Тема 16

https://github.com/v--/se2018

Случайни величини с непрекъснати разпределения. Нормално разпределение. Равномерно разпределение, експоненциално разпределение или гама разпределение. Задачи, в които възникват.

Янис Василев

Оригинал: 22 юни 2019
Ревизия: `7e5ed38` от 28 януари 2024
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Теорията е представена с минимални препратки към теорията на мярката и е базирана частично на изложението в Боровков, *Теория вероятностей* и Димитров и Янев, *Вероятности и статистика*. За пълнота съм включил доказателства на основните свойства на пораждащи моментите и характеристична функции.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Дефиниция на непрекъснато разпределение на случайна величина.
2. Вероятностна плътност и свойствата ѝ - неотрицателност и нормираност.
3. Дефиниция на моментите на непрекъсната случайна величина.
4. Дефиниция и свойства (без доказателства) на пораждаща моментите / характеристична функция (по избор).
5. Дефиниция, коректност, мотивиращ пример, пораждаща моментите / характеристична функция, очакване и дисперсия на нормално разпределение и още едно избрано от комисията непрекъснато разпределение.

1.2. Основни дефиниции и теореми

Определение 1. (Реална) случайна величина над вероятностното пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ наричаме всяка измерима функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Условието за измеримост на ξ може да се запише така: за всяко Борелово множество $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ имаме

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Разпределение на ξ наричаме мярката

$$\mathrm{P}_\xi(A) \coloneqq \mathrm{P}(\xi \in A).$$

Две случайни величини ξ и η наричаме **независими**, ако за всички $A, B \in \mathcal{F}$ е изпълнено

$$\mathrm{P}(\xi \in A, \eta \in B) = \mathrm{P}_\xi(A)\, \mathrm{P}_\eta(B).$$

Функция на разпределение на случайната величина ξ наричаме

$$F_\xi(x) \coloneqq \mathrm{P}(\xi \leq x).$$

Случайната величина ξ наричаме **абсолютно непрекъсната** и казваме, че ξ има **абсолютно непрекъснато разпределение**, ако функцията ѝ на разпределение е локално абсолютно непрекъсната в $\mathbb{R}$, т.е. абсолютно непрекъсната във всеки затворен интервал. Известно е, че абсолютно непрекъснатите в затворен интервал $[a, b]$ функции са точно тези, които са диференцируеми почти навсякъде в интервала, производните им в $[a, b]$ са интегруеми по Риман и за $x \in [a, b]$ е изпълнено

$$F_\xi(x) = \int_a^x F_\xi'(x) + F_\xi(a).$$

Функцията $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наричаме **вероятностна плътност** на случайната величина ξ, ако $F_\xi'(x) = f_\xi(x)$ във всяка точка, в която F_ξ е диференцируема. Ако за едно разпределение съществуват множество плътности, те се различават само върху множество с лебегова мярка 0 и тъй като $f_\xi(x)$ се използва основно за интегриране, на практика няма значение с коя от плътностите ще работим.

От критерия на Лебег за интегруемост по Риман следва, че плътностите са непрекъснато почти навсякъде.

Забележка 2. Абсолютно непрекъснатите случайни величини ще наричаме просто „непрекъснати“. Понякога непрекъснати случайни величини се наричат такива с непрекъсната функция на разпределение, но това определение е прекалено общо и позволява т. нар. сингулярни разпределения, чиято плътност се анулира почти навсякъде.

Твърдение 3 (Основни свойства на функцията на разпределение). *Функцията F_ξ е функция на разпределение на някаква (не непременно абсолютно непрекъсната) случайна величина ξ тогава и само тогава, когато са изпълнени*

1. $F_\xi(x) \le F_\xi(y), x < y$ *(монотонност)*

2. $F_\xi(x)$ *е непрекъсната отдясно*

3. $\lim_{x\downarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$

4. $\lim_{x\uparrow \infty} F_\xi(x) = 1$

Твърдение 3 ни дава обосновка да задаваме случайни величини изцяло чрез функцията им на разпределение, т.е. без изрично да задаваме вероятностни пространства.

Доказателство на твърдение 3.

Доказателство на достатъчност.

1. За всички $x < y$

$$\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \mathrm{P}(\xi \le x) = \\
&= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x\}) = \\
&= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le y\}) \le \\
&\le \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le y\}) = \\
&= \mathrm{P}(\xi \le y) = \\
&= F_\xi(y).
\end{aligned}$$

2. От монотонността на вероятностната мярка имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0} F_\xi(x+h) &= \lim_{h\downarrow 0} \mathrm{P}(\xi \le x+h) = \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x+h\}) = \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{h\ge 0} \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x+h\}\right) = \\
&= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x\}) = \\
&= \mathrm{P}(\xi \le x) = \\
&= F_\xi(x).
\end{aligned}$$

3. От монотонността на вероятностната мярка имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow\infty} F_\xi(x) &= \lim_{x\uparrow\infty} \mathrm{P}(\xi \le x) = \\
&= \lim_{x\uparrow\infty} \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x\}) = \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{x\uparrow\infty} \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le x\}\right) = \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{x\uparrow\infty} \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le 1\}\right) = \\
&= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le \infty\}) = \\
&= \mathrm{P}(\Omega) = 1.
\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\uparrow\infty} F_\xi(x) = 0$ се доказва напълно аналогично на $\lim_{x\uparrow\infty} F_\xi(x) = 1$.

Доказателство на необходимост. Нека функцията F_ξ удовлетворява условията на теоремата. Дефинираме

$$\begin{aligned} \xi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \mathrm{P} &: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], \\ \xi(x) &\coloneqq x, & \mathrm{P}((a,b]) &\coloneqq F_\xi\Big(\lim_{h\downarrow 0} b+h\Big) - F_\xi(a), a < b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Интервалите от вида $(a,b]$ пораждат Бореловата σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Ще пропуснем доказателството на това, че P е вероятностна мярка над $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Тогава ξ е измерима функция над $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P})$ и освен това

$$\mathrm{P}(\xi \le x) = \mathrm{P}((-\infty, x]) = F_\xi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

С други думи, построихме вероятностно пространство и случайна величина ξ, чиято функцията на разпределение е F_ξ. $\square$

До края на темата ще считаме, че работим над вероятностното пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Теорема 4. *Интегруемата по Риман функция $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е плътност на някаква абсолютно непрекъсната случайна величина ξ тогава и само тогава, когато са изпълнени*

$$f_\xi(x) \ge 0 \text{ почти навсякъде} \qquad \text{(неотрицателност)}$$
$$\sum_k p_k = 1 \qquad \text{(нормираност)}$$

Тази теорема ни позволява да задаваме непрекъсната случайна величина изцяло чрез плътността ѝ, поради което плътността понякога се нарича разпределение на случайната величина.

Доказателство на теорема 4.

Доказателство на достатъчност. Нека f_ξ е плътност на ξ.

1. За всяка точка $x \in \mathbb{R}$, в която F_ξ е диференцируема, имаме

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{F_\xi(x+h) - F_\xi(x)}{h} \ge 0$$

поради монотонността на F_ξ.

