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{1}{101}(\operatorname{arctg} x)^{101}+C.$$

5. Да се пресметне $I=\int (5x-6)^{1979}\,dx$. Разбира се, развивайки подинтегралната функция по формулата за бинома на Нютон, можем да доведем този интеграл до сума на хиляда деветстотин и осемдесет таблични интеграла. Но много по-просто е да се направи субституцията $t=5x-6$, $dt=5dx$, в резултат на което ще получим

$$I=\frac{1}{5}\int t^{1979}\,dt=\frac{1}{9900}t^{1980}+C=\frac{1}{9900}(5x-6)^{1980}+C.$$

6. Да се пресметне $\int \frac{dx}{\cos x}$. За да предвидим субституцията, която трябва да направим, ще приведем интеграла във вида

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}.$$

Сега е ясно, че трябва да положим $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$. В резултат ще получим

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|+C.$$

7. Да се пресметне $\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1}$. За пресмятане на този интеграл е удобна субституцията $t=(3x)^6$, $dt=2\,.\,3^7x^5\,dt$. В резултат на посочената субституция получаваме

$$\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1}=\frac{1}{4374}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4374}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{1}{4374}\operatorname{arc\,tg}(3x)^6+C.$$

8. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. За пресмятане на този интеграл е удобна тригонометричната субституция

$$t=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a},\quad x=a\operatorname{tg} t,\quad dx=a\cos^{-2}t\,dt.$$

В резултат на тази субституция интегралът приема вида

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=a^{-2}\int \cos t\,dt=a^{-2}\sin t+C$$

$$=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

9. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Тук е удобна субституцията $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$, при което

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=a^{-2}\int \cos^{-2}t\,dt=a^{-2}\operatorname{tg} t+C$$

$$=\frac{\sin t}{a^2\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

10. Да се пресметне $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. За пресмятане на този интеграл е удобна субституцията $2t=\arccos\frac{x}{a}$, $x=a\cos 2t$, $dx=-2a\sin 2t\,dt$. Получаваме

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=-4a\int\cos^2 t\,dt=-2a\int(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=-2at-2a\int\cos 2t\,dt=-2at-a\sin 2t+C$$

$$=-a\left(\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-(x/a)^2}\right)+C.$$

8.2.2. Интегриране по части. Нека всяка от функциите u и v е диференцируема в множеството $\{x\}$ и в това множество нека да съществува примитивна на функцията $v \cdot u'$. Тогава в $\{x\}$ съществува примитивна и на функцията $u \cdot v'$ и е в сила следната формула:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx. \tag{8.8}$$

Забележка. Определението за диференциал и свойството инвариантност на формата му позволяват формула (8.8) да се запише във вида

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)\, du(x). \tag{8.9}$$

За доказателството на формулираното твърдение ще запишем формулата за производна на произведението на двете функции $u(x)$ и $v(x)$:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x). \tag{8.10}$$

Интегрираме равенството (8.10). Тъй като по условие за всяко x от множеството $\{x\}$ съществуват $\int v(x)\, u'(x)\, dx$ и $\int [u(x) \cdot v(x)]'\, dx = u(x) \cdot v(x) + C$, то за всяко x от множеството $\{x\}$ съществува и интегралът $\int u(x)\, v'(x)\, dx$, при това е вярна формулата (8.8) (или (8.9)).

Формулата (8.9) свежда въпроса за намиране на интеграла $\int u dv$ до намиране на интеграла $\int v du$. В редица конкретни случаи вторият интеграл може лесно да се пресметне.

Пресмятането на интеграла $\int u dv$ *посредством формула* (8.9) *се нарича* ***интегриране по части***. Ще отбележим, че при конкретно прилагане на формулата за интегриране по части (8.9) е много удобно да се използва таблицата на диференциалите от 5.5.6.

Примери:

1. Да се пресметне $I = \int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$. Като положим $u = \ln x$, $dv = x^n dx$ и използваме формула (8.9), получаваме $du = x^{-1} dx$, $v = x^{n+1}/(n+1)$,

$$I = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} + C.$$

2. Да се пресметне $I = \int x \operatorname{arctg} x\, dx$. Като положим $u = \operatorname{arc\,tg} x$,

$dv = x\,dx$ и използваме формула (8.9), получаваме

$$I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x - x/2 + C.$$

3. Да се пресметне $I = \int x^2 \cos x\,dx$. Най-напред ще приложим формула (8.9), като ще положим $u = x^2$, $dv = \cos x\,dx$. Получаваме $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$, $I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$. За пресмятането на последния интеграл ще приложим формула (8.9) още веднъж, като този път ще положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Получаваме $du = dx$, $v = -\cos x$,

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x\,dx = (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C.$$

По такъв начин интегралът $\int x^2 \cos x\,dx$ се пресмята посредством двукратно интегриране по части. Лесно е да се разбере, че интегралът $\int x^n \cos x\,dx$ (където n е произволно цяло положително число) може да се пресметне по аналогичен начин посредством n-кратно интегриране по части.

4. Ще пресметнем сега $I = \int e^{ax} \cos bx\,dx$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$). Най-напред ще приложим формула (8.9), като ще положим $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$. Получаваме

$$du = ae^{ax}\,dx,\quad v = b^{-1}\sin bx,$$

$$I = b^{-1}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

За пресмятане на последния интеграл още веднъж прилагаме формула (8.9), като ще положим този път $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$. Получаваме

$$I = b^{-1}e^{ax}\sin bx + ab^{-2}e^{ax}\cos bx - a^2 b^{-2} I. \tag{8.11}$$

По такъв начин чрез двукратно интегриране на I по части получаваме за интеграла I уравнението от първа степен (8.11). От това уравнение намираме

$$I = (a^2 + b^2)^{-1}(a \cos bx + b \sin bx)\,e^{ax}.$$

Практиката показва, че голямата част от интегралите, които могат да се решат чрез интегриране по части, може да се раздели на следните три групи:

1. Към първата група се отнасят интегралите, чиято подинтегрална функция съдържа като множител една от следните функции: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $(\operatorname{arctg} x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln \varphi(x)$, ..., а другият множител е производна на позната функция (вж. разгледаните примери 1 и 2). За пресмятане на интегралите от първата група прилагаме формулата (8.9), като полагаме в нея u равна на една от изброените функции.

2. Към втората група се отнасят интеграли от вида

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx,\quad \int (ax+b)^n \sin(cx)\,dx,\quad \int (ax+b)^n e^{cx}\,dx,$$

където a, b, c са константи, n е произволно цяло положително число (вж. разгледания пример 3). Интегралите от втората група се решават чрез n-кратно прилагане на формулата за интегриране по части (8.9), като за u трябва всеки път да се взема $(ax+b)$ в съответните степени. След всяко интегриране по части тази степен ще намалява с единица.

3. Към тази група се отнасят интеграли от вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$, ... (вж. пример 4). Като означим всеки от интегралите в тази група с I и двукратно интегрираме по части, стигаме до уравнение от първа степен за I.

Разбира се, посочените три групи не изчерпват всички интеграли, които се решават с интегриране по части. Ще приведем примери на интеграли, които не влизат в нито една от изброените три групи, но могат да се пресметнат с помощта на формула (8.9).

Да пресметнем $I=\int x\sin^{-2}x\,dx$. Този интеграл не влиза в нито една от споменатите три групи. Въпреки това, като приложим формула (8.9), полагайки в нея $u=x$, $dv=\sin^{-2}x\,dx$, получаваме $du=dx$, $v=-\operatorname{ctg} x$,

$$I=-x\operatorname{ctg}x+\int \operatorname{ctg}x\,dx=-x\operatorname{ctg}x+\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$=-x\operatorname{ctg}x+\int\frac{d\sin x}{\sin x}=-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$$

(в проведените разсъждения $x\neq\pi n$, където $n=0, \pm1, \pm2, \dots$).

Аналогично се пресмята и интегралът $\int x\cos^{-2}x\,dx$.

Ще пресметнем накрая важния за по-нататък интеграл

$K_\lambda = \int (t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt$, където $a=\mathrm{const}, \lambda=1, 2, 3, \ldots$ Този интеграл също не влиза в споменатите по-горе три групи. За пресмятането му ще установим рекурентна формула, свеждаща пресмятането на K_λ до пресмятане на $K_{\lambda-1}$.

Можем да запишем (при $\lambda \neq 1$)

$$K_\lambda = a^{-2}\int a^2 (t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt = a^{-2}\int ((t^2+a^2)-t^2)(t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt$$

$$= a^{-2}\int (t^2+a^2)^{-\lambda+1}\,dt - \frac{1}{2}a^{-2}\int t\,(t^2+a^2)^{-\lambda}\,2t\,dt$$

$$= a^{-2}K_{\lambda-1} - \frac{1}{2}a^{-2}\int t\,(t^2+a^2)^{-\lambda}\,d(t^2+a^2).$$

За пресмятане на последния интеграл прилагаме формулата за интегриране по части (8.9), като полагаме $u=t$, $dv=(t^2+a^2)^{-\lambda}$ $d(t^2+a^2)$. Получаваме $du=dt$, $v=-(t^2+a^2)^{-\lambda+1}/(\lambda-1)$,

$$K_\lambda = a^{-2}K_{\lambda-1} + \frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}t\,(t^2+a^2)^{-\lambda+1} - \frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}K_{\lambda-1}.$$

От последното равенство получаваме рекурентната формула

$$(8.12)\qquad K_\lambda = \frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}\cdot t\,(t^2+a^2)^{-\lambda+1} + \frac{2\lambda-3}{2\lambda-2}a^{-2}K_{\lambda-1}.$$

Ще се убедим, че рекурентната формула (8.12) позволява да се пресметне интегралът K_λ за всяко $\lambda=2, 3, \ldots$ Наистина интегралът K_1 се пресмята елементарно

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{a} + C.$$

След като е пресметнат интегралът K_1, като положим във формула (8.12) $\lambda=2$, без труд намираме K_2. На свой ред, като знаем K_2 и положим във формула (8.12) $\lambda=3$, получаваме K_3. Продължавайки по този начин, ще пресметнем интеграла K_λ за всяко естествено число λ.

8.3. Класове от функции, интегруеми в елементарни функции

Макар че, както отбелязахме, неопределеният интеграл от елементарна функция може да не се изразява чрез елементарни функции, все пак съществуват широки класове от функции, неопределените интеграли от които се изразяват чрез елементарни функции. Този параграф е посветен на изучаването на такива класове от функции.

Най-важен измежду тези класове от функции е класът на рационалните дроби, представляващи частно на два алгебрични полинома. Изучаването на класа на рационалните дроби се предшествува от кратки сведения за комплексните числа и алгебричните полиноми.

8.3.1. Кратки сведения за комплексните числа. Две реални числа x и y ще наричаме ***наредена двойка***, ако е казано кое от тези числа е първо и кое е второ.

Наредената двойка от реалните числа x и y ще означаваме със символа (x, y), записвайки на първо място първия елемент на двойката.

Комплексно число *се нарича наредената двойка (x, y) от реални числа, първото от които x се нарича* ***реална част****, а второто y —* ***имагинерна част*** *на това комплексно число.*

Когато имагинерната част y е равна на нула, съответната двойка $(x, 0)$ се отъждествява с реалното число x. Това позволява множеството на реалните числа да се разглежда като подмножество на комплексните числа.

Две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ са равни, ако $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Казва се, че комплексното число $z=(x, y)$ е равно на нула, ако $x=0$ и $y=0$.

Ще определим операциите събиране и умножение на комплексните числа. Понеже реалните числа са подмножество на комплексните числа, тези операции трябва да се определят така, че приложени към две реални числа, да водят до същия резултат, както операциите събиране и умножаване на реални числа, известни ни от 2.4.

Сума на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ наричаме комплексното число

$$z=(x_1+x_2,\ y_1+y_2). \tag{8.13}$$

Произведение на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ наричаме комплексното число

$$z=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1). \tag{8.14}$$

Лесно се проверява, че сумата и произведението на комплексни числа притежават същите свойства, както сумата и произведението на реални числа. В сила са следните свойства:

1°. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (комутативно свойство на сумата).

2°. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (асоциативно свойство на сумата).

3^0. $z+(0, 0)=z$ (особена роля на числото (0, 0)).

4^0. За всяко число $z=(x, y)$ съществува противоположно на него число $z'=(-x, -y)$, за което $z+z'=(0, 0)$.

5^0. $z_1 . z_2=z_2 . z_1$ (комутативно свойство на произведението).

6^0. $(z_1 . z_2) . z_3=z_1 . (z_2 . z_3)$ (асоциативно свойство на произведението).

7^0. $z . (1,0)=z$ (особена роля на числото (1, 0)).

8^0. За всяко комплексно число $z=(x, y)$, различно от нула, съществува реципрочно на него число $\frac{1}{z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$, за което $z . \frac{1}{z}=(1, 0)$.

9^0. $(z_1+z_2) . z_3=z_1 . z_3+z_2 . z_3$ (дистрибутивно свойство на произведението относно сумата).

Свойствата 1^0—9^0 позволяват да се твърди, че за комплексните числа се запазват напълно всички правила на елементарната алгебра, отнасящи се до аритметичните действия и почленното събиране на равенствата. Освен това тези свойства напълно решават въпроса за изваждането на комплексни числа като действие, обратно на събирането, и за делението на комплексни числа като действие, обратно на умножението.

Разлика на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ се нарича такова комплексно число z, което, събрано със z_2, дава z_1. С помощта на свойства 1^0—4^0 се установява съществуването и единствеността на разликата на две произволни комплексни числа.

Лесно се проверява, че разликата на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ е комплексното число

$$z=(x_1-x_2, \quad y_1-y_2). \tag{8.15}$$

Частно на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$, второто от които не е нула, се нарича такова комплексно число z, което при умножаване със z_2 дава z_1. С помощта на свойства 5^0—8^0 се установява лесно, че единственото частно на споменатите две комплексни числа е комплексното число

$$z=\left(\frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad \frac{x_2 y_1-x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

В операциите с комплексни числа особена роля играе числото, представено с двойката (0, 1), което се означава с буквата i. Умножавайки тази двойка сама на себе си (т. е. повдигайки я в квадрат), според определението за произведение на комплексни числа получаваме

$$(0, 1) . (0, 1)=(-1, 0)=-1, \text{ т. е. } i^2=-1.$$

Като вземем пред вид това, всяко комплексно число $z=(x, y)$ може да се представи във вида

$$z=(x, y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(y, 0).(0, 1)=x+iy.$$

По-нататък широко ще използваме представянето $z=x+iy$ за комплексното число $z=(x, y)$.

Комплексното число $\bar{z}=(x, -y)=x-iy$ *се нарича* ***спрегнато*** *на комплексното число* $z=(x, y)=x+iy$.

Очевидно едно комплексно число е равно на нула тогава и само тогава, когато спрегнатото му число е равно на нула.

За геометрично представяне на комплексните числа се използва правоъгълна декартова координатна система. Комплексното число $z=(x, y)$ се представя или с точката M с координати (x, y), или с вектора $\overrightarrow{OM}$ с начало в началото на координатната система. По този начин събирането и изваждането на комплексни числа се свеждат до събиране и изваждане на съответните им вектори (това се разбира от формулите (8.13) и (8.15)).

Непосредствено от определението (8.14) за произведение на
комплексните числа следва твърдението: *Произведението на две*
(и повече) комплексни числа е равно на нула тогава и само то-
гава, когато поне един от множителите е нула.

Наистина, ако поне едно от числата $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$
е равно на $(0, 0)$, то от (8.14) е очевидно, че $z=z_1 . z_2=(0, 0)$.
Ако, обратно, $z=z_1 . z_2$ е равно на $(0, 0)$, то от (8.14) следва, че

$$\left|\begin{aligned} x_1x_2-y_1y_2&=0 \\ y_1x_2+x_1y_2&=0, \end{aligned}\right. \tag{8.14'}$$

и ако $z_1\neq(0, 0)$, т. е. $x_1^2+y_1^2\neq0$, то (8.14') представлява хомогенна система от две уравнения относно двете неизвестни x_2 и y_2 с детерминанта $x_1^2+y_1^2$ различна от нула. Такава система има само тривиалното решение, т. е. $z_2=(x_2, y_2)=(0, 0)$.

Непосредствено от определението (8.14) за произведение на две комплексни числа следва още едно твърдение: Комплексното число, спрегнато на произведението на две (и повече) комплексни числа, е равно на произведението от комплексните числа, спрегнати съответно на всеки от множителите, т. е.

$$\overline{(z_1 . z_2)}=\bar{z}_1 . \bar{z}_2. \tag{8.14''}$$

С помощта на правилото за умножаване на комплексни числа (8.14) лесно се проверява, че дясната и лявата страна на (8.14'') са равни на едно и също комплексно число $(x_1x_2-y_1y_2, -x_1y_2-x_2y_1)$.

8.3.2. Кратки сведения за корените (нулите) на алгебричните полиноми.

1°. ***Алгебричен полином от n-та степен*** *се нарича израз от вида*

$$f(z)=c_n z^n+c_{n-1} z^{n-1}+\cdots+c_1 z+c_0, \tag{8.16}$$

където $z=(x, y)=x+iy$ *е променливо комплексно число, а* $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ *са комплексни константи, първата от които е различна от нула.* Като делим един алгебричен полином f от степен n на друг алгебричен полином φ от степен, не по-голяма от n, стигаме до заключението, че каквито и да са двата полинома f и φ (степента на φ да не надминава степента на f), то е в сила равенството

$$f(z)=\varphi(z) \cdot q(z)+r(z), \tag{8.17}$$

в което q и r са полиноми, при това степента на q е равна на разликата от степените на полиномите f и φ, а степента на r е по-малка от степента на φ.

По отношение на фигуриращите в равенството (8.17) полиноми f, φ, q и r обикновено се използват напълно разбираемите термини „делимо", „делител", „частно" и „остатък".

Казва се, че *полиномът f се дели на полинома $\varphi(z)$, ако във формула* (8.17) *остатъкът* $r(z)=0$.

Ще се уговорим да наричаме полином от нулева степен всяка комплексна константа. Ясно е, че всеки полином се дели на различен от нула полином от нулева степен.

Определение. *Комплексното число b се нарича* ***корен на полинома*** *f, ако $f(b)=0$.*

Теорема 8.2. *Полиномът от ненулева степен f се дели на двучлена $z-b$ тогава и само тогава, когато b е корен на този полином.*

Доказателство. Записваме за полиномите f и $\varphi(z)=z-b$ формула (8.17). Тъй като степента на остатъка r в тази формула трябва да бъде по-ниска от степента на делителя $\varphi(z)=z-b$, то r е полином на нулева степен, т. е. $r(z)=c=\text{const}$. Така формула (8.17) приема вида

$$f(z)=(z-b)\, q(z)+c. \tag{8.18}$$

Като положим във формула (8.18) $z=b$, намираме, че $c=f(b)$. По определение f се дели на $z-b$ тогава и само тогава, когато остатъкът във формула (8.18) $c=f(b)$ е равен на нула, т. е. когато b е корен на f.□

2°. Естествено възниква въпросът, дали всеки алгебричен полином има корени. Отговор на този въпрос дава основната теорема на алгебрата: *Всеки полином от ненулева степен един корен.*

От тази теорема следва, че *алгебричен полином от n-та лен има точно n корена, като се отчита тяхната*
Наистина нека f е полином от n-та степен. Съгласно теорема на алгебрата f има поне един корен b_1, т. е. за f е в представянето

(8.19¹) $$f(z)=(z-b_1)f_1(z),$$

в което f_1 е полином от $(n-1)$-ва степен. Ако $n\neq 1$, то основната теорема на алгебрата f_1 има поне един корен b_2, за f_1 е в сила представянето

(8.19²) $$f_1(z)=(z-b_2)f_2(z),$$

в което f_2 е полином от $(n-2)$-ра степен. Продължавайки разсъждения, получаваме представянията

(8.19³) $$f_2(z)=(z-b_3)f_3(z),$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

(8.19ⁿ) $$f_{n-1}(z)=(z-b_n)f_n(z).$$

В последното от тези представяния f_n е полином от т. е. $f_n(z)=c=\text{const}$. Като съпоставим равенствата и отчетем, че $f_n(z)=c$, ще получим

(8.20) $$f(z)=c(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n).$$

Ще отбележим, че комплексната константа c не е равна на нул тъй като в противен случай полиномът f ще бъде равен на нула и няма да бъде от n-та степен.

От равенството (8.20) е очевидно, че $f(b_1)=f(b_2)=\cdots=0$, т. е. всяко от числата $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е корен на Освен това от (8.20) е очевидно, че каквото и да е число b, различно от $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, комплексното число не е равно на нула. Следователно полиномът f има точно n $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Равенството (8.20) дава разлагане на полинома f на жители.

Полином (8.16), в който $c_n=1$, се нарича приведен. За веден полином формулата за разлагане (8.20) има вида

(8.21) $$f(z)=(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n).$$

По-нататък, ако не е казано противното, ще разглеждаме приведени полиноми.

Между корените на полинома f може да има и равни. Нека

$a, b, \dots, c$ са различните корени на приведения полином $f(z)$. Тогава за този полином представянето (8.21) приема следния вид:

(8.22) $$f(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\dots(z-c)^{\gamma}.$$

В това разлагане $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ са цели числа, всяко от които не е по-малко от единица, и $\alpha+\beta+\dots+\gamma=n$, където n е степента на полинома f.

Ако за полинома f е в сила разлагането (8.22), казваме, че комплексното число a е α-кратен корен на f, комплексното число b е β-кратен корен на $f \dots$ комплексното число c е γ-кратен корен на f.

Корен с кратност единица се нарича ***еднократен (прост корен)****, а корен с кратност, по-голяма от единица, се нарича* ***многократен (кратен)****.*

Може да се даде и друго еквивалентно определение на корен с дадена кратност: комплексното число a се нарича ***α-кратен корен*** на полинома f, ако за f е в сила представянето

(8.23) $$f(z)=(z-a)^{\alpha}\varphi(z), \text{ където } \varphi(a)\neq 0.$$

3°. Нека сега

(8.24) $$f(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+c_{n-2}z^{n-2}+\dots+c_0$$

е приведен алгебричен полином с реални коефициенти $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0$. Ще докажем, че този полином притежава следното важно свойство.

Теорема 8.3. *Ако комплексното число a е λ-кратен корен на полинома (8.24) с реални коефициенти, то и спрегнатото му комплексно число $\bar{a}$ е също λ-кратен корен на този полином.*

Доказателство. Ще започнем с доказването на следния помощен факт: Ако f е полином с реални коефициенти, то комплексното число $f(\bar{z})$ е спрегнато на числото $f(z)$.

Тъй като коефициентите на полинома (8.24) са реални числа, то за доказателството на този факт е достатъчно да се убедим, че за всеки номер n комплексното число $(\bar{z})^n$ е спрегнато на z^n. Но това следва непосредствено от съотношението (8.14″). Като положим в това съотношение $z_1=z_2=z$, ще получим $\overline{(z^2)}=(\bar{z})^2$. По-нататък полагаме в (8.14″) $z_1=z^2$, $z_2=z$ и получаваме $\overline{(z^3)}=\overline{(z^2)}\cdot\bar{z}=(\bar{z})^2\cdot\bar{z}=(\bar{z})^3$.

Продължавайки аналогично, се убеждаваме, че $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ за всеки номер n.

И така доказано е, че числото $f(\bar{z})$ е спрегнато на числото $f(z)$, т. е. $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$, или

(8.25) $$f(z)=\overline{f(\bar{z})}.$$

Нека сега комплексното число a е λ-кратен корен на полинома с реални коефициенти f, т. е. е в сила представянето

$$f(z)=(z-b)^{\lambda}\,\varphi(z), \tag{8.26}$$

където

$$\varphi(a)\neq 0. \tag{8.27}$$

От (8.26) и (8.25) следва

$$f(z)=\overline{(\bar{z}-a)^{\lambda}\varphi(\bar{z})},$$

а последното равенство поради (8.14″) може да се напише във вида

$$f(z)=\overline{(\bar{z}+a)^{\lambda}}\,.\,\overline{\varphi(\bar{z})}. \tag{8.28}$$

Ще отбележим сега, че съгласно установеното по-горе съотношението $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ е изпълнено равенството

$$\overline{(\bar{z}-a)^{\lambda}}=(\overline{\bar{z}-a})^{\lambda}=(z-\bar{a})^{\lambda}\,. \tag{8.29}$$

От (8.29) и (8.28) получаваме

$$f(z)=(z-\bar{a})^{\lambda}\,\psi(z), \tag{3.30}$$

където

$$\psi(z)=\overline{\varphi(\bar{z})}. \tag{8.31}$$

За да завършим доказателството на теорема 8.3, остава да се убедим, че $\psi(\bar{a})\neq 0$. Това следва веднага от факта, че съгласно (8.31) $\psi(\bar{a})=\overline{\varphi(a)}$, а $\overline{\varphi(a)}\neq 0$, тъй като $\varphi(a)\neq 0$ съгласно (8.27). □

8.3.3. Разлагане на алгебрични полиноми с реални коефициенти на произведение от неразложими множители. По-нататък ще разглеждаме само полиноми на реална променлива. Затова променливата ще означаваме с x, а не със z.

Като използуваме теорема 8.3, ще намерим разлагането на полином с реални коефициенти f на произведение от реални множители. Нека полиномът f има реални b_2, $\ldots$, b_m с кратности съответно β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_m$ и спрегнати корени a_1 и $\bar{a}_1$, a_2 и $\bar{a}_2, \ldots, a_n$ и $\bar{a}_n$ с кратности съответно λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Тогава съгласно резултатите от 8.3.2 полиномът се представя във вида

$$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m} \tag{8.32}$$
$$\times(x-a_1)^{\lambda_1}(x-\bar{a}_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\bar{a}_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}(x-\bar{a}_n)^{\lambda_n}\,.$$

Да означим реалната и имагинерната част на корена a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ съответно с u_k и v_k, т. е. нека $a_k=u_k+iv_k$. Тогава $\overline{a_k}=u_k-iv_k$. Преобразуваме за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$ израза

(8.33)
$$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-\overline{a}_k)^{\lambda_k}=((x-a_k)(x-\overline{a}_k))^{\lambda_k}$$
$$=((x-u_k-iv_k)(x-u_k+iv_k))^{\lambda_k}$$
$$=((x-u_k)^2+v_k^2)^{\lambda_k}=(x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k},$$

където $p_k=-2u_k$, $q_k=u_k^2+v_k^2$.

От (8.33) и (8.32) получаваме за полинома f следното разлагане на произведение от реални неразложими множители:

(8.34)
$$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Така идваме до извода, че полиномът f с реални коефициенти се представя като произведението (8.34) от неразложими реални множители, при което множителите, съответствуващи на реалните корени, са линейни двучлени със степени, равни на кратностите на корените, а множителите, съответствуващи на комплексните двойки корени, са квадратни тричлени със степени, равни на кратностите на тези двойки корени.

8.3.4. Разлагане на правилна рационална дроб на сума от елементарни дроби. ***Рационална дроб*** *се нарича частното на два алгебрични полинома.*

Навсякъде по-нататък ще разглеждаме рационални дроби, които са частно на два алгебрични полинома с реални коефициенти (такива дроби се наричат рационални дроби с реални коефициенти).

Рационалната дроб P/Q се нарича ***правилна,*** *ако степента на полинома P в числителя е по-малка от степента на полинома Q в знаменателя.*

В противен случай рационалната дроб се нарича ***неправилна.***

Ще докажем две помощни твърдения.

Лема 1. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят Q на която има за α-кратен корен реалното число a, т. е.*

(8.35)
$$Q(x)=(x-a)^\alpha\varphi(x), \quad \text{където } \varphi(a)\neq0.$$

Тогава за тази дроб е вярно следното представяне:

(8.36)
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}.$$

В това представяне A е реална константа, равна на $P(a)/\varphi(a)$, k е цяло число, удовлетворяващо условието $k\geqq 1$, ψ е такъв полином с реални коефициенти, че последната дроб в дясната страна на (8.36) е правилна.

Доказателство. Да означим с A реалното число $A=P(a)/\varphi(a)$ и да разгледаме разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}.$$

Като приведем тази разлика към общ знаменател, ще имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{P(x)-A\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}, \tag{8.37}$$

където с Φ е означен полиномът с реални коефициенти $\Phi(x)=P(x)-A\varphi(x)$.

Тъй като $\Phi(a)=P(a)-A\,.\,\varphi(a)=P(a)-\varphi(a)\,.\,P(a)/\varphi(a)=0$, реалното число a е корен на полинома Φ с някаква кратност $k\geqq 1$. Това означава, че е вярно представянето

$$\Phi(x)=(x-a)^{k}\psi(x), \tag{8.38}$$

където $\psi(a)\neq 0$, а ψ е полином с реални коефициенти.

От представянето (8.38) и равенството (8.37) окончателно получаваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}. \tag{8.39}$$

С това представянето (8.36) е доказано. Остава само да се убедим, че дробта в дясната страна на (8.39) е правилна, което непосредствено следва от факта, че разликата на две правилни рационални дроби е правилна рационална дроб (за да се убедим в това, е достатъчно да приведем разликата на правилните рационални дроби към общ знаменател). □

Лема 2. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят Q на която има за λ-кратни корени комплексните числа $a=u+iv$ и $\bar{a}=u-iv$, т. е.*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x), \tag{8.40}$$

където $\varphi(a)\neq 0$, $\varphi(\bar{a})\neq 0$, $p=-2u$, $q=u^2+v^2$. Тогава за тази дроб е в сила следното представяне:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)}. \tag{8.41}$$

В това представяне M и N са реални константи, k е цяло число, удовлетворяващо условието $k\geqq 1$, а ψ е такъв полином с реални коефициенти, че последната дроб в дясната страна на (8.41) е правилна.

Доказателство на лема 2. Ще се уговорим да означаваме реалната част на комплексната величина A със символа $\mathrm{Re}[A]$, а имагинерната ѝ част със символа $\mathrm{Im}[A]$. Полагаме

$$M=v^{-1}\,\mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)],\quad N=\mathrm{Re}[P(a)/\varphi(a)]-uv^{-1}\,\mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)].$$

Не е трудно да се провери, че M и N са решение на следното уравнение:

$$P(a)-(Ma+N)\,\varphi(a)=0. \tag{8.42}$$

Наистина, като разделим това уравнение на $\varphi(a)$ и приравним реалната и имагинерната част на нула, получаваме двете равенства

$$\left|\begin{array}{l} Mu+N=\mathrm{Re}\,[P(a)/\varphi(a)],\\ Mv=\mathrm{Im}\,[P(a)/\varphi(a)],\end{array}\right.$$

от които се определят M и N. Да разгледаме сега разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}.$$

Като приведем тази разлика към общ знаменател, ще имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}=\frac{P(x)-(Mx+N)\,\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\,\varphi(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\,\varphi(x)}. \tag{8.43}$$

Тук с Φ е означен полиномът с реални коефициенти $\Phi(x)=P(x)-(Mx+N)\varphi(x)$. Равенството (8.42) позволява да се твърди, че комплексното число a, а следователно съгласно теорема 8.3 и спрегнатото му число $\bar{a}$ са корени на полинома Φ от някаква кратност $k\geq 1$. В такъв случай за полинома Φ е в сила представянето

$$\Phi(x)=(x^2+px+q)^k\,\psi(x), \tag{8.44}$$

където $\psi(x)$ е полином с реални коефициенти, който няма за корени числата a и $\bar{a}$. От представянето (8.44) и формула (8.43) получаваме представянето (8.41). Последната дроб в дясната страна на (8.41) е правилна, понеже тази дроб е равна на разликата на две правилни дроби. □

Последователното прилагане на леми 1 и 2 към дробта P/Q по отношение на всички корени на знаменателя води до следното забележително твърдение:

Теорема 8.4. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят на която има вида*

$$Q(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m} \tag{8.45}$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Тогава за тази дроб е в сила следното разлагане на сума от елементарни дроби:

$$
\begin{aligned}
(8.46)\qquad \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)} + \frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}} \\
&+ \cdots + \frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)} + \frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta_m}} \\
&+ \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} \\
&+ \cdots + \frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)} + \frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + \cdots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}} .
\end{aligned}
$$

В това разлагане $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{\beta_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \ldots, M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ *са реални константи, част от които могат да бъдат нули.*

Забележка. За определяне на константите равенството (8.46) трябва да се приведе към общ знаменател и да се сравнят коефициентите пред еднаквите степени на x в числителя.

Примери:

1. Да се разложи на сума от елементарни дроби

$$
(8.47)\qquad \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} .
$$

Тъй като квадратният тричлен x^2+x+1 има комплексни корени, ще търсим съгласно теорема 8.4 разлагане на дробта (8.47) от вида

$$
(8.48)\qquad \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} .
$$

Като приведем равенството (8.48) към общ знаменател, получаваме

$$
\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{B_1\,(x^3-1)+B_2\,(x^2+x+1)+(Mx+N)\,(x^2-2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} .
$$

Чрез сравняване в числителя коефициентите пред x^0, x^1, x^2 и x^3, стигаме до системата уравнения

$$
\left|\begin{aligned}
&B_1+M=2\\
&B_2+N-2M=4\\
&B_2+M-2N=1\\
&B_1+B_2+N=2.
\end{aligned}\right.
$$

Като решим тази система, намираме $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Окончателно получаваме

$$
(8.49)\qquad \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1} .
$$

Този метод за намиране на разлагането на правилна рационална дроб се нарича ***метод на неопределените коефициенти.***

2. Да се намери разлагането на правилната дроб

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Тъй като квадратният тричлен x^2+1 има комплексни корени, ще търсим съгласно теорема 8.4 разлагане от вида

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Привеждаме последното равенство към общ знаменател и сравняваме числителите. Така получаваме

$$3x^4+2x^3+3x^2-1=B(x^4+2x^2+1)$$
$$+(M_1x+N_1)(x^3-2x^2+x-2)+(M_2x+N_2)(x-2).$$

Като сравним коефициентите пред x^0, x^1, x^2, x^3 и x^4, стигаме до системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} B+M_1=3 \\ N_1-2M_1=2 \\ 2B+M_1-2N_1+M_2=3 \\ N_1-2M_1+N_2-2M_2=0 \\ B-2N_1-2N_2=-1. \end{array}\right.$$

Като решим системата, намираме $B=3$, $M_1=0$, $N_1=2$, $M_2=1$, $N_2=0$. Окончателно получаваме

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}. \tag{8.50}$$

8.3.5. Интегруемост на рационалните дроби в елементарни функции. Сега сме готови да решим в общ вид проблема за интегриране на рационални дроби с реални коефициенти. Този проблем се свежда до интегриране само на правилни рационални дроби, тъй като всяка неправилна рационална дроб (посредством разделяне числителя на знаменателя) може да се представи като сума на алгебричен полином и правилна рационална дроб.

Пример:

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}=x^2-2x+\frac{4x+1}{x^2+x+2},$$

тъй като

$$\begin{array}{rl} x^4-x^3+1 & \underline{\mid\, x^2+x+2} \\ -\ \underline{x^4+x^3+2x^2} & \ \ x^2-2x \\ -2x^3-2x^2+1 & \\ -\ \underline{-2x^3-2x^2-4x} & \\ \text{остатък } 4x+1 & \end{array}$$

Ние знаем да интегрираме полиноми.

Остава да се научим да интегрираме правилна рационална дроб. Съгласно теорема 8.4 проблемът за интегриране на правилни рационални дроби се свежда до интегриране на елементарни дроби от следните четири типа:

$$(8.51)\quad 1)\ \frac{B}{x-b}\,;\quad 2)\ \frac{B}{(x-b)^{\beta}}\,;\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,;\quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\,.$$

Тук $\beta=2, 3, 4, \dots$; $\lambda=2, 3, 4, \dots$; B, M, N, b, p и q са реални числа, при това тричленът x^2+px+q няма реални корени, т. е. $q-p^2/4>0$.

Ще докажем, че всяка от посочените четири вида дроби се интегрира в елементарни функции.

Дробите от вида 1) и 2) се интегрират с помощта на субституцията $t=x-b$. Получаваме

$$(8.52)\qquad \int \frac{B}{x-b}\,dx = B\int \frac{dt}{t} = B\ln|t|+C = B\ln|x-b|+C.$$

$$(8.53)\qquad \int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}\,dx = B\int t^{-\beta}\,dt = \frac{-B}{\beta-1}\,t^{-\beta+1}+C$$
$$= \frac{-B}{\beta-1}\,(x-b)^{-\beta+1}+C.$$

За пресмятане на интеграла от дроб от тип 3 ще представим квадратния тричлен във вида $x^2+px+q=(x+p/2)^2+(q-p^2/4)$ и понеже $q-p^2/4>0$, $a=\sqrt{q-p^2/4}$ е реално число. Като направим субституцията $t=x+p/2$, получаваме

$$(8.54)\qquad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}\,dt$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+(N-Mp/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+(N-Mp/2)\,\frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1}$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{a}+C$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Остава да се сметне интегралът от дроб от тип 4. Като използваме въведените означения $t=x+p/2$, $a=\sqrt{q-p^2/4}$, ще имаме

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^\lambda}\,dt$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda} + (N-Mp/2)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}.$$

Въвеждаме означенията

$$I_\lambda = \int \frac{d\,(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda}, \qquad K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}.$$

Интересуващият ни интеграл ще бъде решен, ако се пресметнат интегралите I_λ и K_λ. Интегралът I_λ се решава елементарно

$$I_\lambda = -\frac{1}{\lambda-1}(t^2+a^2)^{-\lambda+1} + C = -\frac{1}{\lambda-1}(x^2+px+q)^{-\lambda+1} + C.$$

Интегралът K_λ беше решен в края на 8.2.2. Така получихме за този интеграл рекурентната формула (8.12), която ни позволява да пресметнем K_λ за всяко $\lambda=2, 3, 4, \ldots$, понеже

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a} + C.$$

И така пресметнати са интегралите от посочените четири типа (8.51) и е доказано, че всеки от тези интеграли представлява елементарна функция. С това идваме до следващата теорема, с която се изчерпва проблемът за интегриране на рационални дроби.

Теорема 8.5. *Всяка рационална дроб е интегруема в елементарни функции.*

В заключение ще разгледаме някои примери за пресмятане на неопределени интеграли от рационални дроби, а именно неопределените интеграли от дробите (8.49), (8.50), разгледани в предишния параграф. Като използваме за тях формулите (8.52), (8.53) и (8.54), ще получим

1. $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$$
$$= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. $$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=3\ln|x-2|+2\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=3\ln|x-2|+2\operatorname{arc\,tg}x-1/2(x^2+1)+C.$$

3. $$\int\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{dx}{2x}-\int\frac{2dx}{x-1}+\int\frac{3dx}{2(x-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-2\ln|x-1|+3/2\ln|x-2|+C.$$

8.3.6. Интегруемост в елементарни функции на някои тригонометрични и ирационални изрази. За разсъжденията в тази точка важна роля ще играе рационалната функция на два аргумента. Ще започнем с определянето на тази функция и изясняване на някои нейни свойства.

Полином от степен *n на два аргумента x и y се нарича израз от вида*

$$P_n(x,\ y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2$$
$$+\cdots+a_{n0}x^n+a_{n-1,1}xy^{n-1}+\cdots+a_{0n}y^n,$$

в който с $a_{00}, a_{10},\ldots, a_{0n}$ *са означени такива реални константи, че сред числата* $a_{n,0}, a_{n-1,1}, a_{n-2,2},\ldots, a_{0,n}$ *да има поне едно, различно от нула.*

Рационална функция на два аргумента *x и y се нарича израз от вида*

$$R(x,\ y)=\frac{P_n(x,\ y)}{Q_m(x,\ y)},$$

в който P_n *е полином на двата аргумента x и y от степен n а* Q_m *— полином на двата аргументи x и y от степен m.*

В сила е следното тривиално твърдение: ако R е рационална функция на двата аргумента x и y, а R_1, R_2 и R_3 са три произволни рационални функции на една променлива t, то израз от вида

(8.55) $$R(R_1(t),\ R_2(t))\,.\,R_3(t)$$

е рационална функция на една променлива.

За доказване на това твърдение е достатъчно да отбележим, че в резултат от прилагане на операциите събиране, изваждане, умножение и деление към рационални функции на една променлива t се получава пак рационална функция на една променлива t.

По-нататък, за да докажем интегруемостта в елементарни функции на някои изрази, с помощта на специално подбрани субституции ще сведем интегралите от разглежданите изрази към интеграли от рационални дроби. *При това ще казваме, че интегралът от разглеждания израз* ***се рационализира*** *с посочената специална субституция.*

1°. Интегриране на някои тригонометрични изрази. Със символа R ще означаваме рационална функция на двата аргумента x и y.

В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

$$R(\sin x,\ \cos x), \tag{8.56}$$

като ще покажем, че интеграл от такава функция се рационализира със субституцията $t=\operatorname{tg}(x/2)$. Наистина

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

така че

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}. \tag{8.57}$$

Ако положим $R_1(t)=2t/(1+t^2)$, $R_2=(1-t^2)/(1+t^2)$, $R_3(t)=2/(1+t^2)$, в дясната страна на (8.57) получаваме интеграл от вида (8.55), който е интеграл от рационална функция на аргумента t.

Пример:

• Да се пресметне $I_1=\int\frac{dx}{1+a\cos x}$, $a>0$, $a\neq 1$. Като приложим универсалната тригонометрична субституция $t=\operatorname{tg}(x/2)$, получаваме

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$I_1=2\int\frac{dt}{a+1+t^2(1-a)}=\frac{2}{a+1}\int\frac{dt}{1+t^2(1-a)/(1+a)}.$$

По-нататък трябва отделно да разгледаме двата случая:

1) $0<a<1$; 2) $a>1$.

В случая $0<a<1$ имаме

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{(1-a)/(1+a)}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

В случая $a>1$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{(a-1)/(a+1)}}{1-t\sqrt{(a-1)/(a+1)}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{(a-1)/(a+1)}\operatorname{tg}(x/2)}{1-\sqrt{(a-1)/(a+1)}\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C.$$

2°. Интегриране на дробно-линейни ирационалности. В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка фуикция от вида

$$(8.58)\qquad R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}),$$

където a, b, c и d са константи, n е цяло положително число. Функция от този вид ще наричаме ***дробно-линейна ирационалност.***

Ще докажем, че интеграл от функция от вида (8.58) при $ad-bc \neq 0$ се рационализира посредством субституцията $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$. Наистина

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x=\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}, \qquad dx=\frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-c\,.\,t^n)^2}\,dt,$$

така че

$$(8.59)\qquad \int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}\right)dx$$

$$=\int R\left(\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}, t\right)\frac{n\,(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}\,t^{n-1}\,dt.$$

Ако положим $R_1(t)=\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}$, $R_2(t)=t$, $R_3(t)=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-c\,.\,t^n)^2}$, то в дясната страна на (8.59) ще получим интеграл от вида (8.55), който е интеграл от рационална функция на аргумента t. С това е доказано, че интегралът от дробно-линейната ирационалност (8.58) се рационализира със субституцията $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$.

Пример:

Да се пресметне $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}$. Правим субституцията

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad t^2=\frac{1+x}{1-x}, \qquad x=\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad dx=\frac{4t\;dt}{(t^2+1)^2}$$

получаваме

$$I=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2\operatorname{arc\,tg} t+C$$

$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

3°. Интегриране на квадратични ирационалности. В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

$$(8.60)\qquad R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),$$

където a, b и c са константи. Функция от този вид ще наричаме ***квадратична ирационалност***. При това, разбира се, ще смятаме, че квадратният тричлен ax^2+bx+c няма равни корени (иначе квадратният корен от този тричлен може да се замени с рационален израз).

Ще докажем, че интеграл от функция от вида (8.60) винаги се рационализира с една от т. нар. субституции на Ойлер.

Най-напред ще разгледаме случая, когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има комплексни корени. В този случай знакът на квадратния тричлен съвпада със знака на a и тъй като квадратният тричлен трябва да бъде положителен (от него се извлича квадратен корен), то $a>0$.

Тогава имаме право да направим следната субституция:

(8.61) $$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.$$

Субституцията (8.61) обикновено се нарича ***първа субституция на Ойлер***. Ще докажем, че тази субституция рационализира интеграла на функцията (8.60) за разглеждания случай. Повдигаме в квадрат двете страни на равенството $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ и получаваме $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, така че

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

По такъв начин

(8.62) $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\ \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

Под знака на интеграла в дясната страна на (8.62) имаме израз от вида (8.55) при $R_1(t)=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$, $R_2(t)=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}$, $R_3(t)=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}$, така че в дясната страна на (8.62) получаваме интеграл от рационална дроб.

Ще разгледаме сега случая, когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има реални корени x_1 и x_2. Тогава $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, а интегралът от функция от вида (8.60) се рационализира чрез субституцията

(8.63) $$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1},$$

наричана обикновено ***втора субституция на Ойлер.*** Наистина, като повдигнем в квадрат двете страни на равенството $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ и съкратим на $x-x_1$, ще получим $a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$, така че

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t,$$

$$dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

По такъв начин

(8.64)
$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Дясната страна на (8.64) е израз от вида (8.55) при

$$R_1(t)=\frac{-ax_2+x_1t}{t^2-a},\quad R_2(t)=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a},$$

$R_3(t)=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}$. Така в дясната страна на (8.64) получаваме интеграл от рационална дроб.

Примери:

1. Да се сметне $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Тъй като квадратният тричлен x^2+x+1 има комплексни корени, ще направим първата субституция на Ойлер

$$t=\sqrt{x^2+x+1}+x.$$

Повдигаме на квадрат двете страни на равенството $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ и получаваме $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$, или $x+1=t^2-2tx$, така че

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$$

По такъв начин

$$I=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right)dt.$$

Неопределените коефициенти A, B и C се пресмятат лесно: $A=2$, $B=-3$, $C=-3$. Окончателно получаваме

$$I=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+3/2(1+2t)+C$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|$$

$$+\frac{3}{2}(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})^{-1}+C.$$

2. Да се пресметне $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Тъй като квадратният тричлен $1-2x-x^2$ има реални корени $x_1=-1+\sqrt{2}$ и $x_2=-1-\sqrt{2}$, ще направим втората субституция на Ойлер (8.63)

$$t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Като повдигнем на квадрат двете страни на равенството $\sqrt{1-2x-x^2}=t(x+1+\sqrt{2})$, ще имаме $-(x+1-\sqrt{2})=t^2(x+1+\sqrt{2})$, тъй че

$$x=\frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\qquad \sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}t,$$

$$1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{t^2+2\sqrt{2}\,t+1}{t^2+1},\qquad dx=-\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}dt.$$

По такъв начин

$$I=-4\sqrt{2}\int\frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}\,t+1)}.$$

Получаваме интеграл от рационална дроб, пресмятането на който предоставяме на читателя.

8.3.7. Интегриране на диференциален бином

Диференциален бином ще наричаме израз от вида

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

където a и b са константи, а степенните показатели m, n и p са рационални числа. Ще изучим въпроса за интегриране в елементарни функции на диференциален бином.

Най-напред ще отбележим три случая, в които интегралът от диференциален бином допуска рационализираща субституция.

Първият случай е, когато p е цяло число. В този случай диференциалният бином е дробно-линейна ирационалност от вида $R(x,\sqrt[r]{x})$, където r е най-малкото общо кратно на знаменателите на рационалните числа m и n. Следователно интегралът от диференциалния бином в този случай се рационализира със субституцията $t=\sqrt[r]{x}$.

Втори случай имаме, когато $(m+1)/n$ е цяло число. В този случай, като направим субституцията $z=x^n$ и положим за краткост $(m+1)/n-1=q$, ще получим

(8.65)
$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = n^{-1}\int (a+bz)^p z^q\, dz.$$

Подинтегралната функция в дясната страна на (8.65) е дробно-линейна ирационалност от вида $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$, където s е знаменателят на рационалното число p.

Така че в този случай диференциалният бином се рационализира със субституцията $t=\sqrt[s]{a+bz}=\sqrt[s]{a+bx^n}$.

Трети случай имаме, когато $(m+1)/n+p$ е цяло число. В този случай подинтегралната функция в дясната страна на (8.65) е дробно-линейна ирационалност от вида $R(z, \sqrt[s]{(a+bz)/z})$, така че интегралът от диференциалния бином се рационализира със субституцията $t=\sqrt[s]{(a+bz)/z}=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$.

В средата на миналия век П. Л. Чебишов* е доказал, че изброените три случая изчерпват случаите, при които диференциалният бином е интегруем в елементарни функции.

Примери:

1. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}=\int x^{-2}(a+bx^2)^{-1/2}dx.$$

В случая $m=-2$, $n=2$, $p=-1/2$, така че $(m+1)/n+p=-1$ (трети случай). Като направим субституцията

$$t=\sqrt{ax^{-2}+b},\quad x=\sqrt{a}/\sqrt{t^2-b},\quad dx=-\sqrt{a}\,t\,(t^2-b)^{-3/2}\,dt,$$

ще получим

$$I=\int\left(-\frac{dt}{a}\right)=-\frac{t}{a}+C=a^{-1}\sqrt{ax^{-2}+b}+C.$$

2. Да се пресметне $I=\int x^5(1-x^2)^{-1/2}dx$. В дадения случай $m=5$, $n=2$, $p=-1/2$, така че $(m+1)/n=3$ (втори случай). Правим субституцията

$$t=\sqrt{1-x^2},\quad x=\sqrt{1-t^2},\qquad dx=-\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

и получаваме

$$I=-\int(1-t^2)^2dt=-\int dt+2\int t^2dt-\int t^4dt$$
$$=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C.$$

* Пафнутий Лвович Чебишов — руски математик (1821—1894).

8.4. Елиптични интеграли

Към интегралите от квадратични ирационалности естествено се отнасят и следните интеграли:

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx, \tag{8.65}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx, \tag{8.66}$$

чиито подинтегрални функции съдържат квадратен корен от полиноми от трета или четвърта степен (с реални коефициенти).

Тези интеграли се срещат често в приложенията. Интегралите (8.65) и (8.66) не са елементарни функции. Тези два интеграла е прието да се наричат ***елиптични***, когато не се изразяват чрез елементарни функции, и ***псевдоелиптични***, когато се изразяват чрез елементарни функции.*

Поради важността на интегралите (8.65) и (8.66) за приложенията се съставят таблици и графики на функциите, определени с тези интеграли. При произволни коефициенти a, b, c, d и e такива таблици и графики се съставят доста трудно. Затова възниква задачата за свеждане на всички интеграли от вида (8.65) и (8.66) до няколко типа интеграли, съдържащи по възможност по-малко произволни коефициенти (или, както се казва, за привеждане на интегралите (8.65) и (8.66) в канонична форма).

Интегралът (8.65) се свежда към интеграла (8.66). Действително кубичният полином има винаги поне един реален корен x_0 и затова той може да се представи във вида $ax^3+bx^2+cx+d = a(x-x_0)(x^2+px+q)$.

Като направим субституцията $x-x_0=\pm t^2$, както лесно се вижда, можем да преобразуваме интеграла (8.65) в (8.66). Следователно достатъчно е да разгледаме само интеграла (8.66).

Съгласно 8.4. полином от четвърта степен се разлага на произведение от два квадратни тричлена с реални коефициенти:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q').$$

Съществува линейна или дробно-линейна субституция, която унищожава линейните членове в двата квадратни тричлена. Като направим такава субституция, ще преобразуваме интеграла (8.66) с точност до събираемо елементарна функция във вида

* Тези названия идват от това, че за първи път тези интеграли са възникнали при решаване на задачата на ректифициране на елипса (вж. пример 4 от 10.1.5).

(8.67)
$$\int \frac{R(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}},$$
където R е някоя рационална функция. Освен това може да се покаже, че при всяка комбинация на абсолютните стойности и знаците на константите A, m и m' има субституция, която свежда интеграла (8.67) към т. нар. ***каноничен интеграл***

(8.68)
$$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$
в който с k е означена константа, удовлетворяваща условието $0<k<1$.

Всеки каноничен интеграл (8.68) се привежда с точност до събираемо елементарна функция до следните три стандартни интеграла:

(8.69)
$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
и
$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (0<k<1).$$

Интегралите (8.69) е прието да се наричат ***елиптични интеграли*** съответно ***от I-ви, 2-ри и 3-ти род.*** Тези интеграли, както е показано от Лиувил*, не са елементарни функции. Елиптичните интеграли от 1-ви и 2-ри род съдържат само един параметър k, приемащ реални стойности от интервала $0<k<1$, а елиптичните интеграли от 3-ти род съдържат освен това и параметър h, който може да приема и комплексни стойности.

Льожандър** подлага интегралите (8.69) на по-нататъшно опростяване чрез субституцията $z=\sin\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi/2)$.

С помощта на тази субституция първият от интегралите (8.69) се преобразува във вида

(8.70)
$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Вторият от интегралите (8.69) при тази смяна с точност до постоянен множител е равен на разликата на интеграла (8.70) и интеграла

(8.71)
$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Третият от интегралите (8.69) се преобразува във вида

(8.72)
$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Интегралите (8.70), (8.71) и (8.72) е прието да се наричат ***елиптични интеграли*** съответно ***от 1-ви, 2-ри и 3-ти род във форма на Льожандър.***

* Жозеф Лиувил — френски математик (1809—1882).

** Адриан Мари Льожандър — френски математик (1752—1833).

9. Определен интеграл на Риман

В уводната глава беше показано, че към понятието определен интеграл водят редица важни задачи на естествознанието. В тази глава ще построим строга теория на определения интеграл на Риман.

9.1. Определение на интеграл. Интегруемост

Ще въведем понятията деление на сегмента $[a, b]$, дробене на това деление и обединение на две деления.

Определение 1. *Ще казваме, че е дадено едно* ***деление*** *на сегмента* $[a, b]$, *ако са дадени точките* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, *за които* $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.

Това деление на сегмента $[a, b]$ ще означаваме със символа $\{x_k\}$.

Определение 2. *Делението* $\{x'_k\}$ *на сегмента* $[a, b]$ *се нарича* ***дообно*** *на делението* $\{x_k\}$ *на този сегмент, ако всяка точка на делението* $\{x_k\}$ *съвпада с някоя от точките на делението* $\{x'_k\}$, т. е. $\{x_k\}\subset\{x'_k\}$.

Определение 3. *Делението* $\{x_k\}$ *на сегмента* $[a, b]$ *се нарича* ***обединение*** *на двете деления* $\{x'_k\}$ *и* $\{x''_k\}$ *на този сегмент, ако всички точки на деленията* $\{x'_k\}$ *и* $\{x''_k\}$ *са точки на делението* $\{x_k\}$ *и делението* $\{x_k\}$ *не съдържа други точки.*

Ще отбележим, че обединението на две деления е дробно на всяко от тях.

Да разгледаме в сегмента $[a, b]$ функция f, която има крайни стойности във всички точки от този сегмент. По дадено деление $\{x_k\}$ ще намерим числото, т. нар. ***интегрална сума***, $\sigma(x_k,$

$\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, където ξ_k е някоя точка от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ зависи както от делението $\{x_k\}$, така и от избора на точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ако означим с Δx_k разликата $x_k - x_{k-1}$, то интегралната сума може да се запише така:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Сегментите $[x_{k-1}, x_k]$ се наричат понякога ***частични сегменти***, а точките ξ_k — ***междинни точки***.

Числото $d = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ ще наричаме ***диаметър на делението*** $\{x_k\}$. Ще въведем основните понятия граница на интегрални суми и интегруемост на функция по Риман.

Определение 4. *Числото I се нарича* ***граница на интегралните суми*** *σ, когато диаметърът d на делението $\{x_k\}$ клони към нула, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, че при $d < \delta$ при всеки избор на междинните точки ξ_k е в сила неравенството*

$$|I - \sigma| < \varepsilon.$$

Лесно можем да се убедим, че съществува само една граница на интегралните суми σ при $d \to 0$.

За означаване на границата на интегрални суми се използва символът

$$I = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \xi_k).$$

Определение 5. *Функцията f се нарича* ***интегруема по Риман*** *в сегмента $[a, b]$, ако за тази функция в дадения сегмент съществува границата I на интегралните ѝ суми σ, когато диаметърът d на делението $\{x_k\}$ клони към нула.*

Числото I се нарича ***определен интеграл на Риман*** на функцията f в граници от a до b и се означава със символа

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Следователно по определение

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \xi_k).$$

Числото a се нарича ***долна граница на интегрирането***, а числото b — ***горна граница на интегрирането***. Променливата x

под знака на определения интеграл се нарича **интеграционна променлива** и може да се означи с произволна буква:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{и т. н.}$$

Ще илюстрираме въведените понятия с примери.

Примери:

1. Геометрично тълкуване на интегралната сума. Ще разгледаме криволинеен трапец, т. е. фигурата, ограничена от графиката на непрекъснатата неотрицателна функция f, зададена в сегмента $[a, b]$, правите $x=a$ и $x=b$, перпендикулярни на абсцисната ос, и сегмента $[a, b]$ от абсцисната ос (фиг. 9.1). Очевидно интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$, отговаряща на избраното деление $\{x_k\}$ и избраните междинни точки ξ_k, представлява лицето на стъпаловидната фигура, защрихована на този чертеж.

В следващата глава ще бъде дадено понятието лице на равнинна фигура и ще бъде установено, че при $d \to 0$ границата на тази стъпаловидна фигура е равна на лицето на криволинейния трапец.

2. Пример на най-проста интегруема по Риман функция. Ще покажем, че функцията $f(x)=c=\text{const}$ е интегруема във всеки сегмент $[a, b]$ и $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$. Наистина при всяко деление $\{x_k\}$ и при всеки избор на точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ имаме $f(\xi_k)=c$. Следователно

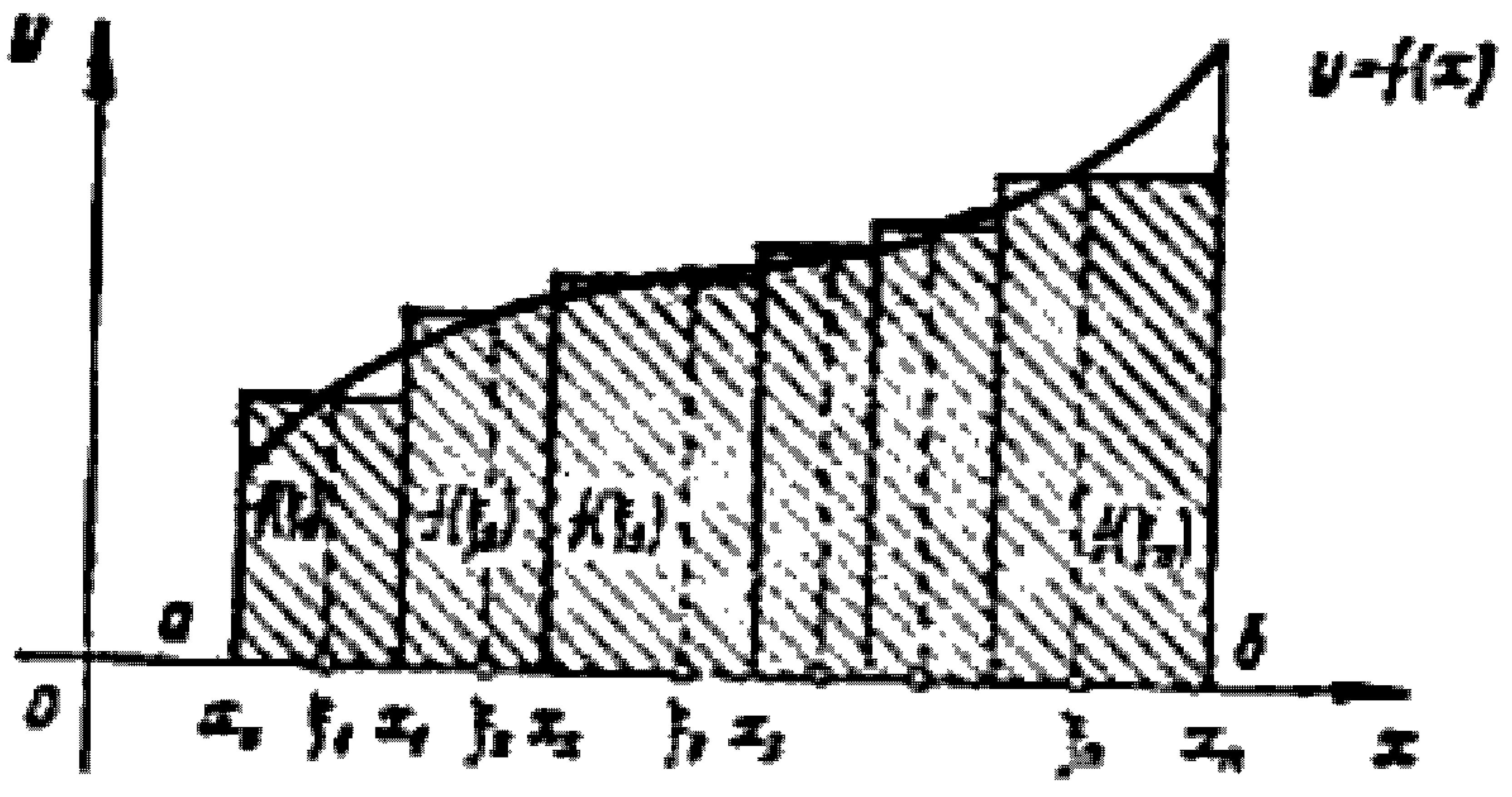
$$\begin{aligned}\sigma(x_k, \xi_k) &= c\,.\,\Delta x_1 + c\,.\,\Delta x_2 + \cdots + c\,.\,\Delta x_n \\ &= c\,.\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = c\,.\,(b-a)\end{aligned}$$

за всяко деление $\{x_k\}$ и всеки избор на точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ Затова

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{d\to 0} \sigma(x_k, \xi_k) = \lim_{d\to 0} c\,.\,(b-a) = c\,.\,(b-a).$$

3. Пример на ограничена в сегмента $[a, b]$, но неинтегруема по Риман функция. Ще разгледаме функцията на Дирихле D, стойностите на която в рационалните точки на сегмента $[a, b]$ са равни на единица, а в ирационалните — на нула.

Избираме произволно деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Във



Фиг. 9.1

всеки от частичните сегменти съществува поне една рационална точка ξ_k. Написваме съответната интегрална сума

$$\sigma(x_k, \xi_k)=\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a.$$

Освен това в тези сегменти $[x_{k-1}, x_k]$ има ирационални точки η_k $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Затова интегралната сума, отговаряща на дадения избор от междинни точки $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, ще се запише така:

$$\sigma(x_k, \eta_k)=\sum_{k=1}^{n} D(\eta_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 0 \,.\, \Delta x_k=0.$$

Ясно е, че интегралните суми на функцията на Дирихле нямат граница, когато диаметърът на делението клони към нула: при един избор на междинните точки ξ_k интегралната сума е равна на $b-a\neq 0$, а при друг — на нула и това е така, колкото и малък да е диаметърът на делението.

