Тема 18

https://github.com/v--/se2018

Поасонов процес. Характеризационни свойства. Приложения.

Янис Василев

Оригинал: 26 юни 2019
Ревизия: 6046ab5 от 14 November 2022
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Теорията е базирана на Божкова, *Случайни процеси*.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Дефиниция за броящ процес.
2. Дефиниция за поасонов процес.
3. Връзка с експоненциално разпределение.
4. Характеризационни свойства - разпределение на времето за чакане и условни разпределения на времето и моментите на появяване.
5. Пример с интерпретация на горепосочените свойства.
6. Нехомогенен и сложен поасонов процес.

1.2. Основни понятия

Ще считаме, че е фиксирано някакво вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и множество $\mathcal{N}$ от целочислени случайни величини с неотрицателни стойности над това пространство.

Определение 0. Броящ процес наричаме монотонната с вероятност 1 функция $N : [0, \infty) \to \mathcal{N}$, чиито аргументи обикновено интерпретираме като време и бележим с t, а стойностите $N(t)$ като брой настъпили събития за време t.

Нарастване на процеса с $h > 0$ в момента t наричаме разликите $N(t+h) - N(t)$. Ако всички нараствания за един процес са независими, казваме, че процесът е с **независими нараствания**. Ако разпределенията на нарастванията $N(t_1+h) - N(t_1)$ и $N(t_2+h) - N(t_2)$ зависят само от $h > 0$, казваме, че процесът $N(t)$ е със **стационарни нараствания**.

Ще дадем три еквивалентни определения за **поасонов процес**.

Определение 1. Броящият процес $N(t), t \geq 0$ наричаме **поасонов** със **степен** $\lambda > 0$, ако са изпълнени

1. $N(0) = 0$
2. $N(t)$ е процес с независими нараствания
3. Нарастванията $N(t+h) - N(t)$ имат поасоново разпределение със степен $h\lambda$, т.е.
$$\mathrm{P}(N(t+h) - N(t) = k) = \frac{e^{-h\lambda}(h\lambda)^k}{k!}.$$

Определение 2. Броящият процес $N(t), t \geq 0$ наричаме **поасонов** със **степен** $\lambda > 0$, ако са изпълнени

1. $N(0) = 0$
2. $N(t)$ е процес със стационарни и независими нараствания
3. $\frac{\mathrm{P}(N(h)=1)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \lambda$
4. $\frac{\mathrm{P}(N(h)\geq 1)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Определение 3. Нека $\xi_1, \xi_2, \dots$ са независими случайни величини с разпределение $\mathbf{Exp}(\lambda)$, т.е.

$$f_{\xi_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, n = 1, 2, \dots .$$

Полагаме

$$\begin{aligned} S_0 &:= 0, \\ S_n &:= \sum_{k=1}^{n} \xi_k. \end{aligned}$$

Очевидно $S_n \in \mathbf{Gamma}(n, \lambda), n > 0$, т.е.

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)} = \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} n = 1, 2, \dots .$$

Броящият процес $N(t)$, за който е изпълнено

$$N(t) := \max\{m \geq 0 \mid S_m \leq t\},$$

се нарича **поасонов процес** със степен λ, случайните величини $S_0, S_1, S_2, \dots$ наричаме времена на появява на n-тото събитие, а $\xi_1, \xi_2, \dots$ наричаме **времена на чакане** за поява на n-тото събитие.

Забележка 4.

1. И при трите определения поасоновият процес $N(t)$ има стационарни нараствания.

2. Параметърът λ се нарича степен на процеса, тъй като $\mathrm{E}(N(t)) = \lambda t$.

Теорема 5. *Трите определения са еквивалентни.*

Доказателство.

Доказателство, че определение 1 влече определение 2. Нека първо броящият процес $N(t)$ удовлетворява първото определение.