2. За произволно $c > 0$ функцията F_ξ е абсолютно непрекъсната в $[-c, c]$. Следователно

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = \lim_{c\uparrow\infty} \int_{-c}^{c} f_\xi(x)dx = \lim_{c\uparrow\infty} F_\xi(c) - \lim_{c\to\infty} F_\xi(-c) = 1 - 0.$$

Доказателство на необходимост. Нека $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е неотрицателна, интегруема по Риман и нормирана. Дефинираме функцията $F_\xi(x) \coloneqq \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$. Ще покажем, че за F_ξ са изпълнени свойствата на функция на разпределение:

1. Ако $x < y$, от адитивността на римановия интеграл и неотрицателността на f_ξ следва
$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt + \int_{x}^{y} f_\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{y} f_\xi(t)dt = F_\xi(y).$$

2. F_ξ е непрекъсната отдясно, тъй като
$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0} F_\xi(x+h) = \lim_{h\downarrow 0} \int_{-\infty}^{x+h} f_\xi(t)dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt + \lim_{h\downarrow 0} \int_{x}^{x+h} f_\xi(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \\ &= F_\xi(x).\end{aligned}$$

3. От предположението за нормираност имаме
$$\lim_{x\uparrow\infty} F_\xi(x) = \lim_{x\uparrow\infty} \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = 1.$$

4. Директно пресмятаме
$$\lim_{x\downarrow-\infty} \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{-\infty} f_\xi(x)dx = 0.$$

Видяхме, че F_ξ удовлетворява свойствата на функция на разпределение и по твърдение 3 съществува случайна величина ξ, чиято плътност е f_ξ.

Освен това F_ξ е абсолютно непрекъсната във всеки затворен интервал $[a, b]$, тъй като тя има интегруема производна почти навсякъде и за $x \in [a, b]$ е изпълнено
$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_\xi(x)dx + \int_{a}^{x} f_\xi(x)dx = F_\xi(a) + \int_{a}^{x} f_\xi(x)dx.$$

□

Твърдение 5 (Конволюция на плътности)**.** *Сумата на две независими непрекъснати случайни величини ξ и η е непрекъсната случайна величина с плътност*
$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(y) f_\eta(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x-y) f_\eta(y)dy.$$

Доказателство. Сумата на измерими функции е измерима, следователно $\xi + \eta$ е случайна величина. Използвайки формулата за пълната вероятност и независимостта на ξ и η, намираме функцията на разпределение

$$\begin{aligned}
F_{\xi+\eta}(x) &= \mathrm{P}(\xi + \eta \leq x) = \\
&= \mathrm{P}(\xi \leq x - \eta) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}(\xi \leq x - y) f_\eta(y) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} F_\xi(x - y) f_\eta(y) dy.
\end{aligned}$$

Сега ще докажем, че $F_{\xi+\eta}$ е абсолютно непрекъсната във всеки интервал $[a, b]$. Нека $\varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{\sup_{\mathbb{R}}(f_\xi)}$. За произволни n непресичащи се два по два интервала $(a_k, b_k) \subseteq [a, b]$ поради монотонността на функциите на разпределение имаме $F_{\xi+\eta}(b_k) - F_{\xi+\eta}(a_k) \geq 0$. Тогава

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |F_{\xi+\eta}(b_k) - F_{\xi+\eta}(a_k)| &= \sum_{k=1}^{n} (F_{\xi+\eta}(b_k) - F_{\xi+\eta}(a_k)) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} F_\xi(b_k - y) f_\eta(y) dy - \int_{\mathbb{R}} F_\xi(a_k - y) f_\eta(y) dy \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (F_\xi(b_k - y) - F_\xi(a_k - y)) f_\eta(y) dy = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \int_{a_k - y}^{b_k - y} f_\xi(z) dz \cdot f_\eta(y) dy \leq \\
&\leq \sup_{\mathbb{R}}(f_\xi) \sum_{k=1}^{n} (b_k - y - a_k + y) \int_{\mathbb{R}} f_\eta(y) dy = \\
&= \sup_{\mathbb{R}}(f_\xi) \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \\
&< \delta \sup_{\mathbb{R}}(f_\xi) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Дотук доказахме, че $\xi + \eta$ е непрекъсната случайна величина. Остава само да намерим плътността на $F_{\xi+\eta}(x)$. Тъй като $F'_\xi = f_\xi$ и f_η са непрекъснати почти навсякъде, произведението им също е непрекъснато почти навсякъде и правилото на Лайбниц за диференциране под знака на интеграла ни дава

$$f_{\xi+\eta}(x) = F'_{\xi+\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} F'_\xi(x - y) f_\eta(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x - y) f_\eta(y) dy.$$

Аналогично се доказва

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(t) f_\eta(x - t) dt.$$

$\square$

Твърдение 6. *Ако ξ е случайна величина и функцията $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е строго монотонна и диференцируема, тогава $\psi(\xi)$ е непрекъсната случайна величина с плътност*

$$f_{\psi(\xi)}(x) = |(\psi^{-1})'(x)| f(\psi^{-1}(x)).$$

Доказателство. Диференцирайки

$$F_{\psi(\xi)} = \mathrm{P}(\psi(\xi) \leq x) = \mathrm{P}(\xi \leq \psi^{-1}(x)) = F_\xi(\psi^{-1}(x))$$

по x, получаваме

$$f_{\psi(\xi)}(x) = F'_{\psi(\xi)}(x) = (F_\xi \circ \psi^{-1})'(x) = |(\psi^{-1})'(x)| f(\psi^{-1}(x)).$$

$\square$

1.3. Очакване и моменти

Определение 7. Нека ξ е непрекъсната случайна величина. Дефинираме **очакване** на ξ чрез

$$\mathrm{E}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x) dx.$$

Казваме, че ξ има (крайно) очакване, ако интегралът е абсолютно сходящ, т.е. $|x f_\xi|$ е интегруема функция.

Случайни величини с очакване нула наричаме **центрирани**.

Очакване от константа $x \in \mathbb{R}$ дефинираме да бъде самата константа x.

Забележка 8. Очакването се дефинира за произволна случайна величина ξ се дефинира чрез интеграл по вероятностната мярка, т.е.

$$\mathrm{E}(\xi) := \int \xi d\,\mathrm{P}.$$

Нещо повече, очакването е линеен функционал над линейното пространството от всички случайни величини над $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Непрекъснатите случайни величини обаче не образуват линейно подпространство, тъй като сумата на две зависими непрекъснати случайни величини може да не бъде непрекъсната (например $\xi - \xi = 0$). Тъй като тук се ограничаваме само до непрекъснати случайни величини, ще формулираме някои свойства (например адитивност) само в частния случай, в който случайните величини са независими.

