# Тема 1

https://github.com/v--/se2018

**Уравнение на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.**

Янис Василев

**Оригинал:** 11 юни 2019
**Ревизия:** `7e5ed38` от 28 януари 2024
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

## 1. Теория

Теорията е до голяма степен базирана на Богдан Александров (лекции), Станислав Иванов (упражнения) и Янис Василев (записки), *Записки от лекции и упражнения по аналитична геометрия*.

### 1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Прави в равнината и пространството.
   а) Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина.
   б) Общо уравнение на права в равнината.
   в) Декартово уравнение.
   г) Взаимно положение на две прави.
   д) Нормално уравнение на права.
   е) Разстояние от точка до права.
   ж) Ъгъл между прави.
2. Равнини в пространството.
   а) Общо уравнение на равнина.
   б) Взаимно положение на две равнини.
   в) Нормално уравнение на равнина.
   г) Разстояние от точка до равнина.

3. Криви от втора степен.
   а) Уравнение на окръжност.
   б) Канонични уравнения на елипса, хипербола и парабола.
   в) Фокални свойства на елипса, хипербола и парабола.

### 1.2. Прави в равнината

Нека $K = Oxy$ е афинна координатна система в равнината $A_2$. Считаме, че е зададена единична отсечка за измерване на дължини.

**Определение 1.** Нека $l$ е права в $A_2$, нека са дадени т. $P_0 \in l$ и направляващият за $l$ вектор $v \parallel l$. Очевидно векторът $v$ е ненулев. Нека $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$ и $r = \overrightarrow{OP}$ са радиус-векторите на точките т. $P_0$ и т. $P$ спрямо $K$.

От тъждествата $r - r_0 = \overrightarrow{P_0P} \parallel v \iff P \in l$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R} : v \parallel \lambda v$ следва, че правата $l$ удовлетворява уравнението

$$l : r = r_0 + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R},$$

което наричаме **векторно параметрично уравнение** на $l$ спрямо $K$.

Нека т. $P_0$, т. $P$ и $v$ имат координати $P_0(x_0, y_0)$, $P(x, y)$ и $v(a, b)$ спрямо $K$. Уравненията

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

наричаме **система скаларни параметрични уравнения** на $l$ спрямо $K$.

Изхождайки от горната система, имаме $\lambda ab = b(x - x_0) = a(y - y_0)$, откъдето получаваме уравнението $l : bx + (-a)y + (-x_0 + y_0) = 0$.

**Определение 2.** Нека правата $l$ се задава спрямо $K$ с уравнението $l : Ax + By + C = 0$, където $A, B, C \in \mathbb{R}$, т.е. уравнението е изпълнено за координатите на т. $P(x, y)$ точно когато т. $P \in l$.

Уравнение от този вид наричаме **общо уравнение на правата** $l$ спрямо $K$.

*Забележка* 3. От определението е ясно, че е изпълнено $A \neq 0$ или $B \neq 0$, тъй като в противен случай уравнението е еквивалентно на $l : C = 0$ и, в зависимост от стойността на $C$, уравнението задава или празното множество, или цялата равнина $A_2$.

Вече видяхме, че от всяка система скаларни параметрични уравнение за права $l$ можем да намерим поне едно общо уравнение за $l$. Ще докажем съществуване на общо уравнение за равнина по друг начин.

**Твърдение 4.** *Всяко уравнение от вида $Ax+By+C = 0$, където $A$ и $B$ не са едновременно равни на 0, е уравнение на точно една права спрямо $K$.*

*Доказателство.* Без ограничение на общността допускаме, че $A \neq 0$.

Да забележим, че уравнението има поне едно решение, например $x = -\frac{C}{A}$ и $y = 0$.

Нека е дадена точката $P_0(x_0, y_0)$, чиито координати удовлетворяват уравнението. Нека $v$ е ненулевият вектор с координати $v(B, -A)$. Тогава системата

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda B \\ y = y_0 - \lambda A, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

е система скаларни параметрични уравнения за някаква права $l$. Ще покажем, че тази система е еквивалентна на даденото уравнение.

От една страна, всяко решение на общото уравнение удовлетворява системата, тъй като $C = -Ax_0 - By_0$. Получаваме

$$\begin{aligned} Ax + By + C = 0&, \\ x &= -\frac{C}{A} - \frac{By}{A}, \\ x &= \frac{Ax_0 + By_0}{A} - \frac{By}{A}, \\ x &= x_0 + \frac{y_0 - y}{A}B. \end{aligned}$$

Полагаме $\lambda := \frac{y_0 - y}{A}$, откъдето получаваме

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda B \\ y = y_0 - \lambda A \end{cases}.$$

От друга страна, всяко решение на системата удовлетворява общото уравнение, тъй като

$$A(x_0 + \lambda B) + B(y_0 - \lambda A) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + (\lambda AB - \lambda AB) = 0 + 0 = 0.$$

□

**Определение 5.** Нека правата $l$ има спрямо $K$ общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$. Нека още $l$ не е успоредна на оста $Oy$. Тогава $B \neq 0$ и можем да запишем общото уравнение във вида

$$l : \frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \qquad \sim \qquad l : y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right).$$

Полагаме $k = -\frac{A}{B}$ и $m = -\frac{C}{B}$. Уравнението

$$l : y = kx + m$$

наричаме **декартово уравнение** на $l$ спрямо $K$, а коефициента $k$ наричаме **ъглов коефициент** на $l$ спрямо $K$.

**Определение 6.**

1. **Ъгъл между две пресекателни прави** наричаме по-малкия от двата ъгъла, които те сключват.

   Ако е зададена ориентация, **ориентиран ъгъл между пресекателни прави** наричаме ъгъла, на който трябва да бъде завъртяна спрямо зададената ориентация първата права около пресечната си точка с втората права, за да съвпадне с нея.

2. **Ъгъл между два лъча с общо начало** наричаме по-малкия от двата ъгъла, които те сключват.

   **Ориентиран ъгъл между два лъча с общо начало** наричаме ъгъла, на който трябва да бъде завъртян спрямо зададената ориентация първият лъч относно началната си точка, за да съвпадне с втория.