4. Неинтегруемост по Риман на неограничените в сегмента $[a, b]$ функции. Нека f не е ограничена в $[a, b]$. Ще покажем, че за всяко деление $\{x_k\}$ интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ може да стане по абсолютна стойност произволно голяма в зависимост от избора на междинните точки ξ_k. Наистина, ако функцията f не е ограничена в сегмента $[a, b]$, а сегментът $[a, b]$ е разделен на краен брой сегменти $[x_{k-1}, x_k]$, то функцията ще бъде неограничена поне в един частичен сегмент от делението. Без да нарушаваме общността, ще приемем, че f е неограничена в сегмента $[x_0, x_1]$. Избираме произволно в останалите сегменти $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ междинните точки $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ и ги фиксираме. Означаваме със $\sigma_1(x_k, \xi_k)$ величината

$$\sigma_1(x_k, \xi_k)=f(\xi_2)\,\Delta x_2+f(\xi_3)\,\Delta x_3+\cdots+f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Ще разгледаме сега функцията f само върху сегмента $[x_0, x_1]$. Тъй като f е неограничена в този сегмент, то за всяко отнапред зададено положително число M ще се намери такава точка ξ_1 от този сегмент, че

$$|f(\xi_1)|\geq(|\sigma_1|+M)/\Delta x_1.$$

Оттук следва, че $|f(\xi_1)|\Delta x_1\geq|\sigma_1|+M$, и затова

$$|\sigma(x_k, \xi_k)|-\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|=|f(\xi_1)\Delta x_1+\sigma_1(x_k, \xi_k)|$$

$$\geq|f(\xi_1)|\Delta x_1-|\sigma_1(x_k, \xi_k)|\geq M.$$

Да изберем сега редица от такива числа $\{M_n\}$, че $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=+\infty$, а също и такава редица от деления на сегмента $[a, b]$, че съответните диаметри $d_n\to 0$. По посочения по-горе начин построяваме редицата от интегрални суми σ_n, удовлетворяващи условието $|\sigma_n|\geq M_n$. Тази редица от интегрални суми е разходяща, т. е. функцията f не е интегруема в интервала $[a, b]$.

9.2. Голяма и малка сума и техните свойства

9.2.1. Определение на голяма и малка сума. Пример 4 от 9.1 ни дава основание да разглеждаме само ограничени в даден сегмент функции (тъй като неограничените функции не са интегруеми по Риман). Нека $f(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$ функция и $\{x_k\}$ е произволно деление на този сегмент. Понеже f е ограничена в сегмента $[a, b]$, тя е ограничена и във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ и затова има точна долна граница m_k и точна горна граница M_k в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

И така нека

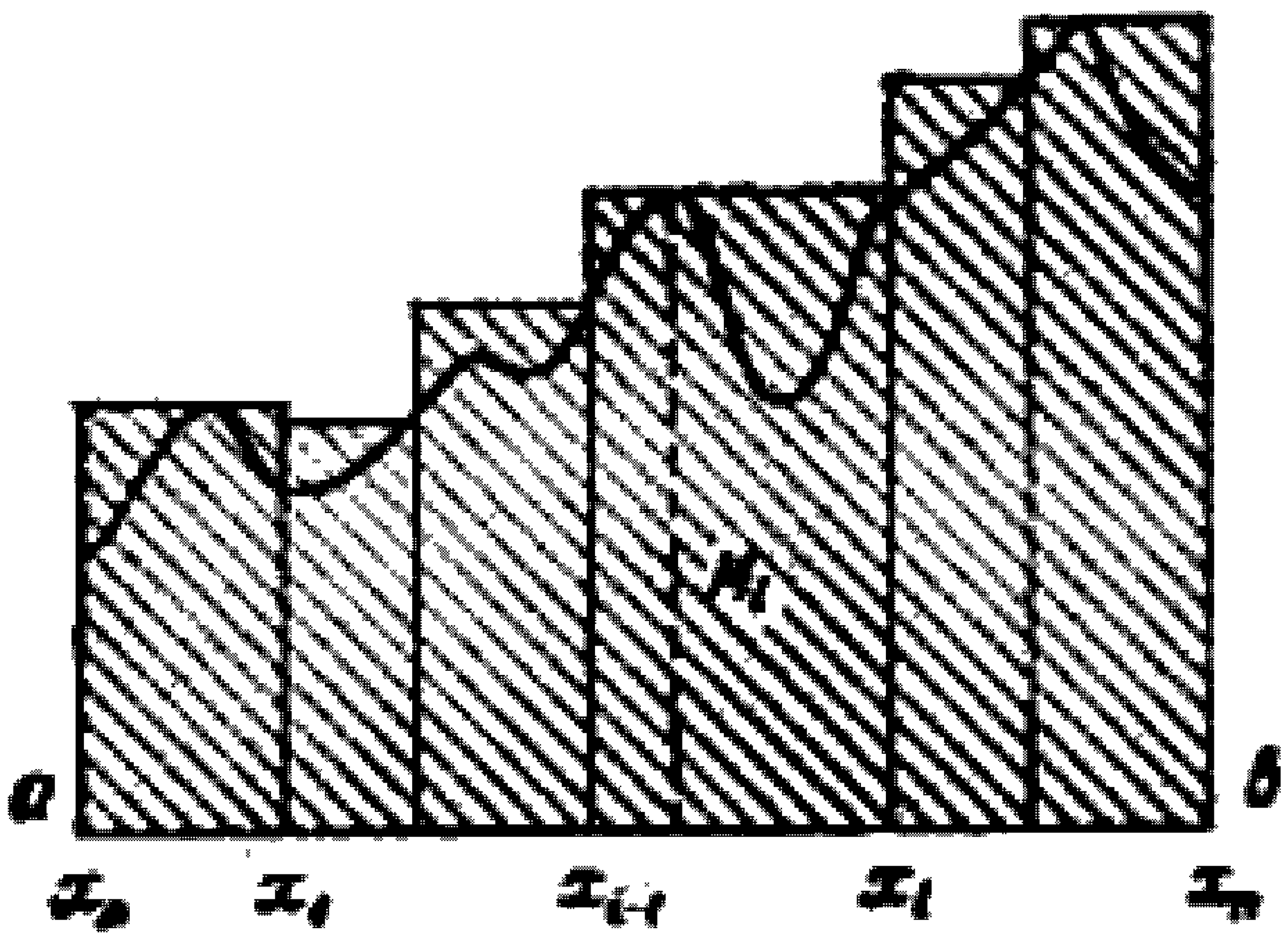
$$m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},\ M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

Определение 1. *Сумите*

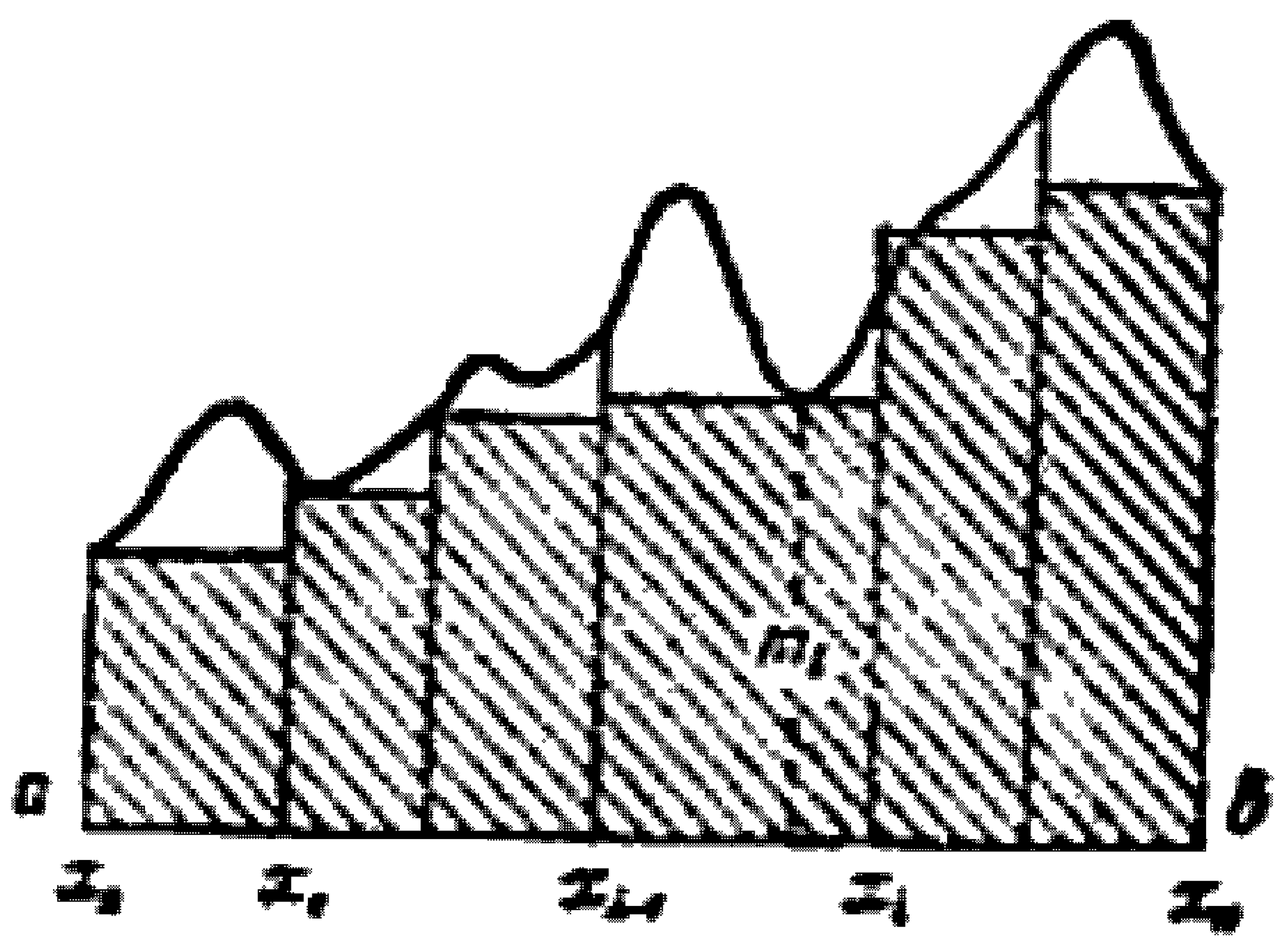
$$S=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

и

$$s=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$



Фиг. 9.2



Фиг. 9.3

ще наричаме съответно ***голяма и малка сума на Дарбу*** *на функцията $f(x)$ за дадното деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$.*

Ще изясним геометричния смисъл на голямата и малката сума. Ще разгледаме отново криволинейния трапец, т. е. фигурата, ограничена от сегмента $[a, b]$ на оста Ox, отгоре — от графиката на непрекъснатата функция $y=f(x)\geq 0$ и правите $x=a$ и $x=b$, перпендикулярни на оста Ox (фиг. 9.2). Нека е дадено произволно деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Тъй като f е непрекъсната, числото M_k е нейната максимална стойност в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Затова голямата интегрална сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура, съдържаща криволинейния трапец. Това лице е защриховано на фиг. 9.2.

Аналогично малката сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура, която се съдържа в криволинейния трапец (фиг. 9.3). Числото m_k е минималната стойност на функцията f в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

9.2.2. Основни свойства на големите и малките суми. Ще докажем следните леми:

Лема 1. *Нека $\sigma(x_k, \xi_k)$ е интегрална сума, отговаряща на делението $\{x_k\}$. Тогава при всеки избор на междинните точки ξ_k са в сила неравенствата*

$$s\leq\sigma\leq S,$$

където s и S са съответно малката и голямата сума, отговарящи на това деление.

Доказателство. От определението на числата m_k и M_k заключаваме, че $m_k\leq f(\xi_k)\leq M_k$ за всяко $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$. Като умножим тези неравенства с Δx и ги сумираме по k от 1 до n, получаваме исканите неравенства. □

Лема 2. *Нека $\{x_k\}$ е произволно фиксирано деление на сегмента $[a, b]$, а ε е произволно фиксирано число. Тогава могат да се изберат така междинните точки ξ_k, че интегралната сума*

$\sigma(x_k, \xi_k)$ и голямата сума S да удовлетворяват неравенството $0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon$. Междинните точки η_k могат да се изберат и така, че интегралната сума $\sigma(x_k, \eta_k)$ и малката сума s да удовлетворяват неравенството $0 \leq \sigma(x_k, \eta_k) - s < \varepsilon$.

Доказателство. Нека $\{x_k\}$ е фиксирано деление на сегмента $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Ще докажем най-напред първото твърдение на лемата. Тъй като $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, то за избраното $\varepsilon > 0$ съществува такава точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, че $0 \leq M_k - f(\xi_k) < \varepsilon/(b-a)$. Като умножим тези неравенства с Δx_k и ги сумираме по k от 1 до n, ще получим

$$0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon.$$

Аналогично, понеже $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, съществува такава точка $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, че

$$0 \leq f(\eta_k) - m_k < \varepsilon/(b-a).$$

Последните неравенства след умножаване с Δx_k и сумиране водят до оценките $0 \leq \sigma(x_k, \eta_k) - s < \varepsilon$. □

Следствие. *За всяко фиксирано деление $\{x_k\}$ са верни съотношенията*

$$S = \sup\{\sigma(x_k, \xi_k) : \{\xi_k\}\}, \quad s = \inf\{\sigma(x_k, \eta_k) : \{\eta_k\}\},$$

където точната горна и точната долна граници се вземат при всеки избор на междинните точки.

Лема 3. *При раздробяване на дадено деление голямата сума може само да се намали, а малката — само да се увеличи.*

Доказателство. Нека $\{x_k\}$ е дадено деление, а делението $\{x_k'\}$ се получава от него с добавяне на само една нова точка $\bar{x}$. Лесно се вижда, че общият случай се свежда към този. Да предположим, че $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогава в израза за S събираемото $M_k \Delta x_k$ се заменя с $M_k'(\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x})$, където

$$M_k' = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\}, \quad M_k'' = \sup\{f(x) : x \in [\bar{x}, x_k]\}.$$

Точната горна граница на функцията върху част от сегмента не надминава точната горна граница на функцията в целия сегмент. Затова $M_k' \leq M_k$, $M_k'' \leq M_k$ и

$$M_k'(\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x}) \leq M_k[(\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})] = M_k \Delta x_k.$$

Тъй като всички други събираеми в израза за голямата сума са същите, то при добавяне на точката $\bar{x}$ голямата сума може само да се намали. Случаят, когато към дадено деление се прибавят няколко нови точки, се свежда очевидно към разглеждания. По същия начин се установява, че при раздробяване на дадено деление малката сума може само да се увеличи. □

Лема 4. *За две произволни деления на сегмента малката сума за едното от тези деления не надминава голямата сума за другото деление.*

Доказателство. Нека $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$ са две произволни деления на сегмента $[a, b]$, а S', s', S'', s'' са съответно големите и малките суми за тези деления. Да означим с $\{x_k\}$ обединението на деленията $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$, а с S и s голямата и малката сума на делението $\{x_k\}$. Ще отбележим, че $\{x_k\}$ е дребно деление както на делението $\{x_k'\}$, така и на делението $\{x_k''\}$. Съгласно лема 3 са изпълнени неравенствата

$$S' \geqq S, \quad s'' \leqq s.$$

Освен това от лема 1 имаме $s \leqq S$. Како използваме тези три неравенства, заключаваме, че $s'' \leqq S'$. Аналогично се установява, че $s' \leqq S''$. □

Следствие. *Множеството на големите суми на функцията f, които отговарят на всички възможни деления на сегмента $[a, b]$, е ограничено отдолу. Множеството на малките суми е ограничено отгоре.*

Действително всяка голяма сума не е по-малка от коя да е фиксирана малка сума, така че множеството на големите суми е ограничено отдолу. Аналогични са разсъжденията за малките суми. Съгласно основната теорема 2.1 ще съществуват точна долна граница за множеството $\{S\}$ и точна горна граница за множеството $\{s\}$.

Определение 2. ***Горен интеграл на Дарбу*** *от функцията f се нарича точната долна граница I^* на множеството на големите суми $\{S\}$ на f за всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.* ***Долен интеграл на Дарбу*** *от функцията $f(x)$ се нарича точната горна граница I_* на множеството от малките суми $\{s\}$ на f за всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.*

Лема 5. *Долният интеграл на Дарбу никога не надминава горния интеграл на Дарбу, т. е. $I_* \leqq I^*$.*

Доказателство. Допускаме противното, т. е. че $I_* > I^*$. Нека $I_* - I^* = \varepsilon > 0$.

За това ε съгласно определението на числото I^* съществува такова деление $\{x_k'\}$ на сегмента $[a, b]$, че за съответната му голяма сума S' е изпълнено неравенството $S' < I^* + \varepsilon/2$. По същия начин се показва съществуването на такова деление $\{x_k''\}$ на сегмента $[a, b]$, че малката му сума s'' удовлетворява неравенството $s'' > I_* - \varepsilon/2$. Като извадим почленно второто неравенство от първото, получаваме $S' - s'' < I^* - I_* + \varepsilon$. Но $I^* - I_* = -\varepsilon$, затова $S' - s'' < 0$, т. е. $s'' > S'$. Полученото неравенство противоречи на лема 4. Следователно $I_* \leqq I^*$. □

Нека $M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$, $m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$, а $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, d е диаметърът на това деление. Означаваме с $\{x'_k\}$ деление, получено от делението $\{x_k\}$ с добавяне на l произволни нови точки. Нека S и s са голямата и малката сума за делението $\{x_k\}$, а S' и s' са голямата и малката сума за делението $\{x'_k\}$. В сила е следното твърдение:

Лема 6. *Разликите $S-S'$ и $s'-s$ удовлетворяват неравенствата $S-S'\leq(M-m).l.d$, $s'-s\leq(M-m).l.d$.*

Доказателство. Без да ограничаваме общността, може да смятаме, че към точките на делението $\{x_k\}$ е добавена само една точка $\bar{x}$, и да докажем, че в този случай са изпълнени неравенствата $S-S'\leq(M-m)d$, $s'-s\leq(M-m)d$.

Нека добавената точка $\bar{x}$ принадлежи на сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Тогава голямата сума S ще се различава от голямата сума S' само с това, че събираемото $M_k\Delta x_k$ в сумата S ще се замени с двете събираеми $M'_k(\bar{x}-x_{k-1})+M''_k(x_k-\bar{x})$ сумата S' (тук с M_k, M'_k и M''_k са означени точните горни граници на f в сегментите $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k-1}, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, x_k]$). Всички останали събираеми в сумите S и S' ще бъдат едни и същи. Оттук следва, че

$$S-S'=M_k\Delta x_k-[M'_k(\bar{x}-x_{k-1})+M''_k(x_k-\bar{x})].$$

От последното съотношение, като отчетем свойствата на точните (горна и долна) граници $M_k\leq M$, $M'_k\geq m$, $M''_k\geq m$, получаваме

$$S-S'\leq M\Delta x_k-m[(\bar{x}-x_{k-1})+(x_k-\bar{x})]$$
$$=(M-m)\Delta x_k\leq(M-m)d.$$

Доказателството на оценката за малките суми е аналогично.□

Определение 3. *Числото A се нарича* ***граница на големите суми*** *S, когато диаметърът на деленията d клони към нула, ако за всяко положително число ε може да се намери такова положително число δ, че при $d<\delta$ да е изпълнено неравенството*

$$|S-A|<\varepsilon.$$

За означаване на тази граница е естествено да се използва символът

$$A=\lim_{d\to 0} S.$$

Аналогично се определя и границата B на малките суми s, когато d клони към нула.

Основна лема на Дарбу. *Горният интеграл на Дарбу I^* е равен на границата на големите суми S, когато диаметърът d на* *деленията клони към нула, т.е.* $\lim\limits_{d\to 0} S = I^*$. *Аналогично* $\lim\limits_{d\to 0} s = I_*$.

Доказателство. Ще докажем първото твърдение на лемата. Ако $f(x) = c = \text{const}$, то $S = c(b-a) = I^*$ за всяко деление. Затова $\lim\limits_{d\to 0} S = I^*$. Ако функцията f не е константа, то $M = \sup\{f(x): x \in [a, b]\} > m = \inf\{f(x): x \in [a, b]\}$. Избираме произволно положително число ε. Съгласно определението на числото I^* съществува такова деление $\{x_k^*\}$, че голямата сума S^* на това деление да удовлетворява условието $S^* - I^* < \varepsilon/2$. Означаваме с l броя на точките на делението $\{x_k^*\}$, несъвпадащи с краищата на сегмента $[a, b]$.

Нека $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, диаметърът на което удовлетворява неравенството $d < \delta = \varepsilon/2l(M-m)$, и нека S е голямата сума на това деление. Раздробяваме делението $\{x_k\}$, като добавяме към него отбелязаните по-горе l точки на делението $\{x_k^*\}$. Така полученото деление означаваме с $\{x_k'\}$. Съгласно лема 6 голямата сума S' на последното деление ще удовлетворява условието

$$0 \leq S - S' \leq (M-m)l \, . \, d < \varepsilon/2.$$

Но делението $\{x_k'\}$ може да се разглежда и като дробно на делението $\{x_k^*\}$, към което се добавят точките на делението $\{x_k\}$, несъвпадащи с краищата на сегмента $[a, b]$. Затова съгласно определението на I^* и лема 3

$$I^* \leq S' \leq S^*, \text{ т. е. } 0 \leq S' - I^* \leq S^* - I^*.$$

Но по-горе беше предположено, че $S^* - I^* < \varepsilon/2$, затова $0 \leq S' - I^* < \varepsilon/2$. От това неравенство и от неравенството $0 \leq S - S' < \varepsilon/2$ получаваме, че $0 \leq S - I^* < \varepsilon$, когато d е по-малко от избраното по-горе δ. Следователно $I^* = \lim\limits_{d\to 0} S$. За малките суми доказателството е аналогично. □

9.3. Теореми за необходими и достатъчни условия за интегруемост на функции. Класове интегруеми функции

Доказаните свойства на големите и малките интегрални суми ни дават възможност да получим необходими и достатъчни условия за интегруемост по Риман на произволна ограничена функция.

9.3.1. Необходими и достатъчни условия за интегруемост.

Помощна теорема. *Ограничената функция f в сегмента $[a, b]$ е интегруема в този сегмент тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $I_*=I^*$.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува границата I на интегралните ѝ суми σ при клонене към нула на диаметъра d.

Съгласно определението за граница на интегралните суми за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при всеки избор на междинните точки ξ_k за делението $\{x_k\}$ с диаметър $d<\delta$ е изпълнено неравенството

$$|I-\sigma(x_k, \xi_k)|<\varepsilon/4.$$

Според лема 2 за даденото деление $\{x_k\}$ може така да се изберат междинните точки ξ_k' и ξ_k'' във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$, че да са изпълнени неравенствата

$$S-\sigma(x_k, \xi_k')\leq\varepsilon/4, \quad \sigma(x_k, \xi_k'')-s\leq\varepsilon/4.$$

Ще подчертаем, че за даденото деление $\{x_k\}$ са изпълнени и неравенствата

$$|I-\sigma(x_k, \xi_k')|<\varepsilon/4, \quad |I-\sigma(x_k, \xi_k'')|<\varepsilon/4.$$

Остава да отбележим, че

$$S-s=[S-\sigma(x_k, \xi_k')]+[\sigma(x_k, \xi_k')-I]+[I-\sigma(x_k, \xi_k'')]+[\sigma(x_k, \xi_k'')-s].$$

Оттук, като отчетем, че модулът на сума не надминава сумата от модулите на събираемите, получаваме $S-s<\varepsilon$. По такъв начин при клонене към нула на диаметъра d на делението $\{x_k\}$, границите на големите и малките интегрални суми съвпадат. Наистина, тъй като за всяко деление са изпълнени неравенствата

$$s\leq I_*\leq I^*\leq S,$$

то от неравенството $S-s<\varepsilon$, понеже $\varepsilon>0$ е произволно избрано, следва, че $I_*=I^*$.

Достатъчност. Нека $I_*=I^*=A$. Според основната лема на Дарбу $I^*=\lim\limits_{d\to 0} S$, $I_*=\lim\limits_{d\to 0} s$, т. е. горният интеграл е граница на големите суми, а долният интеграл е граница на малките суми, когато диаметърът на делението d клони към нула. Затова за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta>0$, че при всяко деление с диаметър $d<\delta$ да са изпълнени неравенствата $I_*-s=A-s<\varepsilon$, $S-I^*=S-A<\varepsilon$. При всяко дадено деление с диаметър, по-малък от δ, всяка интегрална сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ удовлетворява неравенството $s \leqq \sigma(x_k, \xi_k) \leqq S$, а следователно и неравенството

$$A-\varepsilon<s \leqq \sigma(x_k, \xi_k) \leqq S<A+\varepsilon.$$

Оттук получаваме $|A-\sigma(x_k, \xi_k)|<\varepsilon$ (за всяко деление с диаметър d, по-малък от δ), така че $A=\lim\limits_{d\to 0}\sigma(x_k, \xi_k)$, т. е. функцията f е интегруема. □

Ще докажем една теорема, която има важно значение в теорията на римановия интеграл.

Основна теорема. *За да бъде ограничената в сегмента* $[a, b]$ *функция* f, *интегруема в този сегмент, е необходимо и достатъчно за всяко* $\varepsilon>0$ *да съществува деление* $\{x_k\}$ *на сегмента* $[a, b]$, *за което* $S-s<\varepsilon$.

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. При доказателство на необходимостта в спомагателната теорема показахме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяко деление на сегмента $[a, b]$ с диаметър d, по-малък от δ, е изпълнено неравенството $S-s<\varepsilon$. Необходимостта е доказана.

Достатъчност. Дадено е, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че за съответните големи и малки суми е изпълнено съотношението: $S-s<\varepsilon$. Тогава, тъй като

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S,$$

то $I^*-I_*<\varepsilon$. От това неравенство и произволния избор на ε заключаваме, че $I^*=I_*$, а от помещната теорема получаваме, че фуниято f е интегруема. □

9.3.2. Класове интегруеми функции. По-горе в 9.1 на тази глава видяхме, че ако функцията е константа в сегмента $[a, b]$, тя е интегруема по Риман в този сегмент, а също така, че интегруемите в даден сегмент функции трябва да бъдат ограничени в този сегмент (вж. пример 4). Естествено възниква въпросът за описване на класове функции, интегруеми по Риман в сегмента $[a, b]$. Измежду тях важна роля играе класът на непрекъснатите в сегмента $[a, b]$ функции.

Теорема 9.1. *Непрекъснатите в сегмента* $[a, b]$ *функции са интегруеми по Риман в този сегмент.*

Доказателство. Нека f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Избираме произволно число $\varepsilon>0$. Понеже f е непрекъсната, тя е равномерно непрекъсната и затова за избраното $\varepsilon>0$ съществува такова число $\delta>0$, че ако ξ' и ξ'' са произволни точки от сегмента $[a, b]$, за които $|\xi'-\xi''|<\delta$, то $|f(\xi')-f(\xi'')|<\varepsilon/(b-a)$. Оттук следва, че разликата между точните горна и долна граници на f в произволен сегмент с дължина, по-малка от δ, е по-малка от числото $\varepsilon/(b-a)$. Избираме деление

$\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ с диаметър d, по-малък от указаното $\delta: d<\delta$. Нека

$$M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},\ m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

Съгласно дефиницията за голяма и малка сума

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k.$$

Като използваме, че за избраното деление $M_k-m_k<\varepsilon/(b-a)$, ще получим

$$S-s<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon.$$

От основната теорема заключаваме, че функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. □

Следващата теорема дава достатъчно условие за интегруемост на един клас прекъснати функции.

Ще казваме, че *точката x е покрита* от интервал, ако се съдържа в този интервал.

Теорема 9.2. *Ако функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$, то тя е интегруема по Риман в този сегмент, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществуват краен брой интервали, покриващи всички точки на прекъсване на тази функция, с обща дължина, по-малка от ε.*

Доказателство. Нека M и m са точната горна и точната долна граница на функцията f в сегмента $[a, b]$. Ще отбележим, че ако $M=m$, т. е. ако f е константа, тя е интегруема. Затова ще считаме, че $M>m$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно число. Покриваме точките на прекъсване на функцията f с краен брой интервали, сумата от дължините на които е по малка от числото $\varepsilon_1=\varepsilon/2(M-m)$. Точките на сегмента $[a, b]$, които не принадлежат на тези интервали, образуват множество от краен брой непресичащи се сегменти. Ще наречем тези сегменти допълнителни. Понеже във всеки от тях функцията е непрекъсната, тя е равномерно непрекъсната. Следователно съществуват такива числа $\delta_p>0$, че ако $|\xi'-\xi''|<\delta_p$, то $|f(\xi')-f(\xi'')|<\varepsilon/2(b-a)$, за произволни ξ' и ξ'', принадлежащи на p-тия допълнителен сегмент.

Нека $\delta=\min\delta_p$. Тогава, ако вземем такова деление на допълнителните сегменти на частични сегменти, че диаметърът на всеки от частичните сегменти да не надминава δ, то разликата между точните горна граница M_p и долна граница m_p на функцията f в p-тия частичен сегмент ще бъде не по-голяма от $\varepsilon/2(b-a)$. Като обединим всички деления на допълнителните сегменти и избраните по-горе интервали, взети с техните краища, ще получим деление $\{x_k\}$ на целия сегмент $[a, b]$. За така построеното общо деление на $[a, b]$ имаме

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k-\sum{}'(M_k-m_k)\,\Delta x_k+\sum{}''(M_k-m_k)\,\Delta x_k,$$

където сумата с прим съдържа всички събираеми, отговарящи на частичните сегменти, образувани от интервалите, покриващи точките на прекъсване, а сумата със секонд — всички останали. Да разгледаме първото събираемо в дясната страна на горното равенство. Понеже $M_k-m_k<M-m$ за всяко k, то

$$\sum{}'(M_k-m_k)\,\Delta x_k\leq(M-m)\sum{}'\Delta x_k<(M-m)\,\varepsilon_1=\varepsilon/2.$$

По-нататък съгласно казаното по-горе от равномерната непрекъснатост на функцията f в допълнителните сегменти получаваме

$$\sum{}''(M_k-m_k)\,\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}''\Delta x_k\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon/2.$$

По такъв начин намерихме деление $\{x_k\}$, за което $S-s<\varepsilon$. От основната теорема получаваме, че функцията f е интегруема. □

Следствие 1. *Функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$ и имаща само краен брой точки на прекъсване, е интегруема в този сегмент. По-специално частично непрекъснатите в даден сегмент функции са интегруеми в този сегмент.*

Наистина според предишната теорема е достатъчно да изберем интервалите, покриващи точките на прекъсване, с еднаква дължина, по-малка от $\varepsilon/2p$, където p е броят на точките на прекъсване на функцията f.

Следствие 2. Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, а функцията g съвпада с функцията f във всички точки на сегмента $[a, b]$ с изключение евентуално на краен брой точки. Тогава функцията g е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx$

$$=\int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема 9.3. *Всяка монотонна в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема в този сегмент.*

Доказателство. Случаят, когато f е константа в сегмента $[a, b]$, може да се изключи. Ще разгледаме например ненамаляваща в сегмента $[a, b]$ функция f. Нека $\varepsilon>0$ е произволно число. Избираме деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ с диаметър $d<\varepsilon/(f(b)-f(a))$. Ще отбележим, че понеже f не е константа, то $f(b)>f(a)$. Да оценим разликата $S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$, където M_k и m_k са точната горна и точната долна граница на f в $[x_{k-1}, x_k]$. Получаваме $S-s<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)/(f(b)-f(a))$. Но за ненамаляваща функция $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)=f(b)-f(a)$. Затова $S-s<\varepsilon$ и функцията f е интегруема. За нерастяща функция разсъжденията са аналогични. □

Ще докажем сега една теорема за интегруемост на суперпозиция от две функции.

Теорема 9.4. *Нека функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, M и m са точната ѝ горна и точната ѝ долна граници в този сегмент. Нека освен това функцията φ да е дефинирана в сегмента $[m, M]$ и да удовлетворява следното условие*: съществува такова неотрицателно число C, че за произволни x_1 и x_2 от сегмента $[m, M]$ да е изпълнено неравенството $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leqq C|x_1-x_2|$, тогава функцията $h(x)=\varphi(f(x))$ е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Поради интегруемостта на функцията f в сегмента $[a, b]$ може да се избере такова разделяне $\{x_k\}$ на този сегмент, че $S-s<\varepsilon/C$, където S и s са съответно горната и долната интегрална сума на функцията f, а C е константата от условието на теоремата. Нека M_k и m_k са точните граници на функцията f в частичните сегменти Δx_k на разделянето $\{x_k\}$, а M_k^* и m_k^* са съответните точни граници за функцията h. Тогава съгласно условието, наложено на функцията φ за произволни точки x и y, принадлежащи на частичния сегмент Δx_k от разделянето $\{x_k\}$, е в сила неравенството $h(x)-h(y) \leqq |h(x)-h(y)| = |\varphi(f(x))-\varphi(f(y))| \leqq C|f(x)-f(y)| \leqq C(M_k-m_k)$.

Понеже неравенството $h(x)-h(y) \leqq C(M_k-m_k)$ е изпълнено

* Това условие се нарича условие на Липшиц. Очевидно, ако една функция удовлетворява условието на Липшиц, тя е непрекъсната.

за произволни точки x и y, принадлежащи на сегмента Δx_k, то още повече ще бъде изпълнено и неравенството $M_k^*-m_k^* \leq C(M_k - m_k)$. Нека сега S^* и s^* да са съответните горна и долна интегрална сума на функцията h за избраното разделяне $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Тогава $S^* - s^* = \sum_{k=1}^{n} (M_k^*-m_k^*) \Delta x_k \leq C \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon$. Тъй като ε е произволно положително число, то съгласно основната теорема, функцията h е интегруема в сегмента $[a, b]$. □

Теорема 9.4'. *Нека f е функция, интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, M и m са точните ѝ горна и долна граница в $[a, b]$. Нека освен това функцията $\varphi(x)$ да е непрекъсната в сегмента $[m, M]$. Тогава сложната функция $h(x) = \varphi(f(x))$ е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Нека $C = \max\{|\varphi(t)| : m \leq t \leq M\}$ и ε е произволно положително число. Полагаме $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a+2C)$. Поради това, че φ е равномерно непрекъсната в $[m, M]$, съществува такова $\delta > 0$, че $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon_1$, ако $|s-t| < \delta$ и $s, t \in [m, M]$. Избираме δ още така, че $\delta < \varepsilon_1$. Поради интегруемостта на функцията f в $[a, b]$ съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, за което съответната горна и долна интегрална сума на f удовлетворяват неравенството $S - s < \delta^2$. Нека

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$M_k^* = \sup\{h(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k^* = \inf\{h(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

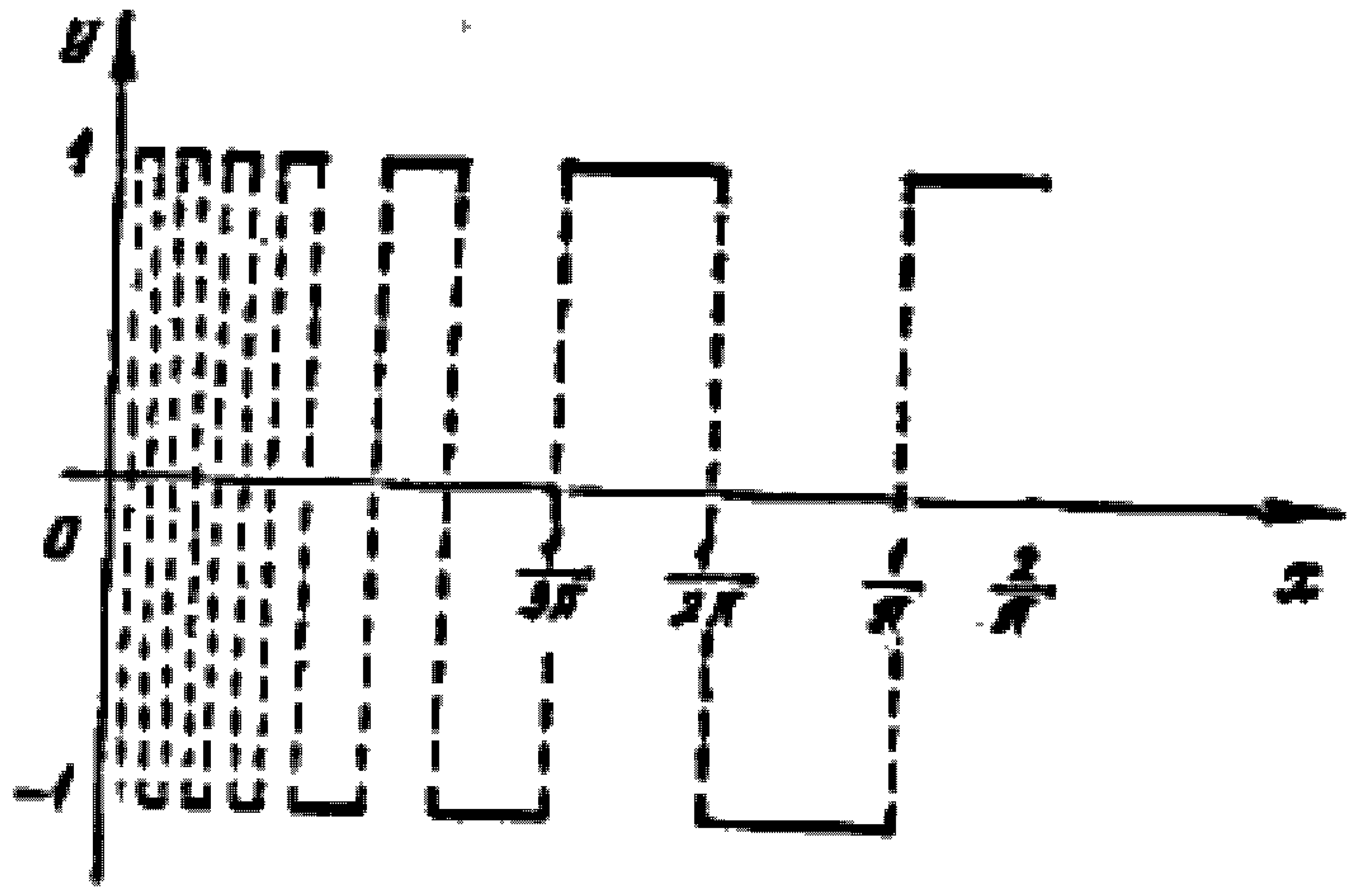
Разделяме целите числа $1, 2, \ldots, n$ на две множества A и B: числото $k \in A$, ако $M_k - m_k < \delta$, числото $k \in B$, ако $M_k - m_k \geq \delta$. Ако $k \in A$, то $M_k - m_k < \delta$, следователно от равномерната непрекъснатост на функцията φ в сегмента $[m, M]$ получаваме $M_k^* - m_k^* \leq \varepsilon_1$. Наистина, ако се разглежда индекс $k \in A$, ще получим, че $M_k - m_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} < \delta$, т. е. при $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ разликата $f(x) - f(y) = s - t$ по абсолютна стойност не надминава δ; $|s-t| < \delta$, $s = f(x)$, $t = f(y)$. Следователно поради равномерната непрекъснатост на функцията φ получаваме

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| = |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon_1.$$

Тъй като последното неравенство е изпълнено при всяко x и всяко y от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$, то и

$$\sup\{\varphi(f(x)) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{\varphi(f(x)) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} < \varepsilon_1.$$

По-нататък, ако $k \in B$, то очевидно $M_k^* - m_k^* \leq 2C$. Да запишем



Фиг. 9.4

сега разликата S^*-s^* (S^* и s^* са съответно голямата и малката сума на функцията h за разглежданото деление $\{x_k\}$):

$$S^*-s^*=\sum_{k=1}^{n}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k=\sum_{k\in A}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k$$

$$+\sum_{k\in B}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k\leq\varepsilon_1(b-a)+2C\sum_{k\in B}\Delta x_k.$$

Остава да направим оценка на величината $\sum_{k\in B}\Delta x_k$. Имаме

$\delta\sum_{k\in B}\Delta x_k\leq\sum_{k\in B}(M_k-m_k)\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$, тъй като разликата $M_k-m_k\geqq 0$, $\Delta x_k>0$, то събираемите в последната сума са само неотрицателни. Отчитайки, че при даденото деление $\{x_k\}$ имаме $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=S-s<\delta^2$, получаваме $\delta\sum_{k\in B}\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$ $<\delta^2$, т. е. $\sum_{k\in B}\Delta x_k<\delta$. Понеже $\delta<\varepsilon_1$, окончателно намираме

$$S^*-s^*\leqq\varepsilon_1(b-a)+2C\sum_{k\in B}\Delta x_k\leq\varepsilon_1(b-a)+2C\delta$$

$$<\varepsilon_1(b-a+2C)=\varepsilon.$$

Следователно функцията h е интегруема. □

Следствие. *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то при всяко положително число α функцията $|f|^\alpha$ е интегруема в този сегмент.*

Наистина достатъчно е да разгледаме непрекъснатата функция $\varphi(t) = |t|^\alpha$ и да приложим предишната теорема.

Примери:

1. Пример за интегруема функция с безкрайно много точки на прекъсване. Нека в сегмента $[0, 2/\pi]$ е дадена функцията (фиг. 9.4)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin x^{-1}), & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тази функция има прекъсване от 1-ви род във всички точки $x_k = 1/k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$, а също така и прекъсване от 2-ри род в точката 0. Фиксираме числото $\varepsilon > 0$. Покриваме точката $x = 0$ с интервала $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$. Вън от този интервал има само краен брой p точки на прекъсване на функцията. Числото p зависи от избраното $\varepsilon > 0$. Покриваме всяка от тези точки с интервал с дължина, по-малка от $\varepsilon/2p$. Тогава всички точки на прекъсване на функцията f ще бъдат покрити с краен брой интервали, сумата от дължините на които не надминава $\varepsilon/2 + p \cdot \varepsilon/2p = \varepsilon$. Според теорема 9.2 функцията f е интегруема в сегмента $[0, 2/\pi]$.

2. От интегруемостта на функцията $|f|$ не следва изобщо интегруемостта на f. Наистина да разгледаме функцията D_1, равна на единица за рационални x, и на минус единица за ирационални x. Тогава $|D_1(x)| = 1$ е интегруема. Също както и за функцията на Дирихле D, се показва, че функцията D_1 не е интегруема (вж. пример 3 от 9.1).

9.4. Свойства на определения интеграл

9.4.1. Свойства на интеграла. Ще изясним основните свойства на интеграла на Риман.

а) *Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава функцията $f \pm g$ е също интегруема в този сегмент и*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Наистина при произволно деление на сегмента $[a, b]$ и при произволен избор на междинните точки ξ_k е изпълнено равенството

$$\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k.$$

Затова, ако съществува границата на дясната страна, когато диаметърът на делението клони към нула, то ще съществува и границата на лявата страна. Поради линейните свойства на този вид граница получаваме исканото. □

б) *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то функцията $C.f$, където $C = \text{const}$, е също интегруема в този сегмент и*

$$\int_a^b C.f(x)\,dx = C \int_a^b f(x)\,dx.$$

Наистина за всяко деление на сегмента $[a, b]$ и всеки избор на междинните точки ξ_k е изпълнено съотношението

$$\sum_{k=1}^{n} C.f(\xi_k) \Delta x_k = C \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

откъдето, както по-горе, получаваме твърдението б). □

Следствие. *Линейна комбинация $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i$ на интегруеми функции f_i е интегруема функция.*

в) *Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава $f.g$ е интегруема в този сегмент.*

Записваме очевидното тъждество

$$4f(x).g(x) = (f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2.$$

Разглеждаме функцията $\varphi(t) = t^2$. Съгласно теорема 9.4 от интегруемостта на коя да е функция следва интегруемостта на нейния квадрат. Тъй като функциите $f+g$ и $f-g$ според свойство а) са интегруеми, то са интегруеми и квадратите им, а следователно (поради тъждеството) функцията $f.g$ е интегруема. □

г) *Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. Тогава тази функция е интегруема и във всеки сегмент $[c, d]$, съдържащ се в сегмента $[a, b]$.*

Избираме произволно число $\varepsilon > 0$ и такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че $S - s < \varepsilon$. Добавяме към точките на делението $\{x_k\}$ точките c и d. За големите суми S' и малките суми s' на новото деление $\{x'_k\}$ съгласно лема 3 от 9.2 също ще бъде вярна оценката: $S' - s' < \varepsilon$. Да разгледаме делението $\{x_k\}$ на сегмента $[c, d]$, образувано от точките на делението $\{x'_k\}$ от целия сегмент

$[a, b]$. За големите и малките суми $\bar{S}$ и $\bar{s}$ на делението $\{\bar{x}_k\}$ е изпълнено очевидното съотношение $\bar{S}-\bar{s}<S'-s'$, тъй като всяко неотрицателно събираемо $(M_k-m_k)\Delta x_k$ в израза $\bar{S}-\bar{s}$ е събираемо и в израза $S'-s'$, така че $\bar{S}-\bar{s}<\varepsilon$ и функцията f е интегруема в сегмента $[c, d]$. □

Ще считаме по определение, че *интеграл на Риман от функция* в граници от точката a до точката a е равен на нула, т. е.* $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$. Това свойство трябва да се разглежда като уговорка. Ще се условим също така, че по определение $-\int\limits_a^b f(x)\,dx = +\int\limits_b^a f(x)\,dx$ *при* $a<b$ *за всяка интегруема функция*. Тази формула трябва също да се разглежда като уговорка.

д) *Ако функцията f е интегруема в сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$ то f е интегруема и в сегмента $[a, b]$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

При $a=b$ твърдението е вярно съгласно казаното по-горе.

Ще предположим най-напред, че $a<c<b$. Избираме произволно число $\varepsilon>0$. Нека $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$ са такива деления на сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$, че във всеки от тези сегменти $S-s<\varepsilon/2$. Нека $\{x_k\}$ е деление на сегмента $[a, b]$, образувано от точките на деленията $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$. Очевидно разликата между голямата и малката сума на делението $\{x_k\}$ няма да надминава ε. Интегруемостта на функцията f в сегмента $[a, b]$ е доказана. Нека сега $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, съдържащо точката c. Тогава

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k=\sum{}' f(\xi_k)\,\Delta x_k+\sum{}'' f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

където $\sum'$ отговаря на делението на сегмента $[a, c]$, а $\sum''$ – на сегмента $[c, b]$. Тъй като това е вярно за всяко деление, то като

* Функцията е дефинирана и има крайна стойност в точката a.

минем към граница при клонене на диаметъра на делението към нула, получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ако точката $c \notin [a, b]$, то сегментът $[a, b]$ се съдържа или в $[c, b]$, или в $[a, c]$. Нека например $c<a<b$. Съгласно свойство г) функцията f е интегруема в $[a, b]$. Наистина f е интегруема в $[c, b]$ по условие, а $[a, b] \subset [c, b]$. По-нататък, понеже $c<a<b$, то

$$\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Но, както казахме вече, $\int_c^a f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx$. □

Ще отбележим, че формулата, изразяваща свойство д), може да се запише и така:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

9.4.2. Оценки за интегралите.

а) *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $f(x) \geqq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то интегралът от f в този сегмент е неотрицателен.*

Доказателството следва от това, че за всяко деление $\{x_k\}$ и всеки избор на ξ_k интегралната сума

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqq 0.$$

В този случай границата на интегралните суми също ще бъде неотрицателна. □

б) Интегриране на неравенства. *Ако функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$ и $f(x) \leqq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то* $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$

Действително функцията $g-f$ е интегруема и неотрицателна в $[a, b]$, така че

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geqq 0.$$

Но тогава от свойство *а*) на 9.4.1 следва $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$. □

в) *Нека функцията f е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[a, b]$. Ако съществува поне една точка $x_0 \in [a, b]$, за която $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha > 0.$$

Наистина нека $f(x_0) = \beta > 0$. Тогава поради непрекъснатостта на функцията f в точката x_0 съществува такава околност на точката x_0, че за всеки сегмент $[c, d]$, $c \neq d$, изцяло лежащ в тази околност, да е изпълнено неравенството $f(x) > \beta/2$. Но тогава според оценката от б) $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx \geq \int_c^d (\beta/2)\,dx = \beta(d-c)/2 = \alpha > 0$. □

г) *Ако функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, то и функцията $|f|$ е интегруема в този сегмент и* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

Разглеждаме непрекъснатата функция $\varphi(t) = |t|$. Съгласно теорема 9.4 от интегруемостта на f следва интегруемостта на $\varphi(f(x)) = |f(x)|$. Да изберем сега числото $\alpha = \pm 1$, така че $\alpha \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$.

Очевидно $\alpha f(x) \leqq |\alpha f(x)| = |f(x)|$. Тогава $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

д) Първа формула за средните стойности. *Нека всяка от функциите f и g е интегруема в сегмента $[a, b]$ и освен това g е неотрицателна (или неположителна) в този сегмент.*

Означаваме с M и m точните граници на f в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leq \mu \leq M$, че е в сила следната формула:*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx. \tag{9.1}$$

При допълнителното предположение за *непрекъснатост на f в сегмента $[a, b]$* може да се твърди, че *съществува такава точка ξ от този сегмент, че е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{9.2}$$

Формула (9.2) се нарича ***първа формула за средните стойности.*** *Формула (9.1) също се нарича* ***първа формула*** *за средните стойности.*

Формулата (9.2) следва непосредствено от формулата (9.1) и от това, че непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f достига в този сегмент точните си граници M и m и приема всяка междинна стойност μ $(m < \mu < M)$.

Следователно достатъчно е да докажем само формулата (9.1). Съгласно определението за долна и горна граница за всяко x от $[a, b]$ са изпълнени неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Като предположим за определеност, че g е неотрицателна в $[a, b]$, и умножим последните неравенства с $g(x)$, ще получим, че за всяко x от $[a, b]$ имаме

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x). \tag{9.3}$$

Тъй като освен това според свойства б) и в) от 9.4.1 всяка от функциите $m \cdot g$, $M \cdot g$ и $f \cdot g$ е интегруема в $[a, b]$, то оценката (9.3) показва, че са верни следните неравенства:

$$\int_a^b m \cdot g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq \int_a^b M \cdot g(x)\, dx,$$

* Функция, интегруема в $[a, b]$, е ограничена в $[a, b]$ и затова съществуват точните ѝ граници в $[a, b]$.

или, че

$$(9.4) \qquad m\int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx \leqq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Възможни са два случая: 1) $\int_a^b g(x)\,dx=0$; 2) $\int_a^b g(x)\,dx>0$.

В първия случай от неравенството (9.4) следва, че $\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx$ $=0$, и затова формула (9.1) е вярна за всяко μ.

Във втория случай, като разделим неравенствата (9.4) на $\int_a^b g(x)\,dx$, получаваме

$$m < \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx \leqq M.$$

За да завършим доказателството на формула (9.1), остава да означим с μ числото

$$\mu = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx. \square$$

Ще формулираме отделно доказаната теорема за частния случай $g(x)\equiv 1$.

Следствие. *Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, а M и m са точните граници на f в този сегмент. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m\leqq\mu\leqq M$, че е в сила формулата*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mu\,(b-a).$$

При допълнителното предположение за непрекъснатост на f в сегмента $[a, b]$ може да се твърди, че съществува такава точка ξ от този сегмент, че е в сила формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(\xi).$$

Тази формула се нарича ***формула за средните стойности.***

е) ***Втора формула за средните стойности.*** *Нека функцията f е интегруема, а функцията g е монотонна в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува такова число ξ от този сегмент, че*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Ще установим отначало следното твърдение:

Лема на Абел*. *Нека числата p_i удовлетворяват условията $p_i \geqq p_j \geqq 0$ при $i \leqq j$, а числата $S_i = \sum_{k=1}^{i} q_k$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, удовлетворяват неравенствата $m \leqq S_i \leqq M$, където q_k, m, M са също някакви числа. Тогава $mp_1 \leqq \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \leqq Mp_1$.*

Доказателство. Лесно се проверява, че

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \sum_{k=1}^{n} p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} S_k (p_k - p_{k+1}),$$

където $S_0 = 0$, $p_{n+1} = 0$. Тъй като $p_k \geqq 0$, $p_k - p_{k+1} \geqq 0$, то като заменим в последното равенство всяко S_i най-напред с m, а после с M, получаваме

$$m\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \leqq M\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}),$$

но

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}) = p_1 - p_{n+1} = p_1. \square$$

Ще установим сега втората формула за средните стойности.

Да допуснем, че функцията g не расте в $[a, b]$ и е неотрицателна. Функцията fg е интегруема като произведение на две интегруеми функции. Нека M_k и m_k са точните граници на f в частичните сегменти $[x_{k-1}, x_k]$. Тогава очевидно

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k.$$

* Нилс Хенрик Абел — норвежки математик (1802—1829).

Поради монотонността на $g(x)$ е вярна оценката

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq g(a)\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k.$$

Понеже f е интегруема, сумата в лявата страна на последното неравенство клони към нула, когато диаметърът d на делението клони към нула. Следователно за всички числа μ_k, за които $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, сумите

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n}\mu_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} M_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k$$

клонят към интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ при $d \to 0$. Това следва от двустранните оценки за интегралната сума на функцията $f\,.\,g$.

Съгласно свойство д) числата μ_k, където $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, могат да се изберат така, че $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \mu_k \Delta x_k$.

Ще отбележим сега, че функцията $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ е непрекъсната в сегмента $[a,\ b]$, тъй като

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \mu\,.\,\Delta x,$$

$$\inf\{f(t) : t \in [x,\ x+\Delta x]\} \leqq \mu \leqq \sup\{f(t) : t \in [x,\ x+\Delta x]\}$$

и следователно $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Да разгледаме числата $S_i = \sum\limits_{=1}^{i}\mu_k \Delta x_k = \int\limits_a^{x_i} f(t)\,dt.$

Ясно е, че $m \leqq S_i \leqq M$, където m и M са точните граници на функцията F в сегмента $[a,\ b]$. Въвеждаме следните означения:

$$p_k = g(x_{k-1}),\quad q_k = \mu_k \Delta x_k,\quad k = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n.$$

Поради монотонността и неотрицателността на функцията g имаме $p_i \geqq p_j \geqq 0$ при $i \leqq j$. Числата p_k, S_k, q_k удовлетворяват условията на лемата на Абел. Затова

$$mg(a) \leq \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \mu_k \Delta x_k \leq Mg(a).$$

Сумата $\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \mu_k \Delta x_k$ е заключена между $mg(a)$ и $Mg(a)$. Ако оставим сега диаметърът d на делението да клони към нула, то и границата на тази сума ще бъде заключена между $m.g(a)$ и $M.g(a)$, т. е. ще са в сила неравенствата

$$m \cdot g(a) \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \leq M \cdot g(a).$$

Непрекъснатата функция $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ приема всяка стойност, заключена между точните ѝ граници m и M. Тъй като

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M,$$

съществува такава точка ξ, че

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t)\, dt = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Следователно в случая, когато g не расте и е неотрицателна, е доказано, че:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(t)\, dt.$$

Ще разгледаме сега общия случай на нерастяща функция g. Тогава функцията $h(x) = g(x) - g(b)$ е нерастяща и неотрицателна. Като я поставим вместо g в равенството по-горе, имаме

$$\int_a^b f(x)(g(x) - g(b))\, dx = (g(a) - g(b)) \int_a^{\xi} f(x)\, dx.$$

Окончателно получаваме

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+g(b)\int_a^b f(x)\,dx-g(b)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

$$=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.\ \square$$

Примери:

1. Да разгледаме функцията $f(x)=\begin{cases} x^x, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0.\end{cases}$ Тя е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$. Като пресметнем производната ѝ, лесно се убеждаваме, че тази функция има локален минимум при $x_0=1/e$. При това $f(1/e)=e^{-1/e}$ и тази стойност е най-малката ѝ стойност в сегмента $[0, 1]$. Като използваме свойство б) от тази точка, намираме, че $e^{-1/e}\leq\int_0^1 x^x dx\leq 1$ $(e^{-1/e}=0{,}692\ldots)$. Ще отбележим, че в този случай стойностите на интеграла не могат да бъдат определени чрез стойности на елементарни функции.

2. Ако функцията f не е непрекъсната, формулата за средните стойности може да не бъде вярна. Да разгледаме функцията

$$f(x)=\begin{cases} 1/2, & 0\leq x\leq 1/2,\\ 3/4, & 1/2<x\leq 1.\end{cases}$$

Тогава $\int_0^1 f(x)\,dx=5/8$. Функцията $f(x)$ не приема стойността $5/8$ в нито една точка $\xi\in[0, 1]$. Следователно не съществува число $\xi\in[0, 1]$, за което $\int_0^1 f(x)\,dx=f(\xi)$.

9.5. Примитивна на непрекъсната функция. Правила за интегриране на функции

Досега достатъчно пълно бяха изучени свойствата на римановия интеграл. По-специално беше показано, че като се използва определението за интеграл, могат да бъдат пресметнати интеграли от някои елементарни функции. Разбира се, пресмятането на интеграли с помощта на граничен преход в интегралните суми е неудобно и води до значителни трудности. Затова е важно да се намерят прости правила за пресмятане на определени интеграли на Риман. По-нататък ще бъде дадено едно такова правило, а именно ще бъде доказана основната формула на интегралното смятане (формулата на Нютон — Лайбниц).

9.5.1. Примитивна. Да разгледаме функцията f, интегруема в сегмента $[a, b]$. Нека $p\in[a, b]$. Тогава за всяко $x\in[a, b]$ функцията f е интегруема в $[p, x]$ и затова в сегмента $[a, b]$ е дефинирана функцията $F(x)=\int\limits_p^x f(t)\,dt$, която се нарича интеграл с променлива горна граница. Аналогично се дефинира функция F, ако f е интегруема във всеки сегмент $[c, d]\subset(a, b)$, като в този случай $p\in(a, b)$.

Теорема 9.5. *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $p\in[a, b]$, то производната на функцията $F(x)=\int\limits_p^x f(t)\,dt$ съществува във всяка точка на непрекъснатост x_0 на подинтегралната функция и $F'(x_0)=f(x_0)$.**

Доказателство. Поради непрекъснатостта на функцията f в точката x_0 за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$, ако $|x-x_0|<\delta$. За всяко $t\in[x_0, x]$ е изпълнено неравенството $|t-x_0|\leqq|x-x_0|<\delta$. Затова

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq f(t)\leqq f(x_0)+\varepsilon.$$

Съгласно свойство б) от 9.4.2 независимо от знака на разликата $x-x_0$ имаме

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\leqq f(x_0)+\varepsilon,\quad |x-x_0|<\delta.$$

(Стойността $\mu=\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$ не се изменя при размяна на границите на интегриране, тъй като при това едновременно се сменят знаците на $x-x_0$ и на интеграла $\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$.)

Но $\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$, следователно при $|x-x_0|<\delta$ имаме

* Ако точката x_0 съвпада с един от краищата на сегмента $[a, b]$, то под производна в точката x_0 на функцията $F(x)$ се разбира съответно лява или дясна производна. При това доказателството на теоремата не се изменя.

$$f(x_0)-\varepsilon \leqq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leqq f(x_0)+\varepsilon,$$

т. е. $F'(x_0)$ съществува и $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Следствие. *Всяка непрекъсната в сегмента* $[a, b]$ *функция* f *има в този сегмент примитивна. Една от примитивните е функцията* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Забележка 1. Теоремата остава вярна, ако f е непрекъсната в интервала (a, b). В този случай за долна граница трябва да се вземе точка $p \in (a, b)$. Всички разсъждения се запазват.

Забележка 2. Може да се разглежда и функцията на долната граница на интеграла от f, т. е. функцията $\Phi=\int_x^q f(t)\,dt$.

За такава функция

$$\Phi'(x)=-f(x).$$

Забележка 3. Ако функцията f е интегруема във всеки сегмент, съдържащ се в интервала (a, b), то интегралът с променлива горна граница е непрекъсната в (a, b) функция на горната граница.

Действително нека $F(x)=\int_p^x f(t)\,dt$, $p \in (a, b)$. Тогава

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\Delta x, \text{ където}$$

$$\inf\{f(t): t \in [x, x+\Delta x]\} \leqq \mu \leqq \sup\{f(t): t \in [x, x+\Delta x]\}$$

съгласно първата формула за средните стойности. Ако функцията f е интегруема, то тя е ограничена и затова за всички достатъчно малки Δx е ограничена и величината μ, зависеща от x и Δx. Поточно $\inf\{f(x): x \in [c, d]\} \leqq \mu \leqq \sup\{f(x): x \in [c, d]\}$*. Затова $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Забележка 4. Интеграли с променлива горна (или долна) граница могат да се използват за дефиниране на нови функции, които не се изразяват чрез елементарни функции.

* Тук $[c, d]$ е произволен фиксиран сегмент, съдържащ се в интервала (a, b) и такъв, че $x \in [c, d]$, $x+\Delta x \in [c, d]$.

Както вече отбелязахме, интегралът $\int_0^x e^{-t^2}dt$ се нарича интеграл на Поасон, интегралът $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $0<k<1$, се нарича елиптичен интеграл, интегралът $\int_0^x t^{-1}\sin t\,dt$ — интегрален синус, $\int_0^x t^{-1}\cos t\,dt$ — интегрален косинус, $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ — интегрален логаритъм и т. н.

9.5.2. Основна формула на интегралното смятане. Знаем, че всеки две примитивни на функцията $f(x)$, дефинирана в сегмента $[a, b]$, се различават с константа. Затова, ако $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, а Φ е произволна примитивна на непрекъснатата функция f, то $F-\Phi=C=\text{const}$, т. е. $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$ (вж. теорема 9.5). Полагаме в последната формула отначало $x=a$, а след това $x=b$. Тъй като $\int_a^a f(t)\,dt=0$ за всяка функция, приемаща крайни стойности в точката a, то

$$\Phi(a)=C,\quad \Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+C.$$

Оттук $\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$ и така получихме основната формула на интегралното смятане.

Ще я формулираме във вид на теорема.

Теорема (основна теорема на интегралното смятане). *За да се пресметне определеният интеграл от непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, трябва да се пресметнат стойностите на произволна нейна примитивна в точката b и в точката a и от първата да се извади втората.*

Задачата за пресмятане на определен интеграл се сведе до задачата за намиране на примитивна на непрекъсната функция.

Естествено не е лесно да се намери примитивна на всяка функция. Ние нееднократно посочвахме функции, чиито примитивни не се изразяват с елементарни функции. В тези случаи естествено възникна въпросът за приближено пресмятане на определени интеграли, за което ще стане дума по-нататък.

Основната формула на интегралното смятане се записва често във формата

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_a^b,$$

където

$$\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a).$$

9.5.3. Важни правила за пресмятане на определени интеграли
При пресмятането на определени интеграли и при други въпроси често се използва правилото за смяна на променливата под знака на определения интеграл.

Нека функцията g има непрекъсната производна в сегмента $[m, M]$ и $\min\{g(t): t\in[m, M]\}=a$, $\max\{g(t): t\in[m, M]\}=b$, при което $g(m)=a$, $g(M)=b$. Тогава, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Тази формула се нарича ***формула за смяна на променливата под знака на определения интеграл.***

Доказателство. Нека Φ е някоя примитивна на функцията f. Функциите Φ и g са диференцируеми съответно в сегментите $[a, b]$ и $[m, M]$. Затова съгласно правилото за пресмятане на производна на сложна функция

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t))=\Phi'(g(t))\,g'(t).$$

Ще отбележим, че производната Φ' в израза отдясно е относно аргумента x: $\Phi'(g(t))=\Phi'(x)$, $x=g(t)$. Ще отбележим също, че $\Phi'(x)=f(x)$. Като заместим в дясната страна на формулата за $\frac{d}{dt}\Phi(g(t))$, получаваме

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t))=f(g(t))\,g'(t).$$

По такъв начин функцията $\Phi(g(t))$, $t\in[m, M]$, е примитивна на функцията $f(g(t))\,g'(t)$, т. е.

$$\int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt=\Phi(g(M))-\Phi(g(m))=\Phi(b)-\Phi(a)$$

съгласно условието. Следователно, от една страна, $\int_a^b f(x)\,dx$ $=\Phi(b)-\Phi(a)$, а, от друга, $\Phi(b)-\Phi(a)=\int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt$. □

Сега ще формулираме и установим правилото за интегриране по части.

Нека функциите f и g са непрекъснато диференцируеми в сегмента $[a, b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,.\,g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

Наистина $\frac{d}{dx}(f\,.\,g)=f.g'+f'.g$. Затова функцията $f\,.\,g$ е примитивна на функцията $f\,.\,g'+f'.\,g$. Следователно

$$\int_a^b (f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x))\,dx=f(x)\,.\,g(x)\Big|_a^b.\ \square$$

Последната формула е удобно да се записва във вида

$$\int_a^b f dg=f\,.\,g\Big|_a^b-\int_a^b g df.$$

9.5.4. Остатъчният член на формулата на Тейлор в интегрална форма.