Твърдение 9. *За независими непрекъснати случайни величини ξ и η с крайно очакване е изпълнено*

$$\mathrm{E}(\xi\eta) = \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(\eta).$$

Доказателство. Прилагаме теоремата на Фубини, теоремата за средните стойности и формулата за пълната вероятност:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\xi\eta) &= \int_{\mathbb{R}} z f_{\xi\eta}(z)dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}} z\,\mathrm{P}(z \le \xi\eta < z + dz)dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} z\,\mathrm{P}(z \le t\xi < z + dz)f_\eta(t)dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} z\Big(F_\xi\Big(\frac{z}{t}\Big) - F_\xi\Big(\frac{z}{t} + d\frac{z}{t}\Big)\Big)f_\eta(t)dt\;dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} z f_\xi\Big(\frac{z}{t}\Big)f_\eta(t)dt\;dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}} t f_\eta(t)\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{z}{t} f_\xi\Big(\frac{z}{t}\Big)d\frac{z}{t}\right)dt = \\
&= \mathrm{E}(\xi)\int_{\mathbb{R}} t f_\eta(t)dt = \\
&= \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(\eta).
\end{aligned}$$

□

Твърдение 10. *Ако ξ и η са непрекъснати и независими, имаме* $\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi) + \mathrm{E}(\eta)$.

Доказателство. От твърдение 5 знаем, че $\xi+\eta$ също има непрекъснато разпределение и плътността ѝ е конволюция на плътностите на ξ и η. Тогава от теоремата на Фубини имаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\xi + \eta) &= \int_{\mathbb{R}} x f_{\xi+\eta}(x)dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} x \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x - t)f_\eta(t)dt\;dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x - t)dx\right)f_\eta(t)dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} (x - t + t)f_\xi(x - t)d(x - t)\right)f_\eta(t)dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} (x - t)f_\xi(x - t)d(x - t) + t\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x - t)d(x - t)\right)f_\eta(t)dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{E}(\xi) + t)f_\eta(t)dt = \\
&= \mathrm{E}(\xi)\int_{\mathbb{R}} f_\eta(t)dt + \int_{\mathbb{R}} t f_\eta(t)dt = \\
&= \mathrm{E}(\xi) + \mathrm{E}(\eta).
\end{aligned}$$

$\square$

Твърдение 11. *Нека ξ е непрекъсната случайна величина с крайно очакване. Нека $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е монотонна. Тогава $\psi(\xi)$ е непрекъсната случайна и е изпълнено*

$$\mathrm{E}(\psi(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f_\xi(x) dx.$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\psi(\xi)) &= \int_{\mathbb{R}} x f_{\psi(\xi)}(x) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\, \mathrm{P}(x \le \psi(\xi) \le x + dx) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\, \mathrm{P}(\psi^{-1}(x) \le \xi \le \psi^{-1}(x + dx)) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\big(F_\xi(\psi^{-1}(x + dx)) - F_\xi(\psi^{-1}(x))\big) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(\psi^{-1}(x)) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f_\xi(x) d\psi(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f_\xi(x) \psi'(x) dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Доказаните в твърдения 9 to 11 свойства на очакването значително опростяват работата с него.

Определение 12. **Ковариация** на случайните величини ξ и η наричаме

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) \coloneqq \mathrm{E}((\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta)).$$

Дисперсия или **вариация** на случайната величина ξ наричаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\xi) \coloneqq \mathrm{cov}(\xi, \xi) = \mathrm{E}\big((\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2\big) &= \\
= \mathrm{E}(\xi^2 - 2\xi\,\mathrm{E}\,\xi + \mathrm{E}(\xi)^2) &= \\
= \mathrm{E}(\xi^2) - 2\mathrm{E}(\xi)^2 + \mathrm{E}(\xi)^2 &= \\
= \mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi)^2.&
\end{aligned}$$

Корелация на ξ и η наричаме

$$(\xi, \eta) \coloneqq \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{var}(\xi)\,\mathrm{var}(\eta)}}.$$

От неравенството на Коши-Буняковски-Шварц следва, че $|(\xi, \eta)| \leq 1$.

Числото $\mathrm{E}(\xi^n)$ наричаме n-ти **момент** на ξ, а $\mathrm{E}\big((\xi - \mathrm{E}\,\xi)^n\big)$ наричаме n-ти **централен момент** на ξ.

Очакването всъщност е просто първият момент, а дисперсията - вторият централен момент. Коренът на дисперсията се нарича **стандартно отклонение** и често се бележи със σ_ξ.

Две случайни величини се наричат **некорелирани** или **ортогонални**, ако ковариацията им е 0, защото ковариацията играе ролята на скаларно произведение в пространството L^2 от (всички, не непременно непрекъснати) случайни величини с краен втори момент.

Случайни величини със стандартно отклонение единица наричаме **нормирани**, тъй като стандартно отклонение играе ролята на норма в L^2.

Твърдение 13. *Ако две случайни величини са независими и имат крайно очакване, те са ортогонални.*

Доказателство. Нека ξ и η са независими и имат крайни очаквания съответно μ и η. Тогава

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}((\xi - \mu)(\eta - \nu)) = \mathrm{E}(\xi - \mu)\,\mathrm{E}(\eta - \nu) = (\mu - \mu)(\nu - \nu) = 0 \cdot 0 = 0.$$

□

Твърдение 14. *Ако* $\mathrm{E}(\xi^n)$ *съществува, съществуват и моментите от по-нисък ред.*

Доказателство. Първо да забележим, че за $y \in (0,1)$ имаме $\mathrm{P}(\xi \leq x)^y < \mathrm{P}(\xi \leq x)$. Ще докажем, че $\mathrm{E}(|\xi|^{n-1})$ съществува. Тъй като вероятностната мярка е нормирана, можем да приложим неравенството на Йенсен и да получим:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|\xi|^{n-1}) \leq \mathrm{E}(|\xi|^{n-1})^{\frac{n}{n-1}} &= \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |x_k|^{n-1} f_\xi(x)dx\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(|x_k|^{n-1} f_\xi(x)dx\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(|x_k|^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} f_\xi(x)dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} |x_k|^n f_\xi(x)dx = \mathrm{E}(|\xi|^n).
\end{aligned}$$

□

Определение 15. Ако една случайна величина има крайна дисперсия, можем да я **стандартизираме**, разглеждайки вместо нея

$$\hat{\xi} = \frac{\xi - \mathrm{E}(\xi)}{\sqrt{\operatorname{var}(\xi)}}.$$

Твърдение 16. *Стандартизираните случайни величини са винаги центрирани и нормирани.*

Доказателство. Ако ξ е произволна случайна величина с крайна дисперсия, имаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\xi}) &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}(\xi)}}\,\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi) = 0 \\
\mathrm{var}(\hat{\xi}) &= \frac{1}{\mathrm{var}(\xi)}\,\mathrm{E}([\xi - \mathrm{E}\,\xi - \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)]^2) = 0 = \frac{1}{\mathrm{var}(\xi)}\,\mathrm{E}((\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2) = \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\mathrm{var}(\xi)} = 1.
\end{aligned}$$

□

1.4. Пораждащи моментите и характеристични функции

Определение 17. **Пораждаща моментите функция** на ξ наричаме

$$\mathrm{MGF}_\xi(t) \coloneqq \mathrm{E}(e^{t\xi}).$$

Характеристична функция на ξ наричаме

$$\varphi_\xi(t) \coloneqq \mathrm{E}(e^{it\xi}).$$

Изпълнено е $\varphi_\xi(t) = \mathrm{MGF}_\xi(it)$.