3. Нека са дадени ненулеви свободните вектори $u$ и $v$. **Ъгъл между** $u$ **и** $v$ наричаме по-малкия от двата ъгъла между два произволни техни представителя с общо начало и бележим с $\sphericalangle(u, v)$.

   **Ориентиран ъгъл между** $u$ **и** $v$ наричаме ъгъла, на който трябва да бъде завъртян някой представител на $u$ спрямо зададената ориентация, за да съвпадне с някой представител на $v$.

   И двете дефиниции са коректни, понеже всички представители на $u$ са колинеарни помежду си и сключват еднакви ъгли с представители на $v$, които също са колинеарни помежду си.

**Твърдение 7.** *Нека координатната система $K = Oxy$ е ортонормирана и правата $l$ има спрямо $K$ декартово уравнение $l : y = kx + m$. Дефинираме лъча $\vec{r} : y = kx + m \geq 0$, лежащ върху $l$. Тогава $\tan \sphericalangle(\vec{r}, \vec{Ox}) = k$.*

*Доказателство.* Нека $u$ е векторът с координати $u(1, k)$ спрямо $K$.

Ако $k \geq 0$, то $u \uparrow\uparrow \vec{r}$ и

$$\tan \sphericalangle(\vec{r}, \vec{Ox}) = \tan \sphericalangle(u, \vec{Ox}) = k.$$

Ако $k < 0$, то $u \uparrow\downarrow \vec{r}$ и

$$\tan \sphericalangle(\vec{r}, \vec{Ox}) = \tan(\pi - \sphericalangle(-u, \vec{Ox})) = -\tan \sphericalangle(-u, \vec{Ox}) = -(-k) = k.$$

□

**Теорема 8.** *Нека правите $l_1$ и $l_2$ имат спрямо $K$ общи уравнения*

$$l_i : A_i x + B_i y + C_i, i = 1, 2. \tag{1}$$

*Означаваме*

$$L := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{L} := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

*Тогава*

*1.* $l_1 \equiv l_2 \iff \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L} = 1$.

*2.* $l_1 \parallel l_2$*, но* $l_1 \not\equiv l_2 \iff 1 = \operatorname{rank} L < \operatorname{rank} \tilde{L} = 2$.

*3.* $l_1$ *и* $l_2$ *са пресекателни* $\iff \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L} = 2$.

*Доказателство.* Да забележим, че

1. $L$ е подматрица на $\tilde{L} \implies \operatorname{rank} L \leq \operatorname{rank} \tilde{L}$.
2. $A_1$ и $B_1$ са коефициенти в общо уравнения на права, съответно поне един от тях е различен от нула и $\operatorname{rank} L \geq 1$.
3. Матрицата $\tilde{L}$ има само два реда, следователно $\operatorname{rank} \tilde{L} \leq 2$.

Така получаваме $1 \leq \operatorname{rank} L \leq \operatorname{rank} \tilde{L} \leq 2$.
Разглеждаме матричното уравнение

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

което ни дава едновременните решения на уравненията (1).

Ако $\operatorname{rank} L \neq \operatorname{rank} \tilde{L}$, то по теоремата на Руше матричното уравнение (2) няма решение, правите $l_1$ и $l_2$ нямат общи точки и $l_1 \parallel l_2$. Обратно, ако правите са успоредни, те нямат общи точки, матричното уравнение (2) няма решения и $\operatorname{rank} L \neq \operatorname{rank} \tilde{L}$.

Ако $\operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L}$, то по теоремата на Руше матричното уравнение (2) има поне едно решение. Разглеждаме два случая:

1. Ако $\operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L} = 1$, то редовете на $L$ са линейно зависими, следователно уравненията (1) са еквивалентни и задават едно и също множество. Тъй като и двете са уравнения на прави, те задават една и съща права.

   Обратно, нека уравненията (1) задават една и съща права и нека за определеност $A_1 \neq 0$. Тогава за произволна точка $P(x, y) \in l_1 \equiv l_2$ имаме

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \implies x = -\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1},$$

$$\begin{aligned} A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0, \\ -A_2 \left( \frac{B_1}{A_1} y + \frac{C_1}{A_1} \right) + B_2 y + C_2 &= 0, \\ \left( B_2 - \frac{A_2}{A_1} B_1 \right) y + \left( C_2 - \frac{A_2}{A_1} C_1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

   Последното уравнение е еквивалентно на системата

$$B_2 = \frac{A_2}{A_1} B_1 \qquad\qquad C_2 = \frac{A_2}{A_1} C_1.$$

Тогава второто уравнение от (1) има вида

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = \frac{A_2}{A_1}A_1x + \frac{A_2}{A_1}B_1y + \frac{A_2}{A_1}C_1 = 0,$$

откъдето виждаме, че двете уравнения са пропорционални и следователно

$$\operatorname{rank} \tilde{L} = 1.$$

2. Ако $\operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L} = 2$, то системата (2) има максимален ранг и решението е единствено. Това е пресечната точка на $l_1$ и $l_2$.

   Обратно, ако $l_1$ и $l_2$ имат само една обща точка $P$, то координатите ѝ удовлетворяват (2). По теоремата на Руше това или е единственото решение, или има още безброй решения. Но вече видяхме, че системата има безброй решения точно при $\operatorname{rank} \tilde{L} = 1$. Следователно координатите на $P$ са единственото решение на (2) и матрицата $L$ има максимален ранг 2.

□

**Следствие 9.** *Ако правата $l$ има общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$ спрямо $K$, то всяко общо уравнение спрямо $K$ има вида $l : \lambda(Ax + By + C) = 0$ за някое $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

**Определение 10.** Всеки вектор, перпендикулярен на някоя права $l$, се нарича **нормален** за $l$.

**Твърдение 11.** *Ако правата $l$ има общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$ спрямо $K$ и $K$ е ортонормирана, то*

1. *векторът $v(-B, A)$ е ненулев и колинеарен с $l$.*
2. *векторът $n(A, B)$ е ненулев и нормален за $l$.*

*Доказателство.* По условие имаме, че $A$ и $B$ не са едновременно равни на 0, следователно $v$ и $n$ са ненулеви.