Тогава

$$\frac{\mathrm{P}(N(h) = 1)}{h} = \frac{1}{h}\frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda h} \xrightarrow[h \to 0]{} \lambda.$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{P}(N(h) \geq 1)}{h} &= \frac{1 - \mathrm{P}(N(h) < 2)}{h} = \\
&= \frac{1 - \mathrm{P}(N(h) = 1) - \mathrm{P}(N(h) = 0)}{h} = \\
&= \frac{1 - \lambda h e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}}{h} = \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} - \lambda e^{-\lambda h} = \\
&= -\frac{e^{-\lambda(0+h)} - e^{-\lambda 0}}{h} - \lambda e^{-\lambda h} \xrightarrow[h \to 0]{} -(-\lambda)e^{-\lambda 0} - \lambda e^{-\lambda 0} = 0.
\end{aligned}$$

Доказателство, че определение 2 влече определение 1. Обратно, ако $N(t)$

удовлетворява второто определение, получаваме диференциалното уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathrm{P}(N(t)=0)}{\partial t} &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(t+h)=0) - \mathrm{P}(N(t)=0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(t+h)-N(t)=0, N(t)-N(0)=0) - \mathrm{P}(N(t)=0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(h)=0, N(t)=0) - \mathrm{P}(N(t)=0)}{h} = \\
&= \mathrm{P}(N(t)=0) \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(h)=0) - 1}{h} = \\
&= \mathrm{P}(N(t)=0) \lim_{h\to 0} \frac{1 - \mathrm{P}(N(h)=1) - \mathrm{P}(N(h)\geq 1) - 1}{h} = \\
&= -\, \mathrm{P}(N(t)=0) \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(h)=1) + \mathrm{P}(N(h)\geq 1)}{h} = \\
&= -\, \mathrm{P}(N(t)=0)\cdot(\lambda + 0) = \\
&= -\,\lambda\, \mathrm{P}(N(t)=0).
\end{aligned}$$

Като се има предвид началното условие $\mathrm{P}(N(0)=0)=1$, това уравнение има решение

$$\mathrm{P}(N(t)=0) = e^{-\lambda t}.$$

За $n>0$ формулата за пълната вероятност ни дава

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t+h)=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(N(t+h)=n, N(t)=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(N(t+h)-N(t)=n-k, N(t)=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(N(h)=n-k, N(t)=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(N(h)=n-k)\, \mathrm{P}(N(t)=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(N(h)=k)\, \mathrm{P}(N(t)=n-k),
\end{aligned}$$

откъдето намираме производната по t

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\, \mathrm{P}(N(t)=n)}{\partial t} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(t+h)=n) - \mathrm{P}(N(t)=n)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(N(h)=k)\,\mathrm{P}(N(t)=n-k) - \mathrm{P}(N(t)=n)\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{P}(N(t)=n)[\mathrm{P}(N(h)=0)-1] + \mathrm{P}(N(h)=1)\,\mathrm{P}(N(t)=n-1)+\cdots] = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(t)=n)[\mathrm{P}(N(h)=0)-1]}{h} + \lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n-1) + 0 = \\
&\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(N(t)=n)\cdot[-\lambda\,\mathrm{P}(N(h)=0)]}{1} + \lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n-1) + 0 = \\
&= -\lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n) + \lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n-1).
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathrm{P}(N(t)=n)}{\partial t} &= -\lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n) + \lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n-1), \\
e^{\lambda t}\frac{\partial\, \mathrm{P}(N(t)=n)}{\partial t} &= -\lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n) + \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n-1) \\
e^{\lambda t}\left(\frac{\partial\, \mathrm{P}(N(t)=n)}{\partial t} + \lambda\,\mathrm{P}(N(t)=n)\right) &= \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n-1), \\
\frac{\partial[e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n)]}{\partial t} &= \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n-1).
\end{aligned}$$

За $n = 1$ интегрираме уравнението и получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=1)]}{\partial t} &= \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=0) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda, \\
e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=1) &= \lambda t + C, \\
\mathrm{P}(N(t)=1) &= \lambda t e^{-\lambda t} + C.
\end{aligned}$$