Нека функцията f има в някоя околност на точката a непрекъсната $(n+1)$-ва производна. Нека x принадлежи на тази околност. Разглеждаме равенството

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Като положим $u(t)=f'(t)$, $v(t)=-(x-t)$ и приложим към интеграла

$\int\limits_a^x f'(t)\,dt=\int\limits_a^x u(t)\,dv(t)$ формулата за интегриране по части, получаваме

$$f(x)-f(a)=\int\limits_a^x f'(t)\,dt=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int\limits_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\int\limits_a^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

По такъв начин чрез последователно интегриране по части намираме

$$f(x)-f(a)=\int\limits_a^x f'(t)\,dt=(x-a)f'(a)+\int\limits_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\frac{1}{2}\int\limits_a^x (x-t)^2f'''(t)\,dt$$

$$=\dots=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\dots+\frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a)$$

$$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(x-a)^kf^{(k)}(a)+R_{n+1}(x),$$

където $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Виждаме, че R_{n+1} е остатъчният член в разлагането на Тейлор на функцията f в околност на точката a. Тази форма на ***остатъчния член*** се нарича ***интегрална форма***.

Ако приложим първата формула за средните стойности (вж. д) от 9.4.2), то

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int\limits_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

където $\xi\in[a,x]$. Следователно при същите предположения ще получим остатъчния член във форма на Лагранж. Действително лесно се вижда (като се използва теоремата на Дарбу, според която производната приема всички междинни стойности), че равенството $R_{n+1}(x)=(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ е в сила само при условието за съществуване и интегруемост на $f^{(n+1)}(x)$.

Примери:

1. Пресметнете интегралите, като използвате основната формула на интегралното смятане:

а) $$\int_a^b x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},\quad n\neq -1.$$

б) $$\int_a^b \sin x dx=-\cos x\bigg|_a^b=\cos a-\cos b,\quad \int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a.$$

в) $$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\bigg|_0^a=\operatorname{arc\,tg} a.$$

г) $$\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)\bigg|_0^a=\frac{1}{3}\ln 2,\quad a>0.$$

2. Изчислете интегралите с помощта на правилото за смяна на променливата (с помощта на субституции):

а) $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}t^5\bigg|_0^1=1/5,$$

където е положено $t=\operatorname{tg} x$.

б) $$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\frac{1}{3}t^3\bigg|_1^{\sqrt{2}}=(2\sqrt{2}-1)/3,\quad t=\sqrt{1+x^2}.$$

3. Да се пресметне интегралът, като се приложи правилото за интегриране по части:

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x dx=-\frac{\cos x\sin^{m-1}x}{m}\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x dx$$

$$=\frac{m-1}{m}I_{m-2},$$

$m\geq 2$, m е естествено число.

Лесно се вижда, че $I_0=\pi/2$, $I_1=1$. По индукция получаваме, че

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

4. Да се докаже, че за функцията $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ остатъчният член $R_{n+1}(x)$ в интегрална форма клони към нула при $n\to\infty$, когато $|x|<1$. Имаме

$$R_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.$$

От очевидните неравенства $t/x\geqq 0$, $1+x>0$ следва, че

$$t/x+t=\frac{t}{x}(1+x)\geqq 0 \text{ или } \frac{x-t}{x}=1-\frac{t}{x}\leqq 1+t.$$

По-нататък, тъй като x и $x-t$ са числа с еднакъв знак, то

$$\left|\frac{x-t}{x}\right|=1-\frac{t}{x}\leqq 1+t=|1+t|, \text{ или } \left|\frac{x-t}{1+t}\right|\leqq|x|.$$

Следователно

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}dt\right|\leqq|x|^n\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}dt=C(x,\alpha)\,.\,|x|^n,$$

където $C(x,\alpha)$ не зависи от n. С други думи,

$$|R_{n+1}|\leqq C(x,\alpha)\,|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|\,|x|^n/n!=p_n.$$

Разглеждаме произволно число q, удовлетворяващо условието $|x|<q<1$. Тъй като

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{|\alpha-n-1|\,|x|}{n+1}\to|x|\ (n\to\infty),$$

то съществува такъв номер N, че $p_{n+1}/p_n<q$ при $n\geqq N$. Оттук следва, че $p_n\leqq p_Nq^{n-N}$ при $n\geqq N$. Като оставим в това неравенство n да расте неограничено, се убеждаваме, че p_n, а следователно и R_{n+1} клонят към нула.

9.6. Неравенства за суми и интеграли

9.6.1. Неравенство на Юнг*. *Да разгледаме две неотрицателни числа a и b и две числа p и q, по-големи от единица и такива, че $1/p+1/q=1$. Ще докажем следното неравенство на Юнг:*

$$ab\leqq a^p/p+b^q/q.$$

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(x)=x^{1/p}-x/p$

* Уилям Хенри Юнг — английски математик (1882—1946).

при $x \geq 0$. Понеже $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{-1/q}-1)$, то $f'(x)>0$ при $0<x<1$, $f'(x)<0$ при $x>1$. В точката $x=1$ функцията f приема най-голямата си стойност, при това $f(1)=1-1/p=1/q$. Следователно $x^{1/p}-x/p \leq 1/q$ за всяко $x \geq 0$. В последното неравенство полагаме $x=a^p/b^q$, $b \neq 0$. С това неравенството на Юнг е доказано при $b \neq 0$. При $b=0$ то е очевидно. □

9.6.2. Неравенство на Хьолдер* за суми. *Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ са произволни неотрицателни числа. Тогава*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

където $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$.

Това неравенство се нарича неравенство на Хьолдер за суми. То е хомогенно в смисъл, че ако е изпълнено за числата a_i, b_i, то е изпълнено и за числата ta_i, tb_i. Затова е достатъчно да установим, че $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1$ при условия $\sum_{i=1}^{n} a_i^p=1$, $\sum_{i=1}^{n} b_i^q=1$, тъй като винаги можем да разделим числата a_i и b_i съответно на $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$**. Записвайки неравенството на Юнг за такива числа a_i и b_i и сумирайки тези неравенства по i, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q.$$

Затова $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1/p+1/q=1$. □

Забележка. В случая $p=2$, $q=2$ неравенството на Хьолдер се превръща в неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

* О. Хьолдер — немски математик (1859—1937).

** Предполагаме, че поне едно от числата a_i и поне едно от числата b_i е различно от нула. В противен случай неравенството е очевидно.

наречено ***неравенство на Коши — Буняковски* за суми***

9.6.3. Неравенство на Минковски за суми.** *Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ са произволни неотрицателни числа и $p>1$. Тогава е изпълнено следното неравенство на Минковски за суми:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}.$$

Доказателство. Записваме равенството

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Към всяка от сумите в дясната страна прилагаме неравенството на Хьолдер. Ако $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$, то $(p-1)q=p$, $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$. Затова

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}.$$

Като разделим последното неравенство на $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$, ще получим исканото неравенство.

9.6.4. Неравенство на Хьолдер за интеграли. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две произволни интегруеми в сегмента $[a, b]$ функции; нека p и q са две числа, по-големи от единица, и $1/p+1/q=1$. Тогава е изпълнено неравенството на Хьолдер за интеграли:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,d\ \right)^{1/q}$$

* Виктор Яковлевич Буняковски — руски математик (1804—1889).
** Херман Минковски — немски математик и физик (1864—1909).

(всички написани интеграли съществуват според следствието от теорема 9.4).

Доказателство. Ще отбележим, че както и в 9.6.2, достатъчно е да разгледаме случая, когато $\int_a^b |f(x)|^p dx = 1$ и $\int_a^b |g(x)|\,dx=1$, и да докажем неравенството $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq 1$. Записваме неравенството на Юнг за произволна точка x за функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$. Имаме

$$|f(x)|\,.\,|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Като интегрираме това неравенство, получаваме

$$\int_a^b |f(x)|\,.\,|g(x)|\,dx \leq 1.$$

Но съгласно свойство г) от 9.4.2

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,.\,|g(x)|\,dx. \ \square$$

Както и при извода на неравенството на Хьолдер за суми, предполагаме, че $\int_a^b |f(x)|\,dx \neq 0$ и $\int_a^b |g(x)|\,dx \neq 0$. В противен случай неравенството е очевидно.

Забележка. В случая, когато $p=2$, $q=2$, неравенството на Хьолдер се превръща в неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

което се нарича ***неравенство на Коши — Буняковски за интеграли.***

9.6.5. Неравенство на Минковски за интеграли. *Нека f и g са две произволни неотрицателни и интегруеми върху сегмента $[a, b]$ функции и числото $p \geq 1$. Тогава е в сила неравенството на Минковски за интеграли:*

$$\left\{\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_a^b f^p(x)\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b g^p(x)\,dx\right\}^{1/p}.$$

Ще отбележим, че съгласно следствието от теорема 9.4 всички подинтегрални функции са интегруеми.

Доказателство. Точно както и при доказателството на неравенството на Минковски за суми, тръгваме от

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx=\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}dx+\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx.$$

По-нататък, прилагайки към интегралите в дясната страна неравенството на Хьолдер, както и в 9.6.3 получаваме искания резултат. □

По индукция може да се докаже и по-общо неравенство за n функции $f_1, f_2, \cdots, f_n$, неотрицателни и интегруеми в сегмента $[a, b]$:

$$\left\{\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))^p\,dx\right\}^{1/p}$$

$$\leq\left\{\int_a^b f_1^p(x)dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b f_2^p(x)\,dx\right\}^{1/p}+\cdots+\left\{\int_a^b f_n^p(x)\,dx\right\}^{1/p}.$$

9.7. Критерий на Лебег* за интегруемост на функция върху сегмент

9.7.1. Множества с мярка нула и с жорданова мярка нула. В тази точка ще въведем някои понятия, необходими за доказателството на критерия на Лебег.

Определение 1. *Множеството $A=\{x\}$, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, ще наричаме* ***множество с мярка нула (лебегова мярка нула)****, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществува най-много изброимо покритие на множеството $A=\{x\}$ със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots$, такова, че*

* Анри Лебег — френски математик (1875—1941).

$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\varepsilon$*. Обстоятелството, че множеството A има мярка нула, обикновено се записва така: $\mu(A)=0$.

Очевидно в определението за множество с мярка нула сегментите $[a_k, b_k]$ могат да се заменят с интервалите (a_k, b_k).

Ще докажем следните твърдения:

Твърдение 1. *Нека A и B са две подмножества на сегмента $[a, b]$ и $B\subset A$. Тогава, ако $\mu(A)=0$, то и $\mu(B)=0$.*

Доказателство. Тъй като $\mu(A)=0$, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува най-много изброима система от сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \dots$, такава, че $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\varepsilon$.

Понеже $B\subset A$, то $B\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и следователно $\mu(B)=0$.

Твърдение 2. *Нека множествата A_k, $k=1, 2, 3, \dots$, принадлежат на сегмента $[a, b]$ и $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогава, ако $\mu(A_k)=0$, $k=1, 2, 3, \dots$, то и $\mu(A)=0$.*

Доказателство. Тъй като множеството A_k има мярка нула, то за всяко положително число ε и всеки номер $k=1, 2, 3, \dots$ съществува съвкупност от такива сегменти $I_{k,n}=[a_{k,n}, b_{k,n}]$, че

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\supset A_k \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(b_{k,n}-a_{k,n})<2^{-k}\varepsilon. \text{ Понеже } A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

$$\text{то } A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\right).$$

Системата от сегменти $I_{k,n}$ $k, n=1, 2, 3, \dots$, е най-много изброима. Да я преномерираме с помощта на един индекс и да означим с $I_1=[a_1, b_1]$ сегмента $I_{1,1}$, с $I_2=[a_2, b_2]$ — сегмента $I_{1,2}$, с $I_3=[a_3, b_3]$ — сегмента $I_{2,1}$ и т. н. С други думи, сегментите

* Това неравенство може да се запише и така: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\varepsilon$, където под символа $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$ се разбира $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)$.

$I_{k,n}$ номерираме в естествените числа по реда на нарастване на $k+n$, а за еднаквите $k+n$ — по реда на нарастване на k. Очевидно за всяко естествено число $N \geqq 1$ е изпълнено неравенството

$$\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n})\right),$$

където $[a_m, b_m]=I_m$ е сегментът с номер m при новата номерация.

Тъй като съгласно избора на сегментите $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ за всеки номер k са изпълнени неравенствата

$$\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n}) \leqq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n})<2^{-k}\varepsilon, \quad k=1, 2, 3, \ldots,$$

то за всяко $N \geqq 1$ имаме

$$\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \varepsilon\sum_{k=1}^{N}2^{-k}<\varepsilon.$$

Следователно

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m)=\sup_{N}\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \varepsilon.$$

Затова $\mu(A)=0$. □

Следствие. *Ако множеството A се състои от изброим или краен брой точки на сегмента $[a, b]$, то $\mu(A)=0$. По-специално множеството на рационалните числа, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, има мярка нула.*

Определение 2. *Ще казваме, че множеството $A=\{x\}$, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, има жорданова мярка нула, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такова крайно покритие на множеството A със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots,$*

$$N=N(\varepsilon), \text{ че } \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}(b_k-a_k)<\varepsilon.$$

Очевидно в определението за множество с жорданова мярка нула сегментите $[a_k, b_k]$ могат да се заменят с интервалите (a_k, b_k), а системата $\{I_k\}$ може да се избере от два по два непресичащи се сегмента.

Непосредствено от определението следва, че всяко подмножество на сегмента $[a, b]$, състоящо се от краен брой точки, има жорданова мярка нула.*

Ще отбележим също, че ако множеството A има жорданова мярка нула, то има също така и лебегова мярка $\mu(A)$, равна на нула.

Твърдение 3. *Да разгледаме сегмента $[a, b]$ и произволно негово покритие със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots, m$. Тогава*

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k)\geq(b-a)>0.$$

Доказателство. Ще докажем твърдението индуктивно. При $m=1$ то е вярно, тъй като $I_1=[a_1, b_1]\supset[a, b]$ и $b_1-a_1\geq b-a>0$. Допускаме, че твърдението е вярно за покрития, съставени от m сегмента $I_1, I_2, \ldots, I_m$. Като изменим, ако е необходимо, номерацията на сегментите, ще приемем, че $a\in[a_1, b_1]=I_1$. Тогава $a_1\leq a\leq b_1$. Ако $b\leq b_1$, то $b_1-a_1\geq b-a>0$ и всичко е доказано. Нека $b_1<b$. Тогава системата $I_2, I_3, \ldots, I_{m+1}$ образува покритие на сегмента $[b_1, b]$, състоящо се от m сегмента, и съгласно индуктивното допускане $\sum_{k=2}^{m}(b_k-a_k)\geq b-b_1>0$. Но тогава $\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k)\geq(b_1-a)+(b-b_1)=b-a>0$, което трябваше да се докаже.

Следствие 1. *Сегментът $[a, b]$ не може да има жорданова мярка нула.*

Следствие 2. *Нека $\{x_k\}$ е едно деление на сегмента $[a, b]$ и $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$, са частичните сегменти на това деление. Нека $\{P_m\}$, $m=1, 2, 3, \ldots, p$, е такава крайна система от сегменти $P_m=[a_m, b_m]$, че $\bigcup_{m=1}^{p}P_m\supset\bigcup_{j=1}^{l}I_{k_j}$. Тогава $\sum_{m=1}^{p}(b_m-a_m)\geq\sum_{j=1}^{l}(x_{k_j}-x_{k_{j-1}})$.*

Твърдение 4. *Нека K е компактно множество, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, и $\mu(K)=0$. Тогава K има и жорданова мярка нула.*

Доказателство. Тъй като множеството K има мярка нула, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова най-много изброимо покритие на множеството K с интервали $\mathring{I}_k=(a_k, b_k)$, че $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{I}_k$

* Не е трудно да се убедим, че всяко изброимо затворено подмножество на сегмента $[a, b]$ е също множество с жорданова мярка нула.

$= \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,\ b_k) \supset K$, при което $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\varepsilon$.

Поради компактността на множеството K от покритието $\{\mathring{I}_k\}$ може да се отдели крайно подпокритие $\{\mathring{I}_{k_j}\}$, $j=1, 2, 3, \ldots, m$, за което $\bigcup_{j=1}^{m} \mathring{I}_{k_j} \supset K$. Очевидно $\sum_{j=1}^{m}(b_{k_j}-a_{k_j})<\varepsilon$. □

Като следствие получаваме, че всяко изброимо затворено множество от елементи на сегмента $[a, b]$ (то е компактно) има жорданова мярка нула.

9.7.2. Осцилация на функция в точка. Изследване на множеството от точки на прекъсване на функция. В 4.8 осцилация $\omega(f;\ x_0)$ на функцията f в точката x_0 нарекохме разликата $M(x_0)-m(x_0)=\omega(f,\ x_0)$ между горната и долната функция на Бер за функцията f в точката x_0.

Ще докажем едно обобщение на теорема 4.16 за случая на прекъснати функции.

Твърдение 5. *Нека функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Нека съществува такова число $\omega \geq 0$, че $0 \leq \omega(f;\ x) \leq \omega$ за всяка точка x от сегмента $[a, b]$. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, на сегмента $[a, b]$, че*

$\omega_k=M_k-m_k=\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1},\ x_k]\}-\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1},\ x_k]\}<\omega+\varepsilon$*

за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Доказателство. Нека ε е произволно фиксирано положително число. По условие $0 \leq \omega(f;\ x) \leq \omega$ за всяка точка x от сегмента $[a, b]$. Тъй като $\omega(f;\ x)=M(x)-m(x)= \lim_{\delta\to 0+0} \{M_\delta(x) - m_\delta(x)\}$ (вж. 4.8), то за всяка точка x_0 от сегмента $[a, b]$ съществува такъв интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, че

$$\omega(f;\ [x_0-\delta,\ x_0+\delta])<\omega+\varepsilon.$$

Ще отбележим, че е налице включването $[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} (x-\delta(x),\ x+\delta(x))$. Поради компактността на сегмента $[a, b]$ можем да изберем крайно подпокритие на сегмента $[a, b]$ с интервали $(a_1,\ b_1) =(x_1-\delta(x_1),\ x_1+\delta(x_1)), \ldots, (a_N,\ b_N)=(x_N-\delta(x_N),\ x_N+\delta(x_N))$ така, че $[a,\ b] \subset \bigcup_{m=1}^{N}(a_m,\ b_m)$. Нека $\{x_k\}$ е едно такова деление на сег-

* Числото ω_k се означава още и с $\omega(f,\ [x_{k-1},\ x_k])$ и се нарича осцилация на функцията $f(x)$ в сегмента $[x_{k-1},\ x_k]$ (вж. 4.6.2).

мента $[a, b]$, че всички точки $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, да участвуват в това деление и всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ от делението $\{x_k\}$ да се съдържа в някой сегмент $[a_p, b_p]$, $p=1, 2, 3, \dots, N$. Тогава очевидно $\omega(f; [x_{k-1}, x_k])<\omega+\varepsilon$ за всяко $k=1, 2, 3, \dots, n$. □

Следствие. *Нека са изпълнени условията на твърдение* 5. *Тогава съществува такова деление* $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$, *на сегмента* $[a, b]$, *че за това деление е изпълнено* $\Omega=S-s<(\omega+\varepsilon)(b-a)$.

Наистина

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$<(\omega+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=(\omega+\varepsilon)(b-a).$$

Нека функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Означаваме с

$$R(\varepsilon)=\{x\in[a, b]:\omega(f; x)\geq\varepsilon>0\}$$

множеството от точки x в сегмента $[a, b]$, за които осцилацията на функцията f е по-голяма или равна на числото $\varepsilon>0$.

Вярно е следното твърдение:

Твърдение 6. *За всяко* $\varepsilon>0$ *множеството* $R(\varepsilon)$ *е затворено.*

Доказателство. Ще напомним, че осцилацията на функция в дадена точка x_0 е долната граница на осцилациите на тази функция във всички симетрични интервали, които съдържат точката x_0 (x_0 е среда на интервала). В случая, когато x_0 е край на интервала, се вземат интервалите, които имат за край x_0 и лежат в сегмента $[a, b]$.

Нека x_0 е контурна точка за $R(\varepsilon)$. Ще покажем, че тя принадлежи на $R(\varepsilon)$. Очевидно всеки интервал, който съдържа x_0, съдържа и някоя точка от $R(\varepsilon)$ и затова осцилацията на f в този интервал (или в сегмента, получен чрез присъединяване на краищата на интервала) е не по-малка от ε, т. е. точката x_0 принадлежи на $R(\varepsilon)$. Тъй като всяка контурна точка на $R(\varepsilon)$ принадлежи на множеството $R(\varepsilon)$, то това множество е затворено. □

За да бъде една дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$ функция f непрекъсната в точката x, е необходимо и достатъчно осцилацията $\omega(f; x)$ в точката x да бъде равна на нула (или, което е същото, $M(x)=m(x)$). Затова, ако осцилацията $\omega(f; x)>0$, то точката x е точка на прекъсване за функцията f.

Нека R е множеството от всички точки на прекъсване на функцията $f(x)$, дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Тогава очевидно

$$R=\bigcup_{m=1}^{\infty} R(1/m)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x\in[a,\ b]:\omega(f;\ x)\geqq 1/m\}.$$

9.7.3. Критерий за интегруемост на функция.

Теорема 9.6 (критерий на Лебег). *За да бъде ограничената в сегмента $[a, b]$ функция f интегруема по Риман в този сегмент, е необходимо и достатъчно множеството от точки на прекъсване на тази функция да има мярка нула.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е дефинирана и интегруема в сегмента $[a, b]$ и R е множеството от точките ѝ на прекъсване в този сегмент. Тъй като $R=\bigcup_{m=1}^{\infty} R(1/m)$, то съгласно твърдение 2 е достатъчно да докажем, че $\mu(R(1/m))=0$ за $m=1, 2, 3, \cdots$ Ще покажем, че жордановата мярка на всяко множество $R(1/m)$ е равна на нула, толкова повече $\mu(R(1/m))=0$.

Понеже функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то за всяко $\varepsilon>0$ и за всяко естествено число m съществува според основната теорема от 9.3 такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \cdots, m$, на сегмента $[a, b]$, че $0\leqq\Omega=S-s=\varepsilon/2m$. Разглеждаме съвкупността $\{I_k\}$, $I_k=[x_{k-1},\ x_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots, m$, от всички частични сегменти на даденото деление. Нека $\mathring{I}_k=(x_{k-1},\ x_k)$ е съответстващият на частичния сегмент интервал, а $\partial I_k=\{x_{k-1},\ x_k\}$ е множеството от двете точки x_{k-1} и x_k, $k=1, 2, 3, \cdots, n$.

Разглеждаме двете множества $R'(1/m)$ и $R''(1/m)$, определени по следния начин:

$$R'(1/m)=R(1/m)\cap\bigcup_{k=1}^{n}\mathring{I}_k;\quad R''(1/m)=R(1/m)\cap\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k.$$

Очевидно множеството $\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k$ има жорданова мярка нула, понеже се състои от краен брой точки.

По-нататък $R''(1/m)\subset\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k$, затова и множеството $R''(1/m)$ има жорданова мярка нула. Следователно за избраното по-горе $\varepsilon>0$ съществува такава крайна система $\{P_l\}$, $l=1, 2, 3, \cdots$, $L=L(\varepsilon)$, от сегменти $P_l=[a_l,\ b_l]$, че

(9.5) $$\sum_{l=1}^{L}(b_l-a_l)<\varepsilon/2,\quad R''(1/m)\subset\bigcup_{l=1}^{L}P_l.$$

Ще докажем, че множеството $R'(1/m)$ също има жорданова мярка нула. Нека $x_0\in R'(1/m)\neq\emptyset$. Тогава съществува такова k_0, че $x_0\in \overset{\circ}{I}_{k_0}=(x_{k_0-1},\ x_{k_0})$, и затова съществува $\delta>0$, за което $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset I_{k_0}$. Следователно

$$\omega_{k_0}=\omega(f;\ I_{k_0})\geq\omega(f;\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta))\geq\omega(f;\ x_0)\geq 1/m>0.$$

По този начин установихме, че

$$R(1/m)\subset\bigcup_{k\in Q_m}I_k,$$

където $Q_m=\{k:1\leq k\leq m,\ \omega(f;\ I_k)\geq 1/m\}$.

Ще запишем следните очевидни неравенства:

$$\frac{1}{m}\sum_{k\in Q_m}(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k\in Q_m}\omega_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\omega(f;\ [x_{k-1},\ x_k])(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=S-s<\varepsilon/2m.$$

Неравенството $S-s<\varepsilon/2m$ следва от избора на делението $\{x_k\}$.

Следователно получаваме

(9.6) $$\sum_{k\in Q_m}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon/2.$$

Окончателно имаме

$$R(1/m)=R'(1/m)\cup R''(1/m)\subset\left(\bigcup_{k\in Q_m}I_k\right)\cup\left(\bigcup_{l=1}^{L}P_l\right),$$

където поради (9.5) и (9.6) сумата от дължините на крайния брой сегменти I_k и P_l не надминава ε. Понеже ε е произволно избрано, множеството $R(1/m)$ има жорданова мярка нула.□

Достатъчност. Нека R е множеството от точките на прекъсване на функцията f, дефинирана и ограничена в сегмента $[a,\ b]$. За всяко $\varepsilon>0$ имаме

$$R(\varepsilon)=\{x\in[a,\ b]:\omega(f;\ x)\geq\varepsilon\}\subset R\subset[a,\ b]$$

и следователно $R(\varepsilon)$ е ограничено. Съгласно твърдение 6 множеството $R(\varepsilon)$ е затворено. Затова според определението от 4.6.3 множеството $R(\varepsilon)$ е компактно. Тъй като $\mu(R)=0$ и $R(\varepsilon)\subset R$, то от твърдение 1 следва, че $\mu(R(\varepsilon))=0$, а от твърдение 4 — че и жордановата мярка на множеството $R(\varepsilon)$ е равна на нула. С други думи, за всяко $\varepsilon>0$ съществува такава крайна система от сегменти $P_l=[a_l, b_l]$, $l=1, 2, \ldots, N$, че системата от интервали $\mathring{P}_l=(a_l, b_l)$ покрива $R(\varepsilon)$, т. е.

$$\bigcup_{l=1}^{N} P_l \supset \bigcup_{l=1}^{N} \mathring{P}_l \supset R(\varepsilon),$$

при което $\sum_{l=1}^{N} (b_l-a_l)<\varepsilon$.

Нека $\{x_k\}$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$, е деление на сегмента $[a, b]$, състоящо се от точките a, b и всички краища на сегментите P_l, $l=1, 2, \ldots, N$, които се съдържат в $[a, b]$. Нека $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, е частичен сегмент от делението $\{x_k\}$. По построение интервалът $\mathring{I}_k=(x_{k-1}, x_k)$ не съдържа краищата на сегментите $\{P_l\}$. Възможни са два случая:

а) Съществува такъв индекс l_0, че $I_k\subset P_{l_0}$. Означаваме тази група от сегменти с $I'=\{I_{k'}\}$.

б) За всеки номер l сечението $(x_{k-1}, x_k)\bigcap P_l=\varnothing$. В този случай точката x_{k-1} (или x_k) може да бъде край на някой сегмент от системата $\{P_l\}$. Означаваме тази група от сегменти с $I''=\{I_{k''}\}$. Ще покажем, че в случая б) нито точката x_{k-1}, нито точката x_k принадлежи на $R(\varepsilon)$. Наистина, ако например $x_{k-1}\in R(\varepsilon)$, то понеже системата от интервали $\{\mathring{P}_l\}$ покрива множеството $R(\varepsilon)$, ще съществува индекс l_1, за който $x_{k-1}\in \mathring{P}_{l_1}\neq\varnothing$, и тогава очевидно $(x_{k-1}, x_k)\bigcap P_{l_1}\neq\varnothing$ въпреки избора на делението $\{x_k\}$. И така в този случай $I_k\bigcap R(\varepsilon)=\varnothing$.

Ще подчертаем, че всеки от сегментите I_k на делението $\{x_k\}$ се съдържа или в групата I', или в групата I''.

Тъй като f е ограничена в сегмента $[a, b]$: $|f(x)|\leq M$ за всяко $x\in[a, b]$, то $\omega_k=\omega(f; [x_{k-1}, x_k])\leq 2M$ за $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Поспециално, ако $I_{k'}\in I'$ и $I_{k'}=[x_{k'-1}, x_{k'}]$, то

$$\sum_{(k')} \omega_{k'}(x_{k'}-x_{k'-1})\leq 2M\sum_{l=1}^{N}(b_l-a_l)<2M\varepsilon.$$

Нека сега $I_{k''}\in I''$. Тогава $I_{k''}\bigcap R(\varepsilon)=\varnothing$ и затова осцилацията

$\omega(f; x)<\varepsilon$ за всяко $x\in I_{k''}$. Ще приложим следствието на твърдение 5 към сегмента $I_{k''}=[x_{k''-1}, x_{k''}]$, като за ω ще изберем числото ε. Може да се твърди, че съществува такова деление $\{y_k\}$ на сегмента $I_{k''}$, $x_{k''-1}=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n(k'')}=x_{k''}$ с частични сегменти $[y_{k-1}, y_k]$, че

$$\sum_{k=1}^{n(k'')}\omega(f;[y_{k-1}, y_k])(y_k-y_{k-1})<2\varepsilon(x_{k''}-x_{k''-1}).$$

Образуваме сега делението $\{z_r\}$ като обединение на делението $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ и деленията $\{y_k\}$ на сегментите $I_{k''}$ и означаваме със $[z_{r-1}, z_r]$ неговите частични сегменти. За делението $\{z_r\}$ имаме

$$0\leq S-s=\sum_{r\in Q'}\omega_r(z_r-z_{r-1})+\sum_{r\in Q''}\omega_r(z_r-z_{r-1})$$

$$\leq 2\varepsilon M+2\varepsilon\sum_{(k'')}(x_{k''}-x_{k''-1})<2\varepsilon(M+(b-a)),$$

където $Q'=\{r:[z_{r-1}, z_r]\subset I_{k'}\in I'\}$, $Q''=\{r:[z_{r-1}, z_r]\subset I_{k''}\in I''\}$. От произволния избор на ε и основната теорема от 9.3.1 следва интегруемостта по Риман на функцията f в сегмента $[a, b]$.

9.8. Несобствени интеграли

При изученото в глава 9 понятие за определен интеграл на Риман съществено се използват две обстоятелства: 1) че интервалът $[a, b]$ на интегриране е краен; 2) че подинтегралната функция f е ограничена в разглеждания интервал.

Сега ще обобщим понятието определен интеграл на Риман за следните два случая: 1) когато интервалът на интегриране е безкраен*; 2) когато подинтегралната функция f е неограничена в околност на някои точки от областта на интегриране.

Понятието интеграл при едно такова обобщение е прието да се нарича несобствен интеграл съответно от първи и втори род.

9.8.1. Понятие за несобствен интеграл от първи род. Ще въведем понятието определен интеграл в случая, когато областта, върху която се интегрира, е безкрайна. Върху правата $-\infty<x<\infty$ има три вида безкрайни свързани области: 1) полуправата

* Т. е. представлява полуправа или цялата безкрайна права.

$-\infty < x \leq b$; полуправата $a \leq x < +\infty$; 3) цялата права $-\infty < x < \infty$.

За определеност ще разгледаме подробно една от тези области, а именно полуправата $a \leq x < +\infty$.

Ще предполагаме, че функцията f е дефинирана върху полуправата $a \leq x < +\infty$ и за всяко число A, удовлетворяващо неравенството $A \geq a$, съществува определеният интеграл на Риман

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx. \tag{9.7}$$

Възниква въпросът за съществуването на граница на $F(A)$ при $A \to +\infty$:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx. \tag{9.8}$$

Определение. *Границата* (9.8) *в случая, когато съществува, се нарича* ***несобствен интеграл от първи род*** *на функцията f върху полуправата $[a, +\infty)$ и се означава със символа*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.9}$$

При това се казва, че несобственият интеграл (9.9) е ***сходящ***, и това се записва с равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Впрочем символът (9.9) се употребява и в случая, когато границата (9.8) не съществува, но тогава се казва, че несобственият интеграл (9.9) е ***разходящ***.

Аналогично се определят несобствените интеграли върху полуправата $-\infty < x \leq b$ и върху безкрайната права $-\infty < x < +\infty$.

Първият от тези интеграли се определя като граница $\lim\limits_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx$ и се означава със символа $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Що се касае до интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то той се определя като границата

$$\lim_{\substack{A'\to+\infty \\ A''\to-\infty}} \int_{A''}^{A'} f(x)\,dx,$$

където A' клони към $+\infty$ независимо от клоненето на A'' към $-\infty$. От тези определения следва, че ако за някое реално число a всеки от несобствените интеграли $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, то и несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и е в сила равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ако несобственият интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и b е число, по-голямо от a, то и несобственият интеграл $\int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и е изпълнено равенството

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Това следва непосредствено от определението за сходимост на несобствен интеграл.

Примери:

1. Ще изучим въпроса за сходимост на несобствения интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Тъй като функцията $f(x)=1/(1+x^2)$ е интегруема в сегмента $[0, A]$ за всяко $A>0$ и за нея

$$F(A) = \int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^A = \operatorname{arc\,tg} A,$$

то

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=\lim_{A\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} A=\pi/2.$$

Следователно несобственият интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ е сходящ и

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}=\pi/2.$$

2. Ще разгледаме въпроса за сходимостта на несобствения интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\lambda\,dx$, където a и λ са произволни реални числа, първото от които е положително ($a>0$).

Тъй като функцията $f(x)=x^\lambda$ е интегруема в сегмента $[a, A]$ при всяко $A>0$ и

$$F(A)=\int\limits_a^A x^\lambda\,dx=\begin{cases} x^{\lambda+1}/(\lambda+1)\,\Big|_a^A=(A^{\lambda+1}-a^{\lambda+1})/(\lambda+1) & \text{при } \lambda\neq-1, \\ \ln x\,\Big|_a^A=\ln A-\ln a & \text{при } \lambda=-1, \end{cases}$$

то за $\lambda<-1$ границата на $F(A)$ при $A\to+\infty$ съществува и е равна на $-a^{\lambda+1}/(\lambda+1)$, а за $\lambda\geqq-1$ тази граница не съществува.

Следователно при $\lambda<-1$ несобственият интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\lambda\,dx$ е сходящ и е равен на $-a^{\lambda+1}/(\lambda+1)$, а при $\lambda\geqq-1$ той е разходящ.

9.8.2. Критерий на Коши за сходимост на несобствени интеграли от първи род. Достатъчни условия за сходимост. Сходимостта на несобствен интеграл от първи род е еквивалентна на съществуването на граница на функцията

$$F(A)=\int\limits_a^A f(x)\,dx \text{ при } A\to+\infty.$$

Както е известно, за съществуването на граница на функцията $F(A)$ при $A\to\infty$ е необходимо и достатъчно тя да удовлетворява следното условие на Коши: За всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова число B, че за произволни A_1 и A_2, по-големи от B, да е изпълнено неравенството

$$|F(A_2)-F(A_1)|=\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Следователно в сила е следното твърдение:

Твърдение 1 (критерий на Коши за сходимост на несобствен интеграл). *Необходимо и достатъчно условие несобственият интеграл (9.9) да бъде сходящ е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова $B>a$, че при всеки избор на числата A_1 и A_2, по-големи от B, да е изпълнено*

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Забележка. От сходимостта на несобствения интеграл не следва дори ограниченост на подинтегралната функция. Например интегралът $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$, където функцията f е равна на нула за всички нецели x и е равна на n при $x=n$ (n е цяло число), очевидно е сходящ, въпреки че подинтегралната функция не е ограничена.

Ще докажем следното твърдение:

Твърдение 2 (общ критерий за сравнение). *Нека върху полуправата $a\leq x<+\infty$ имаме*

$$|f(x)|\leq g(x). \tag{9.10}$$

Тогава от сходимостта на интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следва сходимостта на интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказателство. Нека $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е сходящ. Тогава съгласно критерия на Коши за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери такова $B>a$, че при всеки избор на числата $A_1>B$ и $A_2>B$ да е изпълнено неравенството

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right|<\varepsilon. \tag{9.11}$$

От известните неравенства за интеграли и неравенството (9.10) получаваме

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx.$$

Оттук и от неравенството (9.11) следва, че за всеки две числа $A_1>B$ и $A_2>B$ е вярно неравенството $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$. Следователно интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ.□

Твърдение 3 (частен критерий за сравнение). *Нека функцията f удовлетворява върху полуправата $0<a\leq x<+\infty$ съотношението $|f(x)|\leq cx^\lambda$, където c и λ са константи, $\lambda<-1$. Тогава интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. Ако съществува такава константа $c>0$, че върху полуправата $0<a\leq x<+\infty$ да е в сила съотношението $f(x)\geq cx^\lambda$, в което $\lambda\geq-1$, то интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.*

Това твърдение следва от твърдение 2 и примера, разгледан в предишната точка (достатъчно е да се положи $g(x)=cx^\lambda$).

Следствие (частен критерий за сравнение в гранична форма). *Ако при $\lambda<-1$ съществува крайната граница $\lim_{x\to+\infty} x^{-\lambda}|f(x)|=c$, то интегралът $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. Ако при $\lambda\geq-1$ съществува положителната граница $\lim_{x\to+\infty} x^{-\lambda}f(x)=c>0$, то интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.*

Ще се убедим във верността на първата част от следствието. За тази цел ще отбележим, че от съществуването на границата при $x\to+\infty$ следва ограниченост на функцията $x^{-\lambda}|f(x)|$, т. е. има константа $c_0>0$, за която е изпълнено неравенството $|f(x)|\leq c_0x^\lambda$.

След това прилагаме първата част на твърдение 3. Верността на втората част на следствието се получава от следните разсъждения: Понеже $c>0$, може да се намери толкова малко $\varepsilon>0$, че $c-\varepsilon>0$. На това ε отговаря такова B, че при $x>B$ да е изпълнено неравенството $x^{-\lambda} f(x)>c-\varepsilon$ (това неравенство следва от определението за граница). Тогава $f(x)>(c-\varepsilon)\,x^{\lambda}$ и можем да приложим втората част на твърдение 3.

9.8.3. Абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли. Ще въведем понятията за абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли. Нека f е интегруема във всеки сегмент $[a, A]$.*

Определение 1. *Несобственият интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *се нарича* ***абсолютно сходящ,*** *ако е сходящ* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Определение 2. *Несобственият интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *се нарича* ***условно сходящ,*** *ако той е сходящ, но интегралът* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *е разходящ.*

Забележка. Като положим в твърдение 2 $g(x)=|f(x)|$, получаваме, че от абсолютната сходимост на несобствения интеграл следва неговата сходимост.

Ще отбележим, че твърдения 2 и 3 позволяват да се установи само абсолютната сходимост на изследваните несобствени интеграли.

Ще дадем още един критерий за сходимост на несобствени интеграли от първи род, годен за установяване и на условна сходимост.

Твърдение 4 (критерий на Дирихле — Абел). *Нека са изпълнени следните условия:*

1) *функцията f е непрекъсната върху полуправата $a\leq x<+\infty$ и има върху тази полуправа ограничена примитивна F;*

2) *функцията g е дефинирана и монотонно нерастяща върху полуправата $a\leq x<+\infty$ и има граница, равна на нула, при $x\to+\infty$;*

* Тогава и функцията $|f(x)|$ е интегруема във всеки сегмент $[a, A]$.

3) *производната $g'(x)$ на функцията g съществува и е непрекъсната във всяка точка от полуправата $a \leq x < +\infty$.*

Тогава несобственият интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \tag{9.12}$$

е сходящ.

Доказателство. Ще използваме критерия на Коши за сходимост на несобствени интеграли. Предварително ще интегрираме по части интеграла $\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx$ върху произволен сегмент $[A_1, A_2]$, $A_2 > A_1$, от полуправата $a \leq x < +\infty$. Получаваме

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)\,dx. \tag{9.13}$$

Съгласно условието на теоремата F е ограничена: $|F(x)| \leq k$. Тъй като g не е растяща и клони към нула при $x \to +\infty$, то $g(x) \geq 0$, а $g'(x) \leq 0$. Като оценим съотношението (9.13), получаваме следното неравенство:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| \leq K(g(A_1)+g(A_2)) + K\int_{A_1}^{A_2}(-g'(x))\,dx.$$

Тъй като интегралът в дясната страна на това неравенство е равен на $g(A_1)-g(A_2)$, то очевидно

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| \leq 2K g(A_1). \tag{9.14}$$

Нека ε е произволно положително число. Понеже $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то в зависимост от ε може да се избере число B така, че при $A_1 > B$ да е изпълнено $g(A_1) < \varepsilon/2K$. Оттук и от неравенството (9.14) следва, че за всеки две A_1 и A_2, по-големи от B, е изпълнено неравенството $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon$, което съгласно критерия на Коши гарантира сходимостта на интеграла (9.12). □

Забележка. Условие 3) на твърдение 4 е излишно и е предизвикано само от метода на доказателство (прилагането на интегриране по части). За да се докаже твърдение 4 без условието 3), за оценката на интеграла $\int\limits_{A_1}^{A} f(x)g(x)\,dx$ трябва да се приложи втората формула за средните стойности (вж. свойство в) 9.4.2.

Примери:

1. Да разгледаме интеграла

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx, \quad \alpha>0. \tag{9.15}$$

Като положим $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^{-\alpha}$, лесно се вижда, че за този интеграл са изпълнени условията на твърдение 3. Следователно интегралът (9.15) е сходящ.

2. Да разгледаме интеграла на Френел $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2\,dx$. Съгласно т. 1 на това допълнение от сходимостта на интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin x^2\,dx$ следва сходимостта на изследвания интеграл. Затова ще изследваме сходимостта на интеграла

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot x\sin x^2\,dx.$$

Като положим $f(x)=x\sin x^2$, $g(x)=1/x$, виждаме, че са изпълнени всички условия на твърдение 4. Следователно интегралът на Френел е сходящ.

9.8.4. Смяна на променливите под знака на несобствения интеграл и формула за интегриране по части. В тази точка ще формулираме условията, при които са в сила формулите за смяна на променливите и интегриране по части за несобствени интеграли от първи род. Най-напред ще разгледаме въпроса за смяна на променлива под знака на несобствен интеграл.

Ще предполагаме, че са изпълнени следните условия:

1) функцията f е непрекъсната върху полуоста $a\leq x<+\infty$;

2) полуоста $a\leq x<+\infty$ е множеството от стойностите на някоя строго монотонна функция g, зададена върху полуоста $\alpha\leq t<+\infty$ (или $-\infty<t\leq\alpha$), и g има върху тази полуос непрекъсната производна;

3) $g(\alpha)=a$.

При тези условия от сходимостта на някой от несобствените интеграли

$$(9.16)\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или } -\int_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))\,g'(t)\,dt\right)$$

следва сходимостта на другия и равенството им.

Формулираното твърдение се установява с помощта на следните разсъждения: Разглеждаме произволен сегмент $[a, A]$. На този сегмент поради строгата монотонност на функцията $g(t)$ отговаря такъв сегмент $[\alpha, \rho]$ (или $[\rho, \alpha]$) от оста t, че когато t обхожда сегмента $[\alpha, \rho]$, стойностите на функцията g обхождат сегмента $[a, A]$ и $g(\rho)=A$. По този начин за разглежданите сегменти са изпълнени всички условия от 9.4.3, при които е в сила формулата за смяна на променливата под знака на определения интеграл. Следователно е изпълнено равенството

$$(9.17)\qquad \int_a^{A} f(x)\,dx=\int_\alpha^{\rho} f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или}=-\int_{\rho}^{\alpha} f(g(t))\,g'(t)\,dt\right).$$

Поради строгата монотонност на функцията g имаме $A\to+\infty$ при $\rho\to+\infty$ и, обратно, $\rho\to\infty$ при $A\to+\infty$ (или $A\to+\infty$ при $\rho\to-\infty$ и $\rho\to-\infty$ при $A\to+\infty$). Затова от формула (9.17) следва верността на формулираното по-горе твърдение.

Ще преминем сега към въпроса за интегриране по части на несобствени интеграли от първи род.

Ще докажем следното твърдение:

Нека функциите u и v имат непрекъснати производни върху полуправата $a\le x<+\infty$ и освен това съществува граничната стойност $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\,v(x)=L$. При тези условия от сходимостта на единия от интегралите

$$(9.18)\qquad \int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx$$

следва сходимостта на другия. В сила е също формулата

$$(9.19)\qquad \int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx=L-u(a)\,v(a)-\int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx.$$

За доказателството на това твърдение ще разгледаме произволен сегмент $[a, A]$. В този сегмент е в сила обикновената формула за интегриране по части и следователно

$$\int_a^A u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^A - \int_a^A v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Тъй като при $A \to +\infty$ изразът $u(x)\,v(x)\Big|_a^A$ клони към $L - u(a)\,v(a)$, то от горното равенство следва едновременната сходимост на интегралите (9.18) и верността на формулата (9.19) в случая, когато единият от интегралите (9.18) е сходящ.

9.8.5. Несобствени интеграли от втори род

Нека в полусегмента $[a, b)$ е дефинирана функцията f. *Ще наричаме точката b* ***особена,*** *ако функцията не е ограничена в полусегмента, но е ограничена във всеки сегмент $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$, принадлежащ на полусегмента* $[a, b)$. Ще предполагаме също, че във всеки такъв сегмент функцията f е интегруема.

При тези предположения в полусегмента $(0, b-a]$ е зададена функция на аргумента α, дефинирана със съотношението

$$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Ще изследваме сега въпроса за дясна граница на фунцията $F(\alpha)$ в точката $\alpha = 0$:

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{9.20}$$

Определение. *Дясната граница* (9.20), *ако съществува, се нарича* ***несобствен интеграл от втори род*** *от функцията f в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.21}$$

Казва се още, че несобственият интеграл (9.21) *е* ***сходящ,*** *и се записва*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Символът (9.21) се употребява и в случая, когато границата (9.20) не съществува, но тогава се казва, че несобственият интеграл (9.21) ***е разходящ.***

Забележка. Понятието несобствен интеграл от втори род се пренася леко и в случая, когато функцията f има краен брой особени точки:

Пример:

Да разгледаме в полусегмента $[a, b)$ функцията $(b-x)^\lambda$, $\lambda<0$. Ясно е, че точката b е особена точка за тази функция. Освен това очевидно тази функция е интегруема във всеки сегмент $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$.

$$\int_a^{b-\alpha}(b-x)^\lambda\,dx=\begin{cases}-(b-x)^{\lambda+1}/(\lambda+1)\Big|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{\lambda+1}-\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} & \text{при } \lambda\neq-1,\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln(b-a)-\ln\alpha & \text{при } \lambda=-1.\end{cases}$$

Очевидно границата $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha}(b-x)^\lambda\,dx$ съществува и е равна на $(b-a)^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ при $\lambda>-1$ и не съществува при $\lambda\leq-1$. Следователно разглежданият несобствен интеграл е сходящ при $\lambda>-1$ и разходящ при $\lambda\leq-1$.

Ще формулираме критерия на Коши за сходимост на несобствен интеграл от втори род. При това ще предполагаме, че функцията f е дефинирана в полусегмента $[a, b)$ и b е особена точка на функцията.

Твърдение 5 (критерий на Коши). *За да бъде несобственият интеграл от втори род (9.21) сходящ, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова число $\delta>0$, че при всеки избор на числата α' и α'', удовлетворяващи условията $0<\alpha''<\alpha'<\delta$, да е изпълнено неравенството*

$$\left|\int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Верността на тази теорема следва от това, че сходимостта на интеграл по определение е еквивалентна на съществуването на граница на функцията F, въведена в началото на тази точка. Няма да развиваме подробно теорията на несобствените интеграли от втори род, тъй като основните изводи за несобствени интеграли от първи род лесно се пренасят и за интегралите от втори род. Затова ще се ограничим само с някои бележки.

1°. При някои ограничения за подинтегралните функции интегралите от втори род се свеждат към интеграли от първи род. Именно нека функцията f е непрекъсната в полусегмента $[a, b)$ и b е нейна особена точка. При тези условия в интеграла $\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ можем да извършим смяна на променливите:

$$x=b-1/t,\quad dx=t^{-2}\,dt,\quad 1/(b-a)\leqq t\leqq 1/\alpha.$$

В резултат на тази смяна получаваме

$$\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx=\int_{1/(b-a)}^{1/\alpha} f(b-1/t)\,t^{-2}\,dt. \tag{9.22}$$

Нека интегралът $\int_a^b f(x)\,dx$ да е сходящ, т. е. границата $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ да съществува. От равенството (9.22) се вижда, че и границата на израза в дясната страна на (9.22) при $1/\alpha\to\infty$ съществува. С това са доказани сходимостта на несобствения интеграл от първи род

$$\int_{1/(b-a)}^{+\infty} f(b-1/t)t^{-2}\,dt$$

и равенството му с интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Очевидно сходимостта на този интеграл от първи род влече сходимостта на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и равенството на тези два интеграла. И така от сходимостта на единия от интегралите

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{1/a-a}^{+\infty} f(b-1/t)\,t^{-2}\,dt$$

следват сходимостта на другия и равенството помежду им.

2°. За несобствените интеграли от втори род се доказват лесно твърдения, аналогични на твърденията в 9.8.2, които могат да се обединят под общото название „критерии за сравнение". Ще отбележим, че във всички формулировки функцията f трябва да се разглежда в полусегмента $[a, b)$, където b е особена точка за тази функция.

Частният критерий за сравнение ще има следния вид:

Ако $|f(x)| \leq c(b-x)^{\lambda}$, където $\lambda > -1$, то несобственият интеграл (9.21) е сходящ. Ако $f(x) \geq c(b-x)^{\lambda}$, където $c > 0$ и $\lambda \leq -1$, то несобственият интеграл (9.21) е разходящ. Доказателството следва от общия критерий за сравнение и от примера, разгледан в предишната точка.

В пълна аналогия с 9.8.4 могат да се формулират за несобствените интеграли от втори род и правилата за интегриране чрез смяна на променливите и интегриране по части.

9.9. Главна стойност на несобствен интеграл

Определение. *Нека функцията f е дефинирана върху правата $-\infty < x < \infty$ и е интегруема във всеки сегмент от тази права. Ще казваме, че функцията f е* ***интегруема по Коши****, ако съществува границата* $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$.

Тази граница ще наричаме ***главна стойност на несобствения интеграл от функцията $f(x)$ в смисъл на Коши*** и ще я означаваме със символа*

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

За разлика от понятието несобствен интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, дефинирано като границата $\lim\limits_{\substack{A' \to -\infty \\ A'' \to +\infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx$, когато A' клони към $-\infty$ независимо от клоненето на A'' към $+\infty$, интегралът на Коши

* V. p. са началните букви на „Valeur principal", означаващо „главна стойност".

се дефинира като граница на интеграла $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$ при $A \to +\infty$ в симетрични интеграционни граници.

Пример:

Ще намерим главната стойност на интеграла от функцията $f(x)=x$. Понеже $f(x)=x$ е нечетна функция, т. е.

$$\int_{-A}^{A} x\,dx=0, \text{ то V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx=0.$$

По същия начин заключаваме, че и V. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0.$

Твърдение. *Ако функцията $f(x)$ е нечетна, то тя е интегруема по Коши главната стойност на интеграла ѝ е равна на нула.*

Ако функцията $f(x)$ е четна, тя е интегруема по Коши тогава и само тогава, когато е сходящ несобственият интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.23}$$

Първата част на това твърдение е очевидна. За доказателството на втората част е достатъчно да използваме равенството

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{A} f(x)\,dx,$$

което е вярно за произволна четна функция, и определението за сходимост на несобствения интеграл (9.23).

Понятието интегруемост по Коши може да се въведе и за несобствените интеграли от втори род в случая, когато особената точка е вътрешна за сегмента, в който се извършва интегрирането.

Определение. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$ с изключение евентуално на точката c, $a<c<b$, и интегруема във всеки подсегмент на $[a, b]$, несъдържащ c. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е* ***интегруема по Коши,*** *ако съществува границата*

$$\lim_{\alpha\to+0}\left(\int_{a}^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx\right) = \text{V. p.} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

която ще наричаме ***главна стойност на интеграла в смисъл на Коши.***

Пример:

Функцията $1/(x-c)$ не е интегруема в сегмента $[a, b]$, $a<c<b$, в несобствен смисъл, но е интегруема по Коши. При това

$$\mathrm{V.\,p.}\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^{b}\frac{dx}{x-c}\right) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

9.10. Интеграл на Стилтес*

Понятието интеграл на Стилтес е непосредствено обобщение на понятието интеграл на Риман.

Ще дадем основните сведения за интеграла на Стилтес.

9.10.1. Дефиниция на интеграл на Стилтес и условия за неговото съществуване. Нека функциите f и u са дефинирани и ограничени в сегмента $[a, b]$ и $\{x_k\}$ е едно деление на този сегмент:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b.$$

Сума от вида

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(u(x_i)-u(x_{i-1})), \tag{9.24}$$

където $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, се нарича ***интегрална сума на Стилтес.***

Числото I се нарича ***граница на интегралните суми*** (9.24) при $\max\{\Delta x_i : i=1, 2, \ldots, n\}\to 0$, ако при всеки избор на $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при $\max\{\Delta x_i : i=1, 2, \ldots, n\}<\delta$ да е изпълнено неравенството $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Определение. *Функцията f се нарича* ***интегруема относно функцията*** *u в сегмента $[a, b]$, ако съществува крайна граница на интегралните суми (9.24) при $\max\{\Delta x_i : i=1, 2, \ldots, n\}\to 0$. Тази граница се нарича* ***интеграл на Стилтес*** *(или* ***интеграл на Риман — Стилтес****)* ***от функцията*** *f* ***по*** *u в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа*

$$I=\int_a^b f(x)\,du(x). \tag{9.25}$$

Функцията u се нарича ***интегрираща функция.***

* Томас Йоанес Стилтес — холандски математик (1856 — 1894).

Стилтес идва до идеята за такъв интеграл при разглеждането на положително „разпределение на маси" върху права, което е зададено с растяща функция u, чиито точки на прекъсване съответствуват на масите, „концентрирани в една точка".

Интегралът на Риман е частен случай от интеграла на Стилтес, когато за интегрираща функция е взета функцията $x+c$, където c е константа.

Ще дадем няколко условия за съществуване на интеграла на Стилтес (т. е. условия, когато функцията f е интегруема относно фунцията u).

Да предположим, че интегриращата функция u е растяща. Оттук следва, че от $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ имаме $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})>0$. Това позволява, като заменим Δx_i с $\Delta u(x_i)$, да повторим всички разсъждения, проведени при разглеждане интеграла на Риман.

Аналогично на сумите на Дарбу за интеграла на Риман тук се въвеждат ***малка*** и ***голяма сума на Дарбу—Стилтес***

$$(9.26)\qquad S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,(u(x_i)-u(x_{i-1})),\quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(u(x_i)-u(x_{i-1})),$$

където M_i и m_i са точната горна и точната долна граница на функцията f в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Както при сумите на Дарбу (т. е. в най-простия случая $u=x+c$, c=const) при едно и също деление са изпълнени неравенствата $s\leq\sigma\leq S$, като s и S са точните граници за стилтесовите суми σ, взети по всички възможни вътрешни точки на частичните сегменти.

Сумите на Дарбу—Стилтес имат (както и в най-простия случай) следните свойства:

а) ако към точките на деление добивам нови точки, то малката сума на Дарбу—Стилтес евентуално може само да расте, а голямата сума — само да намалява;

б) всяка малка сума на Дарбу—Стилтес не надминава коя да е от големите суми, отговарящи на едно или друго деление на сегмента $[a, b]$.

Аналогично на начина, използван за построението на интеграла на Риман, се въвеждат горен и долен интеграл на Дарбу—Стилтес:

$$I^*=\inf\{S\},\quad I_*=\sup\{s\},$$

където долната и горната граница се вземат по всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.

Лесно се проверява верността на съотношението

$$s\leq I_*\leq I^*\leq S.$$

Както при интеграла на Риман, и при интеграла на Стилтес горният интеграл на Дарбу—Стилтес е долна граница на големите суми S, когато диаметърът на делението клони към нула. Аналогично долният интеграл на Дарбу—Стилтес е горна граница на малките суми s (вж. 9.2.2, основна лема на Дарбу).

Ще формулираме сега теоремата, която е обобщение на основната теорема от 9.3.1.

Основна теорема. *Необходимото и достатъчно условие функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$, да бъде интегруема в този сегмент относно растящата функция u е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че $S-s<\varepsilon$.*

Доказателството на тази теорема (както впрочем и на дадените по-горе факти и свойства) е дословно повторение на разсъжденията, проведени за интеграла на Риман.

Ще изброим сега някои класове функции, интегруеми по Риман—Стилтес.

1°. *Ако функцията f е непрекъсната, а u е растяща в сегмента $[a, b]$, то интегралът на Стилтес $\int_a^b f(x)du(x)$ съществува.*

Доказателството на това твърдение е напълно аналогично на доказателството на теоремата 9.1.

Забележка. Даденото свойство е вярно и в случая, когато функцията u е с ограничена вариация.* За функцията с ограничена вариация е в сила следният основен критерий:

Необходимо и достатъчно условие функцията u да има ограничена вариация в сегмента $[a, b]$ е тя да може да се представи в този сегмент като разлика на две растящи и ограничени функции:

$$u=g-h.$$

Следователно, когато u е функция с ограничена вариация, сумата на Стилтес може да се запише така:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta u(x_i)-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta h(x_i)=\sigma_1-\sigma_2,$$

* Така се нарича функция $u(x)$, дефинирана в сегмента $[a, b]$, за която числовото множество $V(\{x_k\})=\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})|$ е ограничено отгоре, където $\{x_k\}$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, е произволно деление на сегмента $[a, b]$. Точната горна граница на множеството $V(\{x_k\})$ се нарича вариация на функцията $u(x)$ в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа $V_a^b u=\sup\{V(\{x_k\})\}$.

където

$$\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1}),\ \Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1}),$$

$$\Delta h(x_i)=h(x_i)-h(x_{i-1}).$$

Сумите σ_1 и σ_2 клонят към крайни граници, когато диаметърът на делението клони към нула, тъй като g и h са растящи функции. Тогава съществува крайна граница и на сумите σ при клонене на диаметъра на деление към нула.

Следователно теорията на интеграла на Стилтес може да се построи и в случая, когато интегриращата функция u има ограничена вариация, напълно аналогично на случая на растяща функция u.

Ще отделим още един клас функции, за които интегралът на Стилтес съществува.

2°. *Интегралът на Стилтес* (9.25) *съществува при условие, че функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ по Риман, а функцията u удовлетворява в този сегмент условието на Липшиц, т. е.*

$$|u(x')-u(x'')|\leqq c|x'-x''|$$

за всяко x' и x'' от $[a, b]$, където c е константа.

Тъй като всяка функция, удовлетворяваща условието на Липшиц, е функция с ограничена вариация, то за доказателството на този критерий е достатъчно очевидно да се разгледа само случаят на растяща липшицова функция и да се отбележи, че

$$(9.27)\qquad S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta u(x_i)\leqq c\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i,$$

където $M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1}, x_i]\}$ и c е константата от условието на Липшиц. Стойността на израза $\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$ в неравенството (9.27) поради интегруемостта на функцията f по Риман може да бъде направена произволно малка за сметка на избора на делението на сегмента $[a, b]$. Следователно величината $S-s$ може да бъде направена по-малка от отнапред зададено число $\varepsilon>0$, ако диаметърът на делението се избере достатъчно малък. Съгласно основната теорема функцията f е интегруема по Стилтес.

В общия случай за функцията u, която удовлетворява условието на Липшиц, също може да се разгледа представянето

$$u(x)=cx-(cx-u(x))=u_1(x)-u_2(x).$$

В него двете функции u_1 и u_2 са растящи и удовлетворяват условието на Липшиц и разсъжденията са същите, както по-горе.

Ще дадем накрая още един клас интегруеми по Стилтес функции.

3⁰. Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ по Риман, а функцията u допуска представяне във вид на интеграл с променлива горна граница:

$$u(x)=A+\int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

където φ е интегруема по Риман функция в сегмента $[a, b]$, то интегралът (9.25) съществува.

Действително, понеже φ е интегруема по Риман, то тя е ограничена: $|\varphi(t)|\leqq K=\text{const}$. Следователно

$$|u(x')-u(x'')|=\left|\int_{x'}^{x''}\varphi(t)\,dt\right|\leqq K|x'-x''|.$$

Така верността на този критерий следва от верността на предишния критерий.

Ще отбележим, че ако са изпълнени формулираните в този критерий условия, интегралът на Стилтес $I=\int_a^b f(x)\,du(x)$ се свежда към интеграла на Риман по формулата

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{9.28}$$

По-специално равенството (9.28) е валидно в случая, когато $u(x)$ има ограничена и интегруема по Риман производна u' в сегмента $[a, b]$. В този случай $\varphi=u'$.

9.10.2. Свойства на интеграла на Стилтес. Ще формулираме някои свойства на интеграла на Стилтес, непосредствено следващи от определението му.

а) Линейно свойство относно интегруемата и относно интегриращата функция (при условие, че всеки от интегралите на Стилтес в дясната страна съществува):

$$\int_a^b (\alpha f_1+\beta f_2)\,du=\alpha\int_a^b f_1\,du+\beta\int_a^b f_2\,du.$$

$$\int_a^b f d(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha\int_a^b f du_1+\beta\int_a^b f du_2.$$

Тук α, β са произволни числа.

б) Ако е изпълнено условието $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^c f(x)\,du(x)+\int_c^b f(x)\,du(x)$$

при предположение, че и трите интеграла съществуват.

Подчертаваме, че от съществуването на интегралите $\int_a^c f(x)\,du(x)$ и $\int_c^b f(x)\,du(x)$ не следва съществуването на интеграла $\int_a^b f(x)\,du(x)$. Ето такъв пример:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } -1\leqq x\leqq 0,\\ A\neq 0, & \text{ако } 0<x\leqq 1,\end{cases}\qquad u(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } -1\leqq x<0,\\ B\neq 0, & \text{ако } 0\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Интегралите $\int_{-1}^0 f(x)\,du(x)$, $\int_0^1 f(x)\,du(x)$ съществуват и са равни на нула, понеже съответствуващите им суми на Стилтес са равни на нула. Наистина в първия интеграл $f(x)=0$, $-1\leqq x\leqq 0$, във втория $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})=0$ за всяко деление $\{x_k\}$ на сегмента $[0, 1]$. Обаче интегралът $\int_{-1}^1 f(x)\,du(x)$ не съществува. Действително нека $\{x_k\}$ е деление на сегмента $[a, b]$, което няма за елемент точката 0. Тогава в сумата на Стилтес

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta u(x_i)$$

остава само едно събираемо, а именно събираемото

$$f(\xi_k)\,(u(x_k)-u(x_{k-1}))=B\,f(\xi_k),\quad B\neq 0,$$

за което точката 0 се съдържа в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. В зависимост от това, дали $\xi_k\leqq 0$, или $\xi_k>0$, получаваме $\sigma=0$ или

$\sigma = A \cdot B \neq 0$, така че σ няма граница, когато диаметърът на делението клони към нула.

Този факт е свързан с това, че за функциите $f(x)$ и $u(x)$ точката нула е точка на прекъсване.

в) За интеграла на Стилтес (9.25) е в сила формулата за средните стойности.

Нека функцията $f(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$, така че $m \leqq f(x) \leqq M$, а функцията $u(x)$ е растяща в този сегмент. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leqq \mu \leqq M$, че за интеграла на Стилтес е изпълнена формулата за средните стойности:

$$\int_a^b f(x)\, du(x) = \mu(u(b) - u(a)).$$

По-специално, ако поискаме и непрекъснатост на $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то съществува такава точка $\xi \in [a, b]$, че $\mu = f(\xi)$.