1. Разглеждаме точката $P_0(x_0, y_0) \in l$ и точката $P_1(x_0 - B, y_0 + A)$, която също принадлежи на $l$, тъй като

$$A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + (-AB + AB) = 0 + 0 = 0.$$

   Тогава $\overrightarrow{P_0P_1} \parallel l$. Но векторът $\overrightarrow{P_0P_1}(-B, A)$ е равен на $v$, следователно $v \parallel l$.

2. Тъй като координатната система $K$ е ортонормирана, имаме

$$\langle v, n\rangle = -AB + AB = 0,$$

   следователно $v \perp n$ и тъй като $v$ е направляващ за $l$, то $n$ е нормален за $l$.

□

**Определение 12.** Общото уравнение $l : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ на права $l$ спрямо ортонормирана $K$ се нарича **нормално**, ако е изпълнено условието $\|n(\alpha, \beta)\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

**Твърдение 13.** *Всяка права има спрямо $K$ точно две нормални уравнения.*

*Доказателство.* Нека $l$ има спрямо $K$ общо уравнение $l : Ax + By + C = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на $l$ спрямо $K$ имат вида

$$l : \lambda(Ax + By + C) = 0, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Но $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1 \iff \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Двете нормални уравнения са

$$l : \pm\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

□

**Теорема 14.** *Нека координатната система $K$ е ортонормирана и са дадени точката $P_0(x_0, y_0)$ и правата $l$ с нормално уравнение*

$$l : \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

*Означаваме $F(x, y) \coloneqq \alpha x + \beta y + \gamma$. Тогава разстоянието между $P_0$ и $l$ е*

$$\mathrm{d}(P_0, l) = |F(x_0, y_0)|,$$

*а величината $\partial(P, l) = F(x_0, y_0)$ се нарича **ориентирано разстояние** между $P_0$ и $l$.*

*Доказателство.* Нека $P_1(x_1, y_1)$ е ортогоналната проекция на $P_0$ върху $l$. Понеже $\overrightarrow{P_0P_1} \perp l$, то $\overrightarrow{P_0P_1} \parallel n(\alpha, \beta)$, следователно $\exists\lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P_1} = \lambda n$. Тогава

$$\mathrm{d}(P_0, l) = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| = |\lambda|\|n\| = |\lambda|.$$

Намираме $\lambda$ от $\overrightarrow{P_0P_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda n(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \lambda\alpha \\ y_1 - y_0 = \lambda\beta \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda\alpha \\ y_1 = y_0 + \lambda\beta. \end{cases}$$

Заместваме в нормалното уравнение на $l$:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0, \\ \alpha(x_0 + \lambda\alpha) + \beta(y_0 + \lambda\beta) + \gamma = 0, \\ (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + \lambda(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \\ F(x_0, y_0) + \lambda = 0, \end{aligned}$$

откъдето следва $\lambda = -F(x_0, y_0)$ и $\mathrm{d}(P_0, l) = |\lambda| = |F(x_0, y_0)|$. □

**Теорема 15.** *Нека са дадени правите $l_1$ и $l_2$ с нормални уравнения спрямо ортонормирана $K$*

$$l_i : \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0, i = 1, 2.$$

*Тогава за ъгълът между $l_1$ и $l_2$ е $\sphericalangle(l_1, l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$.*

*Доказателство.* Нека векторите $n_i(\alpha_i, \beta_i)$ са нормални за $n_i, i = 1, 2$.

Разглеждаме два случая:

1. Ако $0 < \sphericalangle(n_1, n_2) \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sphericalangle(l_1, l_2) = \sphericalangle(n_1, n_2)$ и

$$\cos\sphericalangle(l_1, l_2) = \cos\sphericalangle(n_1, n_2) = |\cos\sphericalangle(n_1, n_2)|.$$

2. Ако $\frac{\pi}{2} < \sphericalangle(n_1, n_2) \leq \pi$, то $\sphericalangle(l_1, l_2) = \pi - \sphericalangle(n_1, n_2)$

$$\cos\sphericalangle(l_1, l_2) = \cos(\pi - \sphericalangle(n_1, n_2)) = -\cos\sphericalangle(n_1, n_2) = |\cos\sphericalangle(n_1, n_2)|.$$

И в двата случая имаме

$$\cos\sphericalangle(l_1, l_2) = |\cos\sphericalangle(n_1, n_2)| = \frac{|\langle n_1, n_2\rangle|}{\|n_1\|\|n_2\|} = |\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$$

и

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|.$$

$\square$

### 1.3. Равнини в пространството

*Забележка* 16. Някои от теоремите са напълно аналогични на тези за прави в равнината и ще пропуснем техните доказателства.

Нека $K = Oxyz$ е афинна координатна система в пространството $A_3$. Считаме, че е зададена единична отсечка за измерване на дължини.

**Определение 17.** Нека равнината $\pi$ се задава спрямо $K$ с уравнението $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, където $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, т.е. уравнението е изпълнено за координатите на т. $P(x, y, z)$ точно когато т. $P \in \pi$.

Уравнение от този вид наричаме **общо уравнение на равнината** $\pi$ спрямо $K$.

*Забележка* 18. От определението е ясно, че е изпълнено $A \neq 0$ или $B \neq 0$ или $C \neq 0$, тъй като в противен случай уравнението е еквивалентно на $l : D = 0$ и, в зависимост от стойността на $D$, уравнението задава или празното множество, или цялото пространство $A_3$.

**Твърдение 19.**

1. *Всяка равнина има поне едно общо уравнение спрямо $K$.*

2. *Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $A$, $B$ и $C$ не са едновременно равни на $0$, е уравнение точно една равнина спрямо $K$.*

*Доказателство.*

1. Нека са дадени равнината $\pi$, точката $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ и компланарните с $\pi$ неколинеарни вектори $u_i(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2$.