Забележка 18. Не сме дефинирали очакване от комплексна случайна величина, но теоретичната обосновка идва от формулите на Ойлер:

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{E}(e^{it\xi}) = \mathrm{E}(\cos(t\xi) + i\sin(t\xi)) = \mathrm{E}(\cos(t\xi)) + i\,\mathrm{E}(\sin(t\xi)).$$

Забележка 19. Дефинициите за моменти и функции от очакването се пренасят без изменение за случайни величини, които не са непрекъснати.

Теорема 20 (Свойства на пораждащите моментите функции)**.** *Нека ξ и η са независими непрекъснати случайни величини.*

За пораждащите моментите функции MGF_ξ и MGF_η са изпълнени следните свойства

1. *В общия случай пораждащата моментите функция съществува само в 0. Ако тя съществува в околност на 0, то тя е гладка в тази околност, съществуват всички моменти и е изпълнено $\mathrm{E}(\xi^m) = \mathrm{MGF}_\xi^{(m)}(0)$ за $m = 1, 2, \ldots$*

2. *Ако пораждащите моментите функции на ξ, η и $\xi + \eta$ съществуват в точка $t \in \mathbb{R}$, имаме*
$$\mathrm{MGF}_{\xi+\eta}(t) = \mathrm{MGF}_\xi(t)\,\mathrm{MGF}_\eta(t).$$

3. *Ако MGF_ξ и MGF_η имат обща дефиниционна област, различна от $\{0\}$, в която те съвпадат, то ξ и η имат еднакво разпределение.*

Доказателство.

1. Пораждащата моментите функция винаги съществува в 0, тъй като $\mathrm{MGF}_\xi(0) = \mathrm{E}(e^{0\xi}) = \mathrm{E}(1) = 1$.

   Нека MGF_ξ съществува в околност U на 0. Без ограничение на общността ще считаме, че U е ограничена. Полагаме $\tau := \min(-\inf U, \sup_U)$. Тогава сумата $\mathrm{MGF}_\xi(-\tau) + \mathrm{MGF}_\xi(\tau)$ е крайна. Развиваме тази сума в ред на Тейлър:

$$\mathrm{MGF}_\xi(-\tau) + \mathrm{MGF}_\xi(\tau) = \mathrm{E}(e^{-\tau\xi} + e^{\tau\xi}) = \mathrm{E}\left(2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!}\tau^{2k}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{E}(\xi^{2k})}{(2k)!}\tau^{2k}.$$

   Внасянето на очакването е възможно, защото всички членове на реда са неотрицателни. От $\mathrm{E}(\xi^{2m}) = \mathrm{E}(|\xi^{2m}|)$ се вижда, че всички четни моменти съществуват. Според твърдение 14 съществуват и всички нечетни моменти.

   При фиксирано $n = 1, 2, \dots$ за някаква околност на 0, съдържаща се в U, за някакво $\alpha \in [0, 1]$ теоремата на Тейлър, приложена към експоненциалната функция, ни дава

$$\begin{aligned}\mathrm{MGF}_\xi(t) = \mathrm{E}(e^{t\xi}) &= \\ &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\xi^k}{k!}t^k + \frac{(\alpha\xi)^{(n+1)}e^{\alpha t\xi}}{(n+1)!}t^{n+1}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k\,\mathrm{E}(\xi^k)}{k!}t^k + \frac{\alpha^{(n+1)}\,\mathrm{E}(h(t))}{(n+1)!}t^{n+1},\end{aligned}$$

   където $h(t) := \xi^{(n+1)}e^{\alpha t\xi} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ поточково.

   Получихме полином на Тейлър за функцията $\mathrm{MGF}_\xi(t)$. Тогава $\mathrm{MGF}_\xi(t)$ има n-та производна, при това $\mathrm{MGF}_\xi^{(n)}(0) = \mathrm{E}(\xi^n)$.

   Следователно $\mathrm{MGF}_\xi(t)$ има n-та производна, при това

$$\begin{aligned}\mathrm{MGF}_\xi^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{E}(\xi^k)}{k!}k!\cdot 0 + \frac{\mathrm{E}(\xi^n)}{n!}n! + \frac{\alpha^{(n+1)}\,\mathrm{E}(\xi^{(n+1)}e^{\alpha t\xi})}{(n+1)!}(n+1)!t = \\ &= \mathrm{E}(\xi^n) + \alpha^{(n+1)}\,\mathrm{E}(\xi^{(n+1)}e^{\alpha t\xi})t.\end{aligned}$$

   В частност, $\mathrm{MGF}_\xi^{(n)}(0) = \mathrm{E}(\xi^n)$.

2. Ако пораждащите моментите функции съществуват в $t \in \mathbb{R}$, тъй като ξ и η са независими, случайните величини $e^{t\xi}$ и $e^{t\eta}$ също са независими и

$$\mathrm{MGF}_{\xi+\eta}(t) = \mathrm{E}(e^{t(\xi+\eta)}) = \mathrm{E}(e^{t\xi}e^{t\eta}) = \mathrm{E}(e^{t\xi})\,\mathrm{E}(e^{t\eta}) = \mathrm{MGF}_\xi(t)\,\mathrm{MGF}_\eta(t).$$

3. Ако функциите MGF_ξ и MGF_η съвпадат в областта си на дефиниция U, за $t \in U$ имаме

$$\mathrm{MGF}_\xi(t) - \mathrm{MGF}_\eta(t) = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_\xi(x) - \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_\eta(x) dx = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{tx} (f_\xi(x) - f_\eta(x)) dx = 0.$$

Последното равенство е изпълнено за всяко $t \in U$ точно когато $f_\xi(x) = f_\eta(x)$ почти за всяко $x \in \mathbb{R}$. Следователно ξ и η имат еднакво разпределение.

□

Теорема 21 (Свойства на характеристичните функции)**.** *Нека ξ и η са независими дискретни случайни величини.*

За характеристичните функции φ_ξ и φ_η са изпълнени следните свойства

1. *φ_ξ съществува и е равномерно непрекъсната навсякъде върху реалната права.*
2. *Ако ξ^n има краен n-ти момент, е изпълнено $\mathrm{E}(\xi^m) = i^{-m}\varphi_\xi^{(m)}(0)$ за $m = 1, \dots, n$.*
3. *За всяко $t \in \mathbb{R}$ имаме*
$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t).$$
4. *Ако φ_ξ и φ_η съвпадат, то ξ и η имат еднакво разпределение.*

Доказателство.