Понеже $\mathrm{P}(N(0)=1)=0$, имаме $C=0$ и

$$\boxed{\mathrm{P}(N(t)=1) = \lambda t e^{-\lambda t}}.$$

С индукция по n получаваме функцията на вероятностите на познатото поасоново разпределение със степен λt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n)]}{\partial t} &= \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n-1) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1}, \\
e^{\lambda t}\,\mathrm{P}(N(t)=n) &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} + C, \\
\mathrm{P}(N(t)=n) &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + C.
\end{aligned}$$

Понеже $\mathrm{P}(N(0) = n) = \delta_{n,0}$, имаме $C = 0$ и

$$\boxed{\mathrm{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}.$$

Доказателство, че определение 1 влече определение 3. Отново приемаме първото определение и разглеждаме вероятността за нарастване между моментите t и $t + h$, т.е.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t) < N(t+h)) &= \mathrm{P}(0 < N(t+h) - N(t)) = \\
&= \mathrm{P}(0 < N(h)) = \\
&= 1 - \mathrm{P}(N(h) = 0) = \\
&= 1 - e^{-\lambda h}.
\end{aligned}$$

Виждаме, времето за чакане за настъпване на събитие между моментите t и $t + h$ е експоненциално разпределено и не зависи от t, т.е. времената за чакане са независими.

Доказателство, че определение 3 влече определение 1. Сега приемаме третото определение и разглеждаме вероятността да са се случили n събития до момента t

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t) = n) &= \mathrm{P}(\max\{m \geq 0 \mid S_m \leq t\} = n) = \\
&= \mathrm{P}(S_n \leq t < S_{n+1}) = \\
&= \mathrm{P}(S_n \leq t < S_n + \xi_{n+1}) = \\
&= \int_0^t \mathrm{P}(t < x + \xi_{n+1}) f_{S_n}(x)dx = \\
&= \int_0^t (1 - F_{\xi_{n+1}}(t-x)) \cdot f_{S_n}(x)dx = \\
&= \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = \\
&= e^{-\lambda t}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (\lambda x)^{n-1} d(\lambda x) = \\
&= \boxed{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}},
\end{aligned}$$

което е точно функция на вероятностите на поасоново разпределение със степен λt. □

От експоненциалното разпределение се наследява следното свойство:

Твърдение 6 (Липса на памет). *За поасонов процес $N(t)$ със степен $\lambda > 0$ е изпълнено*

$$\mathrm{P}(N(t+h) > n + m \mid N(t) > n) = \mathrm{P}(N(h) > m)$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t+h)=n+m \mid N(t)=n) &= \frac{\mathrm{P}(N(t+h)=n+m, N(t)=n)}{\mathrm{P}(N(t)=n)} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(N(t+h)-N(t)=m, N(t)=n)}{\mathrm{P}(N(t)=n)} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(N(h)=m, N(t)=n)}{\mathrm{P}(N(t)=n)} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(N(h)=m)\,\mathrm{P}(N(t)=n)}{\mathrm{P}(N(t)=n)} = \\
&= \mathrm{P}(N(h)=m).
\end{aligned}$$

□

1.3. Условни разпределения за времето на появяване

Считаме, че е фиксиран някакъв поасонов процес $N(t)$ със степен $\lambda > 0$.

Определение 7. Ако $\eta_1, \dots, \eta_n$ са наблюдения над случайна величина η, **наредени статистики** наричаме елементите на вариационния ред $\eta_{(1)} \le \dots \le \eta_{(n)}$.

Твърдение 8. *Ако $\eta_1, \dots, \eta_n$ са независими наблюдения над непрекъсната случайна величина η, съвместната плътност на наредените им статистики има вида*

$$f_{\eta_{(1)},\dots,\eta_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f_{\eta_1,\dots,\eta_n}(x_1, \dots, x_n), & x_1 < \dots < x_n, \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Доказателство. Ако числата $x_1, \dots, x_n$ не са наредени, не е възможно наредените статистики да приемат тази комбинация от стойности и затова съвместната им плътност се анулира.