   Разглеждаме произволна точка $P(x, y, z)$. Имаме т. $P \in l$ точно когато $\overrightarrow{P_0P} \parallel \pi$, а последното условие е аналогично на това векторите $\overrightarrow{P_0P}$, $u_1$ и $u_2$ да бъдат компланарни. Това условие може да се изрази в координатен вид,

   $$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

   Полагаме

   $$A \coloneqq \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \qquad B \coloneqq -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \qquad C \coloneqq \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

   Тъй като векторите $u_1$ и $u_2$ не са колинеарни, имаме

   $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2,$$

   следователно поне едно от адюнгираните количества $A$, $B$ или $C$ на голямата матрица ще бъде различно от 0.

   След като разложим пресмятането на детерминантата по първия стълб, можем да запишем полученото уравнение във вида

   $$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

   откъдето след полагането $D \coloneqq -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ получаваме общо уравнение за $\pi$.

2. Нека е дадено уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$, където $A$, $B$ и $C$ не са едновременно равни на 0. Без ограничение на общността допускаме, че $A \neq 0$.

   Да забележим, че уравнението има поне едно решение, например $x = -\frac{D}{A}$ и $y = z = 0$.

   Нека са дадени векторите $u_1(-B, A, 0)$ и $u_2\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$ и точките $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P(x, y, z)$. Нека освен това координатите на $P_0$ удовлетворяват уравнението. Тогава $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Нека $\pi$ е равнината, образувана от векторите $u_1$ и $u_2$. Тогава $\overrightarrow{P_0P} \in \pi \iff$ трите вектора са компланарни. Ако изразим това условие в координатен вид, ще получим оригиналното уравнение. Наистина,

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} x-x_0 & -B & -\frac{C}{A} \\ y-y_0 & A & 0 \\ z-z_0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0) = \\
&= Ax+By+Cz+D = 0.
\end{aligned}$$

Следователно $Ax+By+Cz+D$ е уравнение на равнината $\pi$ спрямо $K$.

$\square$

**Теорема 20.** *Нека правите $\alpha_1$ и $\alpha_2$ имат спрямо $K$ общи уравнения*

$$\pi_i : A_ix+B_iy+C_iz+D_i, i=1,2. \tag{3}$$

*Означаваме*

$$L := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{L} := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

*Тогава*

1. $\pi_1 \equiv \pi_2 \iff \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L} = 1.$
2. $\pi_1 \parallel \pi_2$*, но* $\pi_1 \not\equiv \pi_2 \iff 1 = \operatorname{rank} L < \operatorname{rank} \tilde{L} = 2.$
3. $\pi_1$ *и* $\pi_2$ *са пресекателни* $\iff \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} \tilde{L} = 2.$

**Определение 21.** Всеки вектор, перпендикулярен на някоя равнина $\pi$, се нарича **нормален** за $\pi$.

**Твърдение 22.** *Ако равнината $\pi$ има общо уравнение $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ спрямо $K$ и $K$ е ортонормирана, то*

1. *векторите $u(-B,A,0)$ и $v(-C,0,A)$ са неколинеарни, ненулеви и компланарни с $\pi$.*
2. *векторът $n(A,B,C)$ е ненулев и нормален за $l$.*

*Доказателство.*

Разглеждаме точката $P_0(x_0,y_0,z_0) \in l$ и точките

$$P_1(x_0-B, y_0+A, z_0) \qquad P_2(x_0-C, y_0, z_0+A),$$

които също принадлежат на $l$, тъй като

$$A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + Cz_0 + D = (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (-AB + AB) = 0,$$
$$A(x_0 - C) + By_0 + C(z_0 + A) + D = (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (-AC + AC) = 0.$$

Тогава векторите $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0P_2}$ са компланарни с $\pi$. Но $\overrightarrow{P_0P_1} = u$ и $\overrightarrow{P_0P_2} = v$, следователно $u$ и $v$ са компланарни с $\pi$.

Тъй като координатната система $K$ е ортонормирана, имаме

$$\langle u, n\rangle = -AB + AB = 0 = -AC + AC = \langle v, n\rangle,$$

следователно $u \perp n$ и $v \perp n$. Тогава $n$ е перпендикулярен и на всички линейни комбинации на $u$ и $v$ и понеже $u$ и $v$ образуват равнината $\pi$, то $n$ е нормален за $\pi$. $\square$

**Определение 23.** Общото уравнение $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ на равнина $\pi$ спрямо ортонормирана $K$ се нарича **нормално**, ако е изпълнено условието $\|n(\alpha, \beta, \gamma)\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

**Твърдение 24.** *Всяка равнина има спрямо ортонормирана $K$ точно две нормални уравнения.*

**Теорема 25.** *Нека координатната система $K$ е ортонормирана и са дадени точката $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и правата $l$ с нормално уравнение*

$$l : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

*Означаваме $F(x, y, z) \coloneqq \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$. Тогава разстоянието между $P_0$ и $\pi$ е*

$$\mathrm{d}(P_0, \pi) = |F(x_0, y_0, z_0)|,$$

*а величината $\partial(P, \pi) = F(x_0, y_0, z_0)$ се нарича **ориентирано разстояние** между $P_0$ и $\pi$.*

## 1.4. Криви от втора степен

*Забележка* 26. Ще пропуснем доказателствата на фокалните свойства на кривите.

Нека $K = Oxy$ е ортонормирана координатна система в равнината $A_2$. Считаме, че са зададени единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

**Определение 27.** Една крива наричаме **алгебрична крива от степен** $d$, ако координатите на произволна нейна точка имат алгебрично уравнение от степен $d$.

**Определение 28. Окръжност** $k$ с **център** $P_0(x_0, y_0)$ и **радиус** $r > 0$ наричаме множеството от всички точки $P$ на разстояние $r$ от $P_0$.

Точката $P(x, y)$ е от $k$ точно когато

$$\mathrm{d}(P_0, P) = \|P_0P\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Уравнението

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$$

наричаме **централно уравнение на окръжността** $k$.

В частност, оттук следва, че окръжностите са алгебрични криви от втора степен.