Доказателството на тази формула е съвсем аналогично на доказателството на формулата за средните стойности за интеграла на Риман (вж. 9.4.2).

10. Геометрични приложения на определения интеграл

10.1. Дължина на дъга на крива

10.1.1. Понятие за проста крива. Нека в сегмента $[\alpha, \beta]$ са зададени две непрекъснати функции φ и ψ.

Ще дадем определение за проста равнинна крива.

Определение. *Множеството $\{M\}$ от всички точки M, координатите на които се определят с уравненията*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t);\ \alpha\leqq t\leqq\beta, \tag{10.1}$$

се нарича ***проста равнинна крива*** *L, ако на различни стойности на параметъра t от $[\alpha, \beta]$ отговарят различни точки от множеството $\{M\}$.*

Всяка точка от множеството $\{M\}$, определящо проста равнинна крива, се нарича точка на тази крива, като точките, отговарящи на стойностите α и β на параметъра t, се наричат краища на простата крива.

При това се казва, че „уравненията (10.1) определят проста равнинна крива L" или „проста равнинна крива L, параметризирана с уравненията (10.1)".

Пример за проста крива е графиката на полуокръжност с радиус r, лежаща в горната полуравнина с център началото на координатната система:

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t \text{ при } 0\leqq t\leqq\pi.$$

По-общ пример за проста крива е графиката на непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция f, която може да се параметризира по правилото

$$x=t,\ y=f(t) \text{ при } t\in[a, b].$$

Ще отбележим, че простите криви не изчерпват цялото множество на кривите, които могат да бъдат определени с уравненията (10.1).

В следващата точка ще разгледаме по-общи криви, които се определят с тези уравнения.

Забележка 1. Една и съща проста крива L може да се параметризира по различни начини. Целесъобразно е да се разглеждат само онези параметризации, които се получават от дадена параметризация чрез представяне на параметъра t като непрекъсната, строго монотонна функция на друг параметър s. При такива преобразувания на параметъра се запазва редът, в който следват точките на кривата L.

Забележка 2. Нека L_1 и L_2 са две прости криви и краищата на L_1 съвпадат с краищата на L_2, а всички останали точки на кривите L_1 и L_2 са различни. Кривата L, получена от обединението на кривите L_1 и L_2, се нарича проста затворена крива.

10.1.2. Понятие за параметризуема крива. В математическия анализ често се налага да се разглеждат криви, които не са прости, например криви, имащи точка на самопресичане или цели участъци на съвпадане. Във връзка с това се въвежда понятието параметризуема крива.

Ще смятаме, че множеството $\{t\}$ е или сегмент, или полусегмент, или интервал, или числовата права, или отворена, или затворена полуправа. *Ще казваме, че крайната или безкрайната система от сегменти* $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ ***е деление на множеството*** $\{t\}$, *ако, първо, обединението на тези сегменти дава цялото множество* $\{t\}$ *и, второ, общи точки на два сегмента могат да бъдат само техните краища.*

Примери:

1. Системата от сегменти $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ е очевидно деление на сегмента $[0, 1]$.

2. Системата от сегменти $\{[n-1, n]\}$, където $n=1, 2, 3, \dots$, е деление на полуправата $[0, +\infty)$.

3. Системата от сегменти $\{[n-1, n]\}$, където n приема всички цели стойности, очевидно дели числовата права.

Нека множеството $\{t\}$ е едно от изброените по-горе множества, а функциите φ и ψ са непрекъснати в това множество. Ще дадем следното определение.

Определение. *Ще казваме, че уравненията*

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{10.2}$$

задават ***параметризуемата крива*** L, *ако съществува такава система от сегменти* $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, *деляща множеството* $\{t\}$, *че за стойности на* t *от всеки сегмент системата уравнения* (10.2) *да определя проста крива.*

Между точките на кривата L може да се въведе известна наредба. Нека точката M_1 съответствува на стойност на параметъра t_1, а точката M_2 — на стойност t_2.

Казваме, че точката M_1 ***предшествува*** *точката* M_2 (което записваме $M_1 \prec M_2$), *ако* $t_1 < t_2$.

Ще отбележим, че точките, отговарящи на различни стойности на параметъра, се считат винаги различни.

По такъв начин параметризуемата крива може да се разглежда като обединение на прости криви, при което тези прости криви се пробягват от точка M, координатите на която се определят с уравненията (10.2), когато параметърът t пробягва множеството $\{t\}$, като расте монотонно.

Забележка 1. Простата крива може да се разглежда като частен случай на параметризуема крива. В този случай системата от сегменти, деляща сегмента $[\alpha, \beta]$, се състои от един сегмент, а именно от сегмента $[\alpha, \beta]$.

Забележка 2. За параметризуема крива, определена с уравненията (10.2), се казва също така, че е параметризирана с помощта на уравненията (10.2). Една и съща крива L може да се параметризира по различни начини. Ще разглеждаме всички възможни параметризации на кривата L, които се получават от произволна дадена параметризация чрез представяне на параметъра t като непрекъсната строго растяща функция на друг параметър s. Само при такива преобразувания на параметъра се запазва наредбата на точките на кривата L.

Забележка 3. Понятието ***пространствена крива*** се въвежда съвсем аналогично. Както при равнинна проста крива, пространствена проста крива е множеството $\{M\}$ от точки на пространството с координати x, y, z, които се определят от уравненията

(10.3) $$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\theta(t);\ \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

при условие, че функциите φ, ψ, θ са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$ и че на различни стойности на параметъра t отговарят различни точки на множеството $\{M\}$.

Като използваме понятието проста пространствена крива и понятието деление на множеството $\{t\}$ на изменение на параметъра, както и в равнинния случай, се дава определение за параметризуема пространствена крива.

Примери:

1. Нека равнинната крива L е зададена с уравненията

$$x=\cos t,\ y=\sin t;\ 0 \leqq t \leqq 3\pi.$$

Очевидно сегментът $[0, 3\pi]$ може да се раздели на сегментите $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, като за стойности на t от всеки от тези сегменти горните уравнения определят проста крива, а именно полуокръжност. В дадения случай кривата L представлява окръжност, в която полуокръжността, лежаща в горната полуравнина, се изминава два пъти.

2. Уравненията

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t;\ -\infty<t<\infty,$$

задават простата пространствена крива, наречена винтова линия.

10.1.3. Дължина на дъга на крива. Понятие за ректифицируема крива. Ще въведем понятието дължина на дъга на параметризуема крива и ще разгледаме някои свойства на криви, които имат дължина (такива криви се наричат ректифицируеми).

Ще наричаме ***права линия*** *кривата, определена с параметричните уравнения* $x=at+b$, $y=ct+d$. Константите a, b, c, d могат да се изберат така, че правата да минава през две дадени точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Частта от правата, заключена между точките M_1 и M_2, се нарича отсечка, съединяваща тези точки, а съвкупност от краен брой свързани една с друга отсечки се нарича начупена линия.

Нека кривата L се представя с уравненията

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t);\ t\in[\alpha, \beta].$$

Нека освен това T е произволно деление на сегмента $[\alpha, \beta]$ с точките $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$. Означаваме с $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ съответните точки от кривата L, т. е. точките с координати $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$, $M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2))$, ..., $M_n(\varphi(t_n), \psi(t_n))$. Начупената линия $l(t_i)=M_0M_1M_2\ldots M_n$ ще наричаме начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$. Дължина $|l_i|$ на отсечката $l_i=M_{i-1}M_i$ от тази начупена линия е разстоянието между точките $M_{i-1}(\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1}))$ и $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Затова

$$|l_i|=((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2},$$

а дължината $|l|$ на цялата начупена линия $l=M_0M_1M_2\ldots M_n$ е

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}|l_i|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

Определение. *Кривата L се нарича* ***ректифицируема,*** *ако множеството $\{|l|\}$ от дължините на вписаните в кривата L начупени линии $l=l(t_i)$, отговарящи на всички възможни деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, е ограничено. При това точната горна граница на множеството $\{|l|\}$ се нарича* ***дължина на дъгата*** *на кривата L и се означава със символа $|L|$.*

От това определение се вижда, че дължината на кривата L е винаги положително число.

Забележка 1. Съществуват неректифицируеми криви (вж. допълнението към тази глава).

Ще докажем следното помощно твърдение:

Лема. *Нека $|l_0|$ е дължина на начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T_0 на сегмента $[\alpha, \beta]$, а $|l_1|$ е дължина на начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T_1, получено от делението на T_0 посредством добавянето на една или няколко нови точки. Тогава $|l_0| \leqq |l_1|$.*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая, когато към делението T_0 е добавена само една точка γ. В този случай начупената линия, отговаряща на делението T_0, се различава от начупената линия, отговаряща на делението T_1, само с това, че една отсечка $M_k M_{k+1}$ от начупената линия, отговаряща на делението T_0, се заменя с две отсечки $M_k N$ и $N M_{k+1}$ на начупената линия, отговаряща на делението T_1 (всички останали отсечки в начупените линии, отговарящи на деленията T_0 и T_1, са едни и същи). Тъй като $|M_k M_{k+1}| \leqq |M_k N| + |N M_{k+1}|$, то $|l_0| \leqq |l_1|$. □

Ще приведем някои свойства на ректифицируемите криви:

1°. *Ако кривата L е ректифицируема, то дължината на дъгата ѝ не зависи от параметризацията на тази крива.*

Наистина нека имаме две параметризации на кривата L, а t и s са съответните параметри, определени съответно на сегментите $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$. Тъй като t е строго монотонна и непрекъсната функция на s, а s е строго монотонна и непрекъсната функция на t, то на всяко деление T на сегмента $[\alpha, \beta]$ съответствува определено деление P на сегмента $[a, b]$ и обратно.

Очевидно е, че вписаните в L начупени линии, отговарящи на съответни деления на сегментите $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$, са тъждествени и затова дължините им са равни. Но тогава и точните им горни граници ще бъдат равни, т. е. дължината на дъгата на кривата L при две различни параметризации ще бъде една и съща.

2°. *Ако ректифицируемата крива L е разделена с помощта на краен брой точки $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ на краен брой криви L_i, като точките $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ съответствуват на стойностите $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ на параметъра t и $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$, то всяка от кривите L_i е ректифицируема и сумата от дължините $|L_i|$ на всички криви L_i е равна на дължината $|L|$ на кривата L.*

Очевидно достатъчно е това свойство да се докаже за случая, когато кривата L е разделена на две криви L_1 и L_2 от точката C. Да означим с γ стойността на параметъра t, на която отговаря точката C. Тогава точките от кривата L_1 съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[\alpha, \gamma]$, а точките от кривата L_2 съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[\gamma, \beta]$. Нека

T_1 и T_2 са произволни деления на тези сегменти, а T е деление на сегмента $[\alpha, \beta]$, получено от обединението на деленията T_1 и T_2. Ако $|l_1|$, $|l_2|$, $|l|$, са дължини на начупените линии, вписани в кривите L_1, L_2 и L и отговарящи на деленията T_1, T_2 и T на сегментите, то очевидно

$$|l_1|+|l_2|=|l|. \tag{10.4}$$

Тъй като числата $|l_1|$, $|l_2|$ и $|l|$ са положителни, то от равенството (10.4) и ректифицируемостта на кривата L следва, че множествата от дължините на вписаните в кривите L_1 и L_2 начупени линии, отговарящи на всички възможни деления на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, са ограничени, т. е. кривите L_1 и L_2 са ректифицируеми. От равенството (10.4) и от определението за дължина на дъга на крива следва, че дължините $|L_1|$, $|L_2|$ и $|L|$ на дъгите на кривите L_1, L_2 и L удовлетворяват неравенството

$$|L_1|+|L_2|\leqq|L|. \tag{10.5}$$

Действително от равенството (10.4) следва, че за произволни деления T_1 и T_2 на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$ е изпълнено неравенството $|l_1|+|l_2|\leqq|l|$. От това неравенство и от определението за точна горна граница се получава неравенството (10.5).

Ще покажем, че в неравенството (10.5) знакът за неравенство може да се замени със знак за равенство. Да допуснем противното, т. е. че $|L_1|+|L_2|<|L|$. Тогава числото

$$|L|-(|L_1|+|L_2|)=\varepsilon \tag{10.6}$$

е положително. От определението за дължината $|L|$ на дъга на кривата L следва, че за положителното число ε може да се намери такова деление T_0 на сегмента $[\alpha, \beta]$, че дължината $|l_0|$ на начупената линия l_0, вписана в кривата L и отговаряща на това деление, да удовлетворява неравенството $|L|-|l_0|<\varepsilon$. Да добавим към делението T_0 точката γ и да означим полученото деление с T. Тогава съгласно доказаната лема дължината $|l|$ на начупената линия, отговаряща на делението T, още повече ще удовлетворява неравенството $|L|-|l|<\varepsilon$. Тъй като делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$ е образувано от обединението на някакви деления T_1 и T_2 на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то дължините $|l_1|$ и $|l_2|$ на кривите, отговарящи на тези деления, ще удовлетворяват съотношението (10.4). Затова е изпълнено неравенството $|L|-(|l_1|+|l_2|)<\varepsilon$. Тъй като $|l_1|+|l_2|\leqq|L_1|+|L_2|$, то още повече ще бъде в сила неравенството $|L|-(|L_1|+|L_2|)<\varepsilon$. Но това неравенство противоречи на неравенството (10.6). Полученото противоречие доказва, че предположението $|L_1|+|L_2|<|L|$ не е вярно, и следователно $|L_1|+|L_2|=|L|$. □

Забележка 2. Понятието дължина на дъга на пространствена крива, зададена параметрично с уравненията (10.3), се въвежда точно както дължина на дъга на равнинна крива. Както и в равнинния случай, се разглежда дължина $|l|$ на начупена линия, вписана в кривата L; при това

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2+(\theta(t_i)-\theta(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

Пространствената крива L, определена от уравненията (10.3), *се нарича* ***ректифицируема,*** *ако множеството $\{|l|\}$ на дължините на начупените линии l, вписани в тази крива, е ограничено. Точната горна граница $|L|$ на това множество се нарича дължина на дъгата на L.*

Пространствените ректифицируеми криви притежават свойствата 1° и 2°. Доказателствата на тези свойства са аналогични на доказателствата за равнинни криви.

10.1.4. Критерии за ректифицируемост на крива. Пресмятане дължината на дъга на крива. Ще дадем достатъчно условие за ректифицируемост на крива и формула за пресмятане дължината на дъга.

Ще употребяваме следната терминология:

1°. Ще казваме, че функцията f има в сегмента $[\alpha, \beta]$ непрекъсната първа производна, ако производната ѝ f' съществува и е непрекъсната във всяка вътрешна точка на този сегмент и ако освен това съществуват крайните граници

$$\lim_{t\to\alpha+0} f'(t) \text{ и } \lim_{t\to\beta-0} f'(t).^*$$

При това определение функцията $f'(t)$ ще бъде непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$, ако стойностите на тази функция в краищата на сегмента положим равни съответно на границите

$$\lim_{t\to\alpha+0} f'(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\beta-0} f'(t).$$

2°. Ще казваме, че функцията f има в сегмента $[\alpha, \beta]$ ограничена първа производна, ако f' съществува и удовлетворява за всички вътрешни точки на сегмента $[\alpha, \beta]$ неравенството $|f'(t)|\leq M$, където M е константа.

* Ако в условията на определение 1° се поиска допълнително съществуването на дясна производна $f'(\alpha+0)$ и лява производна $f'(\beta-0)$, то според 6.4.3 може да се твърди, че

$$\lim_{x\to\alpha+0} f'(x)=f'(\alpha+0), \quad \lim_{x\to\beta-0} f'(x)=f'(\beta-0).$$

Теорема 10.1. *Нека функциите φ и ψ са непрекъснати и имат непрекъснати първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$. Тогава кривата L, определена с параметричните уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ при $t\in[\alpha, \beta]$, е ректифицируема и дължината $|L|$ на дъгата ѝ се пресмята по формулата*

$$(10.7)\qquad |L|=\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t))^{1/2}\,dt.$$

Доказателство. Най-напред ще докажем, че кривата L е ректифицируема. Да разгледаме формулата за дължината $|l|$ на начупената линия l, вписана в кривата L и отговаряща на произволно деление на сегмента $[\alpha, \beta]$:

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

За всяка от функциите φ и ψ са изпълнени всички условия на теорема 6.4 на Лагранж във всеки от частичните сегменти $[t_{i-1}, t_i]$ (при $i=1, 2, 3, \dots, n$). Според тази теорема между t_{i-1} и t_i съществуват такива точки ξ_i и η_i, че са изпълнени равенствата

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\xi_i)\,\Delta t_i,\quad \psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\psi'(\eta_i)\,\Delta t_i,$$

където $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Следователно

$$(10.8)\qquad |l|=\sum_{i=1}^{n}(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}\,\Delta t_i.$$

Според условията на теоремата функциите φ и ψ имат в сегмента $[\alpha, \beta]$ непрекъснати и затова ограничени първи производни, т. е. за всяка вътрешна точка t на сегмента $[\alpha, \beta]$ са изпълнени неравенствата $|\varphi'(t)|\leqq M$, $|\psi'(t)|\leqq M$. Затова от формула (10.8) следва

$$0<|l|\leqq\sum_{i=1}^{n}(M^2+M^2)^{1/2}\Delta t_i=\sqrt{2}\,M\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\sqrt{2}\,(\beta-\alpha)\,M.$$

По такъв начин множеството $\{|l|\}$ от дължините на вписаните в кривата L начупени линии, отговарящи на всички възможни деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, е ограничено и по определение кривата L е ректифицируема.

Ще докажем сега, че дължината $|L|$ на кривата L се пресмята по формулата (10.7).

Ще разгледаме следната интегрална сума:

$$\sigma(t_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i))^{1/2} \Delta t_i,$$

отговаряща на делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$ и избора на междинните точки ξ_i, определено във формулата (10.8). Нека d е диаметърът на делението T, т. е. $d = \max\{\Delta t_i: 1 \leq i \leq n\}$. Ще докажем, че за всяко положително число ε може да се намери такова $\delta > 0$, че при $d < \delta$ да е изпълнено неравенството

$$||l| - I| < \varepsilon/2, \tag{10.9}$$

където I е границата на интегралните суми $\sigma(t_i, \xi_i)$ при $d \to 0$, т. е. $I = \int_\alpha^\beta (\varphi'^2(t) + \psi'^2(t))^{1/2} dt$. С други думи, ще покажем, че може да се избере деление T с толкова малък диаметър, че дължината $|l|$ на начупената линия l, вписана в кривата L и отговаряща на това деление T, да се различава от интеграла I с величина, по-малка от някое отнапред зададено число $\varepsilon/2$. Ще отбележим, че*

$$|(\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i))^{1/2} - (\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i))^{1/2}| \leq |\psi'(\eta_i) - \psi'(\xi_i)| \leq M_i - m_i,$$

където M_i и m_i са точните граници на функцията $\psi'(t)$ в частичния сегмент $[t_{i-1}, t_i]$. Затова

$$||l| - \sigma| = \left| \sum_{i=1}^{n} ((\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i))^{1/2} - (\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i))^{1/2}) \Delta t_i \right| \tag{10.10}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |(\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i))^{1/2} - (\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i))^{1/2}| \Delta t_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta t_i = S - s,$$

* Първото от тези неравенства следва от оценката

$$|(a^2 + b_1^2)^{1/2} - (a^2 + b^2)^{1/2}| = \frac{|b_1^2 - b^2|}{(a^2 + b_1^2)^{1/2} + (a^2 + b^2)^{1/2}} \leq \frac{|b_1 - b| \cdot |b_1 + b|}{|b_1| + |b|} \leq |b_1 - b|,$$

вярна за произволни числа a, b, b_1.

където S и s са съответно голямата и малката сума на функцията ψ' за делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$.

Функциите $(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}$ и ψ' са непрекъснати, а следователно и интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$, тъй като по условие $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$.

От определението за интегруемост и от основната теорема на 9.3 следва, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че при диаметър на делението $d<\delta$ да са изпълнени неравенствата

(10.11) $$|\sigma(l_i, \xi_i)-I|<\varepsilon/4, \quad S-s<\varepsilon/4.$$

Затова при $d<\delta$ съгласно (10.10) и (10.11) са в сила неравенствата

$$||l|-I|=||l|-\sigma+\sigma-I|\leq||l|-\sigma|+|\sigma-I|<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2,$$

с което верността на (10.9) е доказана.

Ще докажем сега, че сред всички възможни начупени линии l, чиято дължина $|l|$ удовлетворява неравенството (10.9), има начупени линии, дължината на които се различава от дължината $|L|$ на дъгата на кривата L с по-малко от $\varepsilon/2$.

Действително $|L|$ е точната горна граница на множеството $\{|l|\}$ от дължините на начупените линии l, вписани в кривата L и отговарящи на всички възможни деления на сегмента $[\alpha, \beta]$. Затова съществува такова деление T^*, че дължината $|l^*|$, съответствуваща на начупената линия l^* на това деление, удовлетворява неравенството

(10.12) $$0\leq|L|-|l^*|<\varepsilon/2.$$

Да раздробим делението T^*, като прибавим към него нови точки на деление така, че да се получи ново деление T с диаметър d, по-малък от δ. При това, както показахме, дължината $|l|$ на начупената линия l, отговаряща на това деление T, удовлетворява неравенството (10.9). Тъй като всички върхове на начупената линия, отговаряща на делението T^*, са също върхове и на начупената линия, отговаряща на делението T, то съгласно доказаната в 10.1.3 лема $0<|l^*|\leq|l|\leq|L|$. Затова неравенствата (10.12) ни дават право да твърдим, че

(10.13) $$0\leq|L|-|l|<\varepsilon/2.$$

И така доказахме, че в множеството на начупените линии $\{l\}$, дължината на които удовлетворява неравенството (10.9), има начупени линии, дължините на които удовлетворяват и неравенството (10.12). От неравенствата (10.9) и (10.13) получаваме

$$||L|-I|<\varepsilon.$$

Понеже ε е произволно положително число, то $|L|=I$.□

Забележка 1. Ако функциите φ и ψ са непрекъснати и имат ограничени първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L, определена от уравненията $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, е ректифицируема.

Действително в хода на доказателството на теорема 10.1 установихме, че ако функциите φ и ψ са непрекъснати в $[\alpha, \beta]$, то при условие, че първите им производни са ограничени в $[\alpha, \beta]$, дължините $|l|$ на начупените линии, вписани в кривата L и отговарящи на възможните деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, са ограничени.

Забележка 2. Формулата (10.7) за пресмятане дължината на дъга е в сила, ако функциите φ и ψ са непрекъснати, а производните им φ' и ψ' са само интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$. Действително от интегруемостта на тези производни следва тяхната ограниченост и затова съгласно забележка 1 кривата L е ректифицируема. За извеждането на неравенствата (10.10), (10.11), а следователно и на неравенството (10.9) са достатъчни непрекъснатостта на φ и ψ и интегруемостта на φ' и ψ' в сегмента $[\alpha, \beta]$, тъй като от тях съгласно следствието на теорема 9.4 следва интегруемостта на функцията $(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}$ в сегмента $[\alpha, \beta]$. Останалите разсъждения са същите, както при доказателството на теорема 10.1.

Забележка 3. Ако кривата L е графика на функцията f, която е непрекъсната и има непрекъсната производна f' в сегмента $[a, b]$, то кривата L е ректифицируема и дължината ѝ $|L|$ може да се намери по формулата

(10.14)
$$|L|=\int_a^b (1+f'^2(x))^{1/2}\,dx.$$

Действително графиката на разглежданата функция е крива, определена параметрично с уравненията $x=t$, $y=f(t)$; $a\leq t\leq b$. При това всички условия на теорема 10.1 са изпълнени. Като положим във формула (10.7) $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=f(t)$ и сменим интеграционната променлива t с x, получаваме формулата (10.14).

Забележка 4. Ако кривата L се определя с полярно уравнение $r=r(\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, и функцията r е непрекъсната с непрекъсната производна в сегмента $[\theta_1, \theta_2]$, то кривата L е ректифицируема и

(10.15)
$$|L|=\int_{\theta_1}^{\theta_2} (r^2(\theta)+r'^2(\theta))^{1/2}\,d\theta.$$

За доказателството трябва да използваме формулите за преминаване от полярни координати в декартови $x=r(\theta)\cos\theta$, y

$=r(\theta)\sin\theta$. По такъв начин кривата L се определя от параметричните уравнения $\varphi=r(\theta)\cos\theta$, $\psi=r(\theta)\sin\theta$; $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$, при което са изпълнени всички условия на теорема 10.1. Прости пресмятания довеждат до формулата (10.15).

Забележка 5. Ако се разглежда пространствена параметризуема крива L, зададена с уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\theta(t)$, и функциите φ, ψ, θ са непрекъснати и имат непрекъснати производни в $[\alpha, \beta]$, то кривата L е ректифицируема и дължината на дъгата й $|L|$ се пресмята по формулата

(10.16) $$|L|=\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\theta'^2(t))^{1/2}\,dt.$$

Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 10.1.

Забележка 6. Ако функциите φ, ψ, θ са непрекъснати и имат ограничени първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L, определена от уравненията (10.3), е ректифицируема. Ако при това производните на тези функции са интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$, то дължината $|L|$ на дъгата на кривата L може също така да се пресметне по формулата (10.16) (вж. забележки 1 и 2).

10.1.5. Диференциал на дъга. Нека функциите $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ са непрекъснати и имат непрекъснати първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$. В такъв случай променливата дължина на дъгата $L(t)$, отговаряща на стойности на параметъра от сегмента $[\alpha, t]$, съгласно теорема 10.1 се представя във вида

(10.17) $$L(t)=\int_{\alpha}^{t}(\varphi'^2(\tau)+\psi'^2(\tau))^{1/2}\,d\tau.$$

Подинтегралната функция в дясната страна на формула (10.17) е непрекъсната, затова функцията L е диференцируема и

$$L'(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}.$$

Като повдигнем това равенство на квадрат и го умножим с $(dt)^2$, ще имаме

(10.18) $$(L'(t)\,dt)^2=(\varphi'(t)\,dt)^2+(\psi'(t)\,dt)^2.$$

Тъй като $L'(t)\,dt=dL$, $\varphi'(t)\,dt=dx$, $\psi'(t)\,dt=dy$, то от формула (10.18) за ***диференциала dL на дъгата*** на равнинната крива L получаваме

(10.19) $$dL^2=dx^2+dy^2.$$

Ако се разглежда пространствена крива, определена с уравненията (10.3), то при условие за непрекъснатост на функциите φ

ψ и θ и на техните първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$ за ***диференциала dL на дъгата*** на пространствената крива L имаме формулата

(10.20) $$dL^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Примери:

1. Ще намерим дължината $|L|$ на частта от дъгата на астроидата $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежаща в първия квадрант. Тази част, както не е трудно да се види, съответствува на изменение на параметъра t от 0 до $\pi/2$. В разглеждания случай $\varphi'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $\psi'(t) = 3a\sin^2 t \,.\, \cos t$. Затова по формула (10.7)

$$|L| = \int_0^{\pi/2} (9a^2\cos^4 t \,.\, \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t)^{1/2}\,dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 3a/2.$$

2. Ще пресметнем дължината $|L|$ на дъга от параболата $y = ax^2$, $0 \leq x \leq 1$. Тъй като $y' = 2ax$, то по формула (10.14) получаваме

$$|L| = \int_0^1 \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4a}\ln|2a + \sqrt{1+4a^2}|.$$

3. Ще намерим дължината на дъгата на логаритмичната спирала $r = ae^{b\varphi}$ от точката (φ_0, r_0) до точката (φ, r). По формула (10.15) имаме

$$|L| = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (a^2 e^{2b\varphi} + a^2b^2\, e^{2b\varphi})^{1/2}\,d\varphi = (1+b^{-2})^{1/2}(r - r_0).$$

4. Ще намерим дължината на дъга от елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, отчитана от точката $M_0(0, b)$. Разглеждаме параметричното уравнение на елипсата $x = a\sin t$, $y = b\cos t$; $t \in [0, 2\pi]$. По формула (10.17) получаваме

(10.21) $$L(t) = \int_0^t (a^2\cos^2\tau + b^2\sin^2\tau)^{1/2}\,d\tau$$

$$= a\int_0^t (1 - \varepsilon^2\sin^2\tau)^{1/2}\,d\tau = a \,.\, E(\varepsilon, t).$$

Числото $\varepsilon = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ се нарича ексцентрицитет на елипсата

Неопределеният интеграл $\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt$, който се анулира при $t=0$, се нарича ***елиптичен интеграл от втори род*** (вж. 8.4). Този интеграл се означава със символа $E(\varepsilon, t)$ и не се изразява с елементарни функции.

10.2 Лице на равнинна фигура

Ще изучим въпроса за определяне и съществуване на лице на равнинна фигура, като под равнинна фигура ще разбираме произволно ограничено множество от точки в равнината.

10.2.1. Понятие за контур на множество и равнинна фигура. Да разгледаме множеството на всички точки в равнината и да фиксираме една от тези точки A.

*Ще наричаме **ε-околност на точка** A множеството от онези точки в равнината, който са разположени вътре в кръг с радиус ε и с център точката A.*

Нека сега $\{M\}$ е произволно множество от точки в равнината.

*Точката M от множеството $\{M\}$ ще наричаме **вътрешна точка** на това множество, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката M да се съдържа в множеството $\{M\}$.*

*Точка M, непринадлежаща на множеството $\{M\}$, наричаме **външна точка** за множеството $\{M\}$, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката M да няма обща точка с множеството $\{M\}$.*

*Точката M ще наричаме **контурна точка** на множеството $\{M\}$, ако тази точка не е нито вътрешна, нито външна точка за това множество.*

Ще отбележим, че точката M е контурна точка на множеството $\{M\}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ в ε-околността на точката M се съдържат както точки от множеството $\{M\}$, така и точки, непринадлежащи на това множество.

Наистина, ако в някоя ε-околност на точката M не се съдържа точка от множеството $\{M\}$ или точка, която не принадлежи на това множество, то точката M ще бъде или външна, или вътрешна точка за множеството $\{M\}$ и няма да бъде контурна за това множество.

*Съвкупността на всички контурни точки на едно множество ще наричаме **контур** на това множество.*

З а б е л е ж к а. За най-простите видове множества $\{M\}$, представляващи част от равнината, заградена с проста затворена крива или с няколко такива криви, въведеното понятие контур на множество съвпада с интуитивната представа за контур. За множества от произволен вид контурът в определения от нас смисъл може да има доста необичаен вид и да не се вмества в интуитивните ни представи за контур. Така за множеството $\{M\}$ от точките на кръга с рационални абсциса и ордината контурът в определения от нас смисъл е целият кръг.

Ще наричаме множеството $\{M\}$ от точки в равнината ***ограничено****, ако съществува кръг, съдържащ всички точки на това множество.*

Произволно ограничено множество F от точки в равнината ще наричаме ***равнинна фигура****.*

Контура на равнинна фигура F ще означаваме със символа ∂F.

10.2.2. Лице на равнинна фигура. За въвеждането на понятието лице на равнинна фигура ще тръгнем от един специален частен вид равнинни фигури — т. нар. многоъгълни фигури.

Многоъгълна фигура *в равнината ще наричаме множество, съставено от краен брой ограничени многоъгълници, лежащи в тази равнина.*

Известно е понятието ***лице на многоъгълна фигура.*** Лицето на многоъгълна фигура P ще означаваме със символа $\mu(P)$.

Ще напомним, че лицето на многоъгълна фигура е неотрицателно число със следните три свойства:

1° (адитивност). Ако P_1 и P_2 са две многоъгълни фигури без общи вътрешни точки и $P_1 \cup P_2$ е обединението на тези фигури, то

$$\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2). \tag{10.22}$$

2° (инвариантност). Ако многоъгълните фигури P_1 и P_2 са равни помежду си, то

$$\mu(P_1) = \mu(P_2). \tag{10.23}$$

3° (монотонност). Ако многоъгълната фигура P_1 се съдържа в многоъгълната фигура P_2, то $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

Свойството монотонност е следствие от свойството адитивност и от това, че лицето е неотрицателно число. Наистина, ако P_1 се съдържа в P_2, то $P_2 = P_1 \cup (P_2 \setminus P_1)$* и тъй като P_1 и $P_2 \setminus P_1$ нямат общи вътрешни точки, то съгласно свойството адитивност $\mu(P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2 \setminus P_1)$. Остава да отбележим, че $\mu(P_2 \setminus P_1) \geq 0$.

Забележка. Ще подчертаем, че лицето на многоъгълната фигура е естествено да считаме равно на едно и също число независимо от това, дали многоъгълната фигура се разглежда

* При което разликата $P_2 \setminus P_1$ на две многоъгълни фигури е също многоъгълна фигура.

със или без контура си. При разглеждане на разликата на две многоъгълни фигури $P_2 \setminus P_1$ може да се условим да считаме, че фигурата P_2 е взета с контура си, а фигурата P_1 — без контура си. При такава договореност разликата ще представлява многоъгълна фигура, взета с контура си.

Ще преминем сега към определението за лице на произволна равнинна фигура F (т. е. на произволно ограничено множество от точки в равнината).

Да разгледаме всички многоъгълни фигури P, съдържащи се в F, и всички многоъгълни фигури Q, съдържащи F.

Фигурите P ще наричаме вписани, а фигурите Q — описани. Числовото множество $\{\mu(P)\}$ от лицата на всички вписани многоъгълни фигури е ограничено отгоре (например от лицето на коя да е описана многоъгълна фигура Q). Числовото множество $\{\mu(Q)\}$ от лицата на всички описани около F многоъгълни фигури Q е ограничено отдолу (например от нулата). Затова съществуват точната горна граница

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup\{\mu(P):\ P \subset F\} \tag{10.24}$$

на лицата на всички многоъгълни фигури, вписани в F, и точната долна граница

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf\{\mu(Q) : Q \supset F\} \tag{10.25}$$

на лицата на всички многоъгълни фигури, описани около F.

Ако в F не може да се впише нито един многоъгълник, то по определение се полага $\mu_* = 0$.

Величината μ_* се нарича ***долна мярка на лицето*** на фигурата F, а μ^* — ***горна мярка на лицето*** на тази фигура. От това, че лицето на всяка вписана фигура е не по-голямо от лицето на всяка описана фигура, следва

$$\mu_*(F) \leq \mu^*(F).$$

Определение 1. *Равнинната фигура F се нарича* ***измерима*** (или ***имаща лице***), *ако горната мярка на лицето μ^* на тази фигура съвпада с долната мярка на лицето ѝ μ_*. При това числото $\mu = \mu(F) = \mu^* = \mu_*$ се нарича* ***лице*** *на фигурата F.*

Ясно е, че всяка многоъгълна фигура F е измерима в смисъла на даденото определение и лицето ѝ $\mu(F) = \mu^*(F) = \mu_*(F)$.

По такъв начин разширихме понятието лице на многоъгълници върху един по-широк клас от фигури.

Запазването на свойствата адитивност, инвариантност и монотонност ще бъде доказано по-нататък.

Ще започнем с доказателството на следния критерий за измеримост на равнинна фигура:

Теорема 10.2. *За да бъде равнинната фигура F измерима, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществуват описана около F многоъгълна фигура Q и вписана в F многоъгълна фигура P, за които*

$$\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon. \tag{10.26}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека фигурата F е измерима, т. е. $\mu^*=\mu_*$. Според определението за точни граници (10.22) и (10.23) за всяко $\varepsilon>0$ съществуват вписана многоъгълна фигура P и описана многоъгълна фигура Q, такива, че

$$\mu_*-\varepsilon/2<\mu(P)\leqq\mu_*, \quad \mu^*\leqq\mu(Q)<\mu^*+\varepsilon/2.$$

От тези неравенства и от $\mu^*=\mu_*$ заключаваме, че $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$. □

Достатъчност. Нека за всяко $\varepsilon>0$ съществуват многоъгълни фигури Q и P със свойствата, дадени във формулировката на теоремата. Тогава от неравенството (10.26) и от съотношенията $\mu(P)\leqq\mu_*\leqq\mu^*\leqq\mu(Q)$ получаваме, че

$$0\leqq\mu^*-\mu_*\leqq\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно положително число, от условието $0\leqq\mu^*-\mu_*<\varepsilon$ следва, че $\mu^*=\mu_*$. □

Теорема 10.2 допуска просто, но важно обобщение: във формулировката ѝ вместо описана и вписана многоъгълна фигура Q и P могат да се вземат произволни описана и вписана измерима равнинна фигура Q и P. В сила е следната теорема:

Теорема 10.2'. *За измеримостта на равнинната фигура F е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществуват измерима равнинна фигура Q, съдържаща F, и измерима равнинна фигура P, съдържаща се в F, за които*

$$\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon.$$

Не е нужно да се доказва необходимостта, тъй като многоъгълните фигури Q и P са измерими.

Ще докажем достатъчността. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и построяваме измерими равнинни фигури Q и P, първата от които съдържа F, а втората се съдържа в F, такива, че

$$\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon/2. \tag{10.26'}$$

Тъй като Q и P са измерими равнинни фигури, то съществуват многоъгълна фигура $\hat{Q}$, съдържаща Q, и многоъгълна фигура $\hat{P}$, съдържаща се в P, за които

$$\mu(\hat{Q})-\mu(Q)<\varepsilon/4, \quad \mu(P)-\mu(\hat{P})<\varepsilon/4.$$

От двете неравенства и от (10.26') следва, че $\mu(\hat{Q})-\mu(\hat{P})<\varepsilon$. Но понеже многоъгълната фигура $\hat{Q}$ съдържа F, а многоъгълната фигура $\hat{P}$ се съдържа в F, то фигурата F е измерима съгласно теорема 10.2. □

Ще установим още една еквивалентна формулировка на теорема 10.2. Нека F е произволна равнинна фигура, Q е многоъгълна фигура, взета с контура си и съдържаща фигурата F, а P е многоъгълна фигура, взета без контура си и съдържаща се във фигурата F. Тогава разликата $Q\setminus P$ е многоъгълна фигура, взета с контура си и съдържаща всички точки от контура ∂F на фигурата F.*

От адитивността на лицето на многоъгълна фигура следва равенството $\mu(Q\setminus P)=\mu(Q)-\mu(P)$, а от него — че неравенството (10.26) във формулировката на теорема 10.2 може да се запише във вида

$$\mu(Q\setminus P)<\varepsilon. \tag{10.26''}$$

Определение 2. *Множество от точки в равнината ще наричаме* ***множество с мярка нула,*** *ако се съдържа в многоъгълна фигура с произволно малко лице.*

Неравенството (10.26″) и това, че многоъгълната фигура $Q\setminus P$ съдържа всички точки на контура ∂F на равнинната фигура F, дават право да се изкаже теорема 10.2 по следния начин:

Теорема 10.2″. *Равнинната фигура F е измерима тогава и само тогава, когато контурът ѝ ∂F има мярка нула.*

Необходимостта е очевидна.

Ще се спрем на доказателството на достатъчността. Вписваме равнинната фигура F в квадрат E със страни, успоредни на координатните оси, и разделяме квадрата на елементарни квадрати със страна h с помощта на прави, успоредни на координатните оси. Това разделяне на квадрата ще наричаме мрежа със стъпка h.

Ще докажем най-напред, че ако контурът ∂F на фигурата F се съдържа в многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, то при достатъчно малка стъпка h на мрежата контурът ∂F на фигурата F се съдържа в обединението на елементарни квадрати от мрежата с общо лице, ненадминаващо 32ε.

Наистина достатъчно е да отбележим, че всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, е сума от краен брой триъгълници без общи вътрешни точки; всеки триъгълник е равен на обеди

* Следва от това, че всяка вътрешна точка на многоъгълната фигура P е вътрешна точка на F, а всяка външна точка на многоъгълната фигура Q е външна точка на F. Достатъчно е да вземем пред вид, че разликата $Q\setminus P$ съдържа всички точки от равнината с изключение на външните точки на Q и вътрешните точки на P.

нението на два правоъгълни триъгълника (без общи вътрешни точки); всеки правоъгълен триъгълник се съдържа в два пъти по-голям по лице правоъгълник; всеки правоъгълник се съдържа в обединението на краен брой квадрати, сумата от лицата на които не е по-голяма от два пъти лицето на правоъгълника; всеки квадрат се съдържа в два пъти по-голям по лице квадрат със страни, успоредни на координатните оси.

И така всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, се съдържа в обединението на краен брой квадрати със страни, успоредни на координатните оси, и с общо лице, по-малко от 8ε.

От тези краен брой квадрати избираме квадрата с най-малка страна (ако има няколко такива квадрата, избираме един от тях) и вземаме за стъпка h на мрежата половината от дължината на страната на този квадрат.

При този избор на h всеки от описаните квадрати (със страни, успоредни на координатните оси) ще се съдържа в обединението на елементарни квадрати на мрежата, общото лице на които не надминава учетвореното лице на дадения квадрат.

Затова всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, се съдържа в обединението на елементарни квадрати от мрежата, общото лице на които е по-малко от 32ε.

Следователно, ако контурът ∂F на равнинната фигура F има лице, равно на нула, то за всяко $\varepsilon>0$ при посочения избор на стъпката h на мрежата целият контур ∂F ще се съдържа в обединението от елементарни квадрати на мрежата, общото лице на които е по-малко от 32ε.

За да завършим доказателството, е достатъчно да отбележим, че обединението на всички елементарни квадрати, които съдържат само вътрешни точки на фигурата F, е многоъгълна фигура, съдържаща се в F, а обединението на тази фигура P с всички елементарни квадрати на мрежата, съдържащи точки от контура ∂F на фигурата F, е многоъгълна фигура Q, съдържаща фигурата F, и $\mu(Q)-\mu(P)<32\varepsilon$. □

Като използваме тази теорема, ще установим измеримостта на широк клас равнинни фигури.

Лема. *Всяка ректифицируема крива има лице, равно на нула.*

Доказателство. Нека L е ректифицируема крива, а $|L|$ е дължината ѝ. Разделяме тази крива с помощта на $n+1$ точки на части с дължина $|L|/n$. Вземаме всяка от тези $n+1$ точки за център на квадрат със страна $2|L|/n$. Сумата от тези квадрати е многоъгълна фигура, описана около кривата L, а лицето на тази многоъгълна фигура не надминава сумата от лицата на съставящите я квадрати, т. е. числото $4|L|^2(n+1)n^{-2}$. Тъй като $|L|$ е фиксирано, а n може да се избере произволно голямо, то числото

$4|L|^2(n+1)n^{-2}$ може да се направи по-малко от всяко отнапред избрано число $\varepsilon>0$. Следователно кривата L може да се включи в многоъгълна фигура с произволно малко лице. □

От тази лема и от теорема 10.2″ следва теоремата:

Теорема 10.3. *Всяка равнинна фигура, чийто контур се състои от една или няколко ректифицируеми криви, е измерима.*

Ще покажем сега, че въведеното понятие лице на равнинна фигура притежава свойствата адитивност (вж. 10.22)), инвариантност (вж. (10.23)) и монотонност. Ще се убедим най-напред в адитивността на лицето. Нека F_1 и F_2 са измерими фигури без общи вътрешни точки и F е обединението им. Тогава F е измерима и

$$\mu(F)=\mu(F_1)+\mu(F_2). \tag{10.27}$$

Измеримостта на фигурата F следва от теорема 10.2″ и от това, че контурът ѝ ∂F е съставен от множества с лица, равни на нула, тъй като ∂F е част от обединението на контурите ∂F_1 и ∂F_2 на фигурите F_1 и F_2. (Очевидно всяка част на множество с лице, равно на нула, също има лице, равно на нула.)

Ще докажем верността на равенството (10.27). Разглеждаме многоъгълните фигури P_1 и P_2, вписани съответно в F_1 и F_2, и многоъгълните фигури Q_1 и Q_2, описани съответно около F_1 и F_2. Фигурите P_1 и P_2 съставят многоъгълна фигура P и нямат общи вътрешни точки. Затова съгласно (10.24)

$$\mu(P)=\mu(P_1\cup P_2)=\mu(P_1)+\mu(P_2).$$

Многоъгълните фигури Q_1 и Q_2, евентуално пресичащи се, като сума съставят многоъгълната фигура Q, лицето на която не надминава $\mu(Q_1)+\mu(Q_2)$. Затова

$$\mu(P)=\mu(P_1)+\mu(P_2)\leq\mu(F)\leq\mu(Q)\leq\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

От друга страна, според определението за измеримост за фигурите F_1 и F_2 са верни неравенствата $\mu(P_1)\leq\mu(F_1)\leq\mu(Q_1)$ и $\mu(P_2)\leq\mu(F_2)\leq\mu(Q_2)$, от които следва, че

$$\mu(P_1)+\mu(P_2)\leq\mu(F_1)+\mu(F_2)\leq\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

По такъв начин двете величини $\mu(F)$ и $\mu(F_1)+\mu(F_2)$ са заключени между числата $(\mu(Q_1)+\mu(Q_2))$ и $(\mu(P_1)+\mu(P_2))$, разликата между които

$$(\mu(Q_1)+\mu(Q_2))-(\mu(P_1)+\mu(P_2))=(\mu(Q_1)-\mu(P_1))$$
$$+(\mu(Q_2)-\mu(P_2))$$

може да бъде направена произволно малка.

Следователно тези две величини са равни, т. е. в сила е равенството (10.27). □

Свойството инвариантност на лице на произволна равнинна фигура непосредствено следва от инвариантността на лицето на многоъгълна фигура (вж. 10.23)) и от начина на определяне на лице на измерима фигура чрез лицата на многоъгълни фигури.

Накрая свойството монотонност на лицето следва непосредствено от определението за измеримост на равнинна фигура.

З а б е л е ж к а. Сечението на две измерими фигури е измерима фигура.

Действително нека $F=F_1\cap F_2$ и F_1 и F_2 са измерими.

Всяка контурна точка на F е контурна или за F_1, или за

Затова твърдението следва от теорема (10.2″) и от това, че

на две множества с лица, равни на нула, има също

равно на нула.

Въведеното в тази точка понятие лице се нарича ***лице по Жордан**** или ***мярка на Жордан.***

По-рано се убедихме, че лицето по Жордан притежава свойството адитивност, т. е. ако $F=F_1\cup F_2$, а F_1 и F_2 са измерими фигури без общи вътрешни точки, то F е измерима и $\mu(F)=\mu(F_1)+\mu(F_2)$. Това свойство е очевидно в сила и за обединението на произволен краен брой $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ измерими фигури без общи вътрешни точки. Ако

$$F=\bigcup\{F_i : i=1, 2, \ldots, n\},$$

то F е измерима и $\mu(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)$ (свойство крайна адитивност).

Обаче лицето по Жордан (мярката на Жордан) не притежава свойството изброима адитивност, т. е. обединението на изброима съвкупност от измерими фигури $F_1, F_2, F_3, \ldots$, без общи вътрешни точки може да не бъде измерима фигура. Ще илюстрираме това с пример. Разглеждаме в равнината квадрата $D: 0<x<1$, $0<y<1$. Вземаме в квадрата D точките с рационални координати. Не е трудно да се покаже, че тези точки са изброимо множество. Разполагаме ги във вид на редица

$$z_1=(x_1, y_1),\ z_2=(x_2, y_2), \ldots, z_n=(x_n, y_n), \ldots$$

Фиксираме числото $\varepsilon>0$ и построяваме кръг O_1 с център в точката z_1 и радиус $r_1<\varepsilon/2$, изцяло съдържащ се в квадрата D.

Първата от точките $z_2, z_3, z_4, \ldots$, която не попада в кръга O_1, означаваме със z_{n_2}, и построяваме кръг O_2 с център точката z_{n_2} и радиус $r_2<\varepsilon\,.\,2^{-2}$, който да не пресича кръга O_1 и изцяло да се съдържа в квадрата D.

* Камил Жордан — френски математик (1838—1922).

Продължавайки тези разсъждения, построяваме редица от кръгове $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n, \ldots$ с радиуси $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$, $r_n < \varepsilon . 2^{-n}$, които не се пресичат помежду си и изцяло се съдържат в квадрата D.

Всеки от тези кръгове е измерим и има лице, равно на $\pi . r_n^2$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Ще се убедим, че обединението F на тези изброимо много кръгове $F=O_1 \cup O_2 \cup \ldots$ е фигура, неизмерима по Жордан. Нека Q е произволна многоъгълна фигура, съдържаща фигурата F. Очевидно във всяка ε-околност на всяка точка на квадрата D има точки от редицата $\{z_n\}$, т. е. има точки от фигурата F. Но това означава, че всяка точка на квадрата D е или вътрешна, или контурна точка на фигурата F, т. е. многоъгълната фигура Q съдържа целия квадрат D и следователно

$$\mu(Q) \geq \mu(D) = 1.$$

Нека сега P е произволна многоъгълна фигура, съдържаща се в F. Тогава лицето $\mu(P)$ няма да надминава сумата от лицата на всички кръгове $O_1, O_2, O_3, \ldots$, т. е.

$$\mu(P) \leq \pi(r_1^2 + r_2^2 + \ldots) < \pi\varepsilon^2(2^{-2} + 2^{-4} + \ldots) = \pi\varepsilon^2/3.$$

И така $\mu(Q) \geq 1$ и $\mu(P) \leq \pi\varepsilon^2/3$ за всяка многоъгълна фигура Q, съдържаща F, и всяка многоъгълна фигура P, съдържаща се в F. Но това означава, че при малко ε разликата $\mu(Q)-\mu(P)$ е по-голяма от $1-\pi\varepsilon^2/3$ и не може да бъде направена произволно малка, т. е. фигурата F не е измерима по Жордан.

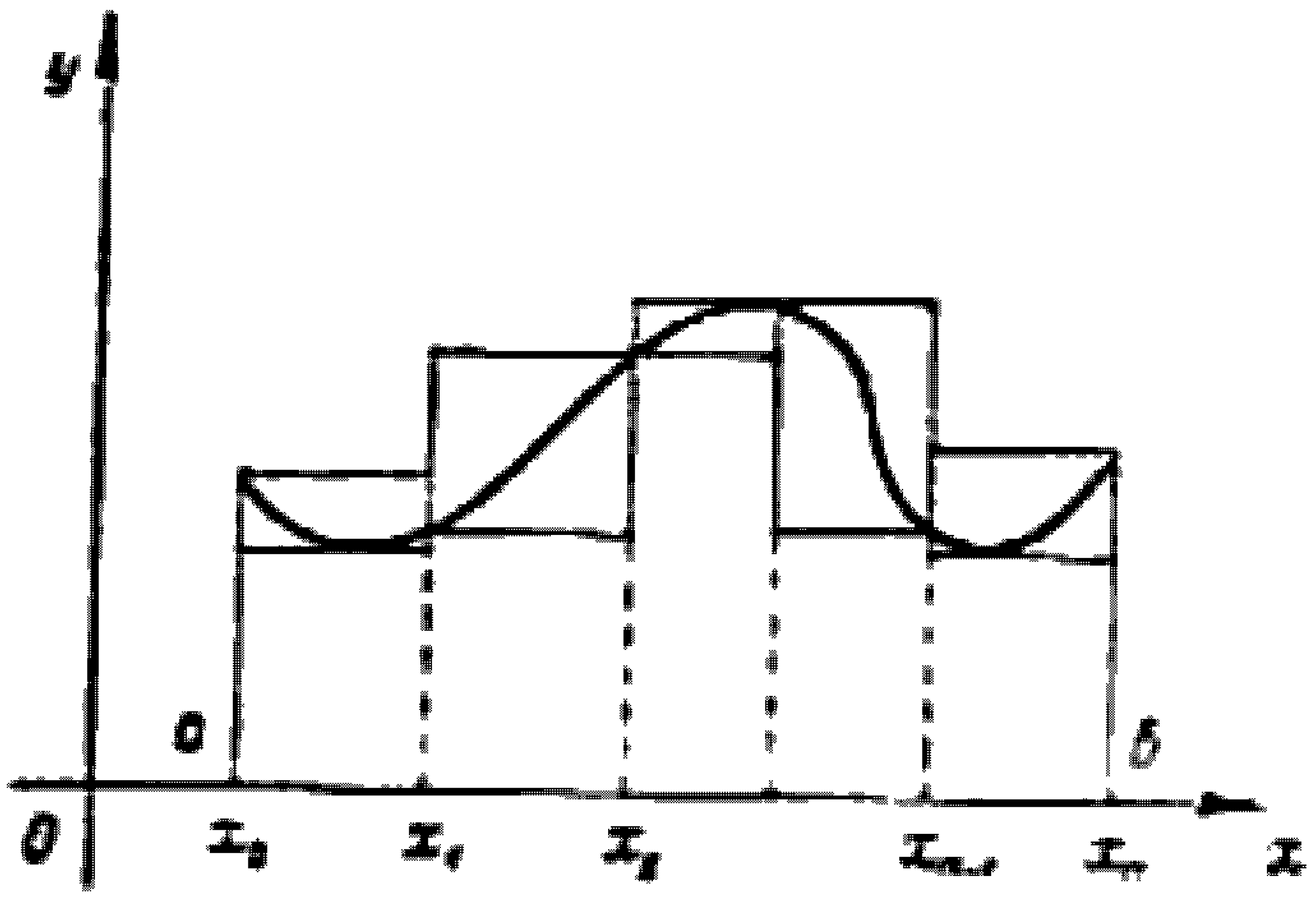
Ще отбележим, че може да се въведе друго, обобщено понятие за лице — т. нар. мярка на Лебег*, която вече притежава и свойството изброима адитивност.

10.2.3. Лице на криволинеен трапец и криволинеен сектор. Криволинеен трапец се нарича фигурата, заградена от графиката на дефинирана върху сегмента $[a, b]$ непрекъсната и неотрицателна функция f, перпендикулярните към оста Ox прави $x=a$ и $x=b$ и отсечката от оста Ox, заключена между точките a и b (фиг. 10.1).

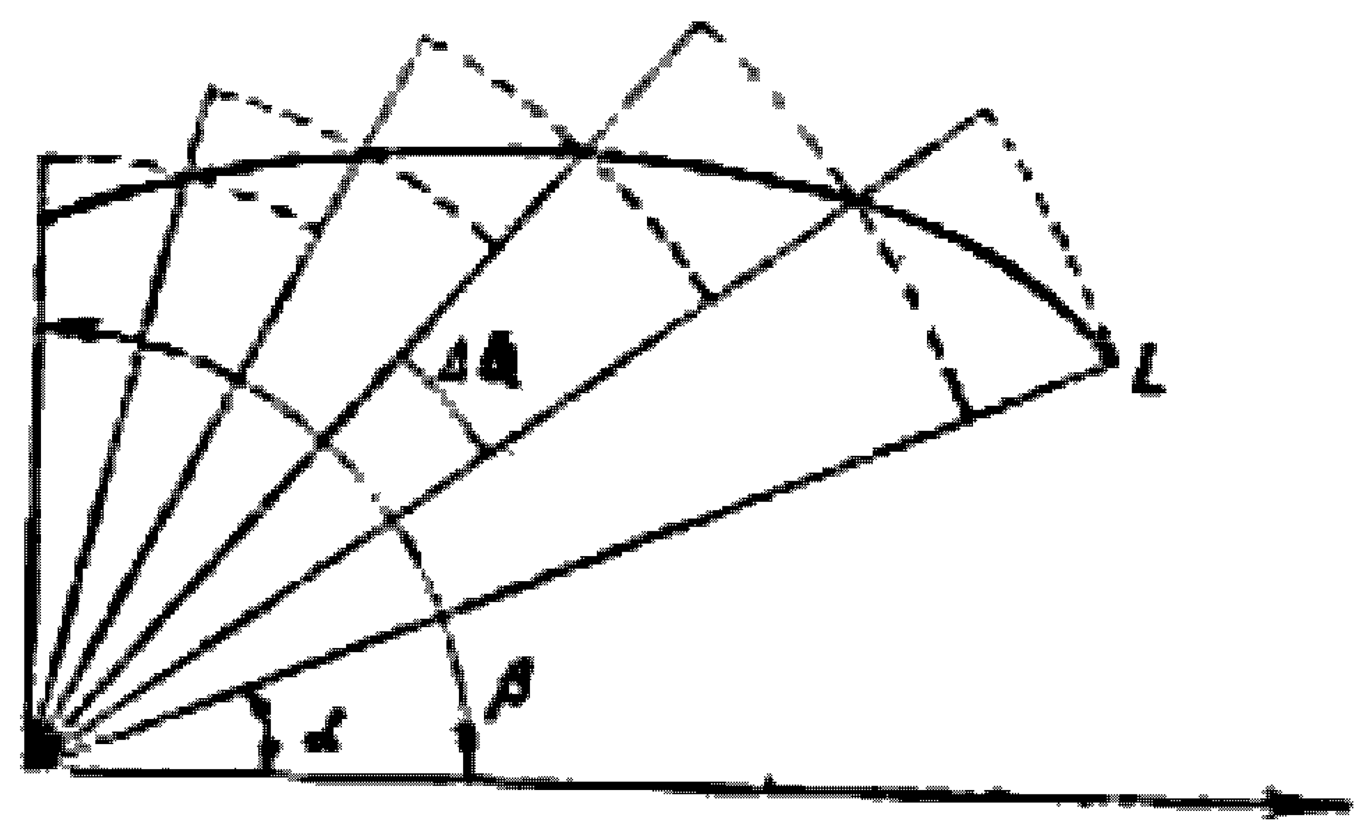
В сила е следното твърдение:

Криволинейният трапец *представлява измерима фигура F, лицето $\mu(F)$ на която се пресмята по формулата*

* Анри Лебег — френски математик (1875—1941).



Фиг. 10.1



Фиг. 10.2

$$\mu(F)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.28}$$

Доказателство. Непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема, следователно за всяко положително число ε може да се намери деление на сегмента $[a, b]$, за което разликата между голямата сума S и малката сума s да бъде по-малка от ε. Но S и s са равни съответно на $\mu(Q)$ и $\mu(P)$, където $\mu(Q)$ и $\mu(P)$ са лицата на многоъгълни фигури, първата от които съдържа криволинейния трапец, а втората се съдържа в криволинейния трапец (на фиг. 10.1 са изобразени също и тези многоъгълни фигури). По такъв начин $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ и съгласно теорема 10.2 криволинейният трапец е измерим. Тъй като за всяка интегруема функция границата както на големите суми S, така и на малките суми s е равна на $\int_a^b f(x)\,dx$, когато диаметърът на делението клони към нула, и $s\leq\mu(F)\leq S$, то лицето $\mu(F)$ на криволинейния трапец се намира по формулата (10.28). □

Забележка. Ако функцията f е непрекъсната и неположителна в сегмента $[a, b]$, то стойността на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, взет с отрицателен знак, е равна на лицето на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията f, ординатите в точките a и b и отсечката от оста Ox между точките a и b. Затова, ако f си сменя знака, то $\int_a^b f(x)\,dx$ е равен на сумата от лицата на криволинейните трапеци, взети със съответния знак, разположени над и под оста Ox, при това лицата на първите са взети със знак плюс, а на вторите — със знак минус.

Ще преминем сега към разглеждане на лицето на криволинеен сектор. Нека кривата L е зададена с уравнения в полярни координати $r=r(\theta)$; $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ (фиг. 10.2), при което функцията r е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[\alpha, \beta]$.

Ще наричаме криволинеен сектор равнинната фигура, ограничена от кривата L и двата лъча, сключващи с полярната ос ъгли α и β.

Ще докажем следното твърдение:

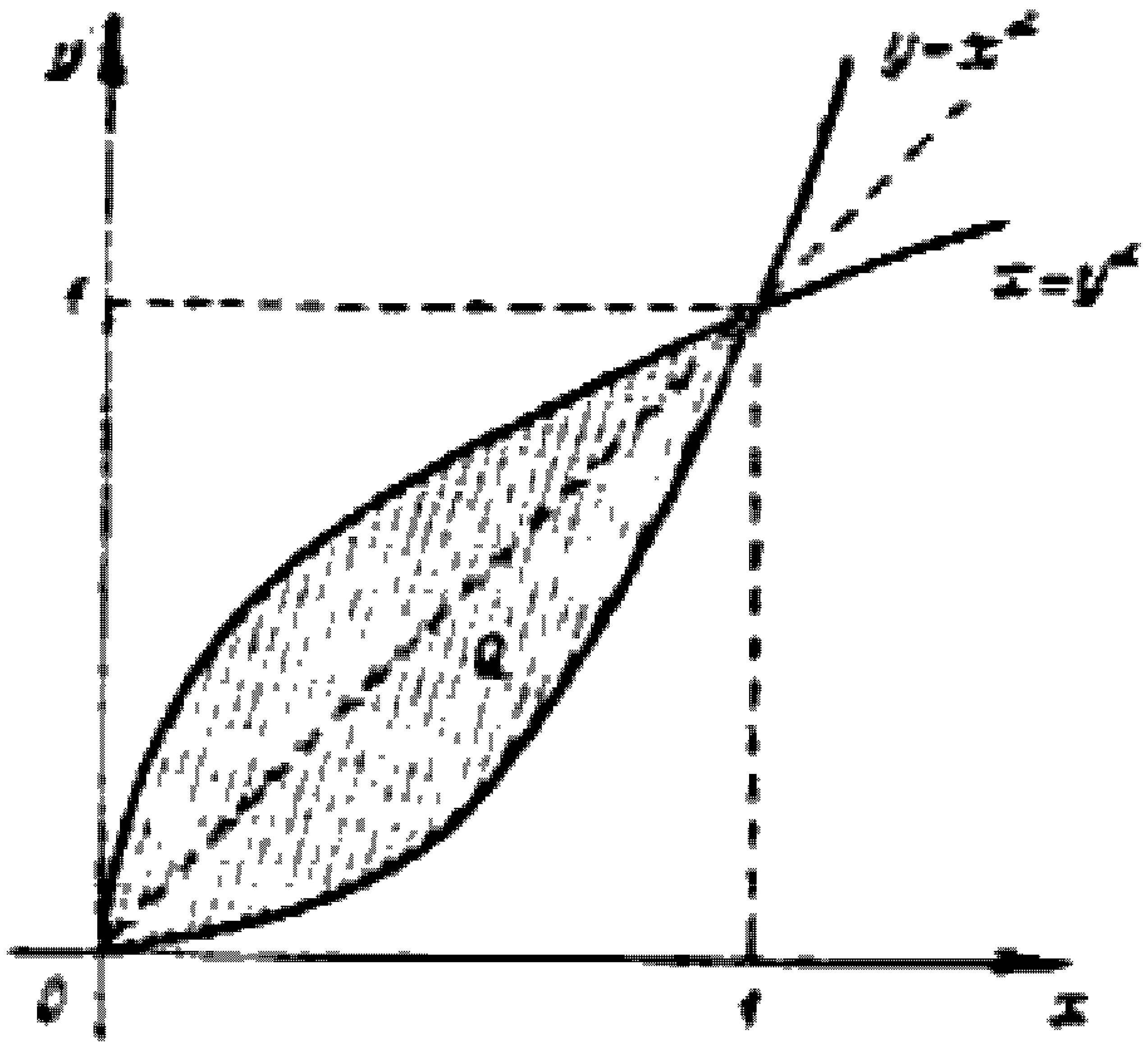
Криволинейният сектор *е измерима фигура F, лицето на която се пресмята по формулата*

$$\mu(F)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta. \tag{10.29}$$

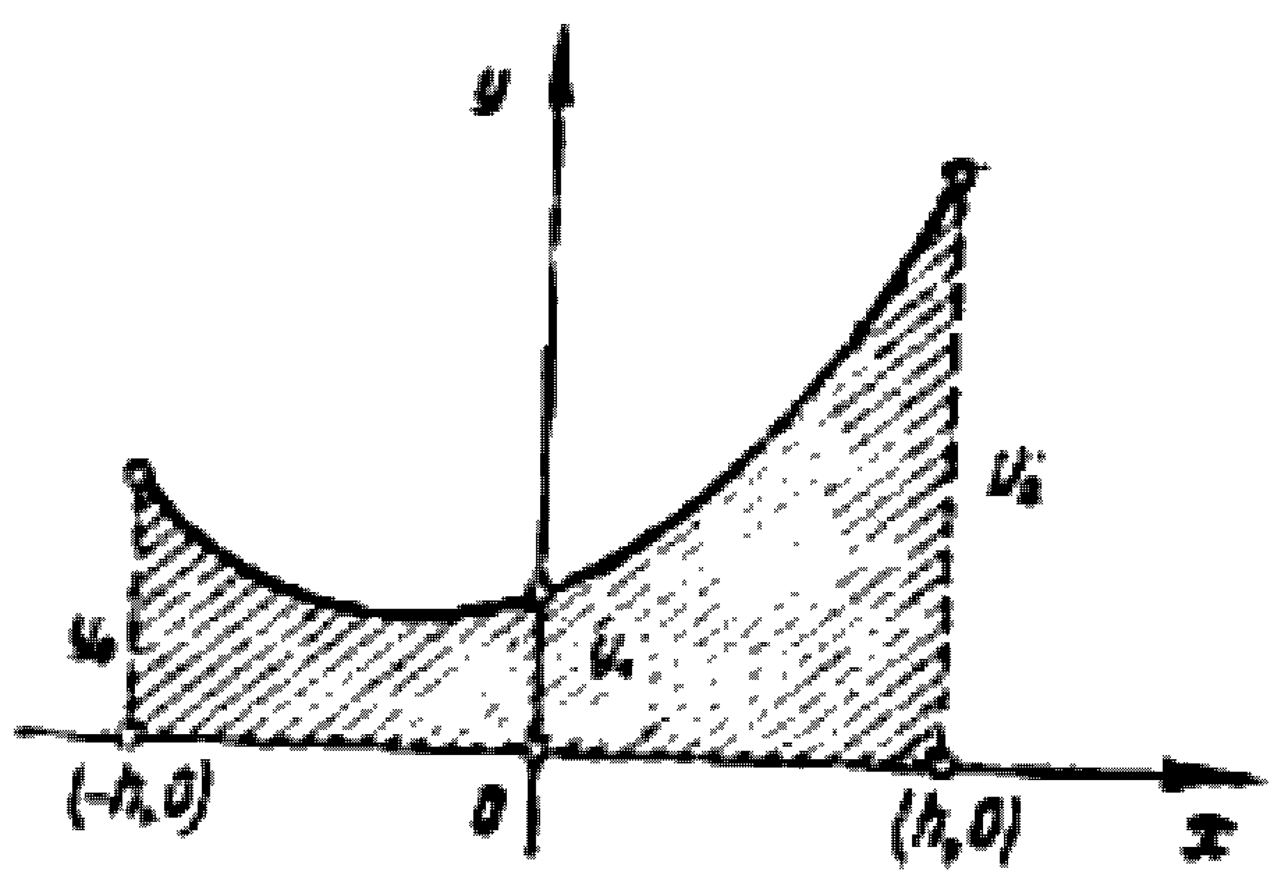
Доказателство. Разглеждаме деление на сегмента $[\alpha, \beta]$ с точките $\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta$ и за всеки частичен сегмент $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ построяваме кръгови сектори с радиуси минималната r_i и максималната R_i стойност на функцията r в сегмента $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. В резултат получаваме две измерими фигури, първата фигура A, съдържаща се в криволинейния сектор, а втората B, съдържаща този сектор (вж. фиг. 10.2). Лицата $\mu(A)$ и $\mu(B)$ на тези измерими фигури A и B са съответно равни на $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})r_i^2$ и на $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})R_i^2$. Обръщаме внимание на това, че първата от тези суми е малката сума s, а втората — голямата сума S на функцията $\frac{1}{2}r^2$ в сегмента $[\alpha, \beta]$ за посоченото деление на този сегмент. Тъй като непрекъснатата в сегмента $[\alpha, \beta]$ функция $\frac{1}{2}r^2$ е интегруема в този сегмент, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува деление, за което разликата $S-s=\mu(B)-\mu(A)$ е по малка от ε.