Ако те са наредени, съвместната плътност на съответните наредени статистики ще се различава от съвместната плътност на наблюденията с нормираща константа. Тъй като има $n!$ начина да наредим n различни числа, тази нормираща константа е $n!$. □

Забележка 9. В частния случай, когато $\eta \in \mathbf{Uniform}(0, t)$, съвместната плътност на наредените статистики ще бележим с $u_t(x_1, \dots, x_n)$. Тази плътност има вида

$$u_t(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! t^{-n}, & x_1 < \dots < x_n, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема 10. *Условната съвместна плътност $f_{S_1,\dots,S_n}(x_1, \dots, x_n \mid N(t) = n)$ на n последователни момента на появяване до момента t съвпада с $u_t(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказателство. Първо да забележим, че

$$f_{S_1,\dots,S_n}(x_1,\dots,x_n \mid N(t)=n) = \begin{cases} \dfrac{f_{S_1,\dots,S_n,S_{n+1}}(x_1,\dots,x_n,t)}{\mathrm{P}(N(t)=n)}, & x_n < t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тъй като $S_{k-1} = S_k - \xi_k, k > 1$, за $x_1 < \dots < x_n < t$ имаме

$$\begin{aligned} f_{S_1,\dots,S_n}(x_1,\dots,x_n \mid N(t)=n) &= \frac{f_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2-x_1,\dots,x_n-x_{n-1},t-x_n)}{\mathrm{P}(N(t)=n)} = \\ &= \frac{f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_1}(x_2-x_1)\dots f_{\xi_{n-1}}(x_n-x_{n-1})f_{\xi_n}(t-x_n)}{\mathrm{P}(N(t)=n)} = \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda x_1}e^{-\lambda(x_2-x_1)}\dots e^{-\lambda(x_n-x_{n-1})}e^{-\lambda(t-x_n)}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \\ &= \frac{n!}{t^n}e^{-\lambda(-t+t-x_n+x_n\dots x_2-x_1+x_1)} = \frac{n!}{t^n} = u_t(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}$$

□

1.4. Приложения

1.4.1. Моделиране на надеждност

Машинен елемент се поврежда средно три пъти годишно и моментално се заменя с нов. Нека случайните величини $\xi_1, \xi_2, \dots$ описват времената на живот на последователно използвани елементи.

Предполагаме, че те са експоненциално разпределени с параметър 3. Тогава времето на повреда на n-тия машинен елемент се описва от случайните величини $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, а

$$N(t) := \max\{m \geq 0 \mid S_m \leq t\}$$

е поасонов процес.

Този модел ни позволява да отговаряме на много въпроси, сред които:

1. Количеството повредени машинни елементи за три години имат разпределение $N(3) \in \mathbf{Poisson}(9)$. За три години се очакват средно 9 повреди със стандартно отклонение 3, а вероятността да се повредят цели 12 елемента е

$$\mathrm{P}(N(3) = 12) = e^{-9}\frac{9^{12}}{12!} \approx 0.07.$$

2. Наредените времена за повреда на последните n машинни елементи са равновероятни.

3. Поради липсата на памет на процеса, вероятността за нови повреди не се влияе от зачестяване на броя повреди за единица време.

1.4.2. Моделиране на интернет трафик

Можем да използваме поасонов процес, за да моделираме броя заявки към даден сървър. Ако за една секунда се случват средно 1000 заявки, използваме поасонов процес с параметър $\lambda = 1000$.

1. Редно е да очакваме $\mathrm{E}(N(90)) \pm 2\sqrt{\mathrm{var}(N(90))} = 90000 \pm 600$ заявки за минута и половина.

2. Наредените времена на заявките са равновероятни.

3. Поради липсата на памет на процеса, вероятността за нови повреди не се влияе от броя заявки до момента.

1.5. Обобщения

1.5.1. Сложен поасонов процес

Определение 11. Ако $N(t)$ е поасонов процес и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ са независими помежду си и от $N(t)$ неотрицателни целочислени случайни величини с еднакво разпределение с, процесът

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k, t \geq 0,$$

се нарича **сложен поасонов**.

Забележка 12. Ако η_k са изродени в 1 случайни величини, получаваме обикновения поасонов процес. Сложният поасонов процес ни позволява лесно да моделираме настъпването на цели групи от събития, например пристигане на групи от хора с влак.