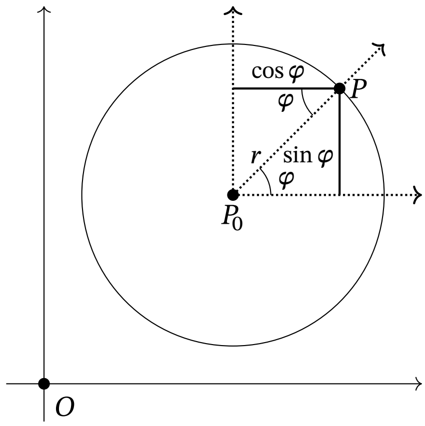
Нека сега $P_0\vec{x}$ е лъчът с начало $P_0$, успореден на $O\vec{x}$. Ако означим с $\varphi$ ориентирания ъгъл между лъчите $P_0\vec{x}$ и $P_0\vec{P}$, от определенията за sin и cos за координатите на вектора $\overrightarrow{P_0P}$ получаваме

$$\begin{cases} x - x_0 = r\cos\varphi \\ y - y_0 = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Уравненията

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

наричаме **скаларни параметрични уравнения на окръжност**.

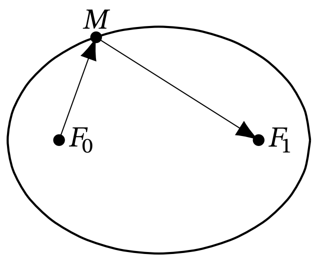



Фигура 1: Окръжност

**Определение 29.**

**Елипса** с **фокуси** т. $F_0$ и т. $F_1$ и **голяма полуос** $a > 0$ наричаме множеството $k$ от точки $P$, за които е изпълнено $\|F_0P\| + \|F_1P\| = 2a$.

Разглеждаме частния случай, в който т. $F_0$ и т. $F_1$ имат координати $F_0(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$ спрямо $K$ за някоя константа $c \geq 0$ с $c < a$, наречена **линеен ексцентрицитет** на $k$. За всяка елипса съществува единствена координатна система, в която уравненията на фокусите имат този прост вид. Въвеждаме следните допълнителни понятия




Фигура 2: Елипса

- Величината $b \coloneqq \sqrt{a^2 - c^2}$ наричаме **малка полуос** на $k$. За елипси имаме $b = \sqrt{a^2 - c^2} \leq \sqrt{a^2} = a$.

- Величината $e \coloneqq \frac{c}{a}$ наричаме **(числен) ексцентрицитет** на $k$. За елипси имаме $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2}} < 1$.

- **Директриси** на елипсата $k$ наричаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$.

Разписваме уравнението за $k$ покоординатно:

$$\begin{aligned}
\|F_0P\| + \|F_1P\| &= 2a \\
\|F_1P\| &= 2a - \|F_0P\| \mid (\cdot)^2 \\
\|F_1P\|^2 &= 4a^2 - 4a\|F_0P\| + \|F_0P\|^2 \\
4a\|F_0P\| &= 4a^2 + \|F_0P\|^2 - \|F_1P\|^2 \mid \cdot/4a \\
\|F_0P\| &= a + \frac{\|F_0P\|^2 - \|F_1P\|^2}{4a} \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2}{4a} \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{c}{a}x \mid (\cdot)^2 \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 + 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2 \\
\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \mid /(a^2 - c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Така получаваме **метрично канонично уравнение на елипсата** $k$ спрямо $K$:

$$k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Веднага виждаме, че елипсите са алгебрични криви от втора степен и че централното уравнение на окръжност е частен случай с $a = b = r \iff c = 0$.

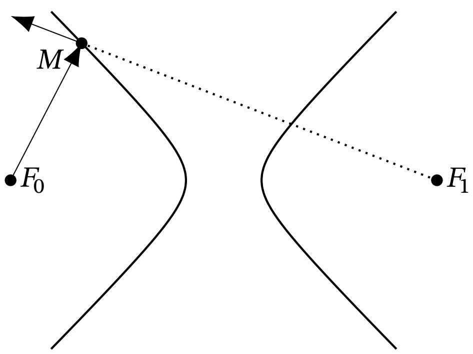
**Скаларни параметрични уравнения на елипса** можем да изведем аналогично на тези за окръжност. В нашия опростен случай те имат вида

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

**Теорема 30** (Фокално свойство на елипса)**.** *Всеки лъч с начало т. $F_0$ след отражение в произволна точка $M$ от елипсата минава през т. $F_1$ (фигура 2).*

**Определение 31.**

**Хипербола** с **фокуси** т. $F_0$ и т. $F_1$ и **реална полуос** $a > 0$ наричаме двусвързаното множество $k$ от точки $P$, за които е изпълнено $|\|F_0P\| - \|F_1P\|| = 2a$. Разглеждаме частния случай, в който т. $F_0$ и т. $F_1$ имат координати $F_0(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$ спрямо $K$ за някоя константа $c \geq 0$ с $c > a$, наречена **линеен ексцентрицитет** на $k$. За всяка хипербола съществува единствена координатна система, в която уравненията на фокусите имат този прост вид. Въвеждаме следните допълнителни понятия




Фигура 3: Хипербола

- Величината $b := \sqrt{c^2 - a^2}$ наричаме **имагинерна полуос** на $k$.
- Аналогично на елипсите, величината $e := \frac{c}{a}$ наричаме **(числен) ексцентрицитет** на $k$. За хиперболи имаме $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2}} > 1$.
- Аналогично на елипсите, **директриси** на хиперболата $k$ наричаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$.

Напълно аналогично на случая с елипса, разписвайки уравнението за $k$ покоординатно стигаме до уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Единствената разлика е, че тук $b = -(a^2 - c^2)$. Така получаваме **метрично канонично уравнение** на хиперболата $k$ спрямо $K$:

$$k : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Веднага виждаме, че хиперболите са алгебрични криви от втора степен.