1. За да докажем, че φ_ξ е дефинирана навсякъде в $\mathbb{R}$, оценяваме отгоре абсолютната стойност на φ_ξ за $t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_\xi(t)| = |\mathrm{E}(e^{it\xi})| = |\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_\xi(x) dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}| f_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x) dx = 1.$$

За да докажем и равномерната непрекъснатост в $\mathbb{R}$, първо оценяваме отгоре израза

$$\begin{aligned}
|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| &= |\mathrm{E}(e^{i(t+h)\xi}) - \mathrm{E}(e^{it\xi})| = \\
&= |\mathrm{E}(e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1))| = \\
&= |\int_{\mathbb{R}} e^{itx}(e^{ihx} - 1) f_\xi(x) dx| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}||(e^{ihx} - 1)| f_\xi(x) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} |(e^{ihx} - 1)| f_\xi(x) dx.
\end{aligned}$$

Ще използваме, че за всяко $z \in \mathbb{C}$ неравенството на Йенсен ни дава

$$|e^{iz} - 1| = |i \int_0^z e^{it} dt| \leq \int_0^{|z|} |e^{it}| dt = \int_0^{|z|} dt = |z|.$$

Фиксираме $\varepsilon > 0$. Избираме константа $c_\varepsilon > 0$, такава че $\mathrm{P}(|\xi| > c_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$. Разглеждаме две множества: $A := (-c_\varepsilon, c_\varepsilon)$ и $B := \mathbb{R} \setminus A$.

За $x \in A$ имаме

$$\int_A |e^{ihx} - 1| f_\xi(x) dx \leq \int_A |hx| f_\xi(x) dx \leq c_\varepsilon |h| \int_A f_\xi(x) dx \leq c_\varepsilon |h|.$$

За $x \in B$ имаме

$$\int_B |e^{ihx} - 1| f_\xi(x) dx \leq \int_B \big(|e^{ihx}| + 1\big) f_\xi(x) dx \leq 2 \int_B f_\xi(x) dx < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

За целия интеграл тогава получаваме

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| f_\xi(x) dx < c_\varepsilon |h| + 2\varepsilon.$$

Полагаме $\delta = \frac{\varepsilon}{3c_\varepsilon}$.

Тогава за $|h| < \delta$ имаме

$$|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| < c_\varepsilon |h| + \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Числото δ зависи само от ε, следователно $\varphi_\xi(t)$ е равномерно непрекъсната върху цялата реална права.

2. Нека съществува моментът $\mathrm{E}\,\xi^n$. Тогава съществуват и моментите от по-нисък ред и в някаква околност на 0 за някакво $\alpha \in [0,1]$ теоремата на Тейлър, приложена към експоненциалната функция, ни дава

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) = \mathrm{E}(e^{it\xi}) &= \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{i^k \xi^k}{k!} t^k + \frac{(\alpha i \xi)^{(n+1)} e^{\alpha i t \xi}}{(n+1)!} t^{n+1} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k\, \mathrm{E}(\xi^k)}{k!} t^k + \frac{(\alpha i)^{(n+1)}\, \mathrm{E}(h(t))}{(n+1)!} t^{n+1},
\end{aligned}$$

където $h(t) := \xi^{(n+1)} e^{\alpha i t \xi} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ поточково.

Получихме полином на Тейлър за функцията $\varphi_\xi(t)$. Тогава $\varphi_\xi(t)$ има n-та производна, при това $\varphi_\xi^{(n)}(0) = i^n\, \mathrm{E}(\xi^n)$.

3. Тъй като ξ и η са независими, за произволно $t \in \mathbb{R}$ величините $e^{t\xi}$ и $e^{t\eta}$ са независими и

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \mathrm{E}(e^{it(\xi+\eta)}) = \mathrm{E}(e^{it\xi}e^{it\eta}) = \mathrm{E}(e^{it\xi})\,\mathrm{E}(e^{it\eta}) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t).$$

4. Ако функциите MGF_ξ и MGF_η съвпадат, имаме

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(t) - \varphi_\eta(t) = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_\xi(x) - \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_\eta(x)dx = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} e^{itx}(f_\xi(x) - f_\eta(x))dx = 0. \end{aligned}$$

   Последното равенство е изпълнено за всяко $t \in \mathbb{R}$ точно когато $f_\xi(x) = f_\eta(x)$ почти за всяко $x \in \mathbb{R}$. Следователно ξ и η имат еднакво разпределение.

□

1.5. Често срещани непрекъснати разпределения

1.5.1. Нормално разпределение

Определение 22. Казваме, че случайната величина ξ има **нормално разпределение** с очакване $\mu \in \mathbb{R}$ и стандартно отклонение $\sigma > 0$ и пишем $\xi \in \mathbf{No}(\mu, \sigma^2)$, ако плътността има вида

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Дефиницията на плътност е коректна, тъй като $f_\xi(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и от

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

получаваме

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Разпределението на ξ наричаме **стандартно нормално**, ако $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Обикновено плътността и функцията на разпределение на стандартното нормално разпределение се бележат съответно с $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$.

Поради различните варианти на централната гранична теорема, нормалното разпределение е гранично за средно аритметичното на независими случайни величини от много други разпределения. Това го прави най-широко приложимото вероятностно разпределение. На практика нормалното разпределение се използва за приближено описание на всякакъв род данни - от анализ на резултати от социологически проучвания до моделиране на финансови пазари или термална радиация.

Нека $\eta \in \mathbf{No}(\mu, \sigma^2)$ и $\xi \coloneqq \frac{\eta-\mu}{\sigma}$. Тъй като $\eta = \sigma\xi + \mu$, от твърдение 6 получаваме, че плътността на ξ е

$$f_\xi(x) = \sigma \cdot f_\eta(\sigma x + \mu) = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma x+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x).$$

Получихме, че $\xi \in \mathbf{No}(0,1)$ има стандартно нормално разпределение. Затова е достатъчно да намерим пораждащата моментите функция, очакването и дисперсията само на стандартното нормално разпределение:

$$\begin{aligned}
\mathrm{MGF}_\xi(t) &= \mathrm{E}(e^{t\xi}) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx-\frac{x^2}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2)+\frac{1}{2}t^2} dx = \\
&= \frac{e^{t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}t^2} d\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right) = \\
&= \boxed{e^{\frac{t^2}{2}}}, \\
\mathrm{MGF}'_\xi(t) &= \boxed{te^{\frac{t^2}{2}}}, \\
\mathrm{MGF}''_\xi(t) &= 1 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} + t \cdot te^{\frac{t^2}{2}} = \\
&= \boxed{(1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}} \\
\mathrm{E}(\xi) &= \mathrm{MGF}'_\xi(0) = \boxed{0}, \\
\mathrm{E}(\xi^2) &= \mathrm{MGF}''_\xi(0) = \boxed{1} \\
\mathrm{var}(\xi) &= \mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi)^2 = 1 - 0 = \boxed{1}.
\end{aligned}$$

Тогава за оригиналната случайна величина $\eta \in \mathbf{No}(\mu, \sigma^2)$ имаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\eta) &= \mathrm{E}(\sigma\xi + \mu) = \sigma\,\mathrm{E}(\eta) + \mu = \boxed{\mu}, \\
\mathrm{var}(\eta) &= \mathrm{var}(\sigma\xi + \mu) = \sigma^2\,\mathrm{var}(\xi) = \boxed{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Получихме, че произволна нормална случайна величина $\eta \in \mathbf{No}(\mu, \sigma^2)$ има очакване μ и дисперсия σ^2, които отговарят на съответните параметри. Стандартизираните нормални случайни величини тогава винаги имат стандартно нормално разпределение.