Тъй като A и B са две измерими фигури, първата от които се съдържа в криволинейния сектор F, а втората съдържа F, то съгласно теорема 10.2′ криволинейният сектор е измерим.

Валидността на формулата (10.29) за лицето следва от това, че мярката му $\mu(F)$ е заключена между $s=\mu(A)$ и $S=\mu(B)$, а двете суми s и S клонят към интеграла в дясната страна на (10.29) при клонене на диаметъра на делението към нула. □



Фиг. 10.3



Фиг. 10.4

Примери :

1. Да се намери лицето $\mu(F)$ на фигурата F, ограничена от на функциите $y=x^{\alpha}$ и $x=y^{\alpha}$, $\alpha \geqq 1$ (фиг. 10.3). Понеже е симетрична относно бисектрисата на първия квадрант, й може да бъде получено, като от единица (лицето на се извади удвоеното лице на криволинейния трапец, за- с графиката на функцията $y=x^{\alpha}$, $\alpha \geqq 1$, в сегмента $[0, 1]$. по формулата (10.28) получихме, че

$$\mu(F)=1-2\int_0^1 x^{\alpha}\,dx = 1-2x^{\alpha+1}/(\alpha+1)\Big|_0^1=(\alpha-1)/(\alpha+1).$$

2. През три точки с координати $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) ми- само една парабола $y=Ax^2+Bx+D$ (или права, ако тези лежат на една права).

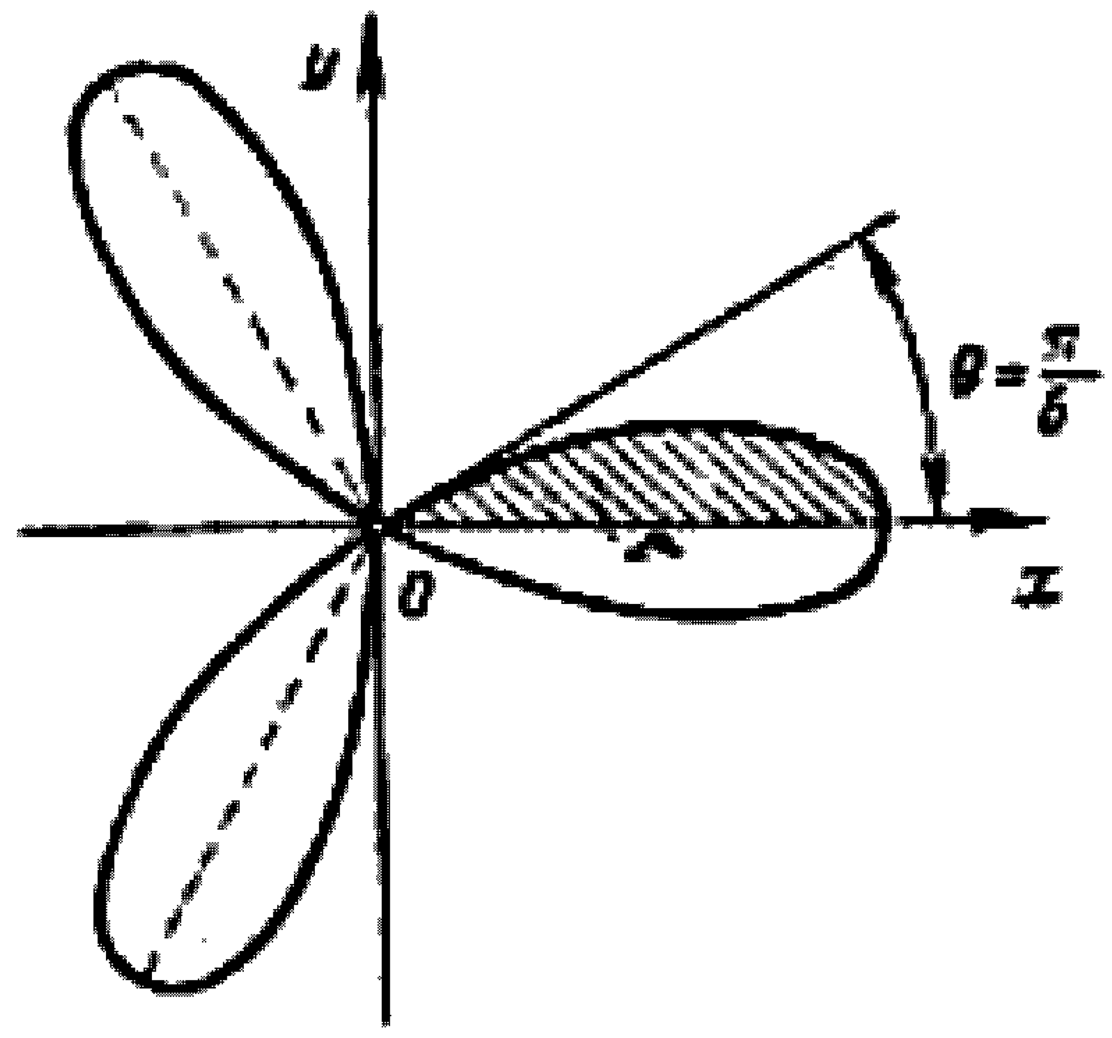
Наистина условието трите точки $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) да на параболата ни води до система уравнения относно A, D:

$$\left|\begin{array}{l} Ah^2-Bh+D=y_0, \\ D=y_1, \\ Ah^2+Bh+D=y_2. \end{array}\right.$$

ази система има единствено решение

$$A=(y_0-2y_1+y_2)/2h^2,\quad B=(y_2-y_0)/2h,\quad D=y_1.$$

намерим лицето $\mu(F)$ на криволинейния трапец F, определен парабола, правите, успоредни на оста Oy и ми- през точките $(-h, 0)$ и $(h, 0)$, и отсечката от оста Ox, между тези точки (фиг. 10.4).



Фиг. 10.5

По формулата (10.28) имаме

$$\mu(F)=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+D)\,dx=\frac{1}{3}Ax^3+\frac{1}{2}Bx^2+Dx\Big|_{-h}^{h}$$

$$=2Ah^3/3+2Dh.$$

Като заместим намерените стойности за A и D чрез ординатите y_0, y_1 и y_2 и величината h, получаваме

$$\mu(F)=h(y_0+4y_1+y_2)/3.$$

3. Да се намери лицето $\mu(F)$ на трилистника $r=a\cos 3\theta$ (фиг. 10.5). От чертежа се вижда, че е достатъчно да се пресметне онази част от лицето на трилистника, която отговаря на изменението на θ от 0 до $\pi/6$, и полученият резултат да се умножи на шест. Затова по формула (10.29) получаваме

$$\mu(F)=6\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta\,d\theta=3a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta$$

$$=3a^2\left(\pi/12+\frac{1}{12}\sin 6\theta\Big|_0^{\pi/6}\right)=\pi\cdot a^2/4.$$

10.3. Обем на тяло в пространството

Основните определения и твърдения тук са аналогични на съответните определения и твърдения от 10.2. Това ни позволява да се ограничим с основни формулировки.

10.3.1. Обем на тяло. Да разгледаме множеството от всички точки на пространството и да фиксираме една от тези точки A.

ε-околност на точката A ще наричаме множеството от всички точки на пространството, разположени вътре в кълбо с радиус ε и център в точката A.

Точката A ще наричаме ***вътрешна (външна) точка*** на множеството $\{M\}$ от точки на пространството, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката A изцяло принадлежи (не принадлежи) на множеството $\{M\}$.

Точките на множеството $\{M\}$, които не са нито вътрешни, нито външни, ще наричаме ***контурни точки*** на множеството $\{M\}$, а съвкупността от всички контурни точки ще наричаме ***контур*** на множеството $\{M\}$.

Множеството $\{M\}$ от точки на пространството ще наричаме ***ограничено множество*** или ***тяло***, ако съществува кълбо, съдържащо всички точки на това множество.

Сред всички тела ще отделим т. нар. ***многостенни тела***, представляващи обединение на краен брой ограничени многостени. Понятието обем на многостенно тяло е известно. Ще подчертаем, че този обем (както и лицето на многоъгълна фигура) притежава свойствата адитивност, инвариантност и монотонност.

Да разгледаме произволно тяло F, а също и всички многостенни тела P, съдържащи се в F, и всички многостенни тела Q, съдържащи F.

Ще наречем горна мярка на обема на тялото F точната долна граница на числовото множество $\{\mu(Q)\}$ от обемите на всички многостенни тела Q, съдържащи F, т. е. числото

$$\mu^*=\mu^*(F)=\inf\{\mu(Q):Q\supset F\}.$$

Аналогично ще наречем долна мярка на обема на тялото F точната горна граница на числовото множество $\{\mu(P)\}$ от обемите на всички многостенни тела P, съдържащи се в F, т. е. числото

$$\mu_*=\mu_*(F)=\sup\{\mu(P):P\subset F\}.$$

От тези определения е ясно, че $\mu_*\leq\mu^*$.

Определение 1. *Тялото F се нарича* ***измеримо (имащо обем),*** *ако $\mu^*=\mu_*$. При това числото $\mu=\mu(F)=\mu^*=\mu_*$ се нарича* ***обем*** *на тялото F.*

Напълно аналогично на теорема 10.2 се доказва следното твърдение:

Теорема 10.4. *Необходимото и достатъчно условие тялото F да бъде измеримо е за всяко $\varepsilon>0$ да съществуват многостенно тяло P, съдържащо се в F, и многостенно тяло Q, съдържащо F за които $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$.*

Забележка. Във формулировката на теорема 10.4 вместо многостенни тела P и Q могат да се вземат произволни измерими тела P и Q, удовлетворяващи всички останали условия на теоремата.

Определение 2. *Множество от точки на пространството ще наричаме* ***множество с нулев обем,*** *ако това множество се съдържа в многостенно тяло с произволно малък обем.*

Теорема 10.4 може да се преформулира така:

Теорема 10.4. *Тялото F е измеримо тогава и само тогава, когато неговият контур има нулев обем.*

Въведеното от нас понятие за обем на тяло има свойствата адитивност, инвариантност и монотонност.

10.3.2. Някои класове измерими тела. ***Цилиндрично тяло*** *ще наричаме тялото, ограничено с цилиндрична повърхност, чиито образуващи са успоредни на дадена ос, и с две равнини, перпендикулярни на тази ос.*

Сеченията на тези равнини с цилиндричната повърхност са равнинни фигури, наречени **основи** на цилиндричното тяло, а разстоянието h между основите се нарича **височина** на цилиндричното тяло (фиг. 10.6).

В сила е следното твърдение:

Ако основата на цилиндричното тяло F е измерима равнинна фигура G, то тялото F е измеримо и обемът му $\mu(F)$ е равен на $\mu(G) \, . \, h$, където $\mu(G)$ е лицето на основата G, а h е височината на това цилиндрично тяло.

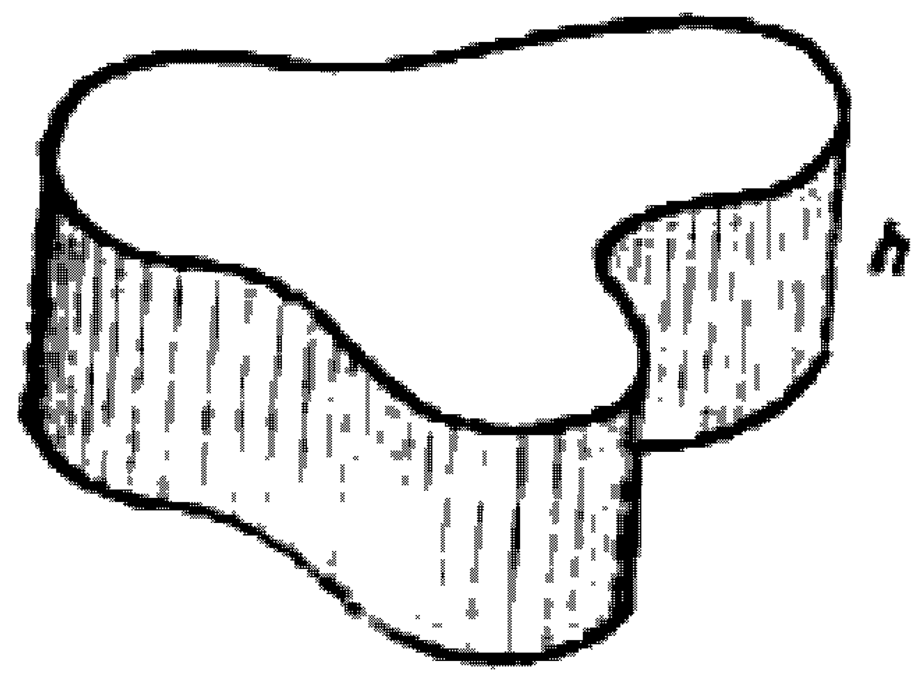
Доказателство. Тъй като равнинната фигура G е измерима, то за всяко $\varepsilon>0$ могат да се намерят описана и вписана в тази фигура многоъгълни фигури Q и P, за които $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon/h$.

Обемите на многостенните тела F_Q и F_P, за основи на които служат многоъгълните фигури Q и P, а височината им е равна на h, са равни съответно на $\mu(Q) \, . \, h$ и $\mu(P) \, . \, h$. Затова

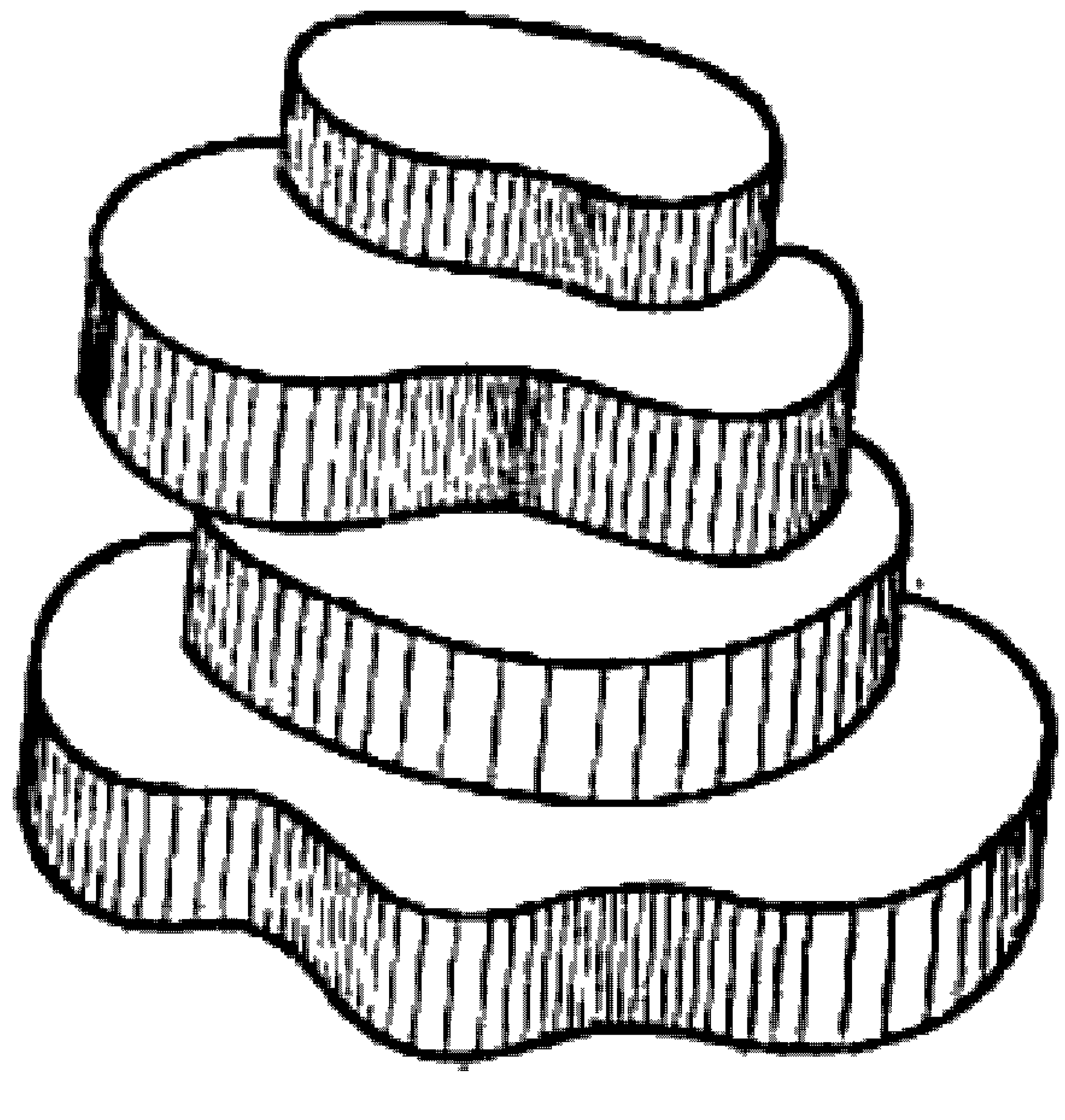
$$\mu(Q) \, . \, h-\mu(P) \, . \, h=(\mu(Q)-\mu(P)) \, . \, h<\frac{\varepsilon}{h} \, . \, h=\varepsilon.$$

Тъй като многостенното тяло F_Q съдържа F, а многостенното тяло F_P се съдържа в F, то съгласно теорема 10.4 тялото F е измеримо. Понеже $\mu(Q)h \leq \mu(G)h \leq \mu(Q)h$, обемът на цилиндричното тяло F е равен на $\mu(G) \, . \, h$. □

От свойството адитивност на обема и доказаното твърдение следва, че стъпаловидните тела са измерими (стъпаловидно тяло се нарича обединението на краен брой цилиндрични тела, разположени така, че горната основа на всяко предидущо тяло лежи в една равнина с долната основа на следващото (вж. фиг. 10.7).



Фиг. 10.6



Фиг. 10.7

От предишните разсъждения непосредствено следва твърдението:

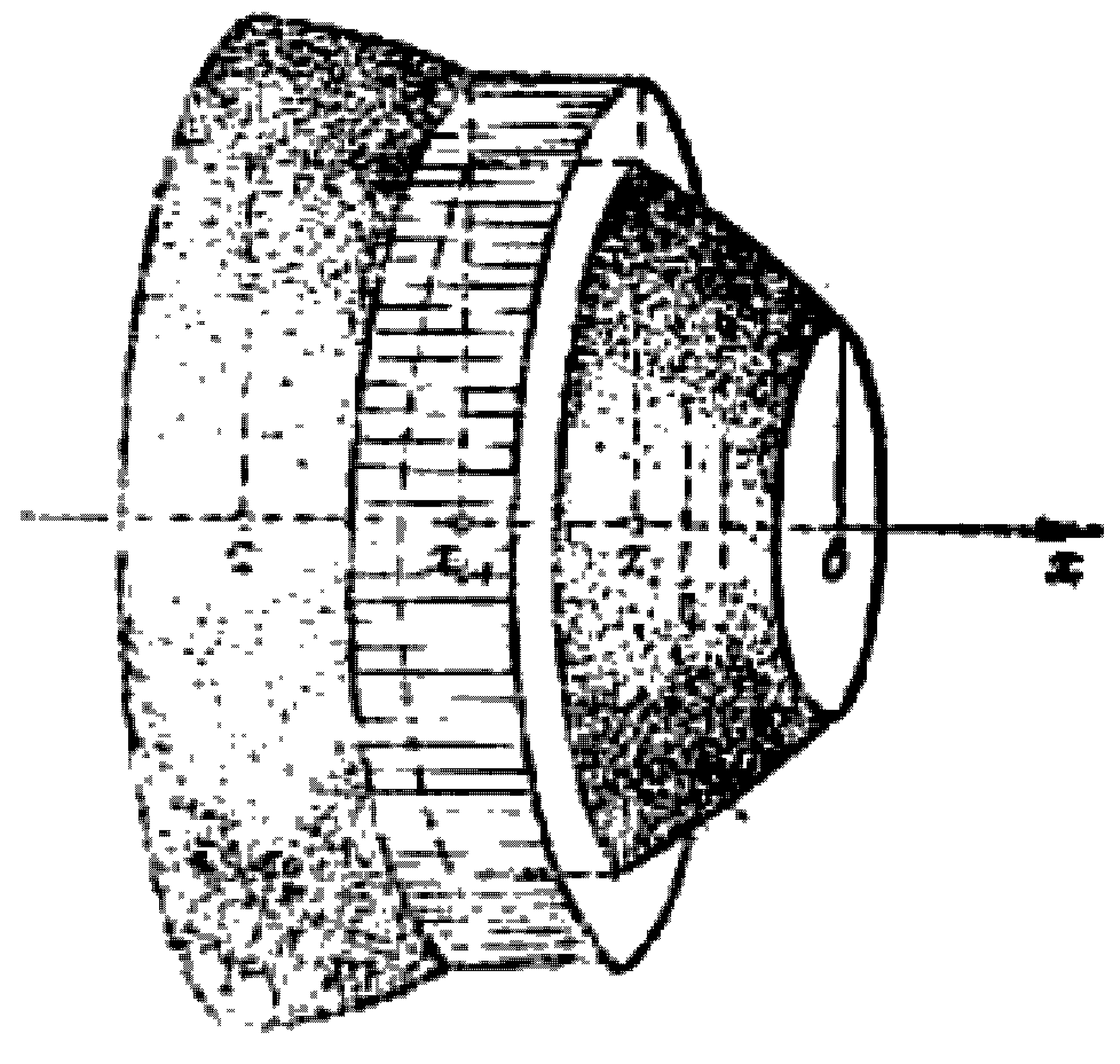
Ако за всяко положително число ε съществуват стъпаловидно тяло F_1, съдържащо F, и стъпаловидно тяло F_2, съдържащо се в F, за които $\mu(F_1)-\mu(F_2)<\varepsilon$, то тялото F е измеримо.

Използвайки това твърдение, ще докажем измеримостта на ротационните тела. В сила е следното твърдение:

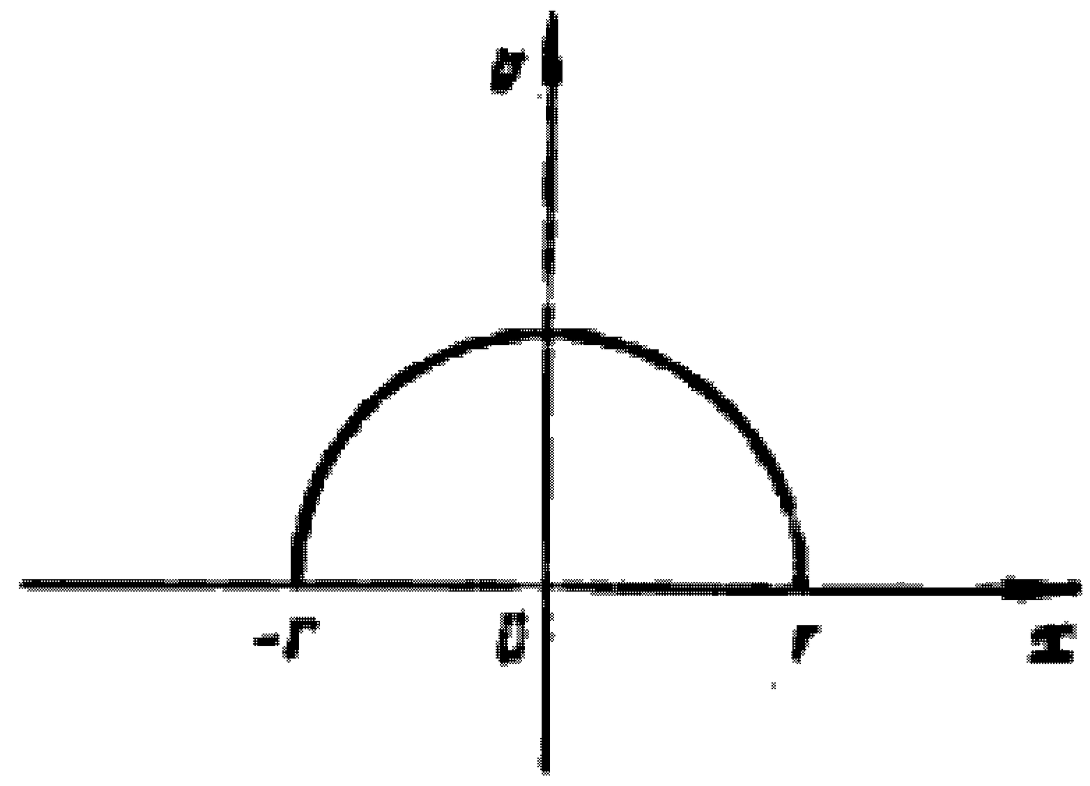
Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Тогава тялото F, образувано от завъртането около оста Ox на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията f, правите $x=a$ и $x=b$ и отсечката от оста Ox от a до b е измеримо и обемът му $\mu(F)$ се дава с формулата

(10.31)
$$\mu(F)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Доказателство. Разделяме сегмента $[a, b]$ на частични с точките $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Нека m_i и M_i са точ- граници на f в частичния сегмент $[x_{i-1}, x_i]$. На всеки такъв построяваме два правоъгълника с височини m_i и M_i (на 10.8 тези правоъгълници са изобразени само за един сегмент $x_i]$). В резултат се получават две стъпаловидни фигури, от които се съдържа в криволинейния трапец, а другата При завъртането на криволинейния трапец и тези фигури ще получим тялото F и две стъпаловидни едното от които Q съдържа F, а другото P се съдържа в на тези тела Q и P са съответно



Фиг. 10.8



Фиг. 10.9

$$\mu(Q)=\pi\sum_{i=1}^{n}M_i^2\,\Delta x_i, \qquad \mu(P)=\pi\sum_{i=1}^{n}m_i^2\,\Delta x_i.$$

Очевидно е, че тези изрази са голяма и малка сума за функцията πf^2. Понеже тази функция е интегруема, то разликата между тези суми при подходящо деление на сегмента $[a, b]$ може да се направи по-малка от всяко отнапред избрано положително число ε. Следователно тялото е измеримо. Тъй като границите на тези суми, когато диаметърът на делението на сегмента $[a, b]$ клони към нула е равна на $\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$, то обемът $\mu(F)$ на тялото F се дава с формулата (10.31).

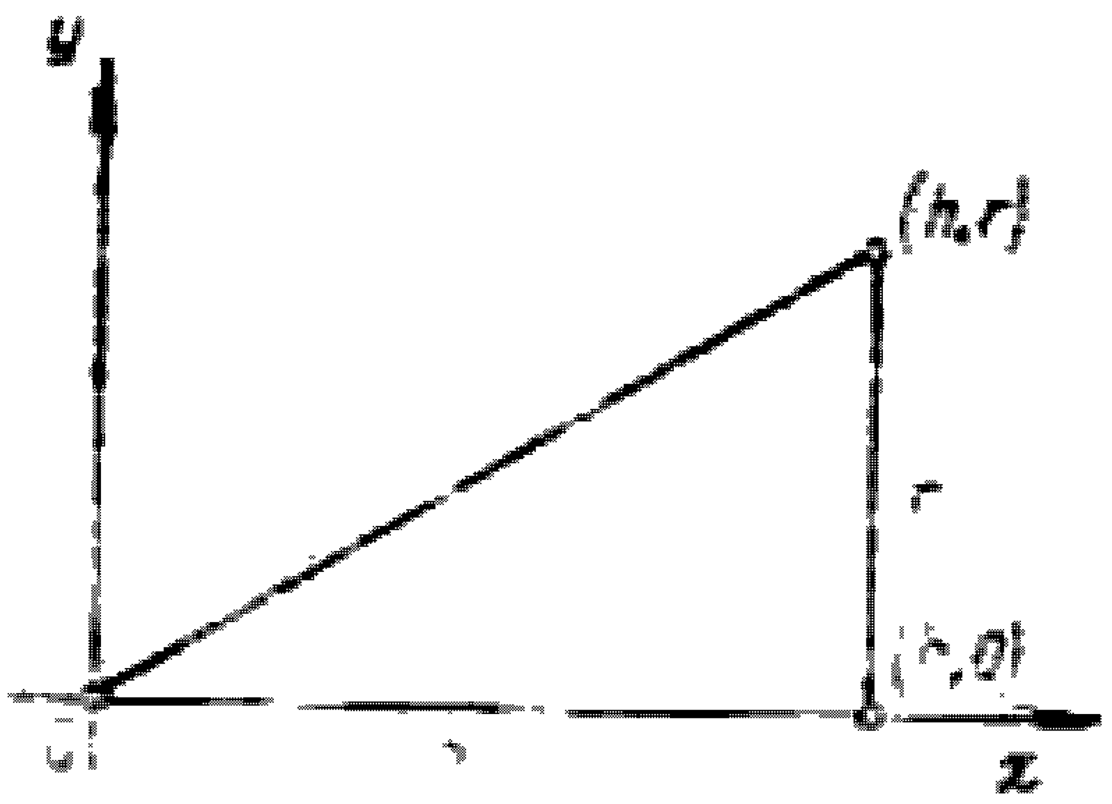
Примери:

1. Да намерим обема $\mu(F)$ на кълбо F с радиус r. Разглеждаме това кълбо като резултат от завъртането на окръжността $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqq x\leqq r$, около оста Ox (вж. фиг. 10.9). С формулата (10.31) получаваме

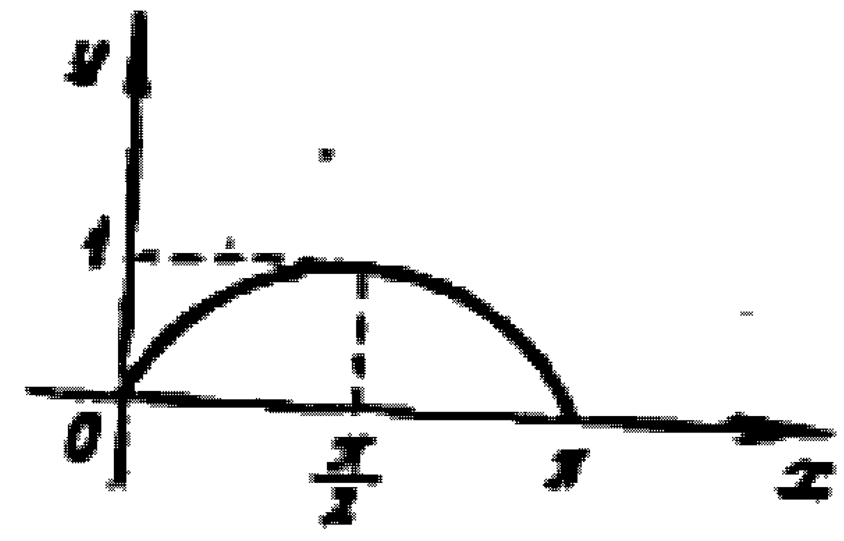
$$\mu(F)=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi r^2 x\Big|_{-r}^{r}-\frac{1}{3}\pi x^3\Big|_{-r}^{r}$$

$$=2\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Ще намерим обема $\mu(F)$ на прав кръгов конус с височина h и радиус на основата r. Този конус може да се разглежда като



Фиг. 10.10



Фиг. 10.11

ротационно тяло, получено от завъртането на триъгълника с върхове в точките (0, 0), $(h, 0)$ и (h, r) около оста Ox (фиг. 10.10), и съгласно формула (10.31) имаме за обема му

$$\mu(F)=\pi \cdot r^2 \cdot h^{-2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}\pi r^2 h^{-2}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

3. Ще намерим обема на тялото F, получено от завъртането около оста Ox на синусоидата $y=\sin x$ в сегмента $[0, \pi]$. Имаме

$$\mu(F)=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx=\pi^2/2$$

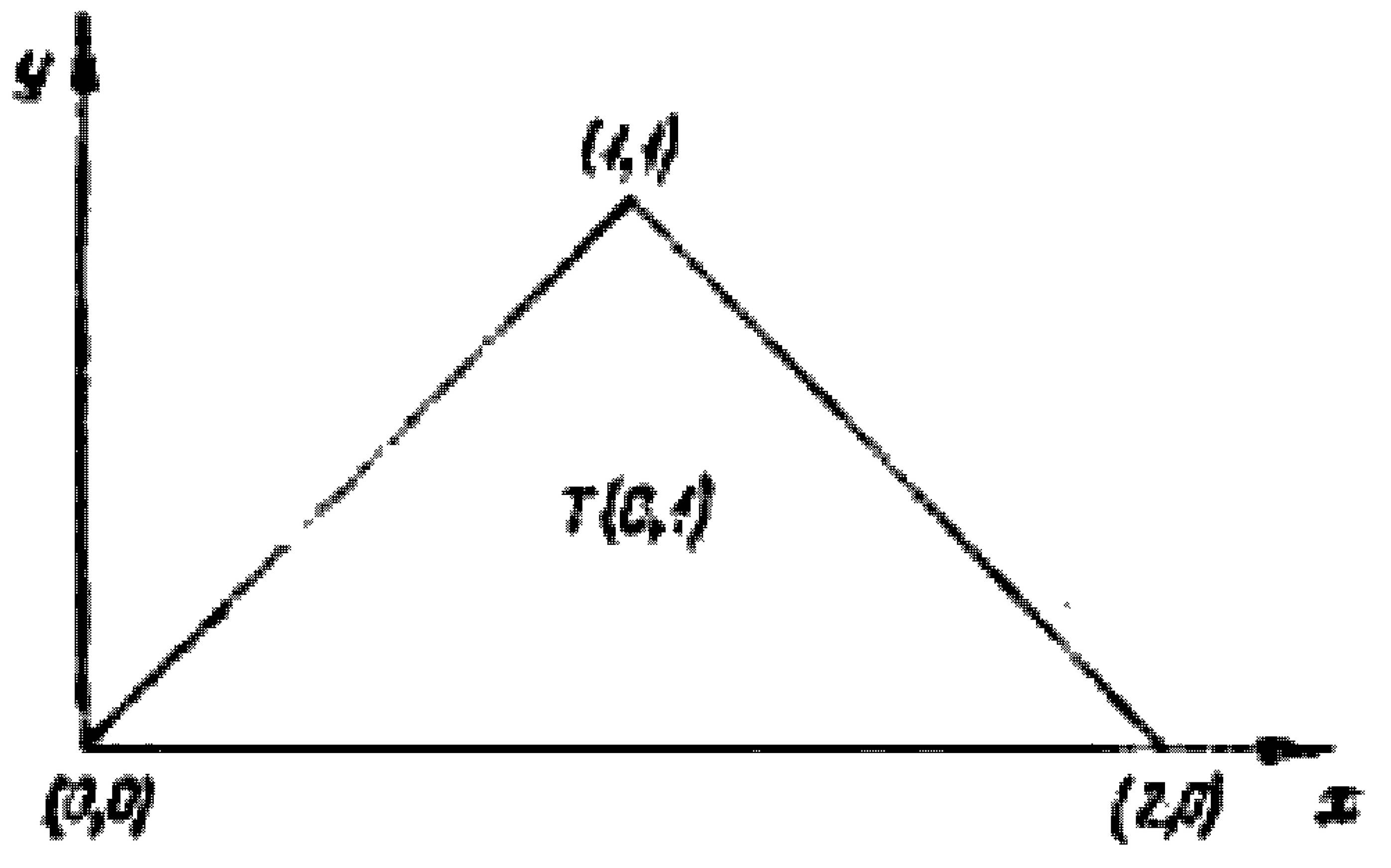
(фиг. 10.11).

Допълнение към глава 10*

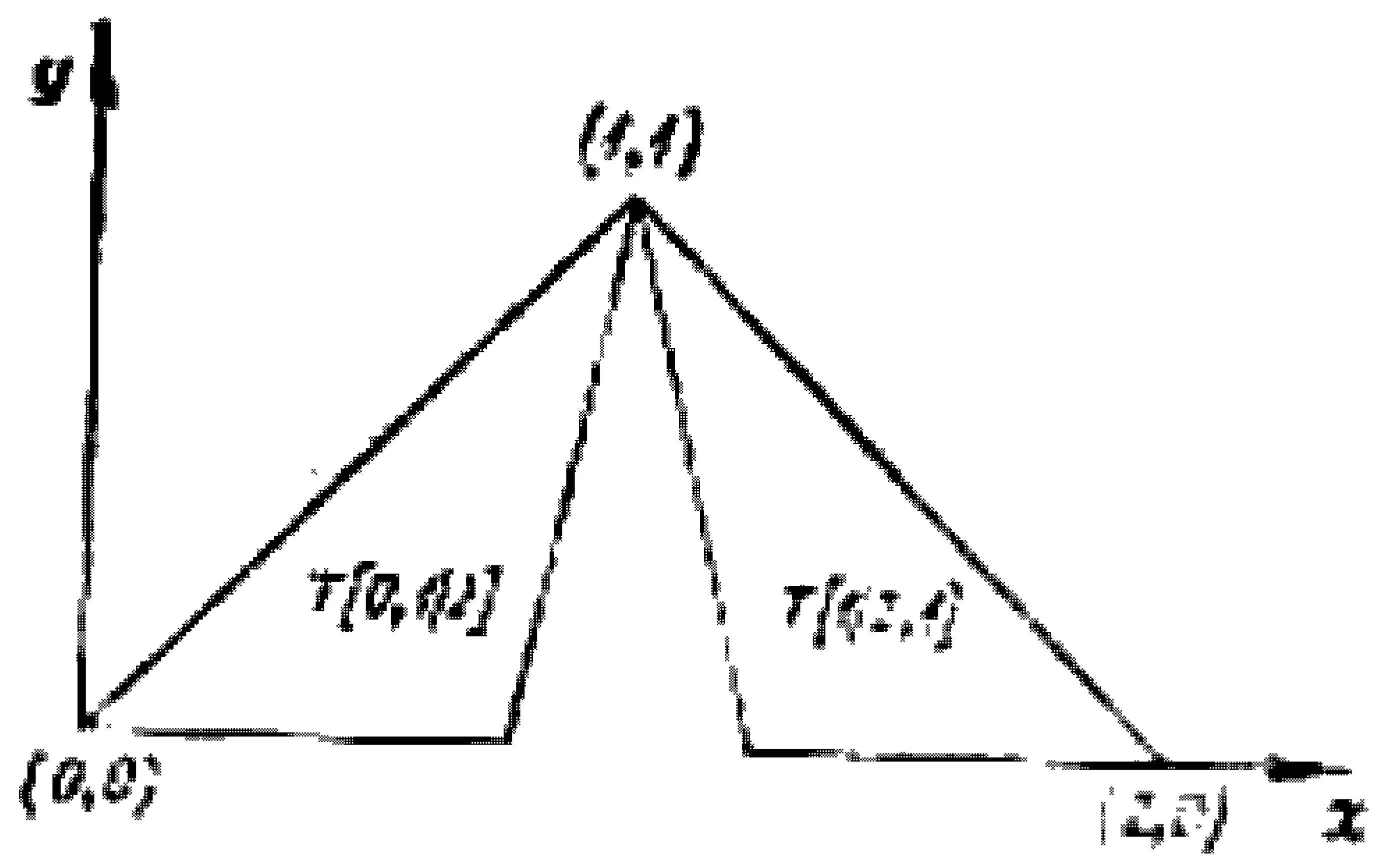
ПРИМЕР ЗА НЕИЗМЕРИМА ФИГУРА, ОГРАНИЧЕНА ОТ НЕРЕКТИФИЦИРУЕМА КРИВА

1. ***Полуотворен триъгълник*** *ще наричаме множеството от точките на триъгълник без точките на две от страните му и двата върха, прилежащи към тях.* Ще разгледаме построяването на крива L, която ще бъде част от контура на неизмерима фигура Q. Това построение се извършва по пътя на последователното отделяне на определени полуотворени триъгълници от даден равнобедрен правоъгълен триъгълник T, който за удобство ще означим с T [0, 1]. Координатите на върховете на този триъгълник са

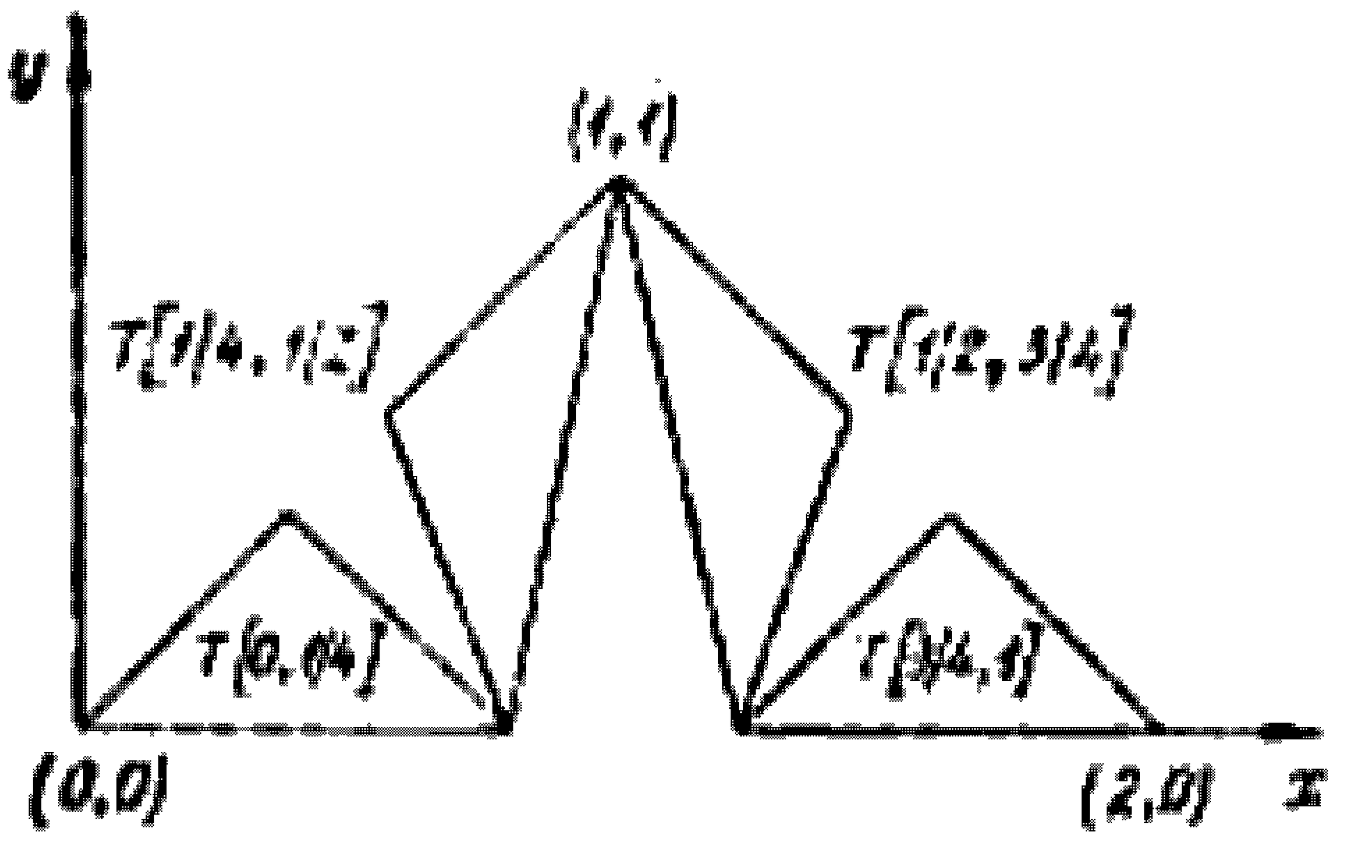
* Това допълнение е заимствувано от книгата на В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, „Основы математического анализа", изд. „Наука", Москва, 1971.



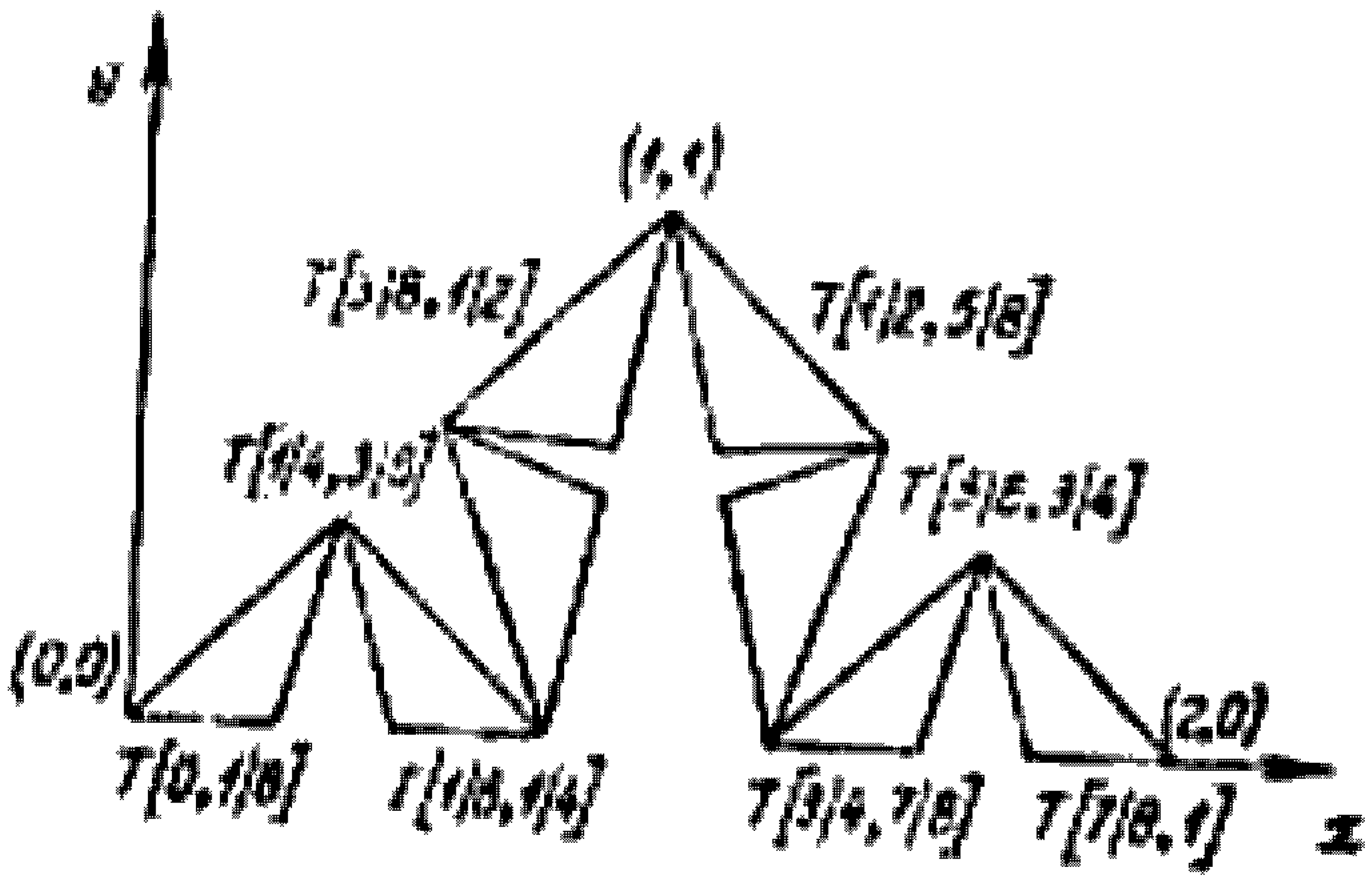
Фиг. 10.12



Фиг. 10.13



Фиг. 10.14



Фиг. 10.15

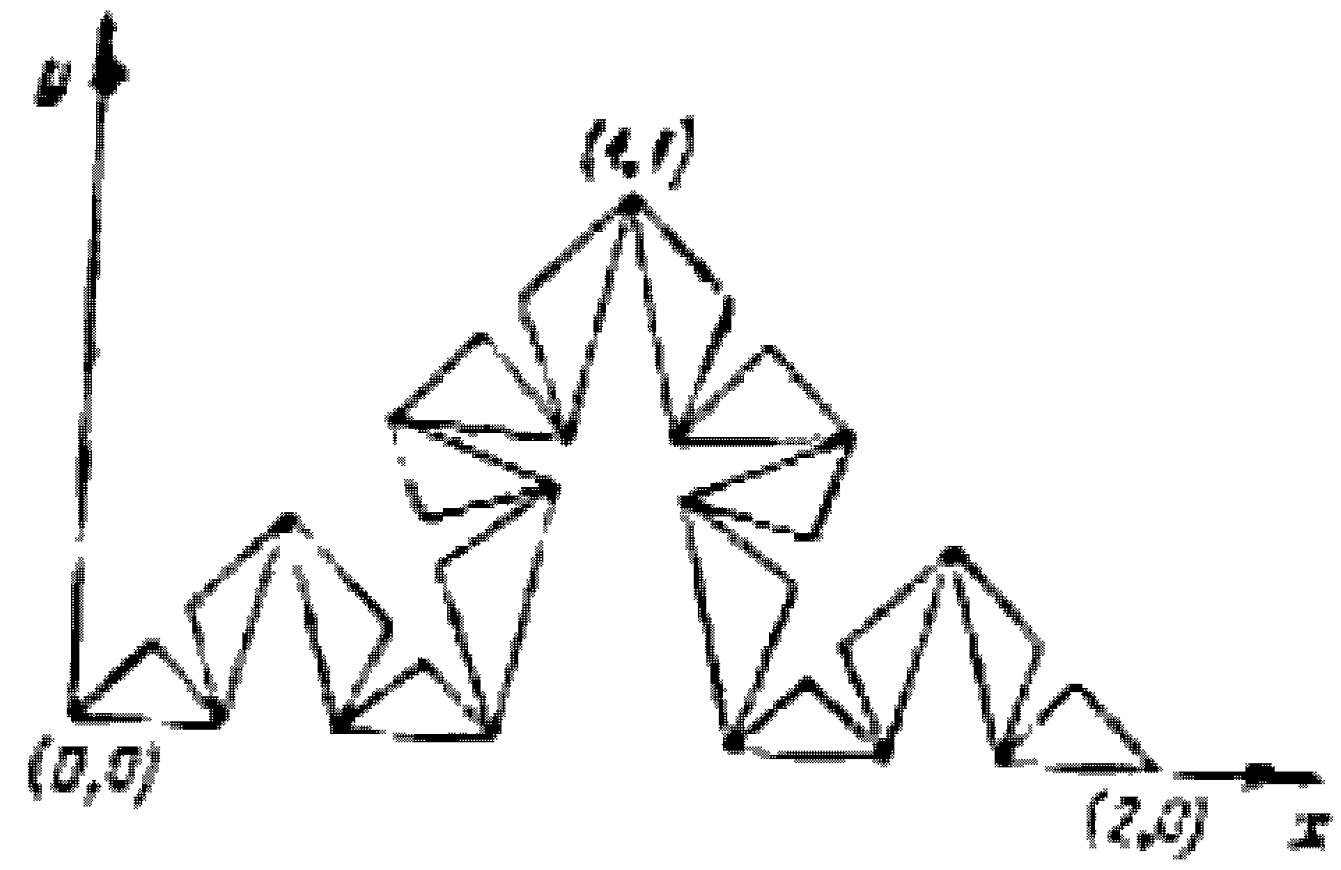
(0, 0), (1, 1) и (2, 0) (фиг. 10.12). Ще опишем сега процеса на последователното отделяне от триъгълника T [0, 1] на определени полуотворени триъгълници:

1) Отделяме полуотворения триъгълник, единият от върховете на който има координати (1, 1), а другите два са разположени на оста Ox. Лицето S_1 на отделения триъгълник е равно на 1/4. Получената в резултат фигура е изобразена на фиг. 10.13. Тя се състои от два триъгълника T [0, 1/2] и T [1/2, 1] с равни лица.

2) От триъгълниците T [0, 1/2] и T [1/2, 1] се отделя по един триъгълник, сумата S_2 от лицата на които е равна на 1/8. Получената фигура е изобразена на фиг. 10.14. Тя се състои от четири триъгълника T [0, 1/4], T [1/4, 1/2], T [1/2, 3/4], T [3/4, 1] с равни лица.

3) От всеки от тези триъгълници отделяме по един триъгълник, сумата S_3 от лицата на които е равна на 1/16. Получената фигура е изобразена на фиг. 10.15. Тя се състои от осемте триъгълника T [0, 1/8], T [1/8, 1/4], T [1/4, 3/8], T [3/8, 1/2], T [1/2, 5/8], T [5/8, 3/4], T [3/4, 7/8], T [7/8, 1] с равни лица.

4) От всеки от тези триъгълници се отделя по един триъгълник, сумата S_4 на лицата на които е равна на 1/32. Получената



Фиг. 10.16

фигура е изобразена на фиг. 10.16. Тя се състои от шестнадесет триъгълника с равни лица. Всеки от тези триъгълници ще означим със символа

$$T[p\,.\,2^{-4},\,(p+1)\,.\,2^{-4}],\quad p=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 15.$$

По-нататък процесът продължава аналогично. Ще преминем сега към определяне на кривата L. Триъгълниците $T[p\,.\,2^{-n},\,(p+1)\,.\,2^{-n}]$ (p и n са произволни цели числа, удовлетворяващи условието $p<2^n$), получени в описания процес, притежават следното свойство: Нека $T[p_1\,.\,2^{-n_1},\,(p_1+1)\,.\,2^{-n_1}]$ и $T[p_2\,.\,2^{-n_2},\,(p_2+1)\,.\,2^{-n_2}]$ са два такива триъгълника, че $p_1\,.\,2^{-n_1}\leqq p_2 2^{-n_2}<(p_2+1)\,.\,2^{-n_2}\leqq(p_1+1)\,2^{-n_1}$. Тогава вторият от тези триъгълници се съдържа в първия. Ще отбележим още следното очевидно свойство на триъгълниците $T[p.2^{-n},\,(p+1)\,.\,2^{-n}]$: При $n\to\infty$ диаметърът им* клони към нула.

Нека $\{T[p_k 2^{-n_k},\,(p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$, е свиваща се система от триъгълници (това означава, че триъгълникът с индекс k съдържа триъгълника с индекс $k+1$ и при $k\to\infty$ диаметърът на триъгълника клони към нула). Всяка такава свиваща се система от триъгълници има точно една обща точка. Разглеждаме всички свиващи се системи от посочените по-горе триъгълници. Кривата L определяме с множеството $\{M\}$ от общите точки на всички свиващи се системи от триъгълници $T[p\,.\,2^{-n},\,(p+1)\,.\,2^{-n}]$.

На множеството $\{M\}$ (на кривата L) принадлежат върховете на всички триъгълници $T[p\,.\,2^{-n},\,(p+1)\,.\,2^{-n}]$, тъй като върхът на всеки такъв триъгълник принадлежи на свиващата се система от триъгълници $\{T[2^k p\,.\,2^{-(n+k)},\ (2^k\,.\,p+1)\,.\,2^{-(n+k)}]\}$ и на системата $\{T[(2^k\,.\,p-1)\,2^{-(n+k)},\ 2^k\,.\,p\,.\,2^{-(n+k)}]\}$. За да се убедим, че построеното множество $\{M\}$ е проста крива в смисъл на определението, дадено в 10.1.1, трябва да докажем, че всички точки M на мно-

* Диаметър на триъгълник се нарича дължината на най-голямата му страна.

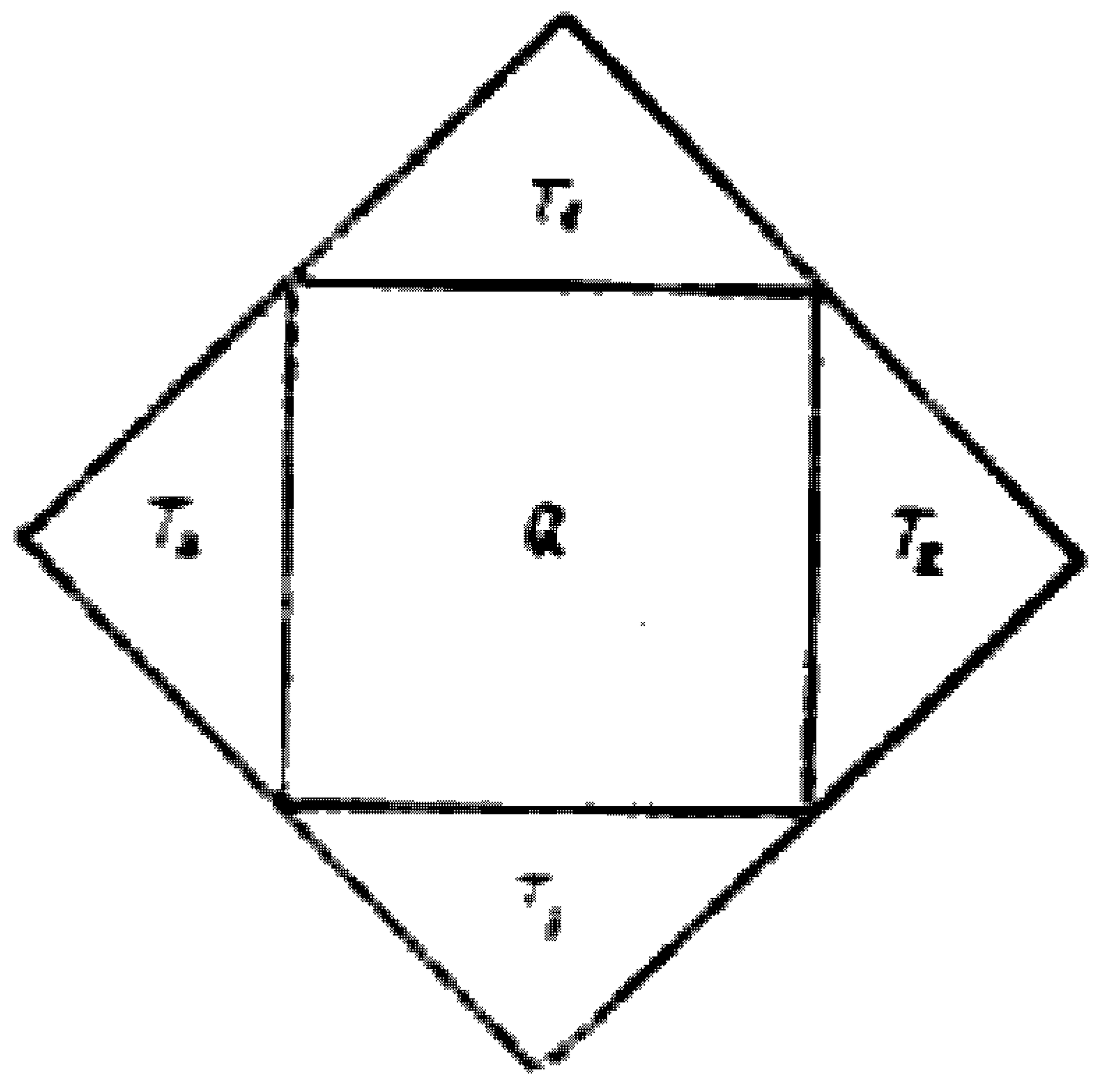
жеството $\{M\}$ се определят с параметрични уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; $a\leqq t\leqq b$, където φ и ψ са непрекъснати функции.*

Да разгледаме сегмента $[0, 1]$ на оста t. На всеки сегмент $[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$, където p и n са произволни неотрицателни цели числа, $p<2^n$, съпоставяме триъгълника $T[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$. На фиг. 10.17 са изобразени сегментите, които отговарят на триъгълниците $T(p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$. Всяка точка t от сегмента $[0, 1]$ принадлежи на всички сегменти от някоя свиваща се система $\{[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$ от сегменти. Съпоставяме на тази точка t общата точка M на свиващата се система от триъгълници $\{T[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$. По такъв начин на всяка стойност на t от сегмента $[0, 1]$ се съпоставят две числа x и y - координати на точката M. Следователно x и y са функции на параметъра t. Ще се убедим, че тези функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ са непрекъснати в сегмента $[0, 1]$. Действително нека ε е произволно положително число, t е фиксирана точка от сегмента $[0, 1]$ и M е точката от кривата L, определена от тази стойност на параметъра t. От свиващата се система от триъгълници $\{T[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$, определяща точката M, избираме триъгълник с диаметър, по-малък от ε, и разглеждаме сегмента $[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]$, който отговаря на този триъгълник и съдържа точката t, определяща M (а следователно x и y). Всички точки на кривата L, съответствуващи на стойности на t от този сегмент, са разположени в посочения по-горе триъгълник и затова координатите им ще се различават от координатите на точката M най-много с ε. Но това означава, че функциите φ и ψ са непрекъснати в тази точка.