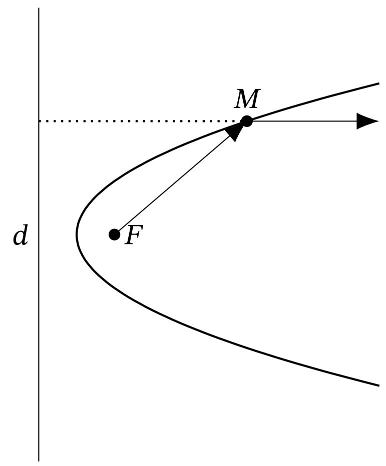
**Скаларните параметрични уравнения на хипербола** са различни за левия и десния клон на хиперболата. В нашия опростен случай те имат вида

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh \varphi \\ y = b \sinh \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

**Теорема 32** (Фокално свойство на хипербола)**.** *Всеки лъч с начало т. $F_0$ след отражение в произволна точка $M$ от хиперболата лежи върху правата, минаваща през т. $M$ и т. $F_1$ (фигура 3).*

**Определение 33.**

**Парабола** с **фокус** т. $F$ и неминаваща през $F$ права $d$, наречена **директриса**, наричаме множеството $k$ от точки $P$, за които е изпълнено $\|FP\| = \mathrm{d}(d, P)$. Дефинираме **линейния и числения ексцентрицитет** на параболата $K$ да бъдат $c = e = 1$.
Разглеждаме частния случай, когато $d$ има уравнение $d : x = -\frac{p}{2}$ и т. $F$ има координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ спрямо $K$ за някоя константа $p > 0$, наречена **параметър**. За всяка парабола съществува единствена координатна система, в която уравненията на фокуса и директрисата имат този прост вид.




Фигура 4: Парабола

Нека т. $P$ има координати $P(x, y)$ спрямо $K$. Тъй като уравнението $d : x = -\frac{p}{2}$ е нормално, теорема 14 ни дава $\mathrm{d}(d, P) = x + \frac{p}{2}$. Разписваме уравнението за $k$ покоординатно:

$$\begin{aligned}
\|FP\| &= \mathrm{d}(d, P) \\
\|FP\|^2 &= \mathrm{d}(d, P)^2 \\
\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\
y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \\
y^2 &= 2px.
\end{aligned}$$

Така получаваме **метрично канонично уравнение на параболата** $k$ спрямо $K$:

$$k : y^2 = 2px.$$

Веднага виждаме, че параболите са алгебрични криви от втора степен.

Ако вземем $y$ за параметър, получаваме следните **скаларни параметрични уравнения** на параболата $k$ спрямо $K$:

$$k : \begin{cases} x = \frac{\varphi^2}{2p} \\ y = \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 34** (Фокално свойство на парабола)**.** *Всеки лъч с начало т. $F$ след отражение в произволна точка $M$ от параболата, става перпендикулярен на директрисата $d$ (фигура 4).*

## 2. Примерни задачи

В конспекта не е посочен списък с възможни задачи, затова съм включил няколко по-обширни задачи от Богдан Александров (лекции), Станислав Иванов (упражнения) и Янис Василев (записки), *Записки от лекции и упражнения по аналитична геометрия*.

### 2.1. Прави в равнината

**Задача 1.** *Точките $A$ и $B$ и правите $a$ и $b$ имат спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ координати $A(1, -2)$, $B(0, -1)$ и общи уравнения*

$$a : 3x + 4y + 2 = 0,$$
$$b : 5x - 12y + 1 = 0.$$

*Да се намерят:*

а) *Общо уравнение на правата $l$ през т. $A$, успоредна на $a$*

б) *Общо уравнение на правата $m$ през т. $B$, перпендикулярна на $b$*

в) *Общо уравнение на правата $AB$*

г) *Координатите на т. $B'$, която е ортогонално симетрична на т. $B$ относно правата $a$*

д) *Разстоянието от т. $A$ до $a$*

е) *Общо уравнение на ъглополовящата на правите $a$ и $b$*

ж) *Ъгълът между правите $a$ и $b$*

з) *Общо уравнение на правата $t$ през т. $B$ и т. $T = a \cap b$*

и) *Да се определи положението на т. $A$ и т. $B$ спрямо правата $a$*

*Решение.* а) Правата $l$ е успоредна на $a$, следователно тя има общо уравнение от вида

$$l : 3x + 4y + C = 0,$$

където $C$ е подбрано спрямо условието $l$ да минава през т. $A$, т.е.

$$C = -3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 5.$$

И така, $l$ има общо уравнение $l : 3x + 4y + 5 = 0$.

б) Правата $m$ е перпендикулярна на $b$, следователно нормалните вектори на $b$ (например $n_b(5, -12)$) са колинеарни с $m$. Нека т. $P$ има координати $P(x, y)$ спрямо $K$. От условието $P \in m \iff \overrightarrow{BP} \parallel n_b$ намираме общото уравнение

$$m : \det\begin{pmatrix} x & 5 \\ y+1 & -12 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } m : 12x + 5y + 5 = 0.$$

в) Нека т. $P$ има координати $P(x, y)$ спрямо $K$. От условието $P \in AB \iff \overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{BA}$ намираме общото уравнение

$$AB\,:\,\det\begin{pmatrix} x & 1 \\ y+1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } AB\,:\,x + y + 1 = 0.$$

г) Нека $B'$ има спрямо $K$ координати $B'(x', y')$. Първо намираме правата $BB'$ от условието $BB' \perp a$, което е еквивалентно на $BB' \parallel n_a(3, 4)$. Нека т. $P$ има координати $(x, y)$ спрямо $K$. От условието $P \in BB' \iff \overrightarrow{BP} \parallel n_a$ намираме общото уравнение

$$BB'\,:\,\det\begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } BB'\,:\,4x - 3y - 3 = 0.$$

Координатите на пресечната точка $B_a$ на $a$ и $BB'$ (ортогоналната проекция на $B$ върху $a$) намираме от системата

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 \mid (\times 3) \\ 4x - 3y - 3 = 0 \mid (\times 4) \end{cases} \sim \begin{cases} 9x + 12y + 6 = 0 \\ 16x - 12y - 12 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 25x = 6 \\ 12y = 16x - 12 \end{cases},$$

откъдето получаваме $B_a(6/25, -17/25)$.

Остава да намерим координатите на $B'$. Имаме $\overrightarrow{BB_a} = \overrightarrow{B_aB'}$, откъдето

$$\begin{cases} 6/25 = x' - 6/25 \\ -17/25 + 1 = y' + 17/25 \end{cases} \sim \begin{cases} x' = 12/25 \\ y' = -34/25 + 1 = -9/25 \end{cases}.$$

Получихме $B'(12/25, -9/25)$.