За пораждащата моментите функция на η получаваме

$$\mathrm{MGF}_\eta(t) = \mathrm{E}(e^{t\eta}) = \mathrm{E}(e^{t(\sigma\xi+\mu)}) = \mathrm{E}(e^{(\sigma t)\xi})e^{t\mu} = e^{t\mu}\,\mathrm{MGF}_\xi(\sigma t) = \boxed{e^{t\mu}e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}.$$

Оттук директно следва

Твърдение 23.

1. *Ако* $\xi_k \in \mathbf{No}(\mu_k, \sigma_k^2), k = 1, \dots, n$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \in \mathbf{No}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right).$$

2. *Ако* $\xi \in \mathbf{No}(\mu, \sigma^2)$ *и* $c \in \mathbb{R}$, *тогава*

$$c\xi \in \mathbf{No}(c\mu, c^2\sigma^2).$$

Ако $\xi_1, \dots, \xi_n$ са стандартни нормални, сумата им има разпределение $\mathbf{No}(0, n)$. За да бъде сумата стандартна нормална, стандартизираме чрез

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

При $n \to \infty$ това свойство се обобщава за различни по рода си разпределения, както може да бъде видяно от следните теореми

Теорема 24 (Централна гранична теорема за еднакво разпределени случайни величини)**.** *Нека* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *са независими и еднакво разпределени случайни величини с крайна дисперсия. Без ограничение на общността считаме, че те са стандартизирани.*

Тогава случайната величина

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

при $n \to \infty$ *клони по вероятност към стандартно нормално разпределение.*

Теорема 25 (Централна гранична теорема с условие на Ляпунов)**.** *Нека* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *са независими случайни величини с крайни дисперсии. Без ограничение на общността считаме, че те са стандартизирани. Ако за някое* $\delta > 2$ *е изпълнено условието на Ляпунов,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(|\xi_k|^\delta\right) = 0,$$

тогава случайната величина

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

при $n \to \infty$ *клони по вероятност към стандартно нормално разпределение.*

1.5.2. Равномерно разпределение

Определение 26. Казваме, че случайната величина ξ е **равномерно разпределена** в интервала $[a, b]$ пишем $\xi \in \mathbf{Uniform}(a, b)$, ако плътността има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Дефиницията на плътност е коректна, тъй като за $x \in [a, b]$ е в сила $f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} > 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1.$$

Равномерното разпределение има две основни приложения:

1. За Монте-Карло симулации на непрекъснати разпределения, чиято функция на разпределение има проста за пресмятане обратна.
2. За моделиране експерименти с континуум от възможни изходи, за които предполагаме, че са равновероятни. Например попадението на материална точка в даден паралелепипед.

За функцията на разпределение, пораждащата моментите функция, очакването и дисперсията на $\xi \in \mathbf{Uniform}(a, b)$ имаме

$$\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^x f_\xi(x)dx = \\
&= \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x dx = \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ \dfrac{b-a}{b-a} = 1, & x \ge b \end{cases} = \\
&= \frac{\max(a, \min(b, x)) - a}{b-a}. \\
\mathrm{MGF}_\xi(t) &= \mathrm{E}(e^{t\xi}) = \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx = \\
&= \boxed{\begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, & t \ne 0 \end{cases}} \\
\mathrm{E}(\xi) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \\
&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \\
&= \boxed{\frac{a+b}{2}}, \\
\mathrm{E}(\xi^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \\
&= \frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{3(b-a)} = \\
&= \boxed{\frac{b^2+ba+a^2}{3}}, \\
\mathrm{var}(\xi) &= \mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi)^2 = \\
&= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{4(b^2+ba+a^2)}{12} - \frac{3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \\
&= \frac{b^2-2ba+a^2}{12} = \\
&= \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.
\end{aligned}
$$

Вж. също задача 2.

1.5.3. Експоненциално разпределение

Определение 27. Казваме, че случайната величина ξ има **експоненциално разпределение** със степен $\lambda > 0$ и пишем $\xi \in \mathbf{Exp}(\lambda)$, ако плътността има вида

$$
f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}
$$

Дефиницията на плътност е коректна, тъй като $f_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ и

$$
\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -(\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} - 1) = 1.
$$

Понякога се използва алтернативна параметризация, където плътността има вида

$$
f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}
$$

Експоненциалното разпределение моделира време на изчакване. Това включва време за чакане на градски транспорт, време до настъпване на застрахователно събитие или време за полуразпад на радиоактивно вещество. Предимство на експоненциалното разпределение за тези модели е свойството липса на памет, описано в теорема 28.

За функцията на разпределение, пораждащата моментите функция, очакването и дисперсията на $\xi \in \mathbf{Exp}(\lambda)$ имаме

$$\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)dy = \\
&= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda y}dy = \\
&= -\int_{0}^{x} e^{-\lambda y}d(-\lambda y) = \\
&= -(e^{-\lambda x} - 1) = \\
&= \boxed{1 - e^{-\lambda x}}, \\
\mathrm{MGF}_\xi(t) &= \mathrm{E}(e^{t\xi}) = \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} \int_{0}^{\infty} e^{x(t-\lambda)}d[x(t-\lambda)] = \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda}(\lim_{x\to\infty} e^{x(t-\lambda)} - 1) = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t} = \\
&= \left(\frac{\lambda - t}{\lambda}\right)^{-1} = \\
&= \boxed{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, t < \lambda}, \\
\mathrm{MGF}'_\xi(t) &= \boxed{\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-2}, t < \lambda}, \\
\mathrm{MGF}''_\xi(t) &= \boxed{\frac{2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-3}, t < \lambda}, \\
\mathrm{E}(\xi) &= \mathrm{MGF}'_\xi(0) = \boxed{\frac{1}{\lambda}}, \\
\mathrm{E}(\xi^2) &= \mathrm{MGF}''_\xi(0) = \boxed{\frac{2}{\lambda^2}}, \\
\mathrm{var}(\xi) &= \mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi)^2 = \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}.$$

Теорема 28 (Липса на памет). *За* $\xi \in \mathbf{Exp}(\lambda)$ *и* $x, y > 0$ *е изпълнено*

$$\mathrm{P}(\xi > x + y \mid \xi > x) = \mathrm{P}(\xi > y).$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi > x + y \mid \xi > x) &= \frac{\mathrm{P}(\xi > x + y, \xi > x)}{\mathrm{P}(\xi > x)} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(\xi > x + y)}{\mathrm{P}(\xi > x)} = \\
&= \frac{1 - F_\xi(x + y)}{1 - F_\xi(x)} = \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = \\
&= e^{-\lambda y} = \\
&= 1 - F_\xi(y) = \\
&= \mathrm{P}(\xi > y).
\end{aligned}$$

□

Вж. също задача 1.

1.5.4. Гама разпределение

Определение 29. Казваме, че случайната величина ξ има **гама разпределение** с мащаб $\alpha > 0$ и степен $\beta > 0$ и пишем $\xi \in \mathbf{Gamma}(\alpha, \beta)$, ако плътността има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

където $\Gamma(x)$ е Γ-функцията на Ойлер.