2. Ще преминем към построяване на неизмерима фигура Q. Разглеждаме квадрат $\underline{Q}$ със страна, равна на 2. На всяка страна на този квадрат построяваме равнобедрени правоъгълни триъгълници T_1, T_2, T_3, T_4, в резултат на което получаваме квадрата $\bar{Q}$ със страната $2\sqrt{2}$ (фиг. 10.18). След това от всеки от тези триъгълници отделяме полуотворени триъгълници така, както това е описано в т. 1. В резултат ще получим фигура Q, ограничена от затворена крива, състояща се от четири криви, конгруентни на кривата L. Ще докажем, че получената фигура Q е неизмерима. Разглеждаме две специални редици от многоъгълници $\{\underline{Q}_n\}$ и $\{\bar{Q}_n\}$, първата от които се състои от вписани във фигурата Q многоъгълници, а втората — от описани около Q многоъгълници. Редицата $\{\underline{Q}_n\}$ се получава чрез присъединяване към квадрата $\underline{Q}$ на полуотворените триъгълници, отделени от триъгълниците T_1, T_2, T_3,

* Това, че на различни стойности на t отговарят различни точки от множеството $\{M\}$, е очевидно от построението на кривата L.

Фиг. 10.17



Фиг. 10.18

T_4 на всяка нечетна стъпка от процеса, описан в т. 1. Редицата $\{\overline{Q}_n\}$ се получава чрез отделяне от квадрата Q на полуотворените триъгълници, отделени от триъгълниците T_1, T_2, T_3, T_4 на всяка четна стъпка от процеса, описан в т. 1. Очевидно е, че всеки вписан във фигурата Q многоъгълник се съдържа в някой многоъгълник Q_n, а всеки описан около фигурата Q многоъгълник съдържа някой многоъгълник $\overline{Q}_n$. Затова границата на редицата $\{\underline{S}_n\}$ от лицата на многоъгълниците Q_n е равна на долната мярка на лицето $\underline{P}$ на фигурата Q, а границата на редицата $\{\overline{S}_n\}$ от лицата на многоъгълниците $\overline{Q}_n$ е равна на горната мярка на лицето $\overline{P}$ на фигурата Q. Лесно се убеждаваме, че $\underline{S}_n=4+\sum_{k=1}^{n}4^{-k+1}$, $\overline{S}_n=8-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}4^{-k+1}$. Затова $\underline{P}=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}_n=16/3$, а $\overline{P}=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}_n=22/3$. Тъй като $\underline{P}\neq\overline{P}$, то фигурата Q е неизмерима. Ще отбележим, че $\overline{P}-\underline{P}=2$. Следователно контурът на разглежданата фигура има лице, равно на 2.

3. Ще докажем, че всяка част от кривата L, ограничена от две различни точки, е неректифицируема. Най-напред ще покажем, че такава част L' от кривата L има различно от нула лице, т. е. всеки многоъгълник, покриващ L', има лице, по-голямо от някое

положително число. Ще отбележим, че L' съдържа част L'', отговаряща на точките от някой сегмент $[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$, и затова L'' се съдържа в триъгълника $T[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$ и може да бъде получена чрез отделяне от този триъгълник на определени полуотворени триъгълници.

Лесно се пресмята, че сумата от лицата на всички отделени полуотворени триъгълници е по-малка от лицето S_T на триъгълника $T[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$. Следователно частта L'' има лице, равно на $S_T - S > 0$. В 10.2 при доказателството за измеримост на фигура, ограничена от ректифицируема крива, доказахме, че лицето на ректифицируема крива е равно на нула.

Затова частта L'' на кривата L, а следователно и частта L съдържаща L'', е неректифицируема.

З а б е л е ж к а. Всяка от построените функции φ и ψ няма производна в нито една точка на сегмента $[0, 1]$.

11. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения и определени интеграли

В тази глава се разглеждат приближени методи за намиране корените на алгебрични и трансцендентни уравнения и за пресмятане на определени интеграли.

11.1. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения

Ще се заемем с приближеното пресмятане на един от корените на уравнението $f(x)=0$, където f е непрекъсната функция. Ще считаме, че интересуващият ни корен на това уравнение е отделен в някакъв сегмент $[a, b]$, т. е. че този корен е вътрешна точка за сегмента $[a, b]$, който не съдържа други корени на разглежданото уравнение.

11.1.1. Метод на „вилката“ (метод на разполовяването). Ще започнем с метода, който често се използва за приближено пресмятане на корени с помощта на съвременните бързодействуващи математически машини. За основа на този метод служи едно ново доказателство на теорема 4.12 относно анулирането на непрекъсната функция при смяна на знака ѝ. Ще изложим това доказателство.

Трябва да се докаже следното твърдение:

Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и ако стойностите ѝ $f(a)$ и $f(b)$ в краищата на сегмента $[a, b]$ са числа с различни знаци, то съществува точка c вътре в сегмента $[a, b]$, в която стойността на функцията $f(c)$ е равна на нула, т. е. c е корен на уравнението $f(x)=0$.

Ще наричаме „вилка“ всеки сегмент, в краищата на който функцията f има стойности с различни знаци. По условие сегментът $[a, b]$ е вилка. Нека за определеност $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделяме сегмента $[a, b]$ наполовина. Възможни са два случая: 1) стойността на функцията в средата на сегмента $[a, b]$ е равна на нула (в този случай теоремата е доказана); 2) тази стойност не е равна на нула. В този случай едната от половинките на сегмента $[a, b]$ е „вилка". Означаваме тази половинка с $[a_1, b_1]$. Очевидно $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Със сегмента $[a_1, b_1]$ постъпваме така, както със сегмента $[a, b]$, т. е разделяме сегмента $[a_1, b_1]$ наполовина.

Продължавайки аналогично, ще имаме двете възможности: 1) или описаният процес прекъсва поради това, че в средата на някой от сегментите стойността на функцията е равна на нула (в този случай теоремата е доказана); 2) или описаният процес продължава неограничено, в резултат на което получаваме свиваща се система от сегменти-„вилки" $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, ..., $[a_n, b_n]$, ..., като за всеки номер n имаме $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Съгласно следствието от теорема 3.15 тази свиваща се система от сегменти има една обща точка c, към която клони всяка от редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Ще докажем, че $f(c)=0$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката c, то всяка от редиците $\{f(a_n)\}$ и $\{f(b_n)\}$ клони към $f(c)$. Но от условията $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$ и от теорема 3.13 получаваме, че едновременно са изпълнени неравенствата $f(c)\leq 0$ и $f(c)\geq 0$, т. е. $f(c)=0$. □

Сега ще предположим, че при условията на доказаното по-горе твърдение сегментът $[a, b]$ съдържа само един корен c на уравнението $f(x)=0$. Тогава за приближена стойност на този корен може да се вземе точката $(a_n+b_n)/2$, т. е. средата на сегмента $[a_n, b_n]$. Понеже дължината на сегмента $[a_n, b_n]$ е равна на $(b-a)\,.\,2^{-n}$, то числото $(a_n+b_n)/2$ се различава от точната стойност на корена с не повече от $(b-a)\,.\,2^{-n-1}$. По такъв начин описаният процес на последователно разполовяване на сегментите-„вилки" позволява да се пресметне търсеният корен c с произволна, отнапред зададена точност. Тъй като описаният процес води до многократно повтаряне на еднотипни пресмятания, той е особено удобен за програмна реализация на автоматични сметачни машини.

11.1.2. Метод на итерациите.* Изложеният тук метод лежи в основата на много други приближени методи. Той се прилага за решаване на уравнението

$$x=F(x). \tag{11.1}$$

Ще въведем понятието итерационна редица.

Редицата $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ще наричаме ***итерационна,*** ако за всяко $n\geq 1$ членът ѝ x_n се изразява чрез x_{n-1} по рекурентната формула $x_n=F(x_{n-1})$, като x_0 е произволно число от дефиниционната област на функцията F.

* Този метод се нарича също така и ***метод на последователните приближения.***

Ще докажем, че при определени условия итерационната редица клони към корена на уравнението (11.1) и следователно нейните членове могат да се вземат за приближени стойности на този корен. В сила е следното твърдение:

Твърдение 1. *Нека функцията F е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и всички членове на итерационната редица $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ принадлежат на този сегмент. Тогава, ако тази редица клони към някое число c, това число е корен на уравнението* (11.1).

Доказателство. Тъй като редицата $\{x_n\}$ клони към c и всичките ѝ членове принадлежат на сегмента $[a, b]$, то и границата c принадлежи на сегмента $[a, b]$ (вж. следствие 2 от теорема 3.13). По условие функцията F е непрекъсната в точката c и затова редицата $\{F(x_n)\}$ клони към $F(c)$. Така от равенството $x_n = F(x_{n-1})$ при граничен преход, когато $n \to \infty$, получаваме равенството $c = F(c)$, т. е. c е корен на уравнението (11.1). □

Ще докажем още едно твърдение, което често се използва за приближено пресмятане на корените на уравнение (11.1) с помощта на итерационна редица.

Твърдение 2. *Нека c е корен на уравнението* (11.1) *и в някой симетричен относно точката c сегмент $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ производната на функцията F удовлетворява условието $|F'(x)| \leq \alpha < 1$. Тогава итерационната редица $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ при произволно x_0 от сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ клони към корена c.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че всички членове на итерационната редица $\{x_n\}$ принадлежат на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Действително x_0 принадлежи на този сегмент по условие. Затова е достатъчно, като предположим, че x_{n-1} принадлежи на този сегмент, да докажем, че и x_n му принадлежи. За целта ще използваме формулата на Лагранж за разликата $F(x_{n-1}) - F(c)$, като ще отчетем, че $F(c) = c$, $x_n = F(x_{n-1})$. Получаваме

$$x_n - c = F(x_{n-1}) - F(c) = (x_{n-1} - c) F'(\xi), \tag{11.2}$$

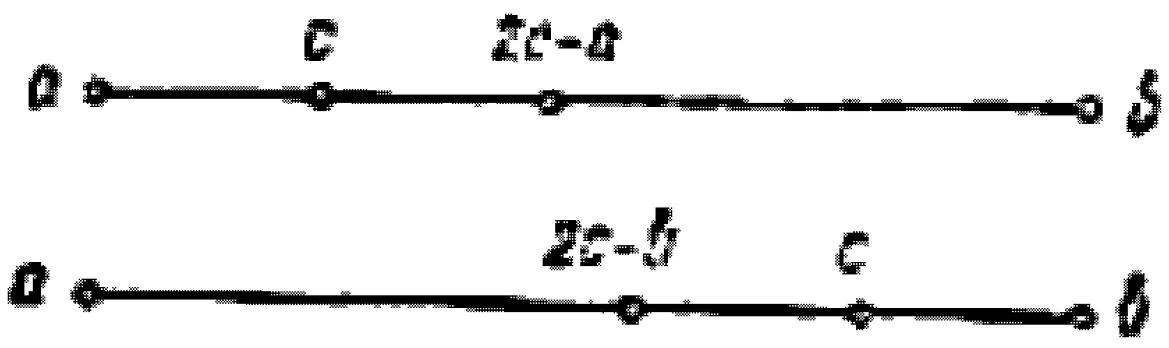
където ξ е някоя точка между x_{n-1} и c и следователно принадлежи на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Тъй като $|F'(\xi)| \leq \alpha < 1$, то от равенството (11.2) следва

$$|x_n - c| \leq \alpha |x_{n-1} - c|. \tag{11.3}$$

Понеже $0 < \alpha < 1$, от (11.3) на свой ред получаваме

$$|x_n - c| < |x_{n-1} - c|. \tag{11.4}$$

Неравенството (11.4) показва, че всеки следващ елемент x_n е разположен по-близко до c от предидущия елемент x_{n-1} и тъй като x_{n-1} принадлежи на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, който е симетричен от-



Фиг. 11.1

носно точката c, то и x_n принадлежи на този сегмент. Остава да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ клони към c. Понеже неравенството (11.3) е изпълнено за всеки номер n, то с помощта на това неравенство получаваме

$$(11.5) \qquad |x_n-c|\leq\alpha^n|x_0-c|,$$

откъдето е очевидно, че $x_n\to c$, тъй като $\alpha^n\to 0$. □

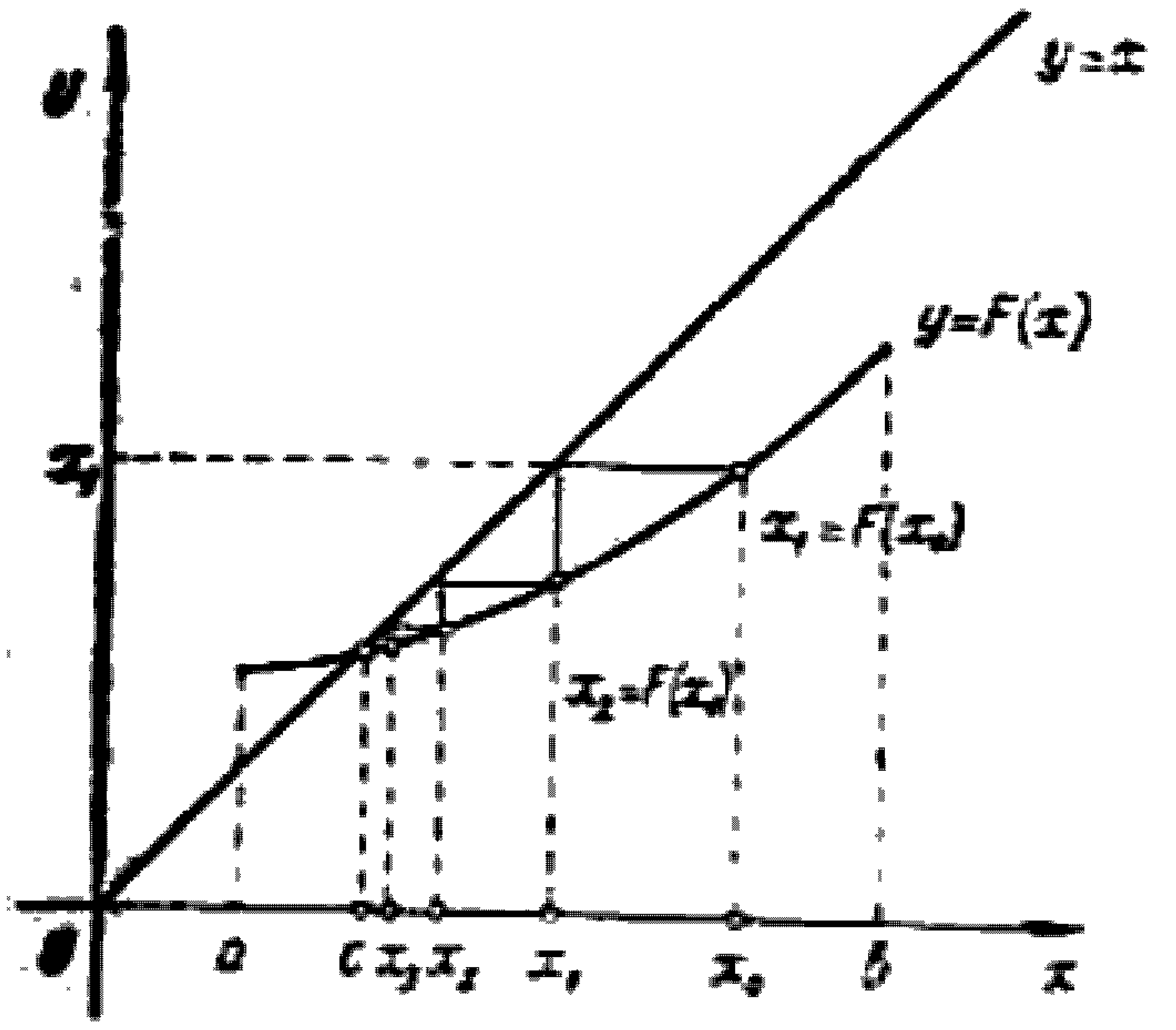
Ще направим една практическа забележка относно току-що доказаното твърдение. Да предположим, че с предварителни пресмятания сме установили, че търсеният корен на уравнението (11.1) е отделен в сегмента $[a, b]$ и производната на функцията F удовлетворява в този сегмент условието $|F'(x)|\leq\alpha<1$. Тъй като сегментът $[a, b]$ в общия случай няма да бъде симетричен относно търсения корен, то естествено възниква въпросът, как да се избере нулевото приближение x_0, за да може да се приложи доказаното твърдение 2.

Ще отбележим, че където и да се намира вътре в сегмента $[a, b]$ търсеният корен c, то поне единият от двата симетрични относно c сегменти $[a, 2c-a]$, $[2c-b, b]$ (вж. фиг. 11.1) изцяло принадлежи на сегмента $[a, b]$. Затова поне една от точките a или b принадлежи на симетричен относно корена c сегмент, навсякъде в който $|F'(x)|\leq\alpha<1$.

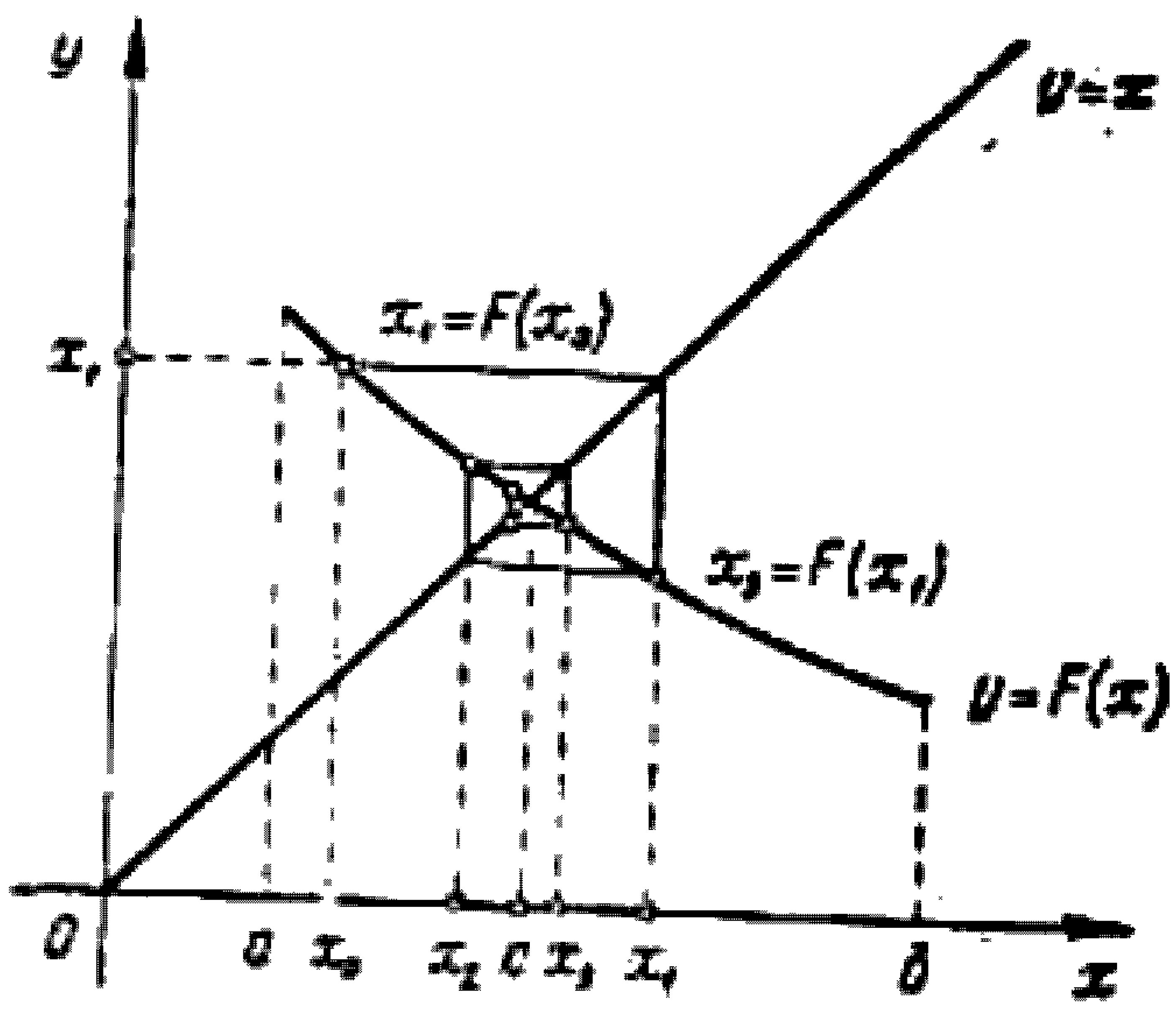
Следователно поне една от точките a или b може да се избере за x_0 съгласно доказаното твърдение 2. Конкретно за x_0 трябва да се избере онази от точките a или b, за която приближението $x_1=F(x_0)$ не излиза извън сегмента $[a, b]$.

На практика често се среща случаят, когато производната F' има постоянен знак в сегмента $[a, b]$. Ако този знак е положителен, от формула (11.2) следва, че редицата $\{x_n\}$ е монотонна. Този случай води до стъпаловидна диаграма, изобразена на фиг. 11.2. Ако производната F' е отрицателна в сегмента $[a, b]$, то от същата формула (11.2) се вижда, че всеки два последователни члена x_{n-1} и x_n лежат от различни страни на корена c. Този случай води до спираловидна диаграма, изобразена на фиг. 11.3.

Забележка. Възниква въпросът за оценка на грешката при метода на итерациите, т. е. за оценка на отклонението на n-тото приближение x_n от точната стойност на корена c. От фор-



Фиг. 11.2



Фиг. 11.3

мула (11.5) непосредствено се получава следната оценка:

$$|x_n-c| \leq \alpha^n (b-a),$$

където α е точната горна граница на функцията $|F'(x)|$ в сегмента $[a, b]$, в който е отделен търсеният корен.

Ако производната F' е отрицателна в сегмента $[a, b]$, то, както е показано по-горе, x_{n-1} и x_n лежат от различни страни на корена c и затова е в сила следната оценка:

$$|x_n-c| \leq |x_n-x_{n-1}|.$$

Ако в разглеждания случай се вземе за приближена стойност на корена полусумата на две последователни приближения

$$x_n^* = (x_n+x_{n-1})/2,$$

получаваме следната оценка за грешката:

$$|x_n^*-c| \leq \frac{1}{2} |x_n-x_{n-1}|.$$

11.1.3. Методи на хордите и допирателните. Към широко разпространените методи за приближено решаване на уравнението $f(x)=0$ се отнасят методът на хордите и методът на допирателните, които представляват конкретни варианти на метода на итерациите.

Най-напред ще разгледаме метода на хордите. Нека търсеният корен на уравнението

$$f(x)=0 \tag{11.6}$$

е отделен в сегмента $[a, b]$. Ще предположим, че функцията f има в сегмента $[a, b]$ монотонна и непрекъсната първа производна с постоянен знак.

Възможни са четири случая: 1°) f' е ненамаляваща и положителна в $[a, b]$; 2°) f' е нерастяща и отрицателна в $[a, b]$; 3°) f' е нерастяща и положителна в $[a, b]$; 4°) f' е ненамаляваща и отрицателна в $[a, b]$.

Подробно ще разгледаме случая 1°. Вместо уравнението (11.6) вземаме уравнение от вида

(11.7) $\quad x=F(x)$, където $F(x)=x-(b-x)f(x)/(f(b)-f(x))$.*

Лесно се вижда, че отделените в сегмента $[a, b]$ корени на уравненията (11.6) и (11.7) съвпадат и затова тези уравнения са еквивалентни в сегмента $[a, b]$. За решаване на уравнението (11.7) използваме метода на итерациите, като за нулево приближение x_0 избираме точката a. Както обикновено, определяме редицата $\{x_n\}$ по рекурентната формула $x_n=F(x_{n-1})$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Ще докажем, че редицата $\{x_n\}$ клони към търсения корен c. Затова съгласно твърдение 1 от 11.1.2 е достатъчно да се докаже, че всички x_n принадлежат на сегмента $[a, b]$ и че редицата $\{x_n\}$ е сходяща.

По индукция ще докажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$, по-точно в сегмента $[a, c]$, където c е търсеният корен. Тъй като x_0 принадлежи на сегмента $[a, c]$, то за провеждане на индукцията е достатъчно да допуснем, че x_n принадлежи на сегмента, и да докажем, че x_{n+1} също принадлежи на този сегмент. Понеже

(11.8) $\quad x_{n+1}=F(x_n)=x_n-(b-x_n)f(x_n)/(f(b)-f(x_n))$,

то като отчетем, че $f(c)=0$, ще имаме**

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}=\frac{(b-x_n)[f(c)-f(x_n)]}{[f(b)-f(c)]+[f(c)-f(x_n)]}.$$

Прилагайки към изразите в средните скоби формулата на Лагранж, получаваме

$$x_{n+1}-x_n=\frac{(b-x_n)(c-x_n)f'(\theta_n)}{(b-c)f'(\theta_n^*)+(c-x_n)f'(\theta_n)}, \tag{11.9}$$

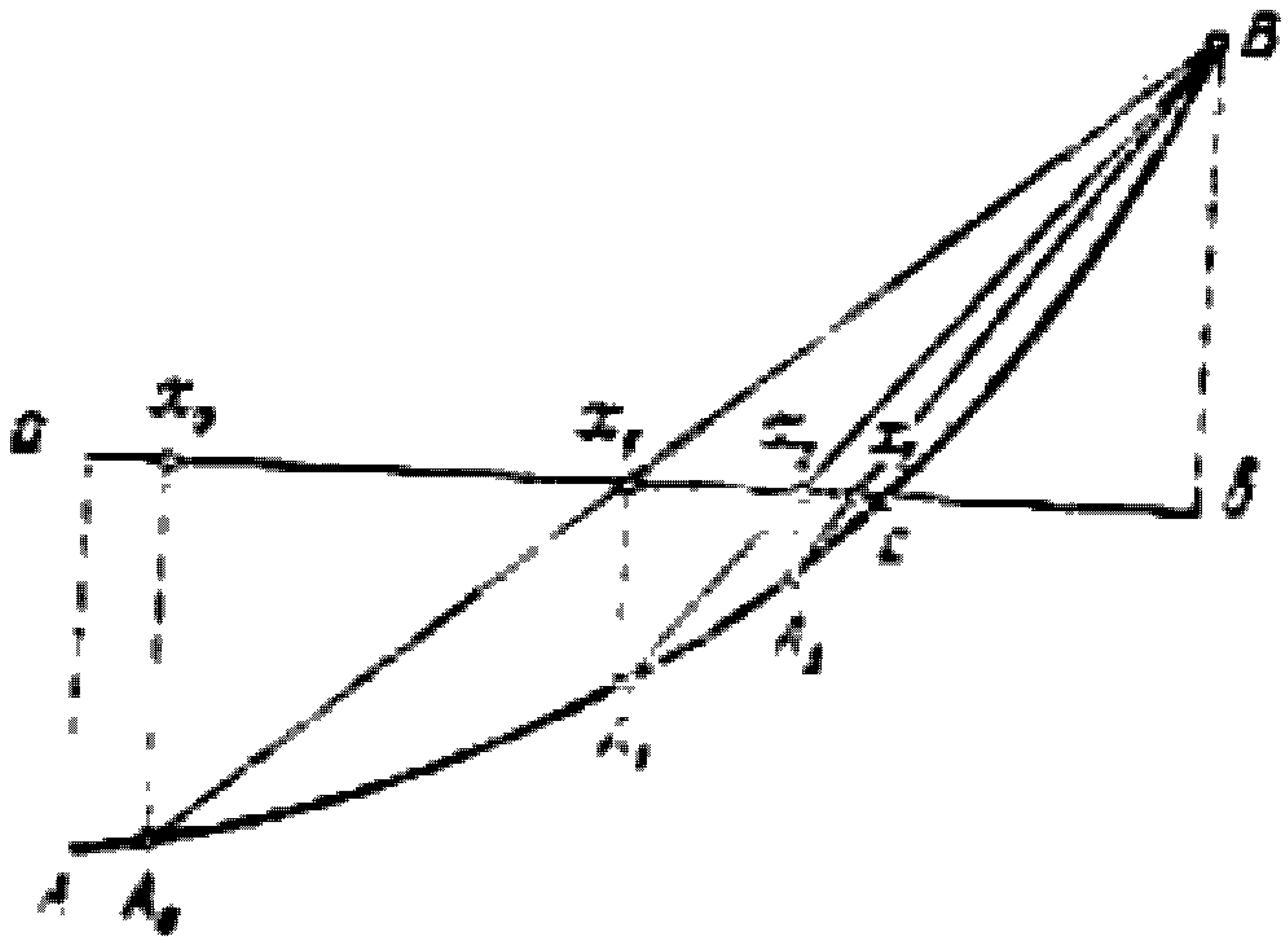
където $x_n<\theta_n<c$, $c<\theta_n^*<b$, т. е. $\theta_n<\theta_n^*$.

Понеже производната f' е ненамаляваща и положителна, можем да запишем $0<f'(\theta_n)\leq f'(\theta_n^*)$. А оттук, тъй като $b-c>0$ и $c-x_n>0$, ще получим

$$(b-c)f'(\theta_n^*)+(c-x_n)f'(\theta_n)\geq[(b-c)+(c-x_n)]f'(\theta_n)$$
$$=(b-x_n)f'(\theta_n).$$

* При това считаме, че $F(b)=b-f(b)/f'(b)$. Тогава функцията F е непрекъсната в целия сегмент $[a, b]$.

** По-нататък ще предполагаме, че $x_n<c$, тъй като, ако $x_n=c$, то $f(x_n)=f(c)=0$ и следователно $x_{n+1}=x_n=c$, т. е. x_{n+1} принадлежи на сегмента $[a, c]$.



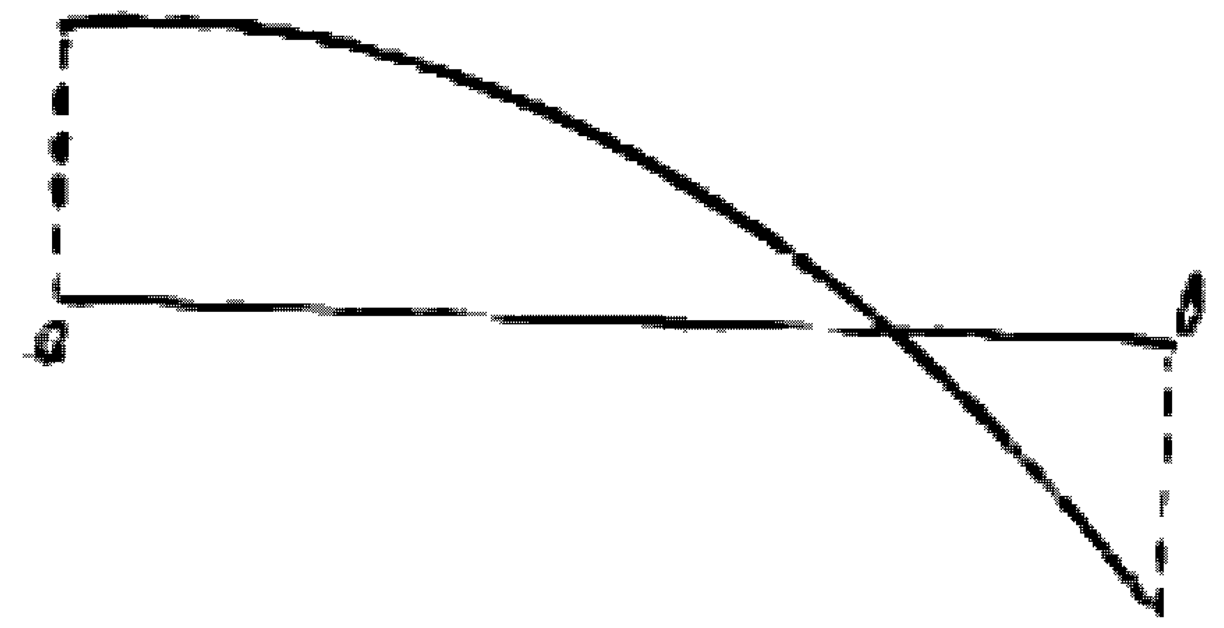
Фиг. 11.4

По такъв начин от равенствата (11.9) намираме $x_{n+1}-x_n<c-x_n$, или $x_{n+1}<c$, т. е. индукцията е завършена.

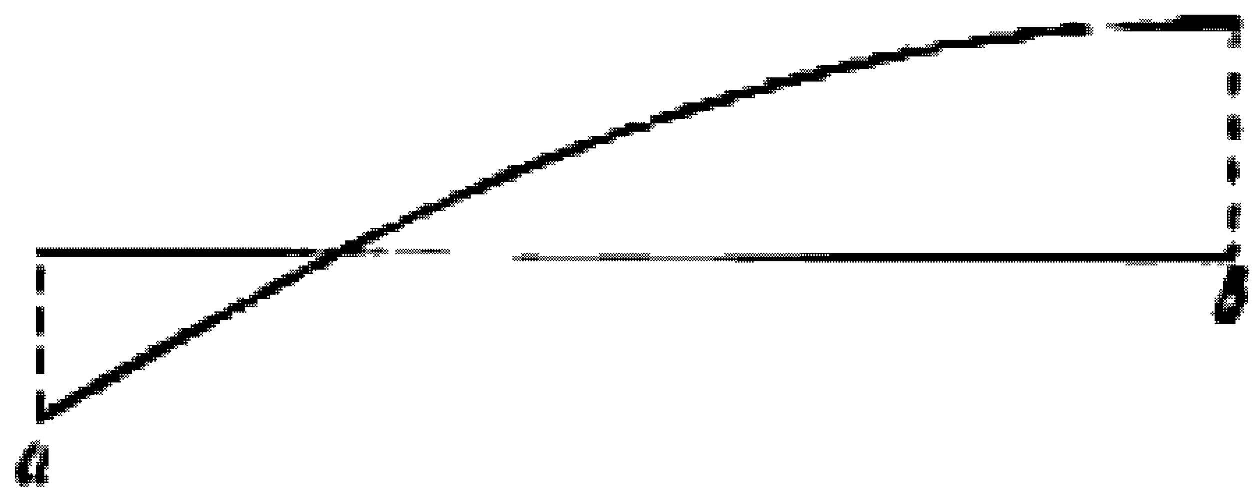
Ще докажем сега, че редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща. За това е достатъчно да покажем, че частното в дясната страна на равенството (11.8) е неположително. Тъй като производната f' е положителна в сегмента $[a, b]$, то функцията f е растяща в този сегмент и от неравенството $x_n \leqq c<b$ следва, че $f(x_n) \leqq f(c)=0$, $f(b)-f(x_n)>0$. Оттук следва и неположителността на разглежданото частно.

И така редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща и ограничена отгоре с числото c. По теорема 3.15 тази редица е сходяща и нейна граница е търсеният корен c.

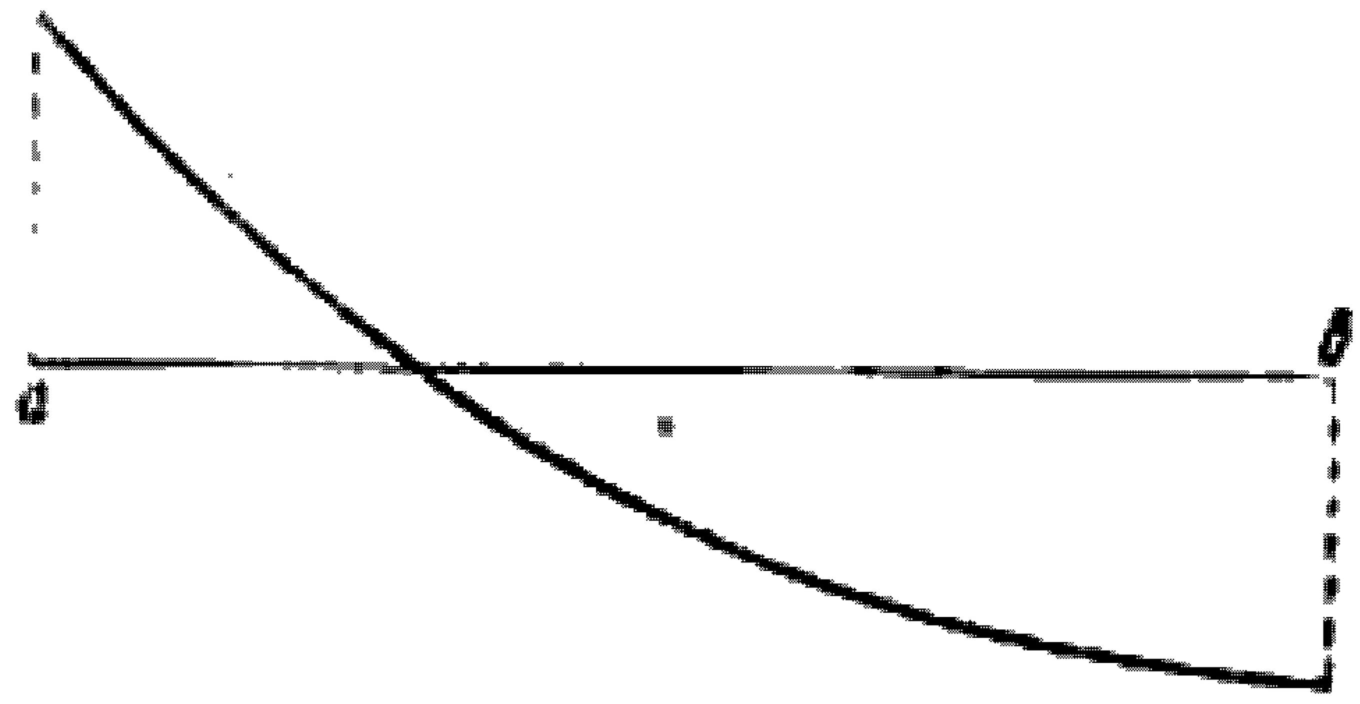
Ще дадем геометрична илюстрация на разгледания случай 1°. От формула (11.8) следва, че x_{n+1} е абсциса на точката на пресичане на хордата, съединяваща точките $A_n(x_n, f(x_n))$ и $B(b, f(b))$, от графиката на функцията f (на фиг. 11.4 са изобразени точките A_1 и A_2). Както беше казано, освен разгледания случай 1° възможни са още три случая: 2°) производната f' е нерастяща и отрицателна в сегмента $[a, b]$; 3°) производната f' е нерастяща и положителна в сегмента $[a, b]$; 4°) производната е ненамаляваща и отрицателна в сегмента $[a, b]$. Тези случаи са изобразени съответно на фиг. 11.5, 11.6, 11.7. В случая 2° уравнението (11.6), както по-горе, се заменя с уравнението (11.7) и за нулево приближение се избира точката $x_0=a$ (при това редицата $\{x_n\}$ се оказва също ненамаляваща). В случаите 3° и 4° уравнението (11.6) се заменя не с уравнението (11.7), а със следното уравнение $x=F(x)$, където $F(x)=x-(a-x)f(x)/(f(a)-f(x))$, и за нулево приближение се взема точката $x_0=b$ (при това редицата $\{x_n\}$ се оказва нерастяща).



Фиг. 11.5



Фиг. 11.6



Фиг. 11.7

Приведената геометрична илюстрация дава названието на ***метода на хордите.***

Ще преминем сега към изложението на метода на допирателните или метода на Нютон.

Нека, както по-горе, търсеният корен c на уравнението (11.6) е отделен в сегмента $[a, b]$, в който f има непрекъсната и монотонна първа производна, запазваща постоянен знак. И тук са възможни същите четири случая, които отбелязахме при метода на хордите.

Ще разгледаме подробно случая 1^{0}, т. е. предполагаме, че производната f' е ненамаляваща и положителна в сегмента $[a, b]$. Уравнението (11.6) е еквивалентно на уравнението

(11.10) $$x=F(x),$$

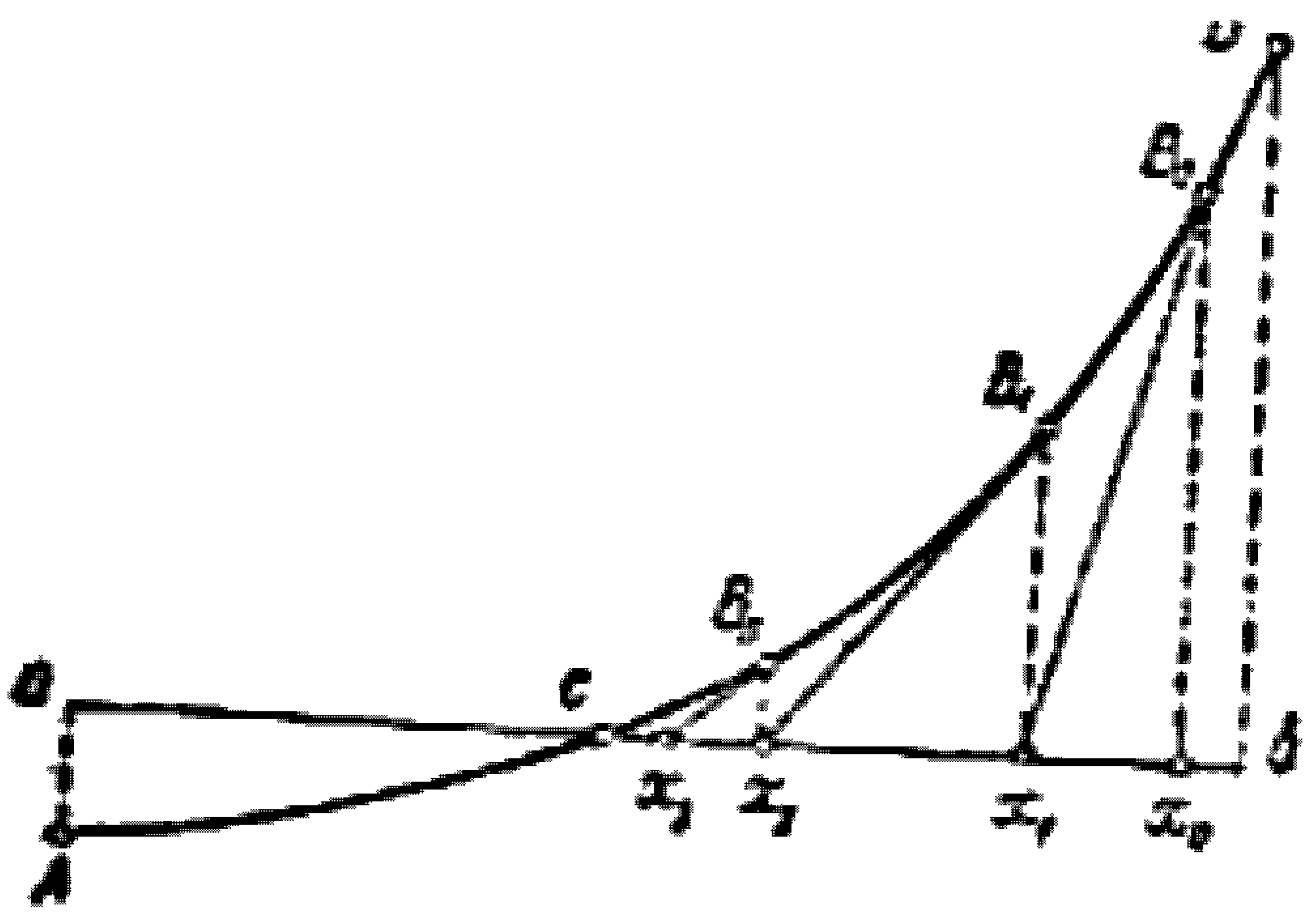
където

$$F(x)=x-f(x)/f'(x),$$

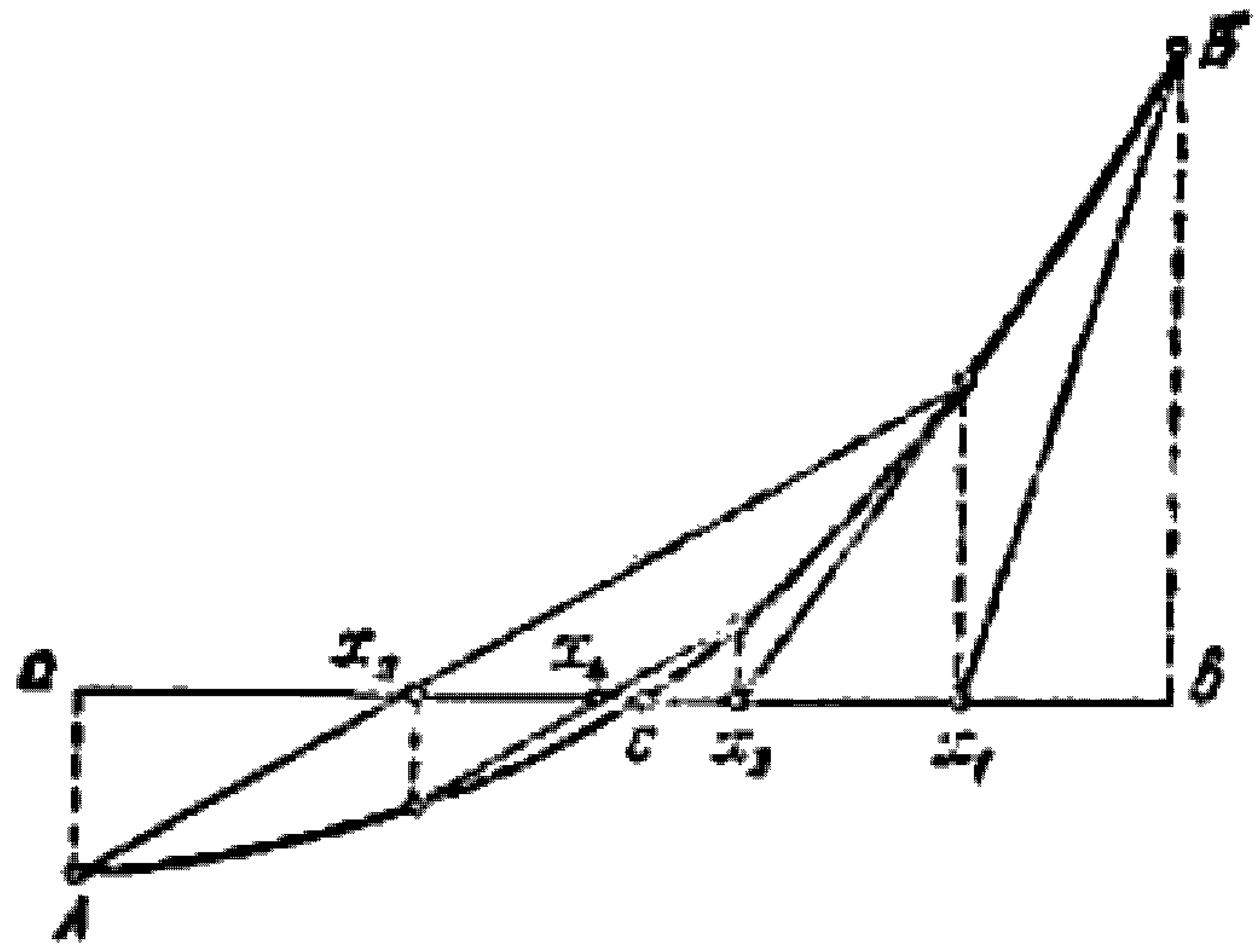
в сегмента $[a, b]$ и ще решаваме последното уравнение по метода на итерациите, като ще вземем за нулево приближение x_0 точката b и ще определим редицата $\{x_n\}$ по рекурентната формула

(11.11) $$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-f(x_n)/f'(x_n).$$

За да докажем, че редицата $\{x_n\}$ клони към търсения корен c, е достатъчно съгласно твърдение 1 от 11.1.2 да покажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$ и редицата $\{x_n\}$ е сходяща.



Фиг. 11.8



Фиг. 11.9

С индукция ще докажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$, по-точно в сегмента $[c, b]$, където c е търсеният корен. Тъй като $x_0=b$ принадлежи на сегмента $[c, b]$, то за провеждане на индукцията е достатъчно, като допуснем, че x_n принадлежи на сегмента $[c, b]$, да докажем, че и x_{n+1} също принадлежи на този сегмент.

Ако $x_n=c$, то $f(x_n)=f(c)=0$ и от формула (11.11) следва, че $x_{n+1}=x_n=c$, т. е. индукцията е проведена. Нека сега $x_n>c$. Тогава от формула (11.11), отчитайки, че $f(c)=0$, получаваме

$$x_n-x_{n+1}=(f(x_n)-f(c))/f'(x_n).$$

Като приложим към израза в числителя на дробта формулата на Лагранж, намираме

$$x_n-x_{n+1}=(x_n-c)f'(\xi_n)/f'(x_n),$$

където $c<\xi_n<x_n$. Понеже производната е ненамаляваща и положителна, дробта $f'(\xi_n)/f'(x_n)$ е положителна и не надминава единица, т. е. $x_n-x_{n+1}\leqq x_n-c$, или $x_{n+1}\geqq c$.

Индукцията е проведена. От положителността на производната f' следва, че функцията f е растяща, и затова от неравенството $c\leqq x_n$ получаваме $0=f(c)\leqq f(x_n)$. Тогава $f(x_n)/f'(x)\geqq 0$. Оттук съгласно формула (11.11) $x_{n+1}\leqq x_n$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е нерастяща. Понеже тази редица освен това е ограничена отдолу от числото c, то според теорема 3.15 тя е сходяща. Съгласно твърдение 1 от 11.1.2 границата ѝ е търсеният корен c.

Ще дадем геометрична илюстрация на разгледания случай 1°. От формула (11.11) следва, че x_{n+1} е абсцисата на пресечната точка на оста Ox с допирателната към графиката на функцията f в точката $B_n(x_n, f(x_n))$ (на фиг. 11.8 са изобразени точките B_0, B_1 и B_2).

Приведената геометрична илюстрация оправдава названието — ***метод на допирателните***. Предлагаме на читателя самостоятелно да разгледа метода на допирателните за случаите 2°, 3° и 4°, посочени при излагането на метода на хордите.

Забележка 1. Възниква въпросът за оценка на грешката при метода на хордите и допирателните.

Като приложим към израза $f(x_n)=f(x_n)-f(c)$ формулата на Лагранж, имаме $f(x_n)=(x_n-c)f'(\xi_n)$. Оттук получаваме следната оценка:

$$|x_n-c|\leqq|f(x_n)|/m, \tag{11.12}$$

където m е минималната стойност на $|f'|$ в сегмента $[a, b]$. Формула (11.12) позволява да се оцени отклонението на x_n от точната стойност на корена c чрез стойността на модула на дадената функция f в точката x_n.

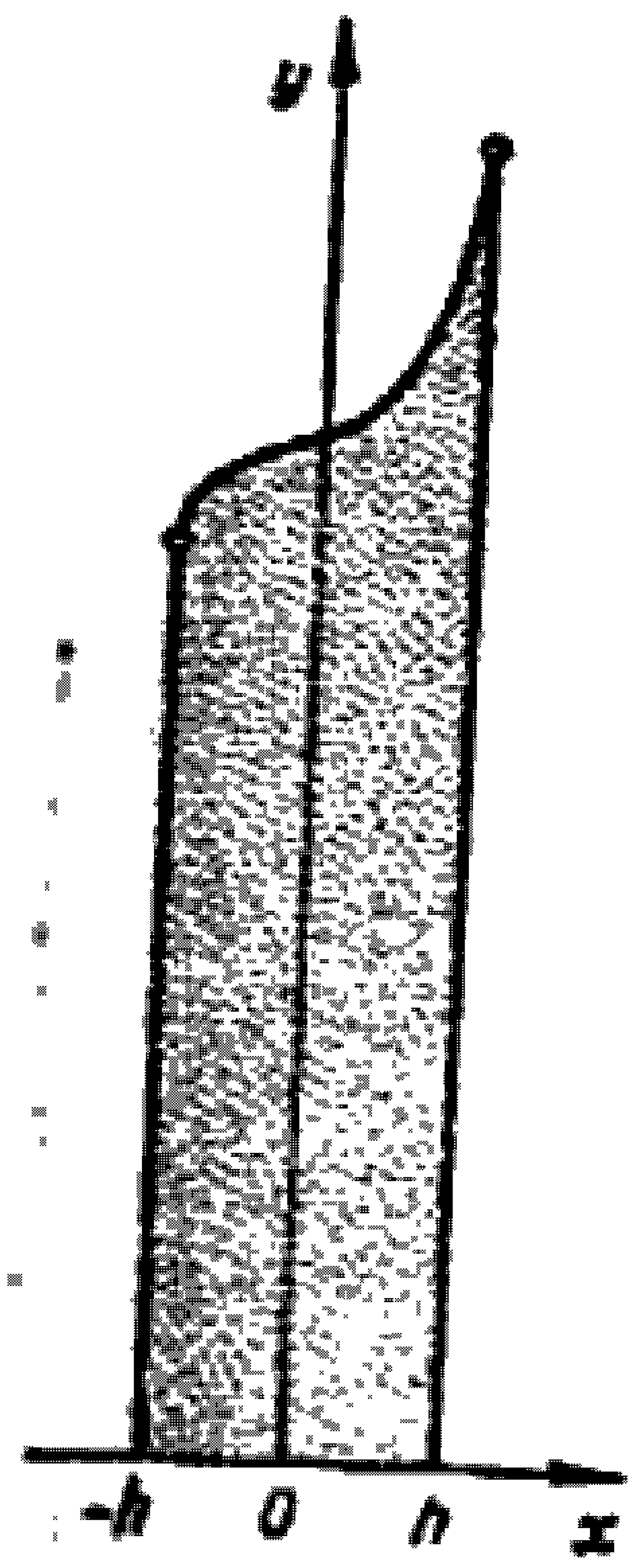
11.2. Приближени методи за пресмятане на определени интеграли

11.2.1. Уводни бележки. Ще се запознаем с три от най-често използваните приближени методи за пресмятане на определени интеграли: метод на правоъгълниците, метод на трапеците и метод на параболите.

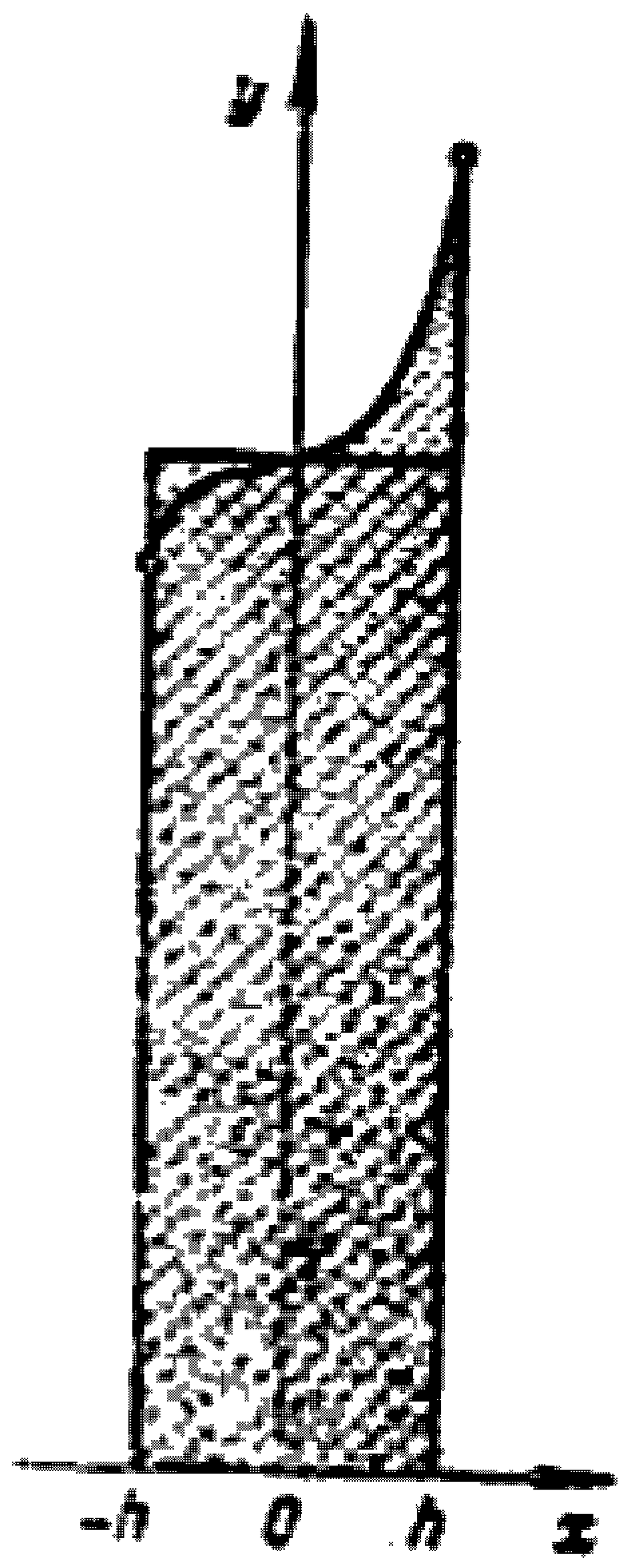
Основната идея на тези методи е да се замени подинтегралната функция с по-проста функция — полином, съвпадащ с f в някои точки. За изясняване на тази идея ще разгледаме при малко h интеграла $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$, представляващ лицето на тесен криволинеен трапец, лежащ под графиката на функцията f в сегмента $[-h, h]$ (вж. фиг. 11.10).

Заменяме функцията f с полином от нулева степен, а именно с константата $f(0)$. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ приближено се заменя с лицето на правоъгълника, защрихован на фиг. 11.11. По-нататък ще покажем, че при определени условия за f грешката при такава замяна е от порядъка на h^3.

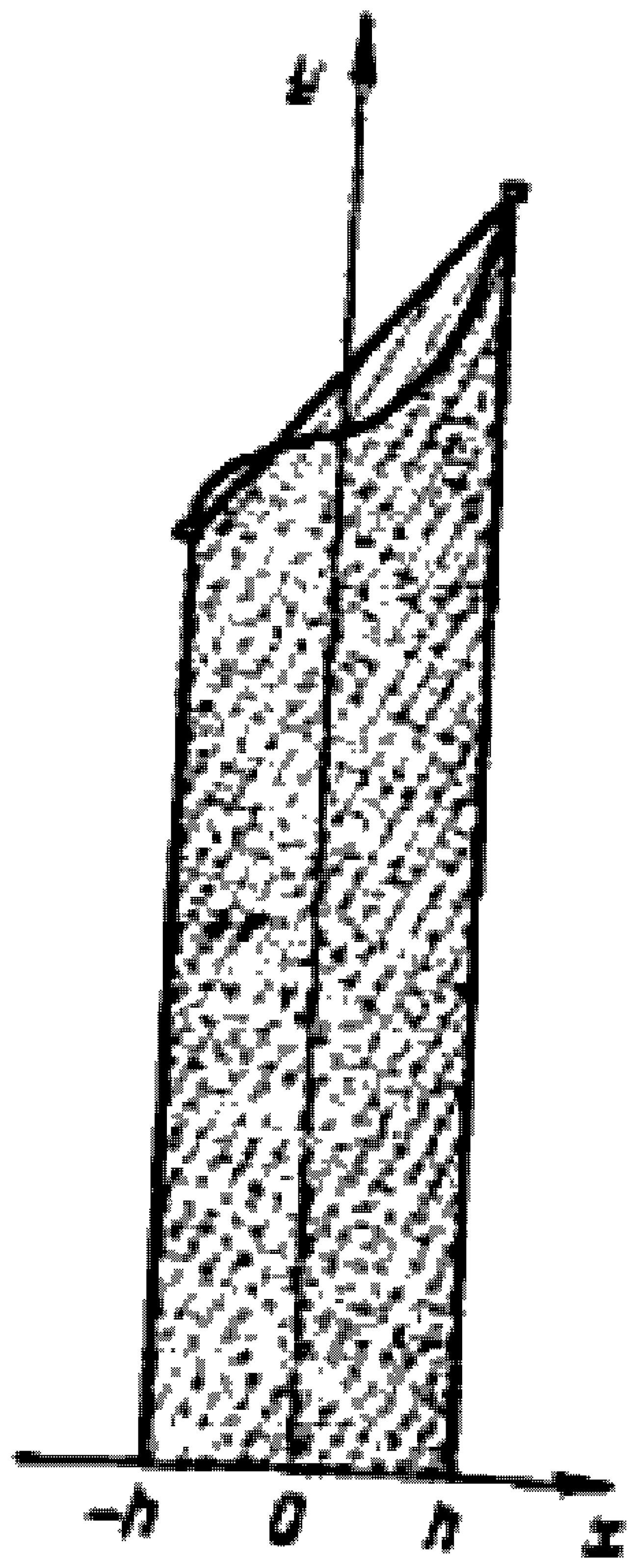
Да заменим сега функцията f с полином от първа степен, а именно с линейна функция $y=kx+b$, съвпадаща с $f(x)$ в точките $-h$ и h. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ приближено се за-



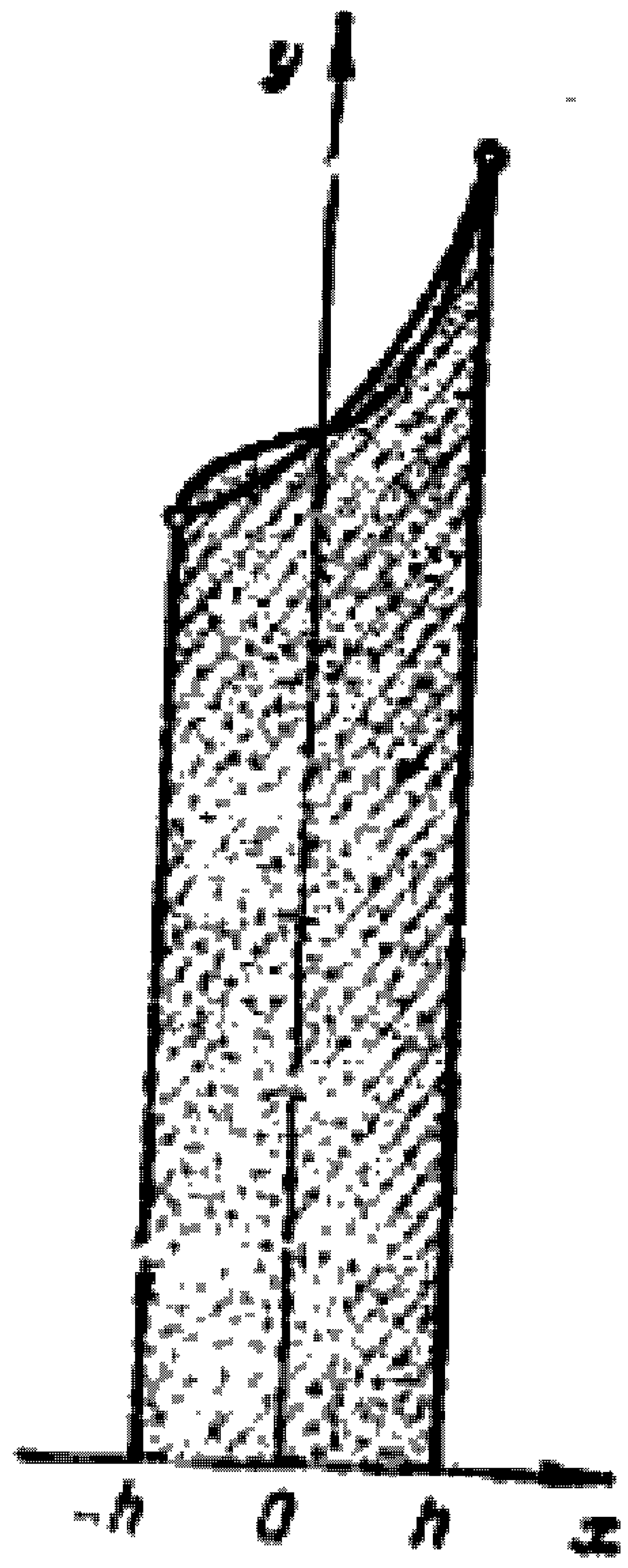
Фиг. 11.10



Фиг. 11.11



Фиг. 11.12



Фиг. 11.13

меня с лицето на праволинейния трапец, защрихован на фиг. 11.12. По-нататък ще покажем, че грешката, която се прави при тази замяна, е също от порядък h^3.