д) Разстоянието $\mathrm{d}(A, a)$ намираме използвайки теорема 14:

$$\mathrm{d}(A, a) = |\partial(A, a)| = \frac{|F_a(A)|}{\|n_a\|},$$

където $F_a(x, y) = 3x + 4y + 2$ е лявата част на зададеното общо уравнение на $a$, а $n_a(3, 4)$ е съответният нормален вектор. Директно пресмятаме разстоянието и получаваме

$$\mathrm{d}(A, a) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2|}{5} = \frac{3}{5}.$$

е) Ъглополовящите $u_{1,2}$ на правите $a$ и $b$ се състоят от всички точки $P(x, y)$, за които $\mathrm{d}(P, a) = \mathrm{d}(P, b)$. Последното условие е еквивалентно на условието $\partial(P, a) \pm \partial(P, b) = 0$, откъдето намираме уравненията на ъглополовящите:

$$\begin{aligned} u_{1,2}\,&:\,\frac{3x + 4y + 2}{5} \pm \frac{5x - 12y + 1}{13} = 0, \\ u_{1,2}\,&:\,(39x + 52y + 26) \pm (25x - 60y + 5) = 0, \\ u_1\,&:\,64x - 8y + 31 = 0, \\ u_2\,&:\,14x + 112y + 21 = 0. \end{aligned}$$

ж) Ъгълът между $a$ и $b$ намираме чрез нормалните им вектори $n_a(3,5)$ и $n_b(5,-12)$:

$$\sphericalangle(a,b) = \arccos\frac{|\langle n_a, n_b\rangle|}{\|n_a\|\|n_b\|} = \arccos\left|-\frac{33}{65}\right| = \arccos\frac{33}{65}$$

з) Координатите на пресечната точка $T$ на $a$ и $b$ намираме от системата

$$\begin{cases} 3x+4y+2=0 \mid (\times 3) \\ 5x-12y+1=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 9x+12y+6=0 \\ 5x-12y+1=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 14x=-7 \\ 12y=5x+1 \end{cases}$$

откъдето получаваме $T(-1/2,-1/8)$.

Нека т. $P$ има координати $(x,y)$ спрямо $K$. От условието $P\in t \iff \overrightarrow{TP}\parallel\overrightarrow{TB}$ намираме общото уравнение

$$t : \det\begin{pmatrix} x+1/2 & 1/2 \\ y+1/8 & -7/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2x+1 & 1 \\ 8y+1 & -7 \end{pmatrix} = -14x-8y-8=0$$

или $t : 7x+4y+4=0$.

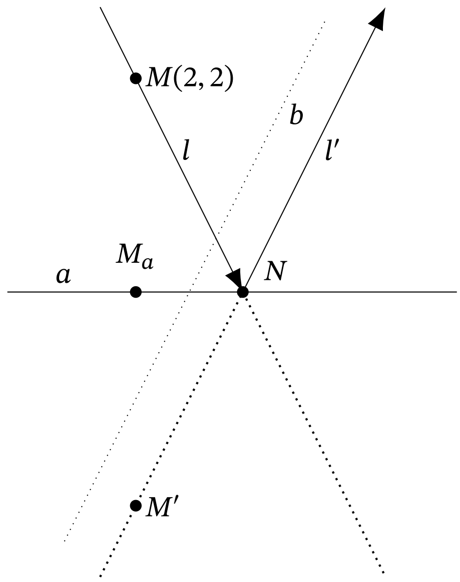
и) Означаваме $F_a(x,y) = 3x+4y+2$. Имаме, че $F_a(A) = F_a(1,-2) = -3 < 0$ и $F_a(B) = F_a(0,-1) = -2 < 0$. Двете точки не лежат върху правата $a$ и освен това $F_a(A)$ и $F_a(B)$ имат еднакви знаци, следователно т. $A$ и т. $B$ лежат в една и съща отворена полуравнина относно $a$.

$\square$

**Задача 2.** *В равнината е зададена ортонормирана координатна система $K = Oxy$. Дадени са правите*

$$a : x+y=0$$
$$b : x-3y-2=0$$

*Светлинен лъч $\vec{l}$ минава през точка $M(2,2)$ и се отразява от правата $a$. Отразеният лъч $\vec{l'}$ е колинеарен с правата $b$.*
*Да се намерят уравнения спрямо $K$ на правите $l$ и $l'$, съдържащи съответно падащия лъч $\vec{l}$ и отразения лъч $\vec{l'}$.*




Фигура 5: Отразен светлинен лъч

*Решение.*

1. Намираме координатите на ортогоналната проекция $M_a$ на точката $M$ върху $a$, използвайки нормален за $a$ вектор $n_a(1,1)$.

   От условието $n_a \parallel \overrightarrow{MM_a}$ намираме ограничението

   $$M_a(x,y) \,:\, \det\begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ 1 & y-2 \end{pmatrix} = y - x = 0,$$

   а от ограничението $M_a \in a$ получаваме, че т. $M_a$ има координати $(0,0)$ спрямо $K$.

2. Намираме координатите на ортогонално симетричната точка $M'(x',y')$ на $M$ относно $a$. Имаме $\overrightarrow{MM_a} = \overrightarrow{M_aM'}$, откъдето

   $$\begin{cases} 2-0 = 0-x' \\ 2-0 = 0-y' \end{cases} \implies x' = y' = -2,$$

   т.е. $M'(-2,-2)$.

3. Намираме уравнението на правата $l'$. Тъй като $l' \parallel b$, правата $l'$ има общо уравнение

   $$l' \,:\, x - 3y + C = 0,$$

   където $C$ е подбрано спрямо условието $l'$ да минава през т. $M'$, т.е.

   $$C = -1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = -4.$$

   И така, $l'$ има общо уравнение $l' \,:\, x - 3y - 4 = 0$.