Теорема 13 (Тъждество на Валд)**.** *За очакването и дисперсията на сложен поасонов процес имаме*

$$\mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(N(t))\,\mathrm{E}(\xi_1), \qquad \mathrm{var}(X(t)) = \mathrm{E}(N(t))\,\mathrm{E}(\xi_1^2).$$

Доказателство.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X(t)) &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k \mid N(t) = n\right) \mathrm{P}(N(t) = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N(t) = n) \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\eta_k) = \\
&= \mathrm{E}(\eta_1) \sum_{n=0}^{\infty} n\, \mathrm{P}(N(t) = n) = \\
&= \boxed{\mathrm{E}(\eta_1)\, \mathrm{E}(N(t))}, \\
\mathrm{E}(X(t)^2) &= \mathrm{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k\right)^2\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \sum_{m=1}^{N(t)} \eta_k \eta_m\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \sum_{m=1}^{N(t)} \eta_k \eta_m \mid N(t) = n\right) \mathrm{P}(N(t) = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{E}(\eta_k \eta_m)\right) \mathrm{P}(N(t) = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n\, \mathrm{E}(\eta_1^2) + n(n-1)\mathrm{E}(\eta_1)^2\right) \mathrm{P}(N(t) = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\mathrm{E}(\eta_1^2) - \mathrm{E}(\eta_1)^2\right) \mathrm{P}(N(t) = n) + \sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(\mathrm{E}(\eta_1)^2\right) \mathrm{P}(N(t) = n) = \\
&= \boxed{\mathrm{var}(\eta_1)\, \mathrm{E}(N(t)) + \mathrm{E}(\eta_1)^2\, \mathrm{E}(N(t)^2)}, \\
\mathrm{var}(X(t)) &= \mathrm{var}(\eta_1)\, \mathrm{E}(N(t)) + \mathrm{E}(\eta_1)^2\, \mathrm{E}(N(t)^2) - \mathrm{E}(\eta_1)^2 \mathrm{E}(N(t))^2 = \\
&= \mathrm{var}(\eta_1)\, \mathrm{E}(N(t)) + \mathrm{E}(\eta_1)^2\, \mathrm{var}(N(t)) = \\
&= (\mathrm{var}(\eta_1) + \mathrm{E}(\eta_1)^2)\lambda t = \\
&= \lambda t\, \mathrm{E}(\eta_1^2) = \\
&= \boxed{\mathrm{E}(N(t))\, \mathrm{E}(\eta_1^2)}.
\end{aligned}
$$

□

1.5.2. Нехомогенен поасонов процес

Ако допуснем степента $\lambda(t)$ да варира с времето нарастванията няма да бъдат стационарни и ще получим следното обобщение на определение 2 за обикновения поасонов процес:

Определение 14. Броящият процес $N(t), t \geq 0$ наричаме **нехомогенен поасонов** със степен $\lambda(t) \geq 0$, ако са изпълнени

1. $N(0) = 0$
2. $N(t)$ е процес с независими нараствания
3. $\frac{\mathrm{P}(N(t+h)-N(t)=1)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \lambda(t)$
4. $\frac{\mathrm{P}(N(t+h)-N(t)\geq 1)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

За удобство полагаме

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(x) dx.$$

Формулираме следното обобщение на свойствата на обикновения поасонов процес, чиито доказателства са аналогични:

Теорема 15. *Нека $N(t)$ е нехомогенен поасонов процес със степен $\lambda(t)$. Тогава*

1. $N(t) \in \mathbf{Poisson}(\Lambda(t))$.
2. *Моментът S_n на появяване на n-тото събитие има плътност*

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!}$$

Забележка 16. Нехомогенния поасонов процес ни позволява да моделираме, например, пристигането на посетители в магазин, което се променя драстично в течение на деня.

2. Литература

Божкова, Марусия. *Случайни процеси.* 2012. URL: https://sites.google.com/site/sluchproc/.

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX (дата на посещ. 24.03.2019).