Заменяме накрая функцията f с полином от втора степен, т.е. с парабола $y=Ax^2+Bx+C$, съвпадаща с f в точките $-h$, 0, h. При това интегралът $\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx$ се заменя приближено с лицето на лежащата под параболата фигура, защрихована на фиг. 11.13. По-нататък ще покажем, че при определени изисквания за функцията f грешката при такава замяна е от порядъка на h^5.

Ако трябва да се пресметне интегралът $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ за произволен сегмент $[a, b]$, естествено е този сегмент да се раздели на достатъчно голям брой малки сегменти и за всеки от тях да се приложат изложените разсъждения. Така идваме до методите на правоъгълниците, трапеците и параболите в техния общ вид. За да оценим грешката при прилагане на методите на правоъгълниците, трапеците и параболите, ще разгледаме тези методи от друга гледна точка.

Най-напред ще въведем понятието усредняване на n числа.

Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ са произволни положителни числа.

Всяко число c от вида

$$c=(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n))/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n) \tag{11.13}$$

се нарича усредняване на n-те числа $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$.

Очевидно е, че ако всички числа $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ са заключени между числата m и $M (m \leqq M)$, то и всяко усредняване c на тези числа удовлетворява неравенството $m \leqq c \leqq M$.

Ще предполагаме по нататък, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и точките $x_1, x_2, \cdots, x_n$ принадлежат на този сегмент. Тогава което и усредняване на n-те числа $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ да вземем, съществува такава точка ξ на сегмента $[a, b]$, че това усредняване да е равно на стойността $f(\xi)$. Наистина, тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то всички нейни стойности в този сегмент са заключени между най-голямата ѝ стойност M и най-малката ѝ стойност m. Следователно и всяко усредняване c на числата $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n)$ е заключено между m и M. Но каквато и да е тази междинна стойност на c, съгласно теорема 4.12 съществува такава точка ξ в сегмента $[a, b]$, че $c=f(\xi)$.

По такъв начин за непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ формула (11.13) може да се напише във вида

$$(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n (x_n))/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)=f(\xi) \tag{11.14}$$

или във вида

$$(b-a)\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=(b-a)f(\xi). \tag{11.15}$$

От друга страна, за непрекъснатата функция в сегмента $[a, b]$ съгласно 9.4.2 съществува точка ξ' от сегмента $[a, b]$, за която е в сила формулата за средните стойности

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi'). \tag{11.16}$$

Съпоставянето на формули (11.15) и (11.16) позволява да се направи предположението, че при някой разумен избор на числата $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ и точките $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ пресмятането на интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с голяма точност може да се замени с пресмятането на сумата от лявата страна на формула (11.15). Именно на тази идея за разумен избор на числата $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ и точките $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ са основани приближените методи за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

11.2.2. Метод на правоъгълниците. Ще смятаме, че интегруемата функция f има непрекъсната втора производна в разглеждания сегмент.

Ще започнем с разглеждането на интеграл със симетрични граници $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$. За пресмятане на този интеграл ще тръгнем от формулите (11.15) и (11.16), в които полагаме $n=1$, $a=-c$, $b=c$, $x_1=0$, $\lambda_1=1$. Тогава очевидно и дясната страна на (11.15) е равна на $2c\,.\,f(0)$, така че

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2c\,.\,f(0)+R, \tag{11.17}$$

където R е остатъчният член (т. е. отклонението на числото $2c\,.\,f(0)$ от точната стойност на интеграла). За да оценим остатъчния член R, означаваме с F примитивна функция на f. Тъй като е в сила формулата на Нютон — Лайбниц $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = F(c)-F(-c)$, то

$$R=F(c)-F(-c)-2c\,.\,f(0). \tag{11.18}$$

Разлагаме по формулата на Маклорен функцията $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Като вземем остатъчния член във форма на Лагранж и означим с ξ' междинна променлива в интервала $(0,\ c)$, имаме

$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=\Psi(0)+\frac{1}{1!}c\,\Psi'(0)+\frac{1}{2!}c^2\,\Psi''(0) + \frac{1}{3!}c^3\,\Psi'''(\xi'). \tag{11.19}$$

Пресмятаме влизащите в тази формула стойности на $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$ и $\Psi'''(\xi')$:

$$\Psi(x)=F(x)-F(-x); \qquad \Psi(0)=F(0)-F(0)=0;$$
$$\Psi'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x); \qquad \Psi'(0)=f(0)+f(0)=2f(0);$$
$$\Psi''(x)=f'(x)-f'(-x); \qquad \Psi''(0)=f'(0)-f'(0)=0;$$
$$\Psi'''(x)=f''(x)+f''(-x); \qquad \Psi'''(\xi')=f''(\xi')+f''(-\xi')=2f''(\xi).$$

(В последното равенство използвахме формула (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$, $x_1=\xi'$, $x_2=-\xi'$ и сме означили с ξ някоя точка от интервала $(-c,\ c)$, в който по условие f'' е непрекъсната функция.)

Замествайки пресметнатите стойности във формула (11.19), ще имаме

$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=2c\,.\,f(0)+\frac{2}{3!}c^3 f''(\xi). \tag{11.20}$$

От (11.20) и (11.18) окончателно получаваме

$$R=\frac{1}{3}c^3 f''(\xi)=\frac{1}{24}(2c)^3 f''(\xi). \tag{11.21}$$

От тази оценка за остатъчния член се вижда, че формула (11.17) е толкова по-точна, колкото е по-малка величината $2c$. Затова за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ е удобно да се раздели сегментът $[a, b]$ на достатъчно голям брой части и към всяка от тези части да се приложи формулата за приближено интегриране (11.17). Като предполагаме, че функцията има в сегмента $[a, b]$ непрекъсната втора производна, ще разделим този сегмент на n равни части с помощта на точките $x_0=a<x_2<\cdots<x_{2n}=b$. Означаваме с x_{2k+1} средната точка на сегмента $[x_{2k}, x_{2k+2}]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})]+R, \tag{11.22}$$

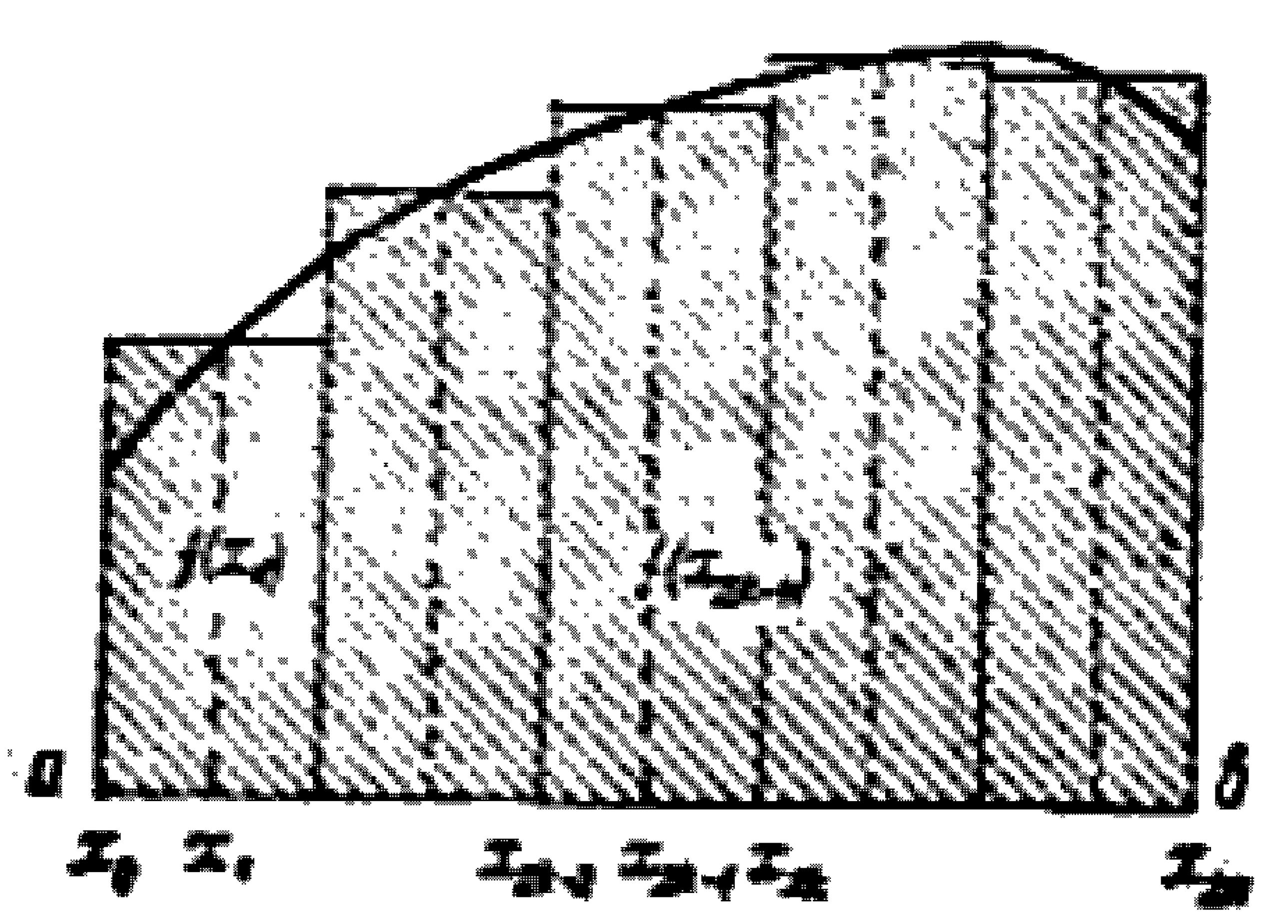
където

$$\begin{aligned}R=R_1+R_2+\cdots+R_n&=\frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\cdots+f''(\xi_n)]\\&=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi),\quad a<\xi<b.\end{aligned} \tag{11.23}$$

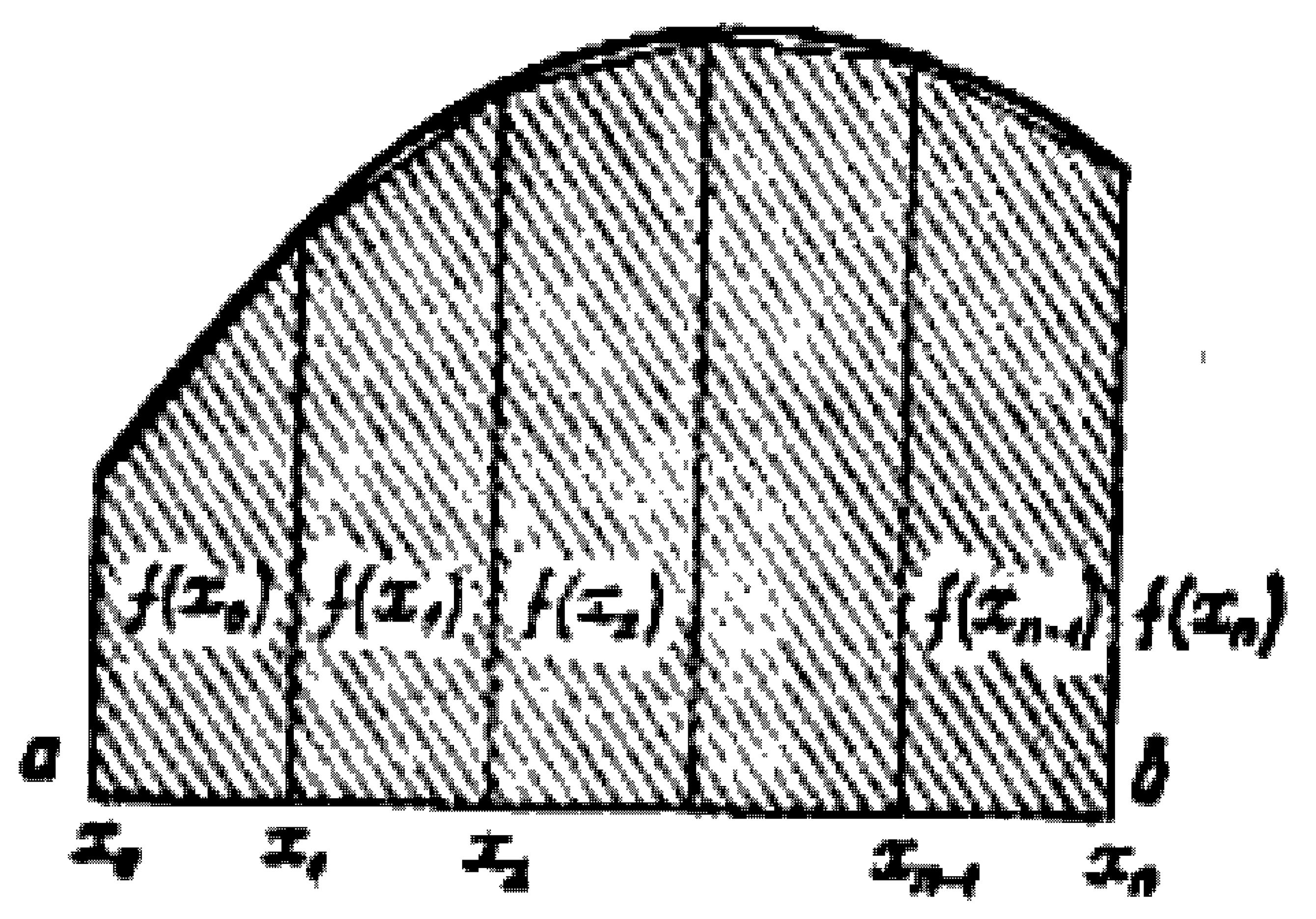
(Тук сме използвали формулата за усредняване (11.14) при $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ и сме означили с ξ някоя междинна стойност на аргумента в интервала (a, b).)

Формула (11.22) се нарича ***формула на правоъгълниците***. Геометричният ѝ смисъл е ясен от фиг. 11.14: Лицето на криволинейния трапец под графиката на f в сегмента $[a, b]$ приближено се заменя със сумата от лицата на означените на този чертеж правоъгълници.

11.2.3. Метод на трапеците. Нека, както и по-горе, функцията f има непрекъсната втора производна в разглеждания сегмент. Отново ще пресметнем интеграла $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$, но този път ще изхождаме от формулите (11.15) и (11.16), като ще считаме, че $n=2$, $a=-c$, $b=c$, $x_1=-c$, $x_2=c$, $\lambda_1=\lambda_2=1$.



Фиг. 11.14



Фиг. 11.15

Тогава

(11.24) $$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(-c)+f(c)]2c+R,$$

където R е остатъчният член, подлежащ на оценка.

Означаваме с F примитивна на функцията f и от $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = F(c) - F(-c)$ получаваме

(11.25) $$R = F(c) - F(-c) - \frac{1}{2}[f(-c)+f(c)]\,.\,2c.$$

Нека, както в метода на правоъгълниците, $\Psi(x) = F(x) - F(-x)$. Като разложим функциите Ψ и Ψ' по формулата на Маклорен с остатъчен член в интегрална форма (вж. 9.5.4) и положим $x=c$, ще имаме

$$\Psi(c) = F(c) - F(-c) = \Psi(0) + \frac{1}{1!}c\Psi'(0) + \frac{1}{2!}c^2\Psi''(0)$$
$$+\frac{1}{2!}\int_0^c (c-x)^2\,\Psi'''(x)\,dx,$$

$$\Psi'(c) = f(c) + f(-c) = \Psi'(0) + \frac{1}{1!}c\Psi''(0) + \frac{1}{1!}\int_0^c (c-x)\,\Psi'''(x)\,dx.$$

Замествайки в тези формули стойностите на $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$, пресметнати в 11.2.2, получаваме

$$F(c) - F(-c) = 2cf(0) + \frac{1}{2}\int_0^c \Psi'''(x)\,(c-x)^2\,dx,$$

$$f(c)+f(-c)=2f(0)+\int_0^c \Psi'''(x)(c-x)\,dx.$$

Като заместим последните два израза в (11.25), намираме

$$R=\int_0^c \Psi'''(x)\left[\frac{1}{2}(c-x)^2-c(c-x)\right]dx=-\frac{1}{2}\int_0^c (c^2-x^2)\,\Psi'''(x)\,dx.$$

Поради това, че функцията c^2-x^2 е неотрицателна в сегмента $[0,\ c]$, ще приложим към последния интеграл първата формула за средните стойности (вж. 9.4.2). Като вземем пред вид, че $\Psi'''(x)=f''(x)+f''(-x)$, и означим с ξ' подходяща стойност на аргумента от сегмента $[0,\ c]$, получаваме

$$R=-\frac{1}{2}[f''(\xi')+f''(-\xi')]\int_0^c (c^2-x^2)\,dx=-\frac{1}{3}c^3[f''(\xi')+f''(-\xi')].$$

Като приложим към израза в средните скоби формулата за усредняване (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ и означим с ξ подходяща стойност на аргумента от сегмента $[-c,\ c]$, намираме окончателно

$$R=-\frac{2}{3}c^3 f''(\xi)=-\frac{1}{12}(2c)^3 f''(\xi).$$

За пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, както и при метода на правоъгълниците, разделяме сегмента $[a,\ b]$ на n равни части с помощта на точките $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ и прилагаме формула (11.24) за всеки от частичните сегменти. Получаваме

(11.26)
$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})(f(x_{k-1})+f(x_k))+R_k\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2n}\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)]+\cdots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\}+R$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right.+R,$$

където

$$R=R_0+R_1+\cdots+R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^3}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\cdots+f''(\xi_n)\right]$$

(11.27)

$$=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \qquad a\leqq\xi\leqq b.$$

(Използвали сме формулата за усредняване (11.14)). Формула (11.26) се нарича ***формула на трапеците.*** Геометричният смисъл на тази формула е ясен от фиг. 11.15: Лицето на криволинейния трапец, лежащ под графиката на функцията f в сегмента $[a, b]$, се заменя приближено със сумата от лицата на посочените на този чертеж праволинейни трапеци. Сравняването на остатъчния член (11.27) с остатъчния член (11.23) показва, че методът на трапеците не дава по-голяма точност в сравнение с метода на правоъгълниците.

11.2.4. Метод на параболите. Този път ще предполагаме, че функцията f има в разглеждания сегмент непрекъсната четвърта производна и отново ще пресметнем интеграла $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$.

Както и по-горе, ще изходим от формулите (11.15) и (11.16), но този път при $n=3$, $a=-c$, $b=c$, $\lambda_1=\lambda_3=1$, $\lambda_2=\lambda$ (числото λ ще определим по-нататък), $x_1=-c$, $x_2=0$, $x_3=c$. Тогава

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx=\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}2c+R,$$

където R е остатъчният член, който трябва да определим. За оценка на остатъчния член ще означим, както и по-горе, с F примитивна функция на f и като отчетем, че $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=F(c)-F(-c)$, получаваме

$$R=F(c)-F(-c)-\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\cdot 2c. \tag{11.28}$$

Нека, както и по-горе, $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Разлагаме функциите $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ по формулата на Маклорен с остатъчен член в интегрална форма. Като заместим в тези разлагания $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$, пресметнати в 11.2.2, и като отчетем, че $\Psi^{(4)}(0)=0$, имаме

(11.29)
$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=2c\,f(0)+\frac{2}{3!}c^3f''(0)$$
$$+\frac{1}{4!}\int_0^c(c-x)^4\,\Psi^{(5)}(x)\,dx,$$

$$\Psi'(c)=f(c)+f(-c)=2\,.\,f(0)+\frac{2}{2!}c^2f''(0)+\frac{1}{3!}\int_0^c(c-x)^3\,\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

От тези формули следва

(11.30)
$$\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\,.\,2c$$
$$=2c\,.\,f(0)+2\frac{c^3}{2+\lambda}\,f''(0)+\frac{2}{3!\,(2+\lambda)}\,c\int_0^c(c-x)^3\,\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

От формула (11.28) се вижда, че остатъчният член R е равен на разликата на изразите (11.29) и (11.30). За да направим остатъчния член безкрайно малка величина от по-висок ред относно c, избираме λ така, че вторите членове в дясната страна на формулите (11.29) и (11.30) да съвпадат, т. е. полагаме $\frac{2}{3!}=\frac{2}{2+\lambda}$, или $\lambda=4$. При тази стойност на λ разликата на формулите (11.29) и (11.30) дава

$$R=\int_0^c\left[\frac{1}{24}\,(c-x)^4-\frac{c}{18}\,(c-x)^3\right]\Psi^{(5)}(x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{24}\int_0^c\left[(c-x)^3\left(\frac{c}{3}+x\right)\right]\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

Като вземем пред вид, че функцията $[(c-x)^3(c/3+x)]$ е неотрицателна в сегмента $[0,\,c]$, ще приложим към последния интеграл първата формула за средните стойности. Отчитайки, че $\Psi^{(5)}(x)=f^{(4)}(x)+f^{(4)}(-x)$, и като означим с ξ' подходяща стойност на аргумента от сегмента $[0,\,c]$, получаваме

$$R=-\frac{1}{24}\,[f^{(4)}(\xi')+f^{(4)}(-\xi')]\int_0^c(c-x)^3\,(c/3+x)\,dx$$
$$=\frac{-(2c)^5}{2.2880}\,[f^{(4)}(\xi')+f^{(4)}(-\xi')].$$

Като приложим към израза в средните скоби формулата за усредняване (11.14) при $n=2$ и $\lambda_1=\lambda_2=1$ и като означим с ξ подходяща стойност на аргумента от сегмента $[-c, c]$, получаваме окончателно

$$R=-\frac{1}{2880}(2c)^5 f^{(4)}(\xi).$$

За пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ разделяме сегмента $[a, b]$ на n равни части с точките $a=x_0<x_2<x_4<\cdots x_{2n}=b$ и полагаме $x_{2k+1}=\frac{1}{2}(x_{2k}+x_{2k+2})$. Получаваме

$$(11.31)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(x_{2k}-x_{2k-2})\frac{f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})}{6}+R_k\right\}$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1})\right]+R,$$

където

$$(11.32)\qquad R=-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)+\cdots+f^{(4)}(\xi_n))$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi),$$

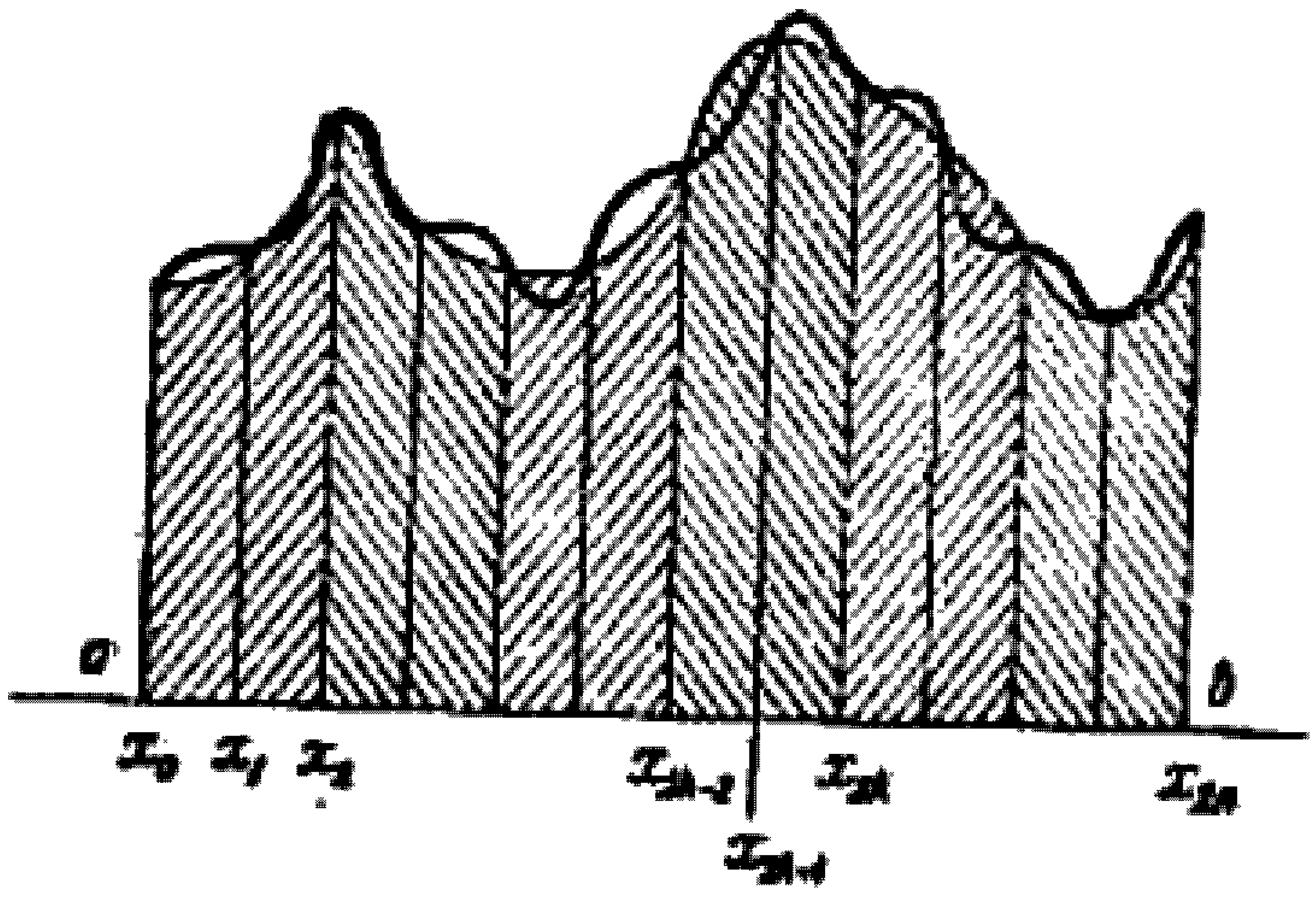
$$a<\xi<b.$$

(Тук използвахме формулата за усредняване (11.14).)

Формулата (11.31) се нарича ***формула на Симпсън**** или ***формула на параболите***. Геометричният ѝ смисъл е ясен от фиг. 11.16: Лицето на криволинейния трапец под графиката на функцията $f(x)$ и сегмента $[a, b]$ се заменя приближено със сумата от лицата на фигурите, защриховани на фиг. 11.16, лежащи под параболите. За да се убедим в това, е достатъчно да отбележим, че изразът в големите скоби на формула (11.31) дава лицето на фигурата, лежаща в сегмента $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ под параболата $y=Ax^2+Bx+C$, съвпадаща с f в точките $x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}$.

Формулата на Симпсън дава по-голяма точност от формулите на правоъгълниците и трапеците.

* Томас Симпсън — английски математик (1710 — 1761).



Фиг. 11.16

За да илюстрираме използването на формулата на Симпсън, ще пресметнем интеграла $J(x_0)=\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx$. Ще се ограничим за простота със стойности за x_0 от сегмента $0\leqq x_0\leqq 1$. Като положим $f(x)=e^{-x^2}$ и пресметнем производната $f^{(4)}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$, лесно се вижда, че за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq x_0\leqq 1$ имаме $|f^{(4)}(x)|\leqq 20$. Оценката (11.32) ни дава, че $R<\frac{1}{144n^4}$. Следователно, като разделим сегмента $[0, x_0]$ на 5 равни части и заменим разглеждания интеграл със сумата от дясната страна на формулата на Симпсън, ще пресметнем този интеграл с точност $\frac{1}{144.5^4}<\frac{1}{90\,000}$.

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

В тази глава ще бъдат изложени важни понятия и факти от общата топология, които се използват в различни области на математиката. Читателят без труд ще забележи, че тези понятия и факти са естествено обобщение на редица определения и твърдения, съдържащи се в предишните глави. Материалът от тази глава ще бъде използван също и в изложението по-нататък.

12.1. Метрични пространства

12.1.1. Определение на метрично пространство. Вече подчертахме, че фундаментална роля в анализа играе понятието граница. В основата на това понятие е определението за разстояние между числата, т. е. абсолютната стойност от разликата на тези числа. Затова е естествено да се въведе понятието разстояние вече не между две числа, а между два произволни елемента на някое абстрактно множество X. Това разстояние трябва да обобщава свойствата на разстоянието между числата от числовата ос. Във връзка с казаното ще дадем следното определение:

Определение 1. *В множеството X е определена* ***структура на метрично пространство,*** *ако е зададена реална функция ρ на две променливи x и y, $x, y \in X$, удовлетворяваща* ***аксиомите:***

1) $\rho(x, y)=0$ *тогава и само тогава, когато* $x=y$;
2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ *(аксиома за симетрията)*;
3) $\rho(x, y)\leqq\rho(x, z)+\rho(z, y)$ *(неравенство на триъгълника).*

Функцията ρ се нарича ***метрика*** *или* ***функция на разстоянието,*** *а числото $\rho(x, y)$ се нарича* ***разстояние*** *между точките x и y на множеството X.*

По такъв начин ***метричното пространство*** *се образува от множеството X и от функцията разстояние ρ.* Затова обикновено метричното пространство R се означава така: $R=(X, \rho)$.

Ако в аксиома 3) положим $x=y$ и вземем пред вид 1) и 2), получаваме $0 \leqq \rho(y, z)$, т. е. функцията разстояние е неотрицателна функция на аргументите си.

Ще приведем за пример най-често срещащите се метрични пространства.

Примери:

1. Множеството на реалните числа се превръща в метрично пространство, ако за всеки две числа x, y положим $\rho(x, y) = |x-y|$. Това метрично пространство се означава обикновено с E^1.

2. Аритметичното n-мерно пространство $X=A^n$, точките на което (или елементите на множеството X) са наредените n-торки от числа $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, е очевидно метрично пространство, ако положим

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

където $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, и се означава с $E^n=(X, \rho)$. Аксиомите 1) и 2) от определението на метрично пространство, както лесно се вижда, са изпълнени. Верността на аксиома 3) следва от неравенството на Коши—Буняковски за сума (вж. 9.5). Действително

$$\rho^2(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i||z_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$=\rho^2(x, z)+2\rho(x, z)\cdot\rho(z, y)+\rho^2(z, y)=[\rho(x, z)+\rho(z, y)]^2.$$

По такъв начин $\rho(x, y)\leqq\rho(x, z)+\rho(z, y)$ и неравенството на триъгълника е доказано. Ще отбележим, че по-горе приложихме неравенството на Коши — Буняковски към сумата

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|\cdot|z_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i, \quad \text{където } a_i=|x_i-z_i|,\ b_i=|z_i-y_i|.$$

В множеството X, елементи на които са наредените n-орки от числа $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, може да се въведат и други функции разстояние, например: a) $\rho_0=\frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$, $x, y\in X$, където функцията ρ е въведената в пример 2; b) $\rho_1(x, y)=\max\{|x_i-y_i|: 1\leq i\leq n\}$, $x, y\in X$; c) $\rho_2(x, y)=\sum^n|x_i-y_i|$, $x, y\in X$; d) $\rho_3(x, y)$ $=\begin{cases}1, & \text{ако } x\neq y,\\ 0, & \text{ако } x=y;\end{cases}$ e) $\rho_4(x, y)=\begin{cases}\rho(x, y), & \text{ако } \rho(x, y)<1,\\ 1, & \text{ако } \rho(x, y)\geq 1,\end{cases}$ където функцията ρ е определена го-рано в пример 2.

Естествено при това едно и също множество X се превръща в различни метрични пространства $R_i=(X, \rho_i)$, където $i=1, 2, 3, 4$.

3. Нека Y е множеството на непрекъснатите функции, дефинирани в сегмента $[a, b]$. Въвеждаме метрика, като полагаме $\rho(x, y)$ $=\max\{|x(t)-y(t)|: t\in[a, b]\}$. Полученото пространство е метрично пространство. То се означава с

$$C_{[a, b]}=(Y, \rho).$$

По същия начин множеството Z на n пъти непрекъснато диференцируемите функции в сегмента $[a, b]$, $n\geq 1$, става метрично пространство, ако въведем метрика по правилото:

$$\rho(x, y)=\max\{|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|: i=0, 1, \dots, n,\ t\in[a, b]\},$$
$$x^{(0)}(t)\equiv x(t),\ y^{(0)}(t)\equiv y(t).$$

Това пространство се означава обикновено така:

$$C^n_{[a,b]}=(Z, \rho),\ n\geq 1.$$

Пространството $C_{[a, b]}$ ще означаваме понякога и със символа $C^0_{a, b]}$.

4. Нека V е множеството на всички ограничени редици $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ от реални числа. Полагаме $\rho(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|$. Очевидно аксиомите 1) — 3) са изпълнени. Това пространство се означава с $m=(V, \rho)$.

Ще отбележим, че всяко подмножество X_0 на метричното пространство $R(X, \rho)$ е също на свой ред метрично пространство със същата функция разстояние ρ. Наистина, ако аксиомите, определящи метриката ρ, са изпълнени за всяко $x, y, z\in X$, те са изпълнени и за x, y, z, принадлежащи на X_0. Така всяко подмножество на E^n е метрично пространство с функция $\rho(x, y)$ $=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$. Също така всяко подмножество на $C^n[a, b]$ е метрично пространство, $n=0, 1, 2, \ldots$

Двойката $(X_0, \rho)=R_0$ се нарича подпространство на $R=(X, \rho)$.

Ще отбележим също, че ако ρ е функция разстояние в някое метрично пространство, то по формулите а) или е) от пример 2 могат да се получат нови функции разстояния.

12.1.2. Отворени и затворени множества. Кълбо $O(a, r)$ в метричното пространство R (затворено кълбо $K(a, r)$) с център точката a и радиус r се нарича съвкупността от точките $x \in X$, за които $\rho(x, a)<r$ ($\rho(x, a)\leqq r$).

Определение 2. *Множеството $\Sigma \subset X$ се нарича* ***отворено*** *в $R(X, \rho)$, ако заедно с всяка своя точка съдържа и някое кълбо $O(x, r)$.*

Определение 3. ***Околност*** *на точката $x \in X$ се нарича всяко отворено множество, съдържащо x. Околност на някое подмножество на X (може да бъде и самото X) се нарича всяко отворено множество, съдържащо даденото подмножество. Околност на точка x ще означаваме със Σ_x.*

Определение 4. *Нека $Y \subset X$, тогава точката $x \in X$ се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на множеството Y, ако всяка околност на точката x съдържа поне една точка $y \in Y$, различна от x.*

Точката $y \in Y$ се нарича ***изолирана точка*** *за множеството Y, ако съществува околност на точката y, в която няма нито една точка от Y, различна от y.*

Определение 5. *Точката y, принадлежаща на множеството Y — подмножество на X, се нарича* ***вътрешна,*** *ако се съдържа в Y заедно с някоя своя околност. Точките, вътрешни за допълнението на Y в X, се наричат* ***външни*** *по отношение на Y. Ако точката не е нито вътрешна, нито външна по отношение на Y, тя се нарича* ***контурна точка*** *за Y. Множеството от контурните точки на Y се означава с ∂Y.*

Определение 6. *Едно множество в метрично пространство се нарича* ***затворено,*** *ако допълнението му е отворено.*

В сила е следното твърдение:

Лема 1. *Обединението на произволен брой отворени множества и сечението на краен брой отворени множества са отворени множества, $\emptyset$ и X са отворени.*

Сечението на произволен брой затворени множества и обединението на краен брой затворени множества са затворени множества, $\emptyset$ и X са затворени.

Доказателство. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е семейство от отворени множества в X. Ако $x \in \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$, то съществува такова α_0, че $x \in \Sigma_{\alpha_0}$, следователно съществува такова число $r>0$, че $O(x,r)\subset\Sigma_{\alpha_0}$, т. е. $O(x,r)\subset\bigcup_{\alpha}\Sigma_\alpha$. Следователно $\bigcup_{\alpha}\Sigma_\alpha$ е отворено множество.

По-нататък, ако $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ са отворени в X, то от това, че $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\Sigma_i$, следва, че за всяко $i=1, 2, 3, \dots, n$ имаме $x\in\Sigma_i$, т. е. за всяко $i=1, 2, 3, \dots, n$ съществуват такива $r_i>0$, че $O(x, r_i)\subset\Sigma_i$. Като изберем $r=\min\limits_{1\le i\le n} r_i$, за всяко $i=1, 2, 3, \dots, n$ получаваме

$$O(x, r)\subset O(x, r_i), \text{ т. е. } O(x, r)\subset\bigcap_{i=1}^{n}\Sigma_i,$$

т. е. сечението на множествата Σ_i, $i=1, 2, \dots, n$, е отворено множество.

Второто твърдение непосредствено следва от първото, като използваме принципа на двойственост за множества. Например нека $\{F\}$ е семейство от затворени множества в X. За всяко α ще разгледаме отвореното множество $\Sigma_\alpha=F'_\alpha$.* Тогава $\left(\bigcap_{\alpha}F_\alpha\right)'=\bigcup_{\alpha}F'_\alpha=\bigcup_{\alpha}\Sigma_\alpha$, т. е. $\left(\bigcap_{\alpha}F_\alpha\right)'$ е отворено множество; следователно $\bigcap_{\alpha}F_\alpha$ е затворено. Това, че $\varnothing$ и X са едновременно отворени и затворени, е очевидно.

Определение 7. ***Затворена обвивка*** *$\bar{Y}$ на множеството Y се нарича сечението на всички затворени множества, съдържащи Y.*

В сила е следната лема:

Лема 2. *Затворената обвивка на множество в метрично пространство има следните свойства:*

1) $\bar{A}\supset A$; 2) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$; 3) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$; 4) $\bar{\varnothing}=\varnothing$, $\bar{X}=X$.

Доказателство. Свойство 1) е очевидно: ако $x\in A$, то x принадлежи на всяко затворено множество, съдържащо A, и според лема 1 $x\in\bar{A}$. Свойство 2) следва от това, че $\bar{A}$ е затворен (лема 1). Ще докажем свойство 3). Тъй като $A\cup B\supset A$, а $\overline{A\cup B}\supset A\cup B$, то $\overline{A\cup B}\supset A$. Понеже $\overline{A\cup B}$ е затворено множество, то $\overline{A\cup B}\supset\bar{A}$. Аналогично $\overline{A\cup B}\supset\bar{B}$. По такъв начин $\overline{A\cup B}\supset\bar{A}\cup\bar{B}$. Обратно, $\bar{A}\cup\bar{B}$ е според лема 1 затворено множество и следователно $\bar{A}\cup\bar{B}\supset\overline{A\cup B}$. Твърдение 4) означава, че $\varnothing$ и X са затворени множества. □

* Ще напомним, че A' означава допълнението на множеството A.

Очевидно, ако $C \subset D$, то $\bar{C} \subset \bar{D}$.

Ще дадем следното определение:

Определение 8. *Нека $R=(X, \rho)$ е метрично пространство, а $R_0=(Y, \rho)$ $(Y \subset X)$ е негово подпространство. Множество Σ_Y от подпространството $R_0 (\Sigma_Y \subset Y)$ се нарича* ***отворено относно*** R_0, *ако съществува такова отворено в R множество Σ_X, че $\Sigma_Y = Y \cap \Sigma_X$. Аналогично множество F_Y от подпространството $R_0 (F_Y \subset Y)$ се нарича* ***затворено относно*** R_0, *ако съществува такова затворено в R множество F_X*, че $F_Y = Y \cap F_X$.

Множество, което е отворено относно R_0, ще наричаме ***„относително отворено"***.

Лесно се вижда, че едно отворено (затворено) относно R_0 множество $\Sigma_Y (F_Y)$ е отворено (затворено) в R_0 (разглеждано като подпространство на R). Вярно е и обратното: ако множеството е отворено (затворено) в R_0, то е отворено (затворено) относно R_0.

Ще подчертаем, че когато се говори за относително отворено (затворено) множество, наред с основното пространство се посочва и подпространството R_0, относно което се дава определението.* Аналогично на определението на относително отворени и относително затворени множества се определя и относително затворена обвивка. Относително затворена обвивка $\tilde{A}$ на множеството A в R_0 се определя чрез съотношението $\tilde{A}=\bar{A} \cap Y$, където $R_0=(Y, \rho)$, $\bar{A}$ е затворената обвивка на A в R.

Определение 9. *Пространството $R=(X, \rho)$ се нарича* ***свързано***, *ако не може да се представи като обединение на две непразни отворени непресичащи се множества.*

Очевидно пространството е свързано тогава и само тогава, когато не може да се представи като обединение на две непразни затворени непресичащи се множества.

Множеството Y, принадлежащо на метричното пространство R, е свързано, ако Y е свързано като подпространство в R.

12.1.3. Декартово произведение на метрични пространства. Ако $R_1(X_1, \rho_1)$, $R_2(X_2, \rho_2)$ са две метрични пространства, то може да се определи декартово произведение на тези метрични пространства. Нека $X=X_1 \times X_2$ е декартовото произведение на множествата X_1 и X_2, т. е. множеството от всевъзможните двойки (x_1, x_2),

* Например интервалът $\Sigma=(0,2)$ е отворен относно пространството E^1 и не е отворено множество относно пространството E^2. Действително, тъй като $\Sigma \subset E^1 \subset E^2$, то $\Sigma = E^1 \cap O(a, 1)$, където $O(a, 1)$ е отворен кръг в E^2 с център в точката $(1, 0)$ и радиус 1, т. е. интервалът е отворен в E^2 относно пространството E^1. Ако се разглежда интервалът $\Sigma=(0,2)$ в E^2, то той не е отворено множество, понеже не съдържа нито един кръг.

където $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Метрика ρ в множеството X може да се въведе например по следното правило:

$$\rho(x, y) = (\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2))^{1/2},$$

където $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $x_i \in X_i$, $y_i \in X_i$, $i=1, 2$. Двойката $R(X, \rho)$, където $X=X_1 \times X_2$, ρ е функцията разстояние, въведена по-горе, е метрично пространство и се нарича ***декартово произведение*** на метричните пространства R_1 и R_2: $R=R_1 \times R_2$.

Ако е зададена изброима редица от метрични пространства $R_1(X_1, \rho_1)$, $R_2(X_2, \rho_2)$, $R_3(X_3, \rho_3)$, ... и с X е означено декартовото произведение на множествата X_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, т. е. X се състои от елементи $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $x_i \in X_i$, то може да се даде следното определение:

Определение 10. *Декартово произведение* R *на метричните пространства* R_1, R_2, R_3, ... *се нарича двойката* (X, ρ), *където*

$$X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \qquad \rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \rho(x_k, y_k)/(1+\rho(x_k, y_k)),$$

$$x, y \in X, \ x_k, y_k \in X_k, \ x=(x_1, x_2, x_3, \ldots), \ y=(y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

То се означава така: $R=\prod_{i=1}^{\infty} R_i$.

12.1.4. Навсякъде гъсти и съвършени множества

Определение 11. *Нека A и B са две множества от метричното пространство* $R=(X, \rho)$. *Множеството A се нарича **гъсто** в B, ако* $\bar{A} \supset B$. *Множеството A се нарича **навсякъде гъсто** в пространството R, ако* $\bar{A}=R$.

Пространства, в които има изброими, навсякъде гъсти множества, се наричат ***сепарабелни.***

Разгледаните примери на метрични пространства E^1, E^n, $C^n[a, b]$ са примери на сепарабелни метрични пространства. Така в E^n изброимо, навсякъде гъсто множество е множеството на точките с рационални координати. В пространствата $C^n[a, b]$, $n \geq 0$, такова множество е множеството на полиномите с рационални коефициенти.

Пространството m е пример за несепарабелно пространство.* За да се убедим в това, можем да постъпим така:

* Вж. пример 4 от 12.1.1.

Подмножеството E_0 на m от редиците, състоящи се само от нули и единици, е с мощността на континуума.

Взаимните разстояния в пространството m между два различни елемента a и b от множеството E_0 са равни на единица. Следователно е невъзможно да се приближи с произволна точност всеки от тези вектори с елементите на изброимо множество, тъй като кълбата с центрове в точките на множеството E_0 и радиуси $1/3$ не се пресичат, а образуват множество с мощността на континуума. Тъй като $E_0 \subset m$, $m=(V, \rho)$, то пространството m е несепарабелно.

Множеството A се нарича ***навсякъде негъсто*** *в метричното пространство R, ако във всяко отворено множество на това пространство има отворено множество, несъдържащо нито една точка от множеството A.*

Например в пространството $C[0, 1]$ множеството A на функциите на вида $y=nx^2$ (n цяло число) е навсякъде негъсто. Друг пример за навсякъде негъсто множество в сегмента $[0, 1]$ (разглеждан като метрично пространство) е т. нар. канторово съвършено множество.

Множеството A, съдържащо се в метрично пространство, се нарича ***съвършено,*** *ако е затворено и всяка точка на множеството A е негова точка на сгъстяване.*

Канторовото съвършено множество в сегмента $I=[0, 1]$ се построява по следния начин: От сегмента $[0, 1]$ отделяме интервала $(1/3, 2/3)$ и останалото множество — обединението на двата сегмента $[0, 1/3,]$, $[2/3, 1]$, означаваме с I_1. От тези два сегмента на свой ред се отделя по една трета — интервалите $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$. Обединението на останалите сегменти означаваме с I_2. Продължаваме този процес неограничено. Очевидно $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ и I_n е обединение на 2^n сегмента, всеки от които има дължина 3^{-n}.

Множеството $K=\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ се нарича канторово множество.

Ще покажем, че K е съвършено. Това, че то е затворено, следва от построението и от лема 1; остава да се покаже, че не съдържа изолирани точки. Нека $x \in K$ и нека Σ_x е произволна околност на точката x, т. е. отворено множество. Тогава според определението на отворено множество съществува интервал σ_x (кълбо с център в точката x), съдържащ точката x и $\sigma_x \subset \Sigma_x$. Нека A_n е тази отсечка от множеството I_n, която съдържа точката x. Ако n е достатъчно голямо, то $A_n \subset \sigma_x$. Означаваме с a_n този край на отсечката A_n, който не съвпада с точката x. Очевидно от построението на множеството K имаме $a_n \in K$. Следователно произволната околност на точката x — множеството Σ_x, съдържа точката $a_n \ne x : a_n \in A_n \subset \sigma_x \subset \Sigma_x$, т. е. точката x е точка на сгъстяване за множеството K и K е съвършено.

Ще докажем сега, че K е навсякъде негъсто множество в сегмента $[0, 1]$, разглеждан като метрично пространство с обикновено евклидово разстояние. Тъй като всяко отворено множество в сегмент съдържа в себе си интервал, достатъчно е да покажем, че всеки интервал (кълбо) съдържа вътре в себе си друг интервал, в който няма точки, принадлежащи на K. Нека σ е произволен интервал от сегмента $[0, 1]$. Ако той не съдържа точки на K, построението е завършено. Ако съдържа точка $x \in K$ и $x \in \sigma$, то можем да изберем толкова голямо m, че $x \in A_m \subset I_m$ и $A_m \subset \sigma$, m е естествено число. Намираме интервала с дължина 3^{-m-1} и с център в средата на A_m. Този интервал не съдържа точки от K, а се съдържа в σ. □

12.1.5. Сходимост. Непрекъснати изображения

Определение 12. *Редицата $\{a_n\}$ от точки на метрично пространство се нарича* ***сходяща*** *към точката a от това пространство, ако всяка околност на точката a съдържа всички точки на редицата с изключение на краен брой. Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща към (клони към) a, това се записва $a_n \to a$, $n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Непосредствено от определението следва, че ако $a_n \to a$, то $\rho(a_n, a) \to 0$, $n \to \infty$.

В сила е твърдението:

Лема 3. *Точката $a \in R$ принадлежи на затворената обвивка $\bar{A}$ на дадено множество A тогава и само тогава, когато съществува редица $\{a_n\}$ от точки на множеството A, сходяща към a.*

Доказателство. Нека $a \in \bar{A}$, тогава a принадлежи на всяко затворено множество, съдържащо A. Да вземем за околност на точката a кълбото $O(a, n^{-1})$, където n е естествено число, по-голямо от някое фиксирано число. В това кълбо има поне една точка $a_n \in A$. Ако това не е така, то $a \notin A$ и съществува околност на точката a, в която няма точки на A. Допълнението на тази околност е затворено множество, съдържащо множеството A, и точката a не може да принадлежи на това затворено множество. Така стигаме до противоречие и следователно $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $a_n \in A$.

Вярно е и обратното: ако $a_n \to a$ и $a_n \in A$, то $a \in \bar{A}$.

Ако всяка околност на точката a се пресича с A, то $a \in \bar{A}$. Действително, ако $a \in A$, то $a \in \bar{A}$. Ако $a \notin A$, то ако допуснем, че $a \notin \bar{A}$ и вземем допълнението $\bar{A}'$, ще получим околност на точката

a — множеството $\overline{A}'$, която не се пресича с A, а това противоречи на условието, че всяка околност на точката a се пресича с A.

От $a_n \to a$ и $a_n \in A$ следва, че всяка околност на точката a съдържа точка a_n от множеството A, т. е. се пресича с A. □

Едновременно доказахме и следното твърдение:

Твърдение 1. *Точката $a \in \overline{A}$ тогава и само тогава, когато всяка околност Σ_a на точката a се пресича с A.*

Понятието непрекъснатост на функция на числов аргумент допуска естествено обобщение в случая, когато имаме изображение на едно метрично пространство в друго. Ще дадем следното определение:

Определение 13. *Изображението g на едно метрично пространство $R(X, \rho)$ в друго $R_0(Y, \rho_0)$ се нарича* ***непрекъснато*** *в точката x, ако за всяка околност $\Sigma_{g(x)}$ на точката $g(x)$ съществува такава околност Σ_x на точката x, че $g(\Sigma_x) \subset \Sigma_{g(x)}$. Ако g е непрекъснато във всяка точка на пространството R, то g се нарича непрекъснато изображение в R.*

В сила е следната лема:

Лема 4. *Изображението $g: R \to R_0$ на едно метрично пространство R в друго R_0 е непрекъснато в R тогава и само тогава, когато праобразът на всяко отворено множество е отворено множество.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $g: R \to R_0$ е непрекъснато изображение на R в R_0 и Σ_0 е отворено множество в R_0. Ако $g^{-1}(\Sigma_0) = \{x : x \in R,\ g(x) \in \Sigma_0\} = \emptyset$, то $g^{-1}(\Sigma_0)$ е очевидно отворено, тъй като $\emptyset$ е отворено.

Нека $g^{-1}(\Sigma_0) \neq \emptyset$ и $x \in \Sigma = g^{-1}(\Sigma_0)$. Тъй като $x \in g^{-1}(\Sigma_0)$, то $g(x) \in \Sigma_0$; следователно Σ_0 може да се разглежда като околност на точката $g(x)$. Поради непрекъснатостта на g в R (а следователно и в точката x) съществува такава околност Σ_x на точката x, че $g(\Sigma_x) \subset \Sigma_0$, т. е. $\Sigma_x \subset g^{-1}(\Sigma_0)$. И така за произволна точка $x \in g^{-1}(\Sigma_0)$ съществува такава околност Σ_x, че $\Sigma_x \subset g^{-1}(\Sigma_0)$. Понеже $\Sigma = \bigcup_{x \in \Sigma} \Sigma_x$, то множеството Σ е отворено като обединение на отворените множества Σ_x. Така че праобразът на всяко отворено множество е отворено.

Достатъчност. Нека е дадено, че при изображението $g: R \to R_0$ праобразът на всяко отворено множество е отворено. Вземаме произволна точка $x \in X$, $R = (X, \rho)$, и произволна околност $\Sigma_{g(x)}$ на образа ѝ в R_0. Тогава $\Sigma_x = g^{-1}(\Sigma_{g(x)})$ по условие е отворено множество в R и е околност на точката x, като при това образът на Σ_x при изображението g се съдържа в $\Sigma_{g(x)}$. Следователно изображението g според определението е непрекъснато в точката x.

Тъй като тези разсъждения са приложими за всяка точка $x \in R$, то изображението g е непрекъснато в R. □

Определение 13 за непрекъснатост на изображение $g: R \to R_0$ в точка $x \in R$ очевидно може да се изкаже и по следния начин:

Определение 13'. *Изображението g на едно метрично пространство $R(X, \rho)$ в друго $R_0(Y, \rho_0)$ се нарича* ***непрекъснато*** *в точката x, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че ако точката y принадлежи на отвореното кълбо $O(x, \delta)$ с център в точката x и радиус δ, то точката $g(y)$ принадлежи на отвореното кълбо $O_0(g(x), \varepsilon)$ с център в точката $g(x)$ и радиус ε, лежащо в пространството R_0.*

Последното определение може да се изкаже и по следния начин: Изображението $g: R \to R_0$ е непрекъснато в точката x, ако $\lim\limits_{y \to x} g(y) = g(x)$.

От неравенството на триъгълника лесно се получава, че функцията разстояние ρ е непрекъсната в точката x при фиксирано y. В действителност тя е непрекъсната функция и по двете променливи.

В случая, когато метричното пространство R е числовата ос с обичайното разстояние между числата, т. е. пространството E^1, а изображението g е реална функция в E^1, даденото определение 13 за непрекъснатост очевидно съвпада с определенията от гл. 4.

Ще дадем още следното определение:

Определение 14. *Изображението $g: R \to R_0$ на метричното пространство R в метричното пространство R_0 се нарича* ***хомеоморфизъм,*** *ако g изобразява R в R_0 взаимно еднозначно и g е непрекъснато заедно с обратното си изображение g^{-1}.*

12.1.6. Компактност. ***Покритие*** *на множество A в метрично пространство се нарича всяко семейство от отворени множества, обединението на които съдържа A.*

Определение 15. *Метричното пространство $R = (X, \rho)$ се нарича* ***компактно*** *или* ***компакт,*** *ако всяко покритие съдържа крайно подпокритие, т. е. от всяко покритие от отворени множества на пространството R може да се избере крайна система (подпокритие), съдържаща цялото пространство.*

Всеки сегмент $[a, b]$ от числовата права е компакт, което следва от това, че от всяко покритие на този сегмент с отворени множества може да се избере крайно подпокритие.

Може да се покаже, че едно метрично пространство е компактно тогава и само тогава, когато от всяка редица от точки може да се избере подредица, сходяща към точка от това пространство.

Лема 5. *Затворено подмножество на компактно метрично пространство е компактно.*

Доказателство. Нека F е затворено подмножество на компактното метрично пространство $R(X, \rho)$ и $\{\Sigma_\alpha\}$ е система от отворени подмножества, покриваща F. Към системата $\{\Sigma_\alpha\}$ присъединяваме отвореното множество $G = X \setminus F$ и полученото покритие на цялото пространство означаваме със $\{\Sigma'_\alpha\} = \{\Sigma_\alpha\} \bigcup G$. Поради компактността на R от системата $\{\Sigma'_\alpha\}$ можем да изберем крайно подпокритие на цялото пространство — системата $\{\Sigma'_\alpha\}_{i=1}^{N}$. Премахвайки, ако е необходимо, от системата $\{\Sigma'_i\}_{i=1}^{N}$ множеството G, получаваме крайно покритие на множеството F, избрано от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. □

Лема 6. *Образът на компактно пространство $R = (X, \rho)$ при непрекъснато изображение е компактно пространство.*

Доказателство. Нека g е непрекъснато изображение на R в R_0. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на R_0 с отворени множества, а $\Psi_\alpha = g^{-1}(\Sigma_\alpha)$. Множествата Ψ_α са отворени (вж. лема 4) и $\{\Psi_\alpha\}$ е покритие на R. Поради компактността на R можем да изберем от това покритие крайно подпокритие: $\{\Psi_i\}_{i=1}^{m}$; тогава $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{m}$, $m < \infty$, е покритие на R_0, като $\Sigma_i = g(\Psi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$. □

Лема 7. *Всяко компактно подмножество на метрично пространство $R(X, \rho)$ е затворено.*

Доказателство. Нека F е компактно подмножество на $R(X, \rho)$ и нека $a \in X \setminus F$; за всяко $x \in F$ съществуват съответно околности Σ_a и Σ_x на точките a и x, за които $\Sigma_a \bigcap \Sigma_x = \emptyset$. За такива околности могат да бъдат избрани например кълбата $O(a, r)$ и $O(x, r)$, $r = \frac{1}{3}\rho(a, x)$. Поради компактността на F можем да изберем от това покритие крайно подпокритие $\{\Sigma_{x_i}\}_{i=1}^{m}$. Да разгледаме съответствуващите на Σ_{x_i} околности Σ'_a, които по построение не се пресичат със Σ_{x_i}, и $\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma'_a = \Sigma$ е околност на точката a. Очевидно $\Sigma \bigcap \Sigma_{x_i} = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, m$, и затова $\Sigma \bigcap F = \emptyset$. Следователно $\Sigma \subset X \setminus F$, т. е. множеството $X \setminus F$ е отворено, а F е затворено. □

Лема 8. *Нека $g: R(X, \rho) \to E^1$, където E^1 е реалната числова ос. Ако g е непрекъснато изображение, R е компакт, то g е ограничено и достига точните си горна и долна граница.*

Доказателство. Според лема 6 подмножеството $g(R)$ на метричното пространство E^1 е компактно, а по лема 7 то е затворено. Тогава очевидно съществува такова неотрицателно число T, че $|g(R)| \leq T$, и $g(R)$ съдържа точните си горна и долна граница, тъй като всяко компактно множество от числовата ос е ограничено. □

По-рано бяха дадени (вж. определение 8) понятията относително отворени и относително затворени множества. Ще поясним още веднъж, че понятията отвореност и затвореност на множество са относителни. Едно и също множество може да бъде отворено в едно пространство и да не бъде отворено в друго метрично пространство, съдържащо първото. Например сегментът $[0, 1]$ е отворено множество в метричното пространство $R=(Y, \rho)$, където $Y=[0, 1]$, а ρ е обичайната евклидова метрика в сегмента. От друга страна, същият сегмент $[0, 1]$ е затворено, но не е отворено множество в метричното пространство $E^1=(X, \rho)$, където $X=(-\infty, \infty)$, а ρ е същата функция. Обаче компакт е абсолютно понятие, т. е. не зависи от съдържащото го пространство. В сила е твърдението:

Твърдение 2. *Нека $R_F=(F, \rho)$, $R_Y=(Y, \rho)$, $R_X=(X, \rho)$ са метрични пространства, при това $F\subset Y\subset X$. Тогава множеството F е компакт относно R_Y* тогава и само тогава, когато е компактно относно R_X.*

Да предположим, че F е компактно относно R_X. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е семейство от множества, отворени относно R_Y, и $F\subset\bigcup_\alpha\Sigma_\alpha$. Съгласно определение 8 за всяко α съществува такова множество G_α, отворено относно R_X, че $\Sigma_\alpha=Y\cap G_\alpha$. Тъй като F е компактно относно R_X, имаме $F\subset G_{\alpha_1}\cup\dots\cup G_{\alpha_n}$ при някой избор на краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тъй като $F\subset Y$, то от последното включване следва, че $F\subset\Sigma_{\alpha_1}\cup\dots\cup\Sigma_{\alpha_n}$. С това е доказано, че множеството F е компактно относно $R_Y(Y, \rho)$.

Нека сега F е компактно относно R_Y. Нека $\{G_\alpha\}$ е отворено в R_X покритие на F и $\Sigma_\alpha=Y\cap G_\alpha$. Тогава съществуват краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такива, че $F\subset\Sigma_{\alpha_1}\cup\dots\cup\Sigma_{\alpha_n}$. Понеже $\Sigma_\alpha\subset G_\alpha$, то е изпълнено и включването $F\subset G_{\alpha_1}\cup\dots\cup G_{\alpha_n}$. С това е доказано, че F е компактно относно R_X. □

12.1.7. Базис на пространство

Определение 16. *Системата от отворени множества $\{\Sigma_\alpha\}$ на метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* **базис** *на това пространство, ако всяко непразно отворено множество в пространството R може да се представи като обединение на множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$.*

В сила е следната лема:

Лема 9. *За да бъде системата $\{\Sigma_\alpha\}$ от отворени множества базис на пространството $R=(X, \rho)$, е необходимо и достатъчно*

* Множеството F е компактно относно R_Y, ако от всяко негово покритие с отворени относно R_Y множества може да се избере крайно подпокритие.

за всяко отворено множество G и всяка точка $a \in G$ да съществува такова множество Σ_{a_0} от тази система, че $a \in \Sigma_{a_0} \subset G$.

Доказателство. Нека системата $\{\Sigma_a\}$ е базис на пространството. Тогава всяко отворено множество G е обединение на множества от $\{\Sigma_a\}$. Затова за всяка точка $a \in G$ съществува такова множество Σ_{a_0}, че $a \in \Sigma_{a_0} \subset G$ и Σ_{a_0} принадлежи на дадената система $\{\Sigma_a\}$.

Обратно, нека са изпълнени условията, формулирани в лемата. Тогава всяко отворено множество G може да се представи във вида

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_{a_0},$$

т. е. системата $\{\Sigma_a\}$ е базис на пространството. Лемата е доказана. □

Определение 17. *Метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* ***пространство с изброим базис,*** *ако в него съществува поне един базис, състоящ се от не повече от изброим брой множества. Пространства с изброим базис се наричат* ***пространства с втора аксиома за изброимост.***

Лема 10. *Метричното пространство $R=(X, \rho)$ е пространство с изброим базис тогава и само тогава, когато в него има изброимо, навсякъде гъсто множество.*

Доказателство. Нека $A=\{a_n\}_1^\infty$ е изброимо, навсякъде гъсто множество в R. Всевъзможните кълба $O(a_n, m^{-1})$, където n, m са всевъзможните естествени числа, образуват изброим базис на пространството.

Обратно, ако в R има изброим базис $\{\Sigma_n\}_1^\infty$, то като изберем по точка $a_n \in \Sigma_n$, получаваме множеството $A=\{a_n\}_1^\infty$, което е навсякъде гъсто. Действително, ако $A \neq X$, то отвореното множество $G=X \setminus A$ би било непразно и не би съдържало нито една точка от $A=\{a_n\}_1^\infty$, което е невъзможно, защото G е отворено множество и е обединение на някои от множествата на системата $\{\Sigma_n\}$, а $a_n \in \Sigma_n$. □

Примери:

1. Лесно е да се построят метрично пространство $R=(X, \rho)$ и затворени кълба $K_1(x_1, r_1)$ и $K_2(x_2, r_2)$, за които $K_1 \subset K_2$, а $r_1 > r_2$.

Действително нека $R(X, \rho)$ е метрично пространство, състоящо се от всички точки (x, y) на затворения кръг в равнината $xy: X=\{(x, y): x^2+y^2 \leq 9\}$ с обичайната евклидова метрика ρ. Кълбото K_2 ще определим така: $K_2 \equiv R=(X, \rho)$. Нека $K_1=K_2 \cap \{(x, y): (x-2)^2+y^2 \leq 16\}$. Тогава $K_1 \subset K_2$, $r_1=4$, $r_2=3$.

2. Множеството A от метрично пространство е затворено то-

тава и само тогава, когато съвпада със затворената си обвивка $\bar{A}$, т. е. $A=\bar{A}$.