Дефиницията на плътност е коректна, тъй като $f_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ и

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x} d(\beta x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1.$$

Понякога се използва алтернативна параметризация с $k = \alpha$ и $\theta = \beta^{-1}$, където плътността има вида

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{-k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Гама разпределението обобщава други често срещани разпределения, тъй като като $\mathbf{Gamma}(1, \lambda) = \mathbf{Exp}(\lambda)$ и $\mathbf{Gamma}(n/2, 1/2) = {}^{2}(n)$. Като такова то наследява и разширява техни приложения, например за моделиране на време между $n > 1$ последователни нервни импулса, но гама разпределението има и самостоятелни приложения, например за статистически анализ на асиметрично-разпределени данни.

Фиксираме $\xi \in \mathbf{Gamma}(\alpha, \beta)$. За пораждащата моментите функция, очакването и дисперсията имаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{MGF}_{\xi}(t) &= \mathrm{E}(e^{t\xi}) = \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \\
&= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx = \\
&= \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta-t)\cdot\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[(\beta-t)x]^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{\alpha-1}} e^{-(\beta-t)x} d[(\beta-t)x] = \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} [(\beta-t)x]^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} d[(\beta-t)x] = \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \\
&= \left(\frac{\beta-t}{\beta}\right)^{-\alpha} = \\
&= \boxed{\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}, t < \beta}, \\
\mathrm{MGF}'_{\xi}(t) &= \boxed{\frac{\alpha}{\beta}\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha-1}, t < \beta}, \\
\mathrm{MGF}''_{\xi}(t) &= \boxed{\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha-2}, t < \beta}, \\
\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{MGF}'_{\xi}(0) &= \boxed{\frac{\alpha}{\beta}}, \\
\mathrm{E}(\xi^2) = \mathrm{MGF}''_{\xi}(0) &= \boxed{\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}}, \\
\mathrm{var}(\xi) = \mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi)^2 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

Твърдение 30.

1. *Ако* $\gamma_k \in \mathbf{Gamma}(\alpha_k, \beta), k = 1, \dots, n$*, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \in \mathbf{Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \beta\right).$$

2. *Ако $\gamma \in \mathbf{Gamma}(\alpha, \beta)$ и $c \in \mathbb{R}$, тогава*

$$c\gamma \in \mathbf{Gamma}\left(\alpha, \frac{\beta}{c}\right).$$

Доказателство.

1. Следва директно от вида на пораждащата моментите функция.

2. Използвайки твърдение 6, намираме плътността за $x \geq 0$

$$f_{c\xi}(x) = \frac{1}{c} f_\xi\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\beta^\alpha \left(\frac{x}{c}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{c}x}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{\beta}{c}\right)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{c}x}}{\Gamma(\alpha)},$$

която е плътност на $\mathbf{Gamma}\left(\alpha, \frac{\beta}{c}\right)$-разпределена случайна величина.

□

Вж. също задача 1.

2. Задачи

В конспекта не е посочен списък с възможни задачи, затова съм включил разни задачи, давани на държавен изпит.

Задача 1 (*Задачи за ДИ за спец. статистика*)**.** *Нека $\xi \in \mathbf{Exp}(\lambda), \lambda > 0$, т.е. нейната вероятностна плътност е $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$*

а) *Намерете разпределението на $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$, където η_1 и η_2 са независими и еднакво разпределени случайни величини, както ξ.*

б) *Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ са независими наблюдения над ξ. Докажете, че статистиката*

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}$$

е ефективна оценка за параметъра λ.

в) *Намерете критична област за проверка на хипотези:*

$$\begin{cases} H_0 : & \lambda = 2 \\ H_1 : & \lambda = 3 \end{cases}$$

с ниво на значимост $\alpha = 0.05$ по $n = 10$ независими наблюдения над ξ.

Забележка 31. За тази задача е дадена таблица за ^{2} за квантилите 2.5%, 5.0%, 10.0%, 90.0%, 95.0% и 97.5% от 1 до 25 степени на свобода.

Решение. В параграф 1.5.3 вече описахме експоненциалното разпределение, но с друга параметризация. Тук ще използваме намерената в параграф 1.5.3 функция на разпределение, но заменяйки параметъра с реципрочния му, т.е.

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Също така ще използваме наготово, че $\mathrm{E}(\xi) = \lambda$ и $\mathrm{var}(\xi) = \lambda^2$.

а) Независимо от разпределенията на ξ_1 и ξ_2, за $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$ имаме

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathrm{P}(\min(\xi_1, \xi_2) \le x) = \\ &= 1 - \mathrm{P}(\min(\xi_1, \xi_2) > x) = \\ &= 1 - \mathrm{P}(\xi_1 > x, \xi_2 > x) = \\ &= 1 - \mathrm{P}(\xi_1 > x)\,\mathrm{P}(\xi_2 > x) = \\ &= 1 - (1 - \mathrm{P}(\xi_1 \le x))(1 - \mathrm{P}(\xi_2 \le x)) = \\ &= 1 - (1 - F_\xi(x))^2. \end{aligned}$$

За експоненциалното разпределение получаваме

$$F_\eta(x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^2 = 1 - e^{-\frac{2x}{\lambda}},$$

т.е. $\eta \in \mathbf{Exp}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

б) Да отбележим, че оценката $\overline{\xi}_n$ е неизместена, тъй като

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda.$$

За да докажем, че ξ е ефективна, остава да намерим границата на Рао-Крамер и да я сравним с $\mathrm{var}(\overline{\xi}_n)$. Поради независимостта на $\xi_1, \dots, \xi_n$ е достатъчно да пресметнем информацията на Фишер $\mathcal{I}_\xi(\lambda)$ за параметъра λ на ξ и да я сравним с $\mathrm{var}(\xi) = \lambda^2$.

$$\begin{aligned} \ln f_\xi(x) &= \ln\left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}\right) = -\ln\lambda - \frac{x}{\lambda}, \\ \frac{\partial \ln f_\xi(x)}{\partial\lambda} &= -\frac{1}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} = \frac{x-\lambda}{\lambda^2}, \\ \mathcal{I}_\xi(\lambda) &= \mathrm{E}\left(\left(\frac{\partial \ln f_\xi(\xi \mid \lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\left(\frac{\xi - \lambda}{\lambda^2}\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda^4}\,\mathrm{E}\left((\xi-\lambda)^2\right) = \\ &= \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\lambda^4} = \frac{\lambda^2}{\lambda^4} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Тъй като $\operatorname{var}(\xi) = \frac{1}{\mathcal{I}_{\xi}(\lambda)}$, заключаваме, че оценката $\overline{\xi}_n$ достига границата на Рао-Крамер и следователно тя е ефективна.