Действително, ако $A=\bar{A}$, то понеже затворената обвивка на всяко множество е затворена (като сечение на затворени множества), A е затворено. Обратно, ако A е затворено, то $\bar{A}\subset A$. От друга страна, от определението на затворена обвивка следва $A\subset\bar{A}$, т. е. ако A е затворено, то $A=\bar{A}$.

3. Кълбо $O(x_0, r)$ в метричното пространство R е отворено множество. Ако $x\in O(x_0, r)$, т. е. $\rho(x, x_0)<r$, то кълбото $O(x, \varepsilon)$ при $0<\varepsilon<r-\rho(x_0, x)$ ще принадлежи на изходното множество: $O(x, \varepsilon)\subset O(x_0, r)$. Действително, ако $y\in O(x, \varepsilon)$, т. е. $\rho(x, y)<\varepsilon$, то

$$\rho(x_0, y)\leqq\rho(x_0, x)+\rho(x, y)<\rho(x_0, x)+r-\rho(x_0, x)=r.$$

Затвореното кълбо — множеството $K(x, r)=\{y:\rho(x, y)\leqq r\}$, е затворено множество в R, понеже допълнението му е отворено множество.

4. Затворената обвивка $\bar{A}$ на множеството A от метрично пространство се състои от всички точки, които са точки на сгъстяване за множеството A или са елементи на A. Действително цялото множество се съдържа в затворената си обвивка $A\subset\bar{A}$. Ще докажем, че затворената обвивка на A съдържа и точките на сгъстяване на A. Но затворената обвивка на множеството е затворено множество, а ако едно множество е затворено, то съдържа всички свои точки на сгъстяване: ако една точка не принадлежи на затворено множество, то тя принадлежи на допълнението му, което е околност на тази точка, несъдържаща точки от затвореното множество, т. е. точката не е точка на сгъстяване за затвореното множество. По такъв начин затворената обвивка на A съдържа точките на множеството A и точките на сгъстяване на A. Обратно, нека $x\in\bar{A}$, тогава или x е точка на сгъстяване на A, или $x\in A$. Ако $x\in\bar{A}$ и $x\in A$, то всичко е доказано. Ако $x\in\bar{A}$, но $x\bar{\in}A$, то x е точка на сгъстяване за A. Ако допуснем противното, тогава ще съществува околност Σ_x на точката x, несъдържаща точки от множеството A. Нейното допълнение е затворено множество, съдържащо A и несъдържащо x, т. е. точката $x\bar{\in}\bar{A}$, което е невъзможно.

5. В някои метрични пространства $R=(X, \rho)$ могат да се построят отворено кълбо $O(x, r)=\{y:\rho(x, y)<r\}$ и затворено кълбо $K(x, r)=\{y:\rho(x, y)\leqq r\}$ с общ център и равни радиуси, за които $\bar{O}(x, r)\neq K(x, r)$. Действително нека X е множество, съдържащо повече от една точка, и нека

$$\rho(x, y)=\begin{cases}1, \text{ ако } x \neq y,\\ 0, \text{ ако } x=y;\end{cases}$$

тогава

$$K(x, 1)=X, \quad O(x, 1)=x, \quad \bar{O}(x, 1)=x+K(x, 1).$$

12.2. Свойства на метричните пространства

В предишния параграф бяха дадени основните свойства на метричните пространства въз основа на понятията отворено и затворено множество. Фактически всички те използват само свойствата на отворените множества, а именно че сума на произволен брой и сечение на краен брой отворени множества са отворени множества, цялото пространство и празното множество са отворени, и не използват понятия като кълбо и разстояние. Всичко това навежда на мисълта, че може да се построят пространства, в които отворено (затворено) множество се определя аксиоматично така, че да се запазват свойствата, формулирани в лема 1. Тогава необходимостта от определения 1 и 2 отпада, а твърдението на лема 1 става аксиома. Именно така и ще постъпим в следващия параграф при изучаването на топологични пространства. Ясно е, че така ще се стигне до пълно еднообразие при изучаване на основните свойства на метричните и топологичните пространства.

Такъв подход към изучаване свойствата на метричните пространства (формулировки и доказателства, използващи само свойствата на отворените (затворените) множества) притежава редица предимства — допуска например обобщение в по-общи пространства. Заедно с това, понеже в структурата на метричните пространства е въведена функция разстояние, тези пространства трябва да притежават и свойства, присъщи само на тях. Често именно тези свойства се изучават при разглеждане на метрични пространства.

В този параграф ще изложим тези фундаментални свойства на метричните пространства. Всички те използват понятието пълнота на пространство.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ от елементи на метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* ***фундаментална****, ако $\rho(x_n, x_m) \to 0$ когато $n, m \to \infty$; n, m са естествени числа.*

Определение 2. *Метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* ***пълно****, ако всяка фундаментална редица е сходяща към елемент на това пространство.*

Както вече говорихме, ако редицата $\{x_n\}$ е сходяща към елемента x $(x_n \to x)$, то $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 12.1 (принцип на вложените кълба). *За да бъде едно метрично пространство пълно, е необходимо и достатъчно всяка редица от затворени, вложени едно в друго кълба, радиусите на които клонят към нула, да има непразно сечение.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $R=(X, \rho)$ е пълно метрично пространство, а $K_1(x_1, r_1) \supset K_2(x_2, r_2) \supset K_3(x_3, r_3) \supset \ldots$ са вложени едно в друго затворени кълба. Редицата от центровете им е фундаментална, тъй като $\rho(x_n, x_m) < r_n$, $m > n$, а $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Понеже пространството R е пълно, то съществува $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x \in R$. Очевидно $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Действително x е точка на сгъстяване за всяко K_n (вж. определение 4, 12.1.2), понеже при $m > n$ имаме $x_m \in K_m \subset K_n$, а тъй като K_n е затворено множество, то $x \in K_n$.

Достатъчност. Трябва да покажем, че ако $\{x_n\}$ е фундаментална редица, тя има граница $x \in R$. Избираме такава точка x_{n_1}, че $\rho(x_n, x_{n_1}) < 2^{-1}$, $n > n_1$. Приемаме x_{n_1} за център на затворено кълбо с радиус единица, което означаваме с $K(x_{n_1}, 1)$. Избираме след това точка x_{n_2} от редицата $\{x_n\}$, удовлетворяваща следните условия: $\rho(x_n, x_{n_2}) < 2^{-2}$ за всяко $n > n_2$, $n_2 > n_1$. Приемаме точката x_{n_2} за център на кълбо с радиус $1/2$: $K(x_{n_2}, 2^{-1})$. Нека $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$ са вече избрани. Тогава $x_{n_{k+1}}$ избираме така, че да бъде изпълнено условието: $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k-1}$ за всяко $n > n_{k+1}$, $n_{k+1} > n_k$. Както и по-горе, приемаме $x_{n_{k+1}}$ за център на затворено кълбо с радиус 2^{-k}: $K(x_{n_{k+1}}, 2^{-k})$, и т. н. Така получаваме редица от вложени едно в друго затворени кълба с радиуси, които клонят към нула. По предположение съществува точка x, обща за всички кълба. Ясно е, че $\rho(x_{n_k}, x) \to 0$, $n_k \to \infty$. Следователно фундаменталната редица $\{x_n\}$ съдържа подредица $\{x_{n_k}\}$, клоняща към точка x от пространството. Тогава и самата редица ще клони към същата граница. □

Забележка. Всички условия, изброени в теоремата, са съществени: пълнота на пространството, затвореност на кълбата, условието, че са вложени едно в друго и радиусите им клонят към нула. Най-малко е очевидна необходимостта на последното условие — да имат непразно сечение.

Ето например пълно метрично пространство и редица от вложени едно в друго кълба, имащи празно сечение.

Нека $R=(N, \rho)$, където N е множеството на естествените числа, а

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + 1/(m+n), & \text{ако } n \neq m, \\ 0, & \text{ако } n = m. \end{cases}$$

Нека

$$K(n,\ 1+1/2n)=\{m : \rho(m,\ n)\leq 1+1/2n\},\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Тогава е очевидно,че $K(n,\ 1+1/2n)$ са затворени и вложени едно в друго, а пространството е пълно, защото всяка фундаментална редица е сходяща в пространството. Но сечението на тези кълба е очевидно празно.

Определение 3. *Множеството M в метрично пространство R се нарича* ***множество от първа категория,*** *ако може да се представи като обединение на изброимо много навсякъде негъсти в R множества.*

Всички останали множества се наричат ***множества от втора категория.***

Теорема 12.2 (теорема за категориите). *Нека $R=(X,\ \rho)$ е непразно пълно метрично пространство. Тогава X е множество от втора категория, т. е. X не може да се представи като обединение на изброимо много навсякъде негъсти множества.*

Доказателство. Ще допуснем противното, че $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ и всяко от множествата A_n, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$, е навсякъде негъсто в R. Нека K_0 е затворено кълбо с радиус единица. Понеже множеството A_1 е навсякъде негъсто, то съществува такова затворено кълбо K_1 с радиус, по-малък от $1/2$, че $K_1\subset K_0$ и $K_1\bigcap A_1=\varnothing$. Тъй като множеството A_2 е навсякъде негъсто, то по същия начин съществува затворено кълбо с радиус, по-малък от $1/2^2$, за което $K_2\bigcap A_2=\varnothing$, $K_2\subset K_1$ и т. н. В резултат получаваме редица от вложени едно в друго затворени кълба $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, радиусите на които клонят към нула. Според теорема 12.1 съществува $x\in K_n$ за всяко n, $x\in X$. Тъй като по построение $K_n\bigcap A_n=\varnothing$, то $x\notin A_n$ за всяко n. Следователно $x\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=X$. Това противоречи на допускането, че $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. □

Определение 4. *Изображението g на метричното пространство R в себе си се нарича* ***свиващо,*** *ако съществува такова число α, $0<\alpha<1$, че*

$$\rho(g(x),\ g(y))\leqq\alpha\rho(x,\ y).$$

Теорема 12.3 (принцип на свиващите изображения). *Всяко свиващо изображение на пълно метрично пространство $R=(X,\ \rho)$ в себе си има, и то само една, неподвижна точка x, т. е. такава точка $x\in X$, че $g(x)=x$.*

Доказателство. Нека x_0 е точка от X. Определяме редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по правилото: $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, $x_3=g(x_2)$, ... Редицата $\{x_n\}$ е фундаментална в R. Действително, ако $m>n$, то

$$\rho(x_n, x_m)=\rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1}))\leq\alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1})$$
$$\leq \cdots \leq\alpha^n\rho(x_0, x_{m-n})\leq\alpha^n\{\rho(x_0, x_1)+\rho(x_1, x_2)$$
$$+\cdots+\rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\}\leq\alpha^n\rho(x_0, x_1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-n-1})$$
$$\leq\alpha^n\rho(x_0, x_1)/(1-\alpha),$$

където $\alpha<1$.

По такъв начин $\rho(x_n, x_m)\to 0$, $m>n\to\infty$. Понеже пространството R е пълно, съществува $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Нека $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогава от непрекъснатостта* на изображението g имаме

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=x.$$

Следователно съществува неподвижна точка. Ще докажем, че тя е единствена. Ако $g(x)=x$ и $g(y)=y$, то $\rho(x, y)\leq\alpha\rho(x, y)$, т. е. $c\rho(x, y)=0$; следователно $x=y$. □

Забележка. Ако изображението g на метричното пространство R в себе си притежава само свойството, че $\rho(g(x), g(y))<\rho(x, y)$, $x, y\in R$, $x\neq y$, то може и да няма неподвижна точка. Ето и пример: нека $R=(X, \rho)$, където $X=[1, \infty)$, а ρ е обичайната евклидова метрика. Нека $g(x)=x+1/x$. Тогава $\rho(g(x), g(y))=|x+1/x-y-1/y|<|x-y|$. Неподвижна точка няма, тъй като $g(x)=x+1/x\neq x$ за всяко $x\in X$.

Определение 5. *Ще казваме, че две изображения g и g_1 на метричното пространство $R=(X, \rho)$* ***комутират****, ако за всяко $x\in X$ е изпълнено равенството $g(g_1(x))=g_1(g(x))$.*

Теорема 12.4 (обобщение на принципа на свиващите изображения). *Нека g и g_1 са изображения на метричното пространство $R(X, \rho)$ в себе си. Тогава, ако изображението g_1 е свиващо и изображенията g и g_1 комутират, то уравнението $g(x)=x$ има решение $x\in R$.*

Доказателство. Според предишната теорема (теорема 12.3) съществува и при това само една такава точка $x\in R$, че $g_1(x)=x$. Прилагаме към двете страни на равенството изображението g. Като използваме, че изображенията комутират, получаваме

$$g(g_1(x))=g(x),\quad g_1(g(x))=g(x),\quad g_1(y)=y,$$

където $y=g(x)$. Като вземем пред вид, че изображението g_1 е свиващо и има единствена неподвижна точка, получаваме, че $x=y=g(x)$. Следователно и за изображението g съществува неподвижна точка.

* Непрекъснатостта следва от това, че g е свиващо изображение.

Забележка. Степен n на изображението g се нарича изображението g^n, получено в резултат на n последователни прилагания на изображението g:

$$g^n(x)=\underbrace{g(g(\cdot\cdot\cdot(g}_{n}(x)\cdot\cdot\cdot), \quad x\in X.$$

От теорема 12.4 следва, че ако изображенията g и g^n комутират и g е такова изображение, че някоя негова степен е свиващо изображение, то уравнението $g(x)=x$ има едно и само едно решение. Единствеността на решението следва от това, че всяка точка, неподвижна за изображението g, ще бъде неподвижна и за изображението g^n.

Примери:

1. Намиране на корени (нули) на функции. Нека $\varphi(t)$, $a\leqq t\leqq b$, е реална функция, удовлетворяваща условието на Липшиц:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqq\theta|t_1-t_2| \quad \text{и} \quad 0<\theta<1$$

и изобразяваща сегмента $[a, b]$ в себе си. Ако въведем метричното пространство $R=(X, \rho)$, където $X=[a, b]$ а ρ е обичайната евклидова метрика на сегмента, то изображението φ е свиващо и следователно числовата редица t_0, $t_1=\varphi(t_0)$, $t_2=\varphi(t_1)$, ... е сходяща към единствения корен на уравнението $t=\varphi(t)$ за всяко $t_0\in[a, b]$. Изображението φ е свиващо, ако например $|\varphi'(t)|\leqq\theta<1$, $t\in[a, b]$.

Нека имаме да решаваме уравнение от вида $F(t)=0$, като при това $F(t)$ е реална функция, дефинирана в $[a, b]$ и $F(a)<0$, $F(b)>0$, $0<\theta_1\leqq F'(t)\leqq\theta_2$, $t\in[a, b]$. Тогава, ако разгледаме функцията $\varphi(t)=t-\lambda F(t)$, $\lambda\in E^1$, и намерим корена на уравнението $\varphi(t)=t$, то ще решим и изходната задача. Към последното уравнение можем да приложим предишните разсъждения, ако например $|\varphi'(t)|\leqq\theta<1$. Имаме $1-\lambda\theta_2\leqq\varphi'(t)\leqq1-\lambda\theta_1$. Не е трудно да се избере реалното число $\lambda>0$ така, че да е изпълнено условието: $0\leqq\varphi'(t)\leqq\theta<1$. Тогава, както не е трудно да се убедим, функцията φ ще изобразява сегмента $[a, b]$ в себе си. Наистина, тъй като $\varphi'(t)\geqq0$, то φ не намалява; следователно $\varphi(a)\leqq\varphi(t)\leqq\varphi(b)$ за $t\in[a, b]$. Но $\varphi(a)=a-\lambda F(a)>a$, $\varphi(b)=b-\lambda F(b)<b$, т. е. $a<\varphi(t)<b$, $t\in[a, b]$.

2. Намиране решения на система уравнения от вида $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$. Нека $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ е изображение на n-мерното пространство X в себе си: наредената n-орка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in X$ преминава в наредената n-орка $(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in X$, т. е. изображението $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ привежда наредена n-орка от

числа в наредена n-орка от числа. Тук $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ са вектори, $\mathbf{A}$ е матрица, $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{i,\,j=1}^{n}$.

Ако изображението $\mathbf{g}$ е в някое пълно метрично пространство и при някакви условия е свиващо, то векторното уравнение $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ ще има едно и само едно решение. Ще намерим такива условия за изображението $\mathbf{g}$ и ще въведем метрика в множеството X, т. е. ще образуваме съответни метрични пространства:

а) Нека

$$\rho_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\max\{|x_i-y_i|:1\leqq i\leqq n\} \text{ и } R^1=(X,\ \rho_1);$$

тогава

$$\rho_1(\mathbf{y}',\ \mathbf{y}'')\leqq\max_{1\leqq i\leqq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\,\rho_1(\mathbf{x}',\ \mathbf{x}''),\ \mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{y}',\ \mathbf{y}''\in X,$$

и условието $\mathbf{g}$ да бъде свиващо ще е изпълнено, ако

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leqq\alpha<1,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n.$$

в) Ако въведем метрика в X по правилото

$$\rho_2(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

не е трудно да се види, че изображението е свиващо, ако

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\leqq\alpha<1,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n.$$

с) Накрая, ако метриката е зададена така:

$$\rho(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

то изображението $\mathbf{g}$ е свиващо, ако

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\leqq\alpha<1.$$

Изброените условия са достатъчни, за да има уравнението $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ и при това единствено решение, т. е. системата $x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j+b_i$, $i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$, да има, и то единствено решение.

3. Съществуване и единственост на решението на обикновено диференциално уравнение от първи ред. Ще разгледаме т. нар. задача на Коши. Трябва да се намери функция y, която удовлетворява уравнението $y'=f(t, y)$ и $y(t_0)=y_0$ при $t=t_0$, където y_0 е някакво число; при това трябва да докажем, че това решение y е само едно.

Ще предположим, че функцията $f(t, y)$ е непрекъсната в множеството: $a \leqq t \leqq b$, $-\infty < y < +\infty$, удовлетворява условието на Липшиц по y, т. е.

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)| \leqq K|y_1-y_2|,$$

и точката t_0 е вътрешна за сегмента $[a, b]$. Понеже решаването на задачата на Коши е еквивалентно на решаването на интегралното уравнение: $y(t)=y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$, то имаме дадено изображение на множеството от функции $\{y\}$ по правилото: $g(y(t)) =y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$. Въвеждаме пространството $C_{[a, b]}$. Тогава изображението g, определено в това пространство, го изобразяваме в себе си, а задачата за намиране решение на интегралното уравнение се свежда до намиране на неподвижната точка на изображението g, т. е. до намиране на такава функция y, че $g(y)=y$. За да съществува такава точка и за да бъде единствена, достатъчно е изображението g да бъде свиващо.

Понеже от условието на Липшиц следва, че

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)| \leqq K|y_1-y_2| \leqq K\rho(y_1, y_2),$$

то

$$\rho(g(y), g(z)) \leqq \max_{a \leqq t \leqq b} \int\limits_{t_0}^{t} K\rho(y, z)\,dt \leqq K(b-a)\rho(y, z).$$

Тук ρ е метриката в $C[a, b]$, $\rho(y, z)=\max\limits_{a \leqq t \leqq b}|y(t)-z(t)|$. Следователно изображението е свиващо, ако сегментът $[a, b]$ е достатъчно малък, така че

$$K(b-a)=\theta<1.$$

При тези условия получаваме теоремата за съществуване и единственост на задачата на Коши.

4. Оператор на Волтера и свойства на неговата

n-та степен. Ще покажем, че някоя степен на изображението, зададено с интегралния оператор на Волтера:

$$g(f(t))=\lambda\int_a^t K(t, \xi) f(\xi)\, d\xi+\varphi(t),$$

където λ е число, $K(t, \xi)$, $\varphi(t)$ са непрекъснати функции на аргументите си, е свиващо изображение в $C_{[a, b]}$, $a\leq t\leq b$.

Нека

$$M=\max\{|K(t, \xi)|: t, \xi\in[a, b]\},\ \rho(f_1, f_2)=\max_{a\leq t\leq b}|f_1(t)-f_2(t)|.$$

Тогава

$$|g(f_1)-g(f_2)|=|\lambda|\left|\int_a^t K(t, \xi)(f_1(\xi)-f_2(\xi))\, d\xi\right|$$

$$\leq|\lambda| M(b-a)\rho(f_1, f_2).$$

Оттук

$$|g^n(f_1)-g^n(f_2)|\leq|\lambda|^n M^n (b-a)^n \rho(f_1, f_2)/n!.$$

Винаги може да се избере такова n, че $|\lambda|^n M^n (b-a)^n/n!<1$, и следователно при това n изображението g^n ще бъде свиващо. Съгласно забележката след теорема 12.4 интегрално уравнение от вида $g(f)=f$ има при всяко λ решение и то е единствено.

12.3. Топологични пространства. Отворени и затворени множества

В този параграф ще изложим основните определения и факти, отнасящи се до топологични пространства.

12.3.1. Определение на топологично пространство. Понятието топологично пространство е естествено обобщение на понятието метрично пространство. При определението на метрично пространство постъпихме по следния начин: с помощта на функцията разстояние въведохме отворени и затворени множества и доказахме редица техни свойства, а след това, като използвахме тези свойства, изучихме метричните пространства. Ако искаме да намерим по-широк клас пространства от метричните пространства, е естествено да определим отворените (или затворените) множества аксиоматично. Във връзка с това ще дадем следното определение:

Определение 1. *В множеството X е определена* ***структура на топологично пространство,*** *ако е дадена система $\{\Sigma\}$ от негови подмножества, притежаваща свойствата:*

1) Множеството X и празното множество $\varnothing$ принадлежат на $\{\Sigma\}$.

2) Обединението на произволен брой множества от системата $\{\Sigma\}$ и сечението на краен брой множества от системата $\{\Sigma\}$ принадлежат на $\{\Sigma\}$.

3) За всеки две точки $x, y \in X$, $x \neq y$, съществуват такива множества Σ_x, Σ_y от системата $\{\Sigma\}$, че $\Sigma_x \cap \Sigma_y = \varnothing$ *и* $x \in \Sigma_x$, $y \in \Sigma_y$.

Системата $\{\Sigma\}$, удовлетворяваща условията 1) и 2), се нарича ***топология на множеството X.***

По такъв начин двойката: множеството X и топологията $\{\Sigma\}$, образуват ***топологично пространство***; то се означава с $T=(X, \Sigma)$; топологични пространства, за които е изпълнено и условие 3), се наричат ***хаусдорфови топологични пространства.***

Примери:

1. Да разгледаме произволно метрично пространство $R=(X, \rho)$. Отворените множества според лема 1 от 12.1.2 притежават свойствата 1) и 2) от определение 1 на топологично пространство. Аксиома 3) от определение 1 е също така изпълнена в метрично пространство — ако $x \neq y$, то $\rho(x, y)=a>0$ и за кълбата $O(x, a/3)$, $O(y, a/3)$, които са отворени множества в R, имаме $O(x, a/3) \cap O(y, a/3)=\varnothing$.

Така всяко метрично пространство R е и топологично пространство $T=(X, \Sigma)$, където $\{\Sigma\}$ е системата от отворени множества в $R=(X, \rho)$.

2. Да разгледаме множеството $X=[0, 1]$. Ще зададем в това множество топология, т. е. система $\{\Sigma\}$. Причисляваме към $\{\Sigma\}$ множествата $\varnothing$ и X и всички възможни интервали от вида (α, β), където $0<\alpha<\beta<1$; полуинтервалите $(\alpha, 1]$, където $0<\alpha<1$; полуинтервалите $[0, \alpha)$, където $0<\alpha<1$, от които са изключени точките от вида $1/n$, n — естествено число и всички техни обединения. Всички аксиоми 1)–3) от определение 1 са изпълнени.

3. Ще разгледаме множеството X от произволно естество. Ще причислим към системата $\{\Sigma\}$ само цялото множество X и празното множество $\varnothing$. Аксиомите 1) и 2) са очевидно изпълнени, обаче аксиома 3) не е изпълнена. Следователно системата $\{\Sigma\}$ не задава хаусдорфова топология.

4. Нека $X=E^1$ е съвкупността на реалните числа. Ще причислим към системата $\{\Sigma\}$ всички възможни обединения на интервали от X и празното множество $\varnothing$. Тогава $T=(X, \Sigma)$ е топологично пространство.

5. Нека $X=C$ е съвкупността на всички комплексни числа. Към системата $\{\Sigma\}$ причисляваме съвкупността на всички множества от вида $|z-z_0|<\varepsilon$ при всички възможни $z_0 \in C$ и $\varepsilon>0$, техните обединения, $\varnothing$ и X. Двойката $T=(X, \Sigma)$ е топологично пространство.

12.3.2. Отворени и затворени множества

Определение 2. *Множеството $\Sigma_a \subset X$ се нарича* ***отворено в*** *$T=(X, \Sigma)$, ако $\Sigma_a \in \{\Sigma\}$.*

Определение 3. ***Околност на точката*** *$x \in X$ се нарича всяко отворено множество, съдържащо x.* ***Околност на някое подмножество на*** *X (както и на самото X) се нарича всяко отворено множество, съдържащо даденото подмножество (или X). Околност на точката x ще означаваме със Σ_x.*

След като са определени отворените множества, в тологогичните пространства могат да се въведат всички понятия за метрични пространства. Така дословно се запазват определенията 4—9, 11—17 от 12.1, твърденията на лемите 1, 2, 4—9 и твърдението 2, които се доказват по същия начин.

Едно топологично пространство ще наричаме ***пространство с първа аксиома за изброимост,*** *ако за всяка точка a съществува такава изброима система от околности $\{\Sigma_a^n\}$, че за всяко отворено множество Σ_a, съдържащо точката a, съществува околност $\Sigma_a^{n_0}$ със свойство: $\Sigma_a^{n_0} \subset \Sigma_a$.* В метрично пространство първата аксиома за изброимост, както вече казахме, е изпълнена.

В сила е твърдението. *Точката a от топологично пространство T с първа аксиома за изброимост принадлежи на затворената обвивка $\bar{A}$ на дадено множество A тогава и само тогава, когато съществува редица $\{a_n\}$ от точки на множеството A, сходяща към a.*

Доказателство (вж. лема 3 от 12.1). Редицата от кълба $O(a, n^{-1})$ трябва да се замени с околности от системата $\{\Sigma_a^n\}$. При това винаги може да смятаме, че $\Sigma_a^{n+1} \subset \Sigma_a^n$, иначе Σ_a^n ще заменим с $\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^k$. □

Едновременно доказахме и следното твърдение:

Твърдение 1. *В топологично пространство с първа аксиома за изброимост точката $a \in \bar{A}$ тогава и само тогава, когато всяка околност Σ_a на точката a се пресича с A.*

Топологичното пространство $T=(X, \Sigma)$ се нарича ***пространство с изброим базис,*** *ако в него съществува поне един базис, съдържащ не повече от изброим брой множества. Пространство с изброим базис се нарича още* ***пространство с втора аксиома за изброимост.***

Топологичното пространство $T=(X, \Sigma)$ е пространство с изброим базис тогава, когато то е пространство с първа аксиома за изброимост и в него има изброимо навсякъде гъсто множество. Обратно, ако в пространството T, което не е обязателно с първа аксиома за изброимост, има изброим базис, то в него има и изброимо навсякъде гъсто множество.

(За доказателството вж. лема 10 от 12.1; редицата от кълбата $O(a, m^{-1})$ на метричното пространство, където m и n са естествени числа, трябва да се замени с редицата от околности $\{\Sigma^m_{a_n}\}$, $\Sigma^{m+1}_{a_n} \subset \Sigma^m_{a_n}$. Тези околности винаги съществуват за точката a_n, понеже $T=(X, \Sigma)$ е пространство с първа аксиома за изброимост.)

Примери и забележки:

1. При задаване на топология на множеството X можем да се ограничим само с аксиомите 1) и 2) от определение 1. Полученото определение за топологично пространство е най-общо. От този клас пространства може да се отдели по-тесен клас, за който аксиома 3) трябва да се замени с аксиома 3'): За всеки две точки x и y на пространството T, $x \neq y$, съществуват такава околност Σ_x на точката x, че $y \notin \Sigma_x$, и такава околност Σ_y на точката y, че $x \notin \Sigma_y$. Не за всяко пространство с топология, определена от аксиоми 1) и 2), е изпълнена аксиома 3). Ето един традиционен пример. Множеството $X=\{a, b\}$ се състои от две точки. Топологията ще зададем с отворените множества X, $\emptyset$ и точката b. Аксиомите 1) и 2) са изпълнени, а 3) не е изпълнена. Накрая ще отбележим, че не всяко пространство T, в което топологията се задава с аксиомите 1), 2) и 3'), удовлетворява определение 1. Например, ако $X=[0, 1]$ и към системата, определяща топологията, отнесем X, $\emptyset$ и $\Sigma_{a_n}=[0, 1]\setminus\{a_n\}$, където $\{a_n\}$ е произволно изброимо множество от сегмента $[0, 1]$, то аксиомите 1), 2), 3') са изпълнени, но пространството не е топологично в смисъл на определение 1. Но хаусдорфовите топологични пространства са очевидно пространства, удовлетворяващи аксиомите 1), 2), 3'). Ако заменим аксиома 3') с друга, може да се стигне до по-нататъшно стесняване на класа на пространствата (вж. за това 1.2.2).

2. Множеството A от топологичното пространство T е затворено тогава и само тогава, когато съвпада със затворената си обвивка $\overline{A}$, т. е. $A=\overline{A}$ (вж. пример 2 от 12.1).

3. Обединение на не повече от изброим брой затворени множества се нарича множество от тип F_σ. Сечение на не повече от изброим брой отворени множества се нарича множество от тип G_δ. Например множеството на рационалните числа в R_1 е множество от тип F_σ. Множеството на ирационалните числа е множество от тип G_δ.

4. Затворената обвивка $\overline{A}$ на множеството A от топологично пространство се състои от всички точки, които са или точки на сгъстяване за множеството A, или елементи на A (вж. пример 4 от 12.1).

5. Важен клас множества в топологични пространства са множествата, които се получават от отворени (затворени) множества с помощта на не повече от изброим брой операции обединение (сечение) и изваждане.

Семейството B на бореловите множества е най-малкото семейство от множества, удовлетворяващо следните свойства:

a) всяко отворено множество принадлежи на B;

b) ако $A \in B$, то $A' \in B$;

c) ако $A_n \in B$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B$.

12.4. Свойства на топологичните пространства

В този параграф ще изложим основните свойства на топологичните пространства. Много от тях са свързани с т. нар. аксиоми за отделимост, които определят по-тесни класове топологични пространства.

12.4.1. Аксиоми за отделимост. Ще формулираме тези аксиоми в такъв ред, че условията на всяка аксиома да са следствие от условията на аксиомата, която я следва.

Определение 1. *Едно топологично пространство се нарича* ***регулярно,*** *ако за всяка точка a и всяко несъдържащо я затворено множество F съществуват такива две непресичащи се отворени множества Σ_a и Σ, че $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$.*

Пример за нерегулярно топологично пространство е пример 2 от 12.3.1.*

Определение 2. *Едно топологично пространство T се нарича* ***напълно регулярно,*** *ако за всяка точка a и всяко затворено множество F, което не съдържа точката a, съществува такава непрекъсната числова функция f, дефинирана в това пространство, че $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in T$, $f(a)=0$, $f(x)=1$, $x \in F$.*

Напълно регулярните пространства се наричат още **тихоновски пространства.****

Всяко напълно регулярно пространство е регулярно. Действително нека $I_0=[0, 1/2)$, $I_1=(1/2, 1]$. Тогава $\Sigma_a=f^{-1}(I_0)$ и $\Sigma=f^{-1}(I_1)$ са отворени, тъй като f е непрекъснато изображение, $\Sigma_a \cap \Sigma = \varnothing$, $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$. Следователно пространството е регулярно.

* Точката O и затвореното множество $\{1/n\}$ са неотделими в посочения смисъл.

** Андрей Николаевич Тихонов — съветски математик (1906).

Определение 3. *Едно топологично пространство се нарича* **нормално,** *ако за всеки две затворени, непресичащи се множества F_1 и F_2 съществуват две такива непресичащи се отворени множества Σ_1 и Σ_2, че $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$.*

12.4.2. Нормални и напълно регулярни (тихоновски) пространства. Лема на Урисон*. В сила е следната лема:

Лема 1 (лема на Урисон). *За всеки две непресичащи се затворени множества F_1 и F_2 на нормално топологично пространство $T=(X, \Sigma)$ съществува такава непрекъсната числова функция f, дефинирана в T, че $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in X$, $f(x)=0$, ако $x \in F_1$; $f(x)=1$, ако $x \in F_2$.*

Доказателство. Ще построим редица от отворени множества $\Sigma(r)$, съответствуващи на рационалните числа от вида $r=k\,.\,2^{-n}$ ($k=0, 1, 2, \ldots, 2^n$, n е цяло положително число), притежаващи свойствата: 1) $F_1 \subset \Sigma(0)$, $F_2=\Sigma'(1)$ („'" означава допълнение) и 2) $\overline{\Sigma}(r) \subset \Sigma(r')$ за всеки $r<r'$, където $\overline{\Sigma}(r)$ е затворената обвивка на $\Sigma(r)$.

Построението ще направим с индукция по n. Нека $n=0$. Тогава системата $\Sigma(r)$ ще съдържа само двете множества: $\Sigma(1)$, $\Sigma(0)$. Тъй като пространството T е нормално, то съществуват такива отворени множества Σ_1 и Σ_2, че $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$. Тогава множеството $\Sigma(0)=\Sigma_1$ е търсеното.

Да допуснем сега, че множеството $\Sigma(r)$ е построено за числата $r=k\,.\,2^{-n+1}$, $k=0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ и при това е изпълнено условие 2). Нека k е цяло нечетно и $0<k<2^n-1$. Тогава $\Sigma((k-1)2^{-n}) \subset \Sigma((k+1)\,.\,2^{-n})$, тъй като числата $(k-1)2^{-n}$ и $(k+1)\,.\,2^{-n}$ имат вида $k'\,.\,2^{n-1}$, където $0 \leqq k' \leqq 2^{n-1}$. Понеже T е нормално пространство, а $\overline{\Sigma}((k-1)\,.\,2^{-n}) \cap \Sigma'((k+1)\,.\,2^{-n})=\emptyset$ и тези множества са затворени, то съществуват такива отворени множества G и G_1, че $\overline{\Sigma}((k-1)\,.\,2^{-n}) \subset G$, $\Sigma'((k+1)2^{-n}) \subset G_1$ и $G \cap G_1=\emptyset$. Тогава G_1' е затворено и $G \subset G_1' \subset \Sigma((k+1)\,.\,2^{-n})$, т. е. $\overline{G} \subset \Sigma((k+1)\,.\,2^{-n})$. Като положим $\Sigma(k\,.\,2^{-n})=\Sigma(r)=G$, завършваме построението по индукция.

Ще определим сега функцията $f(x)$, като положим:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } x \in \Sigma(0), \\ \sup\{r : x \overline{\in} \Sigma(r)\} & \text{за } x \in \Sigma'(0). \end{cases}$$

Тогава по условие 1) имаме $f(x)=0$, ако $x \in F_1$; $f(x)=1$, ако $x \in F_2$. Наистина, ако $x \in F_2$, то $x \in \Sigma'(1)$, т. е. $x \overline{\in} \Sigma(1)$ и от условие 2) следва, че $x \in \Sigma(r)$, $r<1$, т. е. $\sup\{r : x \overline{\in} \Sigma(r)\}=1$.

* Павел Самуилович Урисон — руски математик (1898—1924).

Ще докажем непрекъснатостта на функцията f. Избираме произволно $x_0 \in X$ и цяло число $n>0$. Избираме такова r, че $f(x_0)<r<f(x_0)+2^{-n-1}$. Нека $\Sigma=\Sigma(r)\bigcap(\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$, където $\Sigma(s)=\varnothing$, $s<0$, $\Sigma(s)=X$, $s>1$. Отвореното множество Σ съдържа точката x_0, тъй като $f(x_0)<r$, и следователно $x_0 \in \Sigma(r)$; също така от това, че $r-2^{-n-1}<f(x_0)$, следва $x_0 \in \Sigma'(r-2^{-n-1}) \subset (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$. По-нататък, ако $x \in \Sigma$, то $x \in \Sigma(r)$ и затова $f(x) \leqq r$. І още повече, $x \in (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})' \subset \Sigma'(r-2^{-n})$ и следователно $r-2^{-n} \leqq f(x)$, така че ако $x \in \Sigma$, то $|f(x)-f(x_0)| \leqq 2^{-n}$. Така получаваме, че за всяка околност $\Sigma_{f(x_0)}$ (в числовия сегмент $[0, 1]$) съществува такава околност Σ на точката x_0, че $f(\Sigma) \subset \Sigma_{f(x_0)}$, т. е. функцията f е непрекъсната в T. □

Следствие. *Нормалните топологични пространства са напълно регулярни.* Това следва от лемата и от това, че в топологичните пространства всяка точка е затворено множество.*

12.4.3. Регулярни пространства с изброим базис. Теорема на Тихонов. В тази точка ще докажем теорема, която установява връзка между аксиомите за отделимост и аксиомите за изброимост:

Теорема 12.5 (теорема на Тихонов). *Всяко регулярно топологично пространство с изброим базис е нормално пространство.*

Доказателство. Нека $T=(X, \Sigma)$ е регулярно топологично пространство с изброим базис $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и F_1, F_2 са две затворени непресичащи се множества. За всяка точка $x \in F_i$ $(i=1, 2)$ съществува такава околност U_x, че $\overline{U}_x \bigcap F_i=\varnothing$. Това следва от факта, че всяка околност на точка съдържа затворена обвивка на някоя околност на тази точка.** От покритието $\{U_x : x \in F_i, i=1, 2\}$ на множеството F_i може да се избере изброимо подпокритие, т. е. в множеството F_i съществуват такива изброими системи от точки $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,p}, \ldots$, че $F_i \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{x_{i,k}}$, $i=1, 2$. При това $\overline{U}_{x_{1,k}} \bigcap F_2=\varnothing$ и аналогично $\overline{U}_{x_{2,k}} \bigcap F_1=\varnothing$.

* Затова ще отбележим, че произволна точка x на едно топологично пространство може да се представи във вида $x=\bigcap\limits_{y \neq x} \Sigma'_y$, където Σ_y са околности на точката $y \neq x$, които не съдържат точката x. Сечението на затворени множества е затворено множество.

** Нека Σ е някоя околност на точката a, $A=X \setminus \Sigma$ е затворено и съществуват такива отворени множества $\Sigma_a \ni a$, $G \supset A$, че $\Sigma_a \cap G=\varnothing$. Тогава $\overline{\Sigma}_a \subset X \setminus A=\Sigma$, което трябваше да се докаже.

Определяме по индукция при произволно $n \geq 1$ множествата $V_{1,n}$ и $V_{2,n}$ като полагаме

$$V_{1,n} = U_{x_{1,n}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_{2,k}}, \quad V_{2,n} = U_{x_{2,k}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_{1,k}}.$$

Лесно се вижда, че $V_{1,n}$ и $V_{2,m}$ не се пресичат. Наистина, ако $n \leq m$, то

$$V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset U_{x_{1,n}} \cap U_{x_{2,m}} \setminus U_{x_{1,n}} = \varnothing,$$

а ако $n \geq m$, то $V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset (U_{x_{1,n}} / U_{x_{2,n}}) \cap U_{x_{2,m}} = \varnothing$.

Следователно множествата $V_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1,n}$ и $V_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{2,n}$ също не се пресичат. От друга страна, те съдържат съответно множествата F_1 и F_2. Така е доказано, че две произволни затворени непресичащи се множества от пространството T могат да се включат в непресичащи се отворени множества. С други думи, пространството T е нормално, което трябваше да се докаже.

12.4.4. Компактни и нормални пространства. Цел на тази точка е доказателството на следната теорема:

Теорема 12.6. *Компактното топологично пространство е нормално топологично пространство.*

Доказателство. Нека $T = (X, \Sigma)$ е компактно топологично пространство. Ще докажем най-напред, че то е регулярно. Нека a и F са точка и затворено множество, което не я съдържа: $a \notin F$. За всяка точка $x \in F$ и точката a съществуват такива околности Σ_a и Σ_x, че $\Sigma_x \cap \Sigma_a = \varnothing$. Подпространството F на компактното пространство е компактно (вж. лема 5 от 12.1). От покритието на F с отворените множества $\{\Sigma_x\}$ ще изберем крайно покритие $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$. Нека $\Sigma_1 = \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_{x_k}$, а сечението на съответните на Σ_{x_k} околности $\Sigma_a^{x_k}$ на точката a означим със $\Sigma_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^{x_k}$.

Тогава $F \subset \Sigma_1$, $a \in \Sigma_2$ и $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Следователно пространството T е регулярно.

Нека сега F_1 и F_2 са две затворени множества, за които $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Поради регулярността на пространството за всяка точка $x \in F_1$ съществуват такива отворени множества Σ_x^1 и G_x^2, че $x \in \Sigma_x^1$, $F_2 \subset G_x^2$ и $\Sigma_x^1 \cap G_x^2 = \varnothing$. От покритието на компактното пространство F_1 с отворени множества $\{\Sigma_x^1\}$ избираме крайно подпокритие $\{\Sigma_{x_k}^1\}_{k=1}^{m}$ и означаваме $\Sigma^1 = \bigcup_{k=1}^{m} \Sigma_{x_k}^1$. Сечението на съответните отворени множества G_{x_k} означаваме със $\Sigma^2=\bigcap_{k=1}^{m} G^2_{x_k}$. Тогава $F_1\subset\Sigma^1$, $F_2\subset\Sigma^2$ и $\Sigma^1\cap\Sigma^2=\varnothing$, т. е. пространството $T=(X, \Sigma)$ е нормално. Теоремата е доказана.

12.5. Линейни нормирани пространства, линейни оператори

Понятието линейно пространство играе основна роля в анализа. Линейните пространства и линейните оператори в тези пространства играят основна роли и в много други важни области на математиката.

12.5.1. Определение на линейно пространство.

Определение 1. *Множеството L, съдържащо поне един елемент, се нарича* ***линейно*** *или* ***векторно пространство,*** *ако са изпълнени следните аксиоми:*

1. *За всеки два елемента x, $y\in L$ еднозначно се определя трети елемент $z\in L$, наречен тяхна* ***сума,*** *който се означава с $x+y$, и при това:*

a) $x+y=y+x$ *(комутативност);*

b) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *(асоциативност);*

c) *съществува такъв елемент $0\in L$, че $x+0=x$ за всеки елемент $x\in L$; елементът 0 се нарича* ***нулев*** *или* ***нула*** *на пространството L;*

d) *за всеки елемент $x\in L$ съществува такъв елемент $-x$, че $x+(-x)=0$; елементът $-x$ се нарича* ***противоположен*** *елемент на елемента x.*

2. *За всяко число α и всеки елемент $x\in L$ е определен елементът $\alpha x\in L$, наречен* ***произведение*** *на α и x, при което*

a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\,.\,\beta)x$;

b) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

d) $1\,.\,x=x$ *за всеки елемент x.*

Ако в аксиома 2 се използват само реални числа, пространството L се нарича ***реално линейно пространство.*** *Ако се използват комплексни числа, пространството L се нарича* ***комплексно.***

Ще разгледаме някои примери на линейни пространства. При изучаване на метричните пространства бяха разгледани множеството на реалните числа, аритметичното n-мерно пространство, множеството на непрекъснатите функции в даден сегмент и множеството на ограничените редици. Всички тези множества са примери за линейни пространства, ако се въведат операциите събиране и умножение по следните правила:

1) В съвкупността E^1 на реалните числа обичайните аритметични операции събиране и умножение.

2) В n-мерното аритметично пространство — по формулите

$$x+y=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)+(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$
$$=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n),$$
$$\alpha\,.\,x=\alpha(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots,\ \alpha x_n).$$

3) В пространството на непрекъснатите в даден сегмент функции — обичайните операции за събиране на две функции, т. е. $f+g=f(x)+g(x)$, и умножение на функция и число, т. е. $\alpha f=\alpha\,.\,f(x)$.

4) В множеството на ограничените редици въвеждаме операциите събиране и умножение по формулите

$$x+y=(x_1,\ x_2,\ \ldots)+(y_1,\ y_2,\ \ldots)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots),$$
$$\alpha x=\alpha(x_1,\ x_2,\ \ldots)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots).$$

Не е трудно да се провери за всички изброени примери, че са изпълнени аксиомите, определящи линейно пространство. За тези линейни пространства ще запазим означенията, дадени при разглеждането им като метрични пространства, т. е. съответно в случая 1) — означението E^1, в случая 2) — означението E^n, в случая 3) — означението $C_{[a,\,b]}$ и в случая 4) — означението m.

Определение 2. *Линейните пространства L и L^* се наричат* ***изоморфни****, ако съществува такова взаимно еднозначно съответствие между елементите им, че ако на елемента $x\in L$ съответствува елементът $x^*\in L^*$, а на $y\in L$ съответствува $y^*\in L^*$, то на $x+y$ съответствува x^*+y^*, а на $\alpha\,.\,x$ съответствува αx^* (α е произволно число).*

Изоморфните пространства могат да се разглеждат като различни реализации на едно и също пространство и такива пространства няма да считаме различни.

12.5.2. Нормирани пространства. Банахови пространства

Определение 3. *Функцията $f(x)=\|x\|$, която съпоставя на всеки вектор x от линейното пространство L реалното число $\|x\|$, се нарича* ***норма*** *в линейното пространство L, ако удовлетворява следните аксиоми:*

1) $f(x)=\|x\|=0$ *тогава и само тогава, когато $x=0$;*

2) $f(\alpha x)=\|\alpha x\|=|\alpha|\,.\,\|x\|=|\alpha|\,.\,f(x)$ *за всяко число α;*

3) $f(x_1+x_2)=\|x_1+x_2\|\leqq\|x_1\|+\|x_2\|=f(x_1)+f(x_2)$ *за всяко x_1 и всяко x_2, принадлежащи на L.*

Определение 4. *Линейно пространство L, в което е въведена функцията $f(x)=\|x\|$, се нарича* ***линейно нормирано пространство.***

За да подчертаем, че пространството L е нормирано, ще го означаваме обикновено с буквата N.

Стойността на нормата за даден вектор $x \in N$ се нарича ***норма*** на вектора, ***дължина*** на вектора или ***модул*** на вектора.

Нормата на вектор е винаги неотрицателна и е равна на нула само за нулевия вектор. Действително, като положим в аксиома 3) $x_1=-x_2$ и отчетем 1) и 2), получаваме

$0=\|O\|=\|x_1-x_1\|\leq\|x_1\|+\|-x_1\|=\|x_1\|+|-1|\cdot\|x_1\|=2\|x_1\|$, т. е. $f(x_1)=\|x_1\|\geq 0$.

Във всяко нормирано пространство може да се въведе естествена метрика по правилото $\rho(x, y)=\|x-y\|$. От аксиомите за норма следва, че функцията $\rho(x, y)$ действително задава разстояние в пространството, т. е. удовлетворява аксиомите за разстояние.

Освен това, понеже N е линейно пространство, метриката $\rho(x, y)$ е инвариантна относно транслация, т. е.

$$\rho(x_1+x,\ x_2+x)=\|(x_1+x)-(x_2+x)\|=\|x_1-x_2\|=\rho(x_1,\ x_2),$$

и положително хомогенна, т. е.

$$\rho(\alpha x,\ \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=\|\alpha(x-y)\|=|\alpha|\,\|x-y\|=|\alpha|\,\rho(x,\ y).$$

С появата на естествена метрика в нормираните пространства могат да бъдат въведени всички понятия, които разгледахме при метричните пространства, като пълнота и др.

Следващото определение отделя от всички нормирани пространства най-важния клас пространства, наречени банахови*.

Определение 5. ***Банахово пространство*** *се нарича всяко пълно линейно нормирано пространство.*

Примери:

1. Пространството E^1 от реалните числа с обичайните аритметични операции, както знаем, е линейно пространство. То се превръща в нормирано пространство, ако за норма на числото x приемем абсолютната му стойност: $\|x\|=|x|$. От свойствата на абсолютната стойност следва, че са налице всички свойства за норма. Това нормирано пространство е пълно, т. е. банахово. Неговата пълнота, т. е. пълнотата на E^1, като метрично пространство с обичайното разстояние между реални числа ($\rho(x,\ y)=\|x-y\|=|x-y|$) беше установена в глава 3.

* Стефан Банах — полски математик (1892—1945).

2. Линейното пространство E^n, разгледано по-горе, е също нормирано пространство, ако за норма на вектора $x=(x_1, x_2, \dots x_n)$ приемам

$$||x||=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}=\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Аксиомите 1) и 2) са очевидно изпълнени, а неравенството на триъгълника се превръща в неравенството

$$||x+y||=\Big(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^2\Big)^{1/2}\leq\Big(\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^2\Big)^{1/2}$$

$$\leq\Big(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^n|y_i|^2\Big)^{1/2}=||x||+||y||,$$

което е частен случай ($p=2$) от неравенството на Минковски за суми (вж. 9.6.3). Това пространство E^n е пълно, тъй като сходимостта на $x^{(k)}\to x$ в E^n означава сходимост на всички координати $x_i^{(k)}$ на вектора $x^{(k)}$ към съответните координати на вектора x. Остава да се приложи твърдението от пример 1.

3. Пространството $C[a, b]$ от непрекъснати функции с обичайните операции за събиране на функции и умножение на функция с число, както вече говорихме, е линейно пространство. То се превръща в нормирано, ако положим $||f(x)||=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$, където $f(x)$ е непрекъсната функция в сегмента $[a, b]$. Като използваме свойствата на абсолютната стойност и на функцията max, лесно се убеждаваме, че всички аксиоми за норма са изпълнени. Може да се докаже, че това пространство е пълно.

4. Пространството m на ограничените редици също може да се нормира, като положим за $x\in m$, $x=(x_1, x_2, x_3, \dots)$

$$||x||=\sup\{|x_k|: k=1, 2, 3, \dots\}.$$

Аксиомите за норма и тук се проверяват лесно. Можем да се убедим също така, че това пространство е пълно нормирано пространство, т. е. банахово пространство.

12.5.3. Оператори в линейни и нормирани пространства. Нека L_1 и L_2 са две линейни пространства и A е изображение на пространството L_1 в L_2, т. е. $A: L_1\to L_2$.

Определение 6. *Изображението $A: L_1\to L_2$ на едно линейно пространство L_1 в друго L_2 се нарича* ***линейно изображение*** *или* ***линеен оператор,*** *ако:*

a) $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$ *за всеки два вектора* $x_1, x_2 \in L_1$;

b) $A(\alpha x)=\alpha Ax$ *за всеки вектор* $x \in L_1$ и *всяко число* α.

Изображението $A: L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n \to L$ на декартовото произведение на линейните пространства $L_1, L_2, \ldots, L_n$* в линейното пространство L се нарича ***полилинейно,*** ако са линейни всички изображения

$$A_i: L_i \to L, \ i=1, 2, 3, \cdots, n,$$

получени от $A(x, y, \cdots, z)$ чрез фиксиране на всички променливи освен променливата, стояща на i-то място. Тук $x \in L_1$, $y \in L_2$, $\cdots$, $z \in L_n$.

Ако е зададено линейното изображение $A: L_1 \to L_2$ на линейното пространство L_1 в линейното пространство L_2 и пространството L_2 е реалната числова ос (или комплексната равнина), то операторът A се нарича ***функционал.***

Ще разгледаме някои примери на оператори и функционали.

Примери:

1. Нека L е произволно линейно пространство. Операторът E съпоставя на всеки елемент $x \in L$ същия елемент x от това пространство, т. е. $E: L \to L$ и $Ex=x$ за всяко $x \in L$. Такъв оператор се нарича единичен или единица.

2. В тримерното пространство E^3 ще зададем оператор A като линейно преобразуване, състоящо се в проектирането на всеки вектор върху оста Ox (т. е. на всеки вектор се съпоставя неговата координата от оста Ox). Операторът може да се зададе с матрица. Например в базиса от единичните вектори l_1, l_2, l_3, насочени съответно по координатните оси Ox, Oy, Oz, операторът A може да се зададе така:

$$Ax=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ x=(x_1, x_2, x_3) \in E^3.$$

3. В пространството $C[a, b]$ е зададен линейният оператор $A: Af(x)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Операторът A е изображение на $C_{[a,b]}$ в числовата ос и е функционал.

Модулът на непрекъснатост $\omega(f; \delta)$ (вж. глава 4) и функционалът $\delta f=f(a)$, който съпоставя на всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция стойността ѝ в точката a, са примери за

* Линейните операции в $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$ са определени с равенствата $[x_1, x_2, \cdots, x_n]+[y_1, y_2, \cdots, y_n]=[x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n]$, $\alpha[x_1, x_2, \cdots, x_n]=[\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n]$, където $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $[y_1, y_2, \cdots, y_n] \in L_1 \times \cdots \times L_n$, $x_i, y_i \in L_i$; $i=1, 2, \cdots, n$, α е число.

функционали в пространството $C_{[a,b]}$. Функционалът $\delta f = f(a)$ се нарича ***делта-функция.***

12.5.4. Пространство на операторите. Нека L_1 и L_2 са две линейни пространства. Ще разгледаме съвкупността $\{A\}$ от всички линейни оператори, изобразяващи L_1 в L_2. В множеството $\{A\}$, елементите на което са линейни оператори, изобразяващи L_1 в L_2, могат да се въведат алгебрични операции. Нека A_1 и A_2 са такива оператори. Определяме събиране на тези оператори посредством равенството

$$(A_1+A_2)\,x = A_1 x + A_2 x, \quad x \in L_1.$$

Умножение на линеен оператор с число определяме с формулата

$$(\alpha A)\,x = \alpha\, Ax.$$

Очевидно е, че при тези определения всички аксиоми, задаващи линейно пространство, ще бъдат изпълнени и разглежданото множество $\{A\}$ на линейните оператори ще бъде линейно пространство. Нула за това пространство ще бъде нулевият оператор O, т. е. операторът, привеждащ всеки вектор x в нулевия вектор: $Ox = o$.

Пространството на линейните оператори, което въведохме, обикновено се означава така: $(L_1 \to L_2)$. Ако пространствата L_1 и L_2 освен това имат и топология, например са нормирани, то и пространството на операторите $(L_1 \to L_2)$ ще има определена топология.

12.5.5. Норма на оператор. Нека N_1 и N_2 са две линейни нормирани пространства и операторът A изобразява N_1 в N_2.

Определение 7. *Линейният оператор $A: N_1 \to N_2$, изобразяващ линейното нормирано пространство N_1 в линейното нормирано пространство N_2, се нарича* ***ограничен,*** *ако съществува такава константа M, че $\| Ax \|_{N_2} \leqq M \| x \|_{N_1}$ за всяко $x \in N_1$.* Индексът долу на символа норма означава пространството, в което се разглежда нормата на вектора. Когато това няма да води до недоразумение, тези индекси ще се изпускат.

В сила е следното твърдение:

Теорема 12.8. *За да бъде линейният оператор $A: N_1 \to N_2$, който изобразява линейното нормирано пространство N_1 в N_2, непрекъснат, е необходимо и достатъчно той да бъде ограничен.*

(Ще отбележим, че тук под непрекъснатост на оператора се разбира непрекъснатост на съответното изображение.)

Доказателство. Нека A е непрекъснат оператор. Ако той не е ограничен, ще съществува такава редица от елементи $\{x_n\}$, че

$$\| A_{x_n} \| > n \| x_n \|.$$

Нека $y_n = x_n / n \| x_n \|$. Тогава $y_n \to 0$, тъй като $\| y_n \| = n^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$. От друга страна,

$$\| A y_n \| = \frac{1}{n \| x_n \|} \| A x_n \| > 1.$$

Ще отбележим, че от линейността на оператора A следва $Ao = o$; действително $Ao = A(x - x) = Ax - Ax = o$. Затова Ay_n не клони към $Ao = o$, т. е. операторът A не е непрекъснат в точката нула, което противоречи на условието на теоремата.

Обратно, ако A е ограничен, то $\| Ax \| \leqq M \| x \|$. Нека $x_n \to x$, т. е. $\| x_n - x \| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогава $\| Ax_n - Ax \| = \| A(x_n - x) \| \leqq M \| x_n - x \| \to 0$ при $n \to \infty$. Следователно $Ax_n \to Ax$ и операторът A е непрекъснат в точката x. □

Определение 8. *Нека A е линеен ограничен оператор.* ***Най-малката*** *от константите M, удовлетворяващи условието*

$$\| Ax \| \leqq M \| x \|,$$

се нарича ***норма*** *на оператора A и се означава с $\| A \|$.*

Следователно съгласно определение 8 нормата на оператора A притежава следните свойства:

а) $\| Ax \| \leqq \| A \| \cdot \| x \|$ за всяко $x \in N_1$;

б) за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува такъв елемент x_ε, че $\| Ax_\varepsilon \| > (\| A \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \|$.

Ще покажем, че $\| A \| = \sup \{ \| Ax \| : \| x \| \leqq 1 \}$ или, което е същото, $\| A \| = \sup \{ \| Ax \| / \| x \| : \| x \| \neq 0 \}$. Действително, ако $\| x \| \leqq 1$, то $\| Ax \| \leqq \| A \| \cdot \| x \| \leqq \| A \|$. Следователно и $\sup\limits_{\| x \| \leqq 1} \| Ax \| \leqq \| A \|$. От друга страна, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв елемент x_ε, че

$$\| Ax_\varepsilon \| > (\| A \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \|.$$

Нека $\xi_\varepsilon = x_\varepsilon / \| x_\varepsilon \|$. Тогава $\| A \xi_\varepsilon \| = \dfrac{\| Ax_\varepsilon \|}{\| x_\varepsilon \|} > \dfrac{1}{\| x_\varepsilon \|} (\| A \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \| = \| A \| - \varepsilon$. Тъй като $\| \xi_\varepsilon \| = 1$, то $\sup \{ \| Ax \| : \| x \| \leqq 1 \} \geqq \| A \xi_\varepsilon \| > \| A \| - \varepsilon$.

Следователно $\sup \{ \| Ax \| : \| x \| \leqq 1 \} \geqq \| A \|$ или $\| A \| = \sup \{ \| Ax \| : \| x \| \leqq 1 \}$.

З а б е л е ж к а. От проведените разсъждения следва, че $\| A \| = \sup \{ \| Ax \| : \| x \| = 1 \}$.

В т. 4 беше въведено пространството $(L_1 \to L_2)$ на операторите, изобразяващи линейното пространство L_1 в линейното пространство L_2. Това пространство играе важна роля в различни области на анализа и сега ще продължим да го изучаваме.

Да предположим сега, че споменатите линейни пространства L_1 и L_2 са нормирани. Ще ги означим съответно с N_1 и N_2, а съответното линейно пространство, елементите на което са линейните ограничени оператори, ще означим с $(N_1 \to N_2)$. В пространството $(N_1 \to N_2)$ може да се въведе норма. Норма на елемента A от пространството $(N_1 \to N_2)$ въвеждаме по правилото: $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$. Лесно се вижда, че са изпълнени всички аксиоми от определението за норма. По такъв начин линейното пространство $(N_1 \to N_2)$, елементи на което са линейните ограничени оператори, е линейно нормирано пространство. Възниква естественият въпрос: Кога това пространство е пълно, т. е. банахово?

Отговорът на този въпрос се съдържа в следната теорема.

Теорема 12.9. *Ако линейното нормирано пространство $N_2 = B_2$ е банахово, то пространството $(N_1 \to B_2)$ на линейните ограничени оператори е също банахово.*

Доказателство. Нека $\{A_n\}$ е фундаментална редица в пространството на операторите $(N_1 \to B_2)$, т. е. $\|A_n - A_m\| \to 0$, когато $n, m \to \infty$. За всяко x имаме $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Следователно, ако $x \in N_1$ е фиксирано, то редицата $\{A_n x\}$ от елементи на B_2 е фундаментална в B_2 и от пълнотата на B_2 следва, че тя е сходяща. Означаваме $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Получихме по този начин изображение на N_1 в B_2. Операторът, осъществяващ това изображение, означаваме с A. От свойствата на граница следва, че той е линеен. Ще покажем, че е ограничен. От това, че $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, следва $|\|A_n\| - \|A_m\|| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. числовата редица $\{\|A_n\|\}$ е фундаментална в E^1 и следователно е ограничена. Съществува такава константа M, че $\|A_n\| \leq M$ за всяко естествено n. Оттук получаваме $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \, \|x\| \leq M \|x\|$, т. е. вземайки пред вид, че функцията, определяща норма (разстояние), е непрекъсната, имаме

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M \|x\|.$$

Следователно операторът A е ограничен. Операторът A беше определен като оператор, изобразяващ N_1 в B_2 по даденото по-горе правило. Ще покажем, че A е граница на редицата $\{A_n\}$ в смисъл на сходимост по норма в пространството $(N_1 \to B_2)$. Фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме n_0 така, че $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$ за $n > n_0$, $p > 0$ и всяко x, за което $\|x\| \leq 1$. Нека $p \to \infty$; тогава $\|Ax - A_n x\| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$ и всяко x, за което $\|x\| \leq 1$. Затова за $n \geq n_0$ имаме $\|A_n - A\| = \sup\{\|(A_n - A)x\| : \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon$. Следователно $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в смисъл на сходимост по норма в пространството $(N_1 \to B_2)$, т. е. това пространство е банахово, което трябваше да се докаже. □

12.5.6. Понятие за хилбертово пространство. Ще дадем следното определение:

Определение 9. ***Хилбертово пространство*** *се нарича множество H от елементи $f, g, h, \ldots$, притежаващо следните свойства:*

1) *H е линейно пространство, т. е. в H са определени действията събиране и умножение с реално или комплексно число (в зависимост от това H се нарича реално или комплексно пространство).*

2) *H е метрично пространство, чиято метрика се въвежда с помощта на скаларно произведение, т. е. числова функция (f, g) на двойката аргументи f и g, наречена тяхно скаларно произведение, която удовлетворява аксиомите:*

а) $(af, g)=a(f, g)$ *за всяко число* a;

б) $(f+g, h)=(f, h)+(g, h)$;

в) $(f, g)=\overline{(g, f)}$;*

г) $(f, f)>0$ *при* $f\neq 0$; $(f, f)=0$ *при* $f=0$. *Нормата* $\|f\|$ *на елемента* f *се определя с равенството*

$$\|f\|=(f, f)^{1/2},$$

а разстоянието между елементите f *и* g *— с равенството*

$$\rho(f, g)=\|f-g\|.$$

3) *H е пълно пространство като метрично пространство с въведеното по-горе разстояние. (Крайномерните пространства са винаги пълни.)*

Вземаме произволни елементи $f, g\in H$ и нека λ е реално число, тогава

$$0\leq (f+\lambda(f, g)g, f+\lambda(f, g)g)=(f, f)+2\lambda|(f, g)|^2+\lambda^2|(f, g)|^2\cdot(g, g),$$

следователно този полином относно λ не може да има различни реални корени, откъдето

$$|(f, g)|^4-(f, f)\cdot|(f, g)|^2(g, g)\leq 0.$$

Така (дори и в случая $(f, g)=0$)

$$|(f, g)|^2\leq(f, f)\cdot(g, g),$$

или

$$(f, g)\leq\|f\|\cdot\|g\|.$$

Получихме ***неравенството на Коши — Буняковски.*** Знакът равенство в него освен в тривиалния случай $f=o$ или $g=o$ се достига само когато $f=-\lambda(f, g)\cdot g$ при някоя стойност на λ, т. е. когато векторите f и g са колинеарни.

Като използваме това неравенство, лесно се проверява, че нормата $\|f\|$ на f и разстоянието $\rho(f, g)=\|f-g\|$ удовлетворяват всички аксиоми от съответните определения.

Заедно с метриката в хилбертовото пространство се появяват и понятия, свързани с граничен преход, в смисъл на въведеното

* Тук $\overline{(g, f)}$ означава число, комплексно спрегнато на (g, f).