в) Търсим оптимална критична област с помощта на лемата на Нейман-Пирсън. Първо намираме логаритмичното отношение на правдоподобие само за ξ:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{f_{\xi}(x \mid \lambda = 3)}{f_{\xi}(x \mid \lambda = 5)}\right) &= \ln f_{\xi}(x \mid \lambda = 3) - \ln f_{\xi}(x \mid \lambda = 5) = \\ &= -\ln 3 - \frac{x}{3} + \ln 5 + \frac{x}{5} = \\ &= \ln 5 - \ln 3 - \frac{2}{15}x.\end{aligned}$$

Тогава логаритмичното отношение на правдоподобие за цялата извадка ще бъде

$$\ln\left(\frac{L(x_1, \dots, x_n \mid \lambda = 3)}{L(x_1, \dots, x_n \mid \lambda = 5)}\right) = n\left(\ln 5 - \ln 3 - \frac{2}{15}\overline{x}_n\right).$$

Уравнението

$$n\left(\ln 5 - \ln 3 - \frac{2}{15}\overline{\xi}_n\right) \geq c_0$$

е еквивалентно на по-простото уравнение $\overline{\xi}_n \geq c$ за подходяща константа c. В такъв случай задачата се свежда до намиране на α-квантил c за $\overline{\xi}_n$, за който

$$\mathrm{P}\left(\overline{\xi}_n \geq c \mid \lambda = 3\right) = \alpha \iff \mathrm{P}\left(\overline{\xi}_n \leq c \mid \lambda = 3\right) = 1 - \alpha.$$

Тъй като ни е дадена единствено таблица за ^{2} разпределение, ще използваме връзките

$$^2(n) = \mathbf{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \mathbf{Exp}(\lambda) = \mathbf{Gamma}\left(1, \frac{1}{\lambda}\right),$$

където **Exp** е параметризирано както в тази задача, а **Gamma**-както в параграф 1.5.4.

От твърдение 30 имаме

$$\overline{\xi}_n \in \mathbf{Gamma}\left(n, \frac{n}{\lambda}\right) \qquad \frac{2n}{\lambda}\overline{\xi}_n \in \mathbf{Gamma}\left(n, \frac{1}{2}\right) = {}^2(2n).$$

От дадената таблица намираме търсената константа c,

$$\mathrm{P}(\overline{\xi}_n \leq c \mid \lambda = 3) = 1 - \alpha = 0.95 \iff \frac{2 \cdot 10}{3}c = \frac{20}{3}c \approx 31.41. \iff c \approx 4.71.$$

Оптималната критична област е

$$\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq c \approx 4.71\right\}.$$

$\square$

Задача 2 (*Задачи за ДИ за спец. статистика*). *Нека случайната величина X е равномерно разпределена в $(0, a)$, а Y е равномерно разпределена в $(0, b)$.*

а) Ако X и Y са независими, намерете математическото очакване и дисперсията на $2X - 3Y$.

б) Ако X и Y са такива, че корелационният им коефициент $(X, Y) = 0.8$, намерете математическото очакване и дисперсията на $2X - 3Y$.

в) Ако X и Y са независими случайни величини, намерете вероятността $X - Y < 2$.

Решение.

а) В параграф 1.5.2 сме намерили, че за $\xi \in \mathbf{Uniform}(\alpha, \beta)$ имаме $\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\mathrm{var}(\xi) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$. Тогава

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a}{2}, \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{a^2}{12},$$
$$\mathrm{E}(Y) = \frac{b}{2}, \qquad \mathrm{var}(Y) = \frac{b^2}{12}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(2X - 3Y) &= 2\,\mathrm{E}(X) - 3\,\mathrm{E}(Y) = \boxed{\frac{2a - 3b}{2}}, \\ \mathrm{var}(2X - 3Y) &= 4\,\mathrm{var}(X) + 2 \cdot 6\,\mathrm{cov}(X, Y) + 9\,\mathrm{var}(Y) = \\ &= 4\,\mathrm{var}(X) + 9\,\mathrm{var}(Y) = \\ &= \boxed{\frac{4a^2 + 9b^2}{12}}. \end{aligned}$$

б) Независимо от това дали X и Y са корелирани или не, очакването на техните линейни комбинации не се променя. За дисперсията на $2X - 3Y$ имаме

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(2X - 3Y) &= 4\,\mathrm{var}(X) + 2 \cdot 6\,\mathrm{cov}(X, Y) + 9\,\mathrm{var}(Y) = \\ &= 4\,\mathrm{var}(X) + 12 \cdot \frac{4}{5} + 9\,\mathrm{var}(Y) = \\ &= \boxed{\frac{4a^2 + 9b^2}{12} + \frac{48}{5}}. \end{aligned}$$

в) Ще използваме наготово отпараграф 1.5.2 функцията на разпределение

$$F_X(x) = \frac{\max(0, \min(a, x))}{a}.$$

Ако X и Y са независими, използвайки формулата за пълната вероятност, пресмятаме директно

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X - Y < 2) &= \mathrm{P}(X < Y + 2) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} F_X(y+2) f_Y(y) dy = \\
&= \int_0^b \frac{\max(0, \min(a, y+2))}{a} \cdot \frac{1}{b} dy = \\
&= \frac{1}{ab} \int_0^b \min(a, y+2) dy.
\end{aligned}$$

Разглеждаме три случая:

1) Ако $a < 2$, имаме

$$\mathrm{P}(X - Y < 2) = \frac{1}{ab} \int_0^b a dy = 1.$$

2) Ако $2 \leq a \leq b + 2$, имаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X - Y < 2) &= \frac{1}{ab}\left(\int_0^{a-2} (y+2) dy + \int_{a-2}^b a dy\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\left(\int_0^{a-2} y dy + 2\int_0^{a-2} dy + \int_{a-2}^b a dy\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{2}(a-2)^2 + 2(a-2) + a(b-a+2)\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\left(\frac{a^2}{2} - 2a + 2 + 2a - 4 + ab - a^2 + 2a\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\left(-\frac{a^2}{2} + ab + 2a - 2\right) = \\
&= \frac{-a^2 + 2ab + 4a - 4}{2ab}.
\end{aligned}$$

3) Ако $a > b + 2$, имаме

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X - Y < 2) &= \frac{1}{ab} \int_0^b (y+2) dy = \\
&= \frac{1}{ab}\left(\int_0^b y dy + 2\int_0^b dy\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\left(\frac{b^2}{2} + 2b\right) = \\
&= \frac{b+4}{2a}.
\end{aligned}$$

В крайна сметка получаваме

$$\mathrm{P}(X - Y < 2) = \begin{cases} 1, & a < 2, \\ \dfrac{-a^2 + 2ab + 4a - 4}{2ab}, & 2 \leq a \leq b + 2, \\ \dfrac{b+4}{2a}, & a > b + 2. \end{cases}$$

□

3. Литература

Боровков, Александр Александрович. *Теория вероятностей*. Рус. 3-е изд. Едиториал УРСС, 1999. ISBN: 5901006666.

Димитров, Боян и Николай Янев. *Вероятности и статистика*. 2-е изд. Софтех, 2007.

Задачи за ДИ за спец. статистика. Поправителен изпит. 2011. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/PkgnO0jOEGYtu7N (дата на посещ. 23.06.2019).

Задачи за ДИ за спец. статистика. Редовен изпит. 2016. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/OWBtwZQdIgcnoAS (дата на посещ. 23.06.2019).

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrndOsX (дата на посещ. 24.03.2019).