4. Намираме координатите на пресечната точка $N$ на $a$ и $l'$ (а също и $l'$):

   $$N(x,y) \,:\, \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -y \\ -4y = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases},$$

   т.е. $N(1,-1)$.

5. Намираме общо уравнение на $l$. Използваме това, че $l$ минава през т. $M$ и т. $N$, т.е. т. $P(x,y) \in l \iff \overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{MN}$:

   $$l \,:\, \det\begin{pmatrix} x-2 & 1-2 \\ y-2 & -1-2 \end{pmatrix} = -3x + y + 4 = 0.$$

$\square$

## 2.2. Равнини в пространството

**Задача 3.** *В пространството е зададена ортонормирана координатна система $K = Oxyz$. Спрямо нея точките $A$, $B$, $C$ и $D$ имат координати*

$$A(3,1,4) \qquad C(1,2,-1)$$
$$B(2,1,3) \qquad D(0,-3,2),$$

*а равнината $\beta$ има общо уравнение*

$$\beta : x + y - z + 1 = 0.$$

*Да се намерят:*

а) *Общо уравнение на равнината $\alpha$, минаваща през точките $A$, $B$ и $C$*

б) *Параметрични уравнения на права $h$, минаваща през т. $D$ и ортогонална на равнината $\alpha$*

в) *Координатите на ортогонално симетричната на т. $D$ спрямо $\alpha$ точка т. $D'$*

г) *Общо уравнение на равнината $\gamma$, минаваща през т. $D$ и успоредна на $\beta$*

д) *Координатите на някой вектор $v$, компланарен с $\alpha$ и $\beta$*

е) *Параметрични уравнения на пресечницата $m$ на $\alpha$ и $\beta$*

ж) *Параметрични уравнения на права $l$, така че светлинния лъч $\vec{l}$ през т. $D$ след отразяването си от $\alpha$ (озн. отразения лъч с $\vec{l'}$) пресича $\beta$ под прав ъгъл*

з) *Общо уравнение на равнината $\pi_1$, минаваща през $A$ и ортогонална на правата $m$*

и) *Общо уравнение на равнината $\pi_2$, съдържаща правата $l'$ и успоредна на правата $m$*

к) *Общо уравнение на равнината $\pi_3$, съдържаща правата $l'$ и ортогонална на равнината $\alpha$*

*Решение.* а) Нека т. $P(x,y,z) \in \alpha$. Тогава $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}(-1,0,-1) \parallel \overrightarrow{AC}(-2,1,-5)$, което условие ни позволява да намерим общо уравнение на $\alpha$:

$$\begin{aligned}
\alpha : \det\begin{pmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-4 & -1 & -5 \end{pmatrix} &= \\
&= -1(z-4) + (-2)(y-1)(-1) - (x-3)(-1) - (-1)(y-1)(-5) = \\
&= -z + 4 + 2y - 2 + x - 3 - 5y + 5 = \\
&= \boxed{x - 3y - z + 4 = 0}.
\end{aligned}$$

б) Правата $h$ е успоредна на нормалния за $\alpha$ вектор на $n_\alpha(1, -3, -1)$, следователно тя има векторно параметрично уравнение

$$h \,:\, \overrightarrow{OD} + \lambda n_\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларно параметрично уравнение

$$h \,:\, \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

в) За да намерим ортогонално симетричната на т. $D$ спрямо $\alpha$ точка т. $D'(x', y', z')$, първо ще намерим пресечната точка т. $D_\alpha$ на правата $h$ и равнината $\alpha$.

Намираме стойността на параметъра $\lambda$ за уравнението на $h$, за която $h$ се пресича $\alpha$:

$$\begin{aligned} \lambda - 3(-3 - 3\lambda) - (2 - \lambda) + 4 &= 0 \\ \lambda + 9 + 9\lambda - 2 + \lambda + 4 &= 0 \\ 11\lambda &= -11 \\ \lambda &= -1, \end{aligned}$$

откъдето намираме координатите $(-1, 0, 3)$ на т. $D_\alpha$.

След това, развиваме очевидното равенство $\overrightarrow{D_\alpha D'} = \overrightarrow{DD_\alpha}$ покоординатно:

$$\begin{cases} x' + 1 = -1 \\ y' - 0 = 3 \\ z' - 3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 3 \\ z' = 4, \end{cases}$$

т.е. $D'(-2, 3, 4)$.

г) Тъй като равнината $\gamma$ е успоредна на $\beta$, тя има общо уравнение

$$\gamma \,:\, x + y - z + C = 0,$$

където $C$ е подбрано спрямо условието $\gamma$ да минава през т. $D$, т.е.

$$C = -(0 + (-3) - 2) = 5.$$

И така, $\gamma \,:\, x + y - z + 5 = 0$.

д) Търсим едновременни решения на известните общи уравнения на равнините $\alpha$ и $\beta$:

$$\begin{cases} \alpha \,:\, x - 3y - z + 4 = 0 \\ \beta \,:\, x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 3/4 \\ z = x + 7/4. \end{cases}$$

Очевидно точките $V_0\left(0, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$ и $V_1\left(1, \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{4}\right)$ удовлетворяват горната система, следователно векторът $v = \overrightarrow{V_0V_1}$ с координати $(1, 0, 1)$ е колинеарен и с двете равнини.

е) Пресечницата $m$ на $\alpha$ и $\beta$ има векторно параметрично уравнение

$$m : \overrightarrow{OV_0} + \mu v, \mu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларно параметрично уравнение

$$m : \begin{cases} x = \mu \\ y = 3/4 \\ z = 7/4 + \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

ж) Тъй като вече разполагаме с координатите на ортогонално симетричната на $D$ относно $\alpha$ точка $D'$ и нормалният за $\alpha$ вектор $n_\beta(1, 1, -1)$, можем да намерим векторно параметрично уравнения на правата $l'$:

$$l' : \overrightarrow{OD'} + \nu n_\beta, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларното параметрично уравнение

$$l' : \begin{cases} x = -2 + \nu \\ y = 3 + \nu \\ z = 4 - \nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

Сега намираме стойността на параметъра $\nu$, за която $l'$ пресича равнината $\alpha$:

$$\begin{aligned} (-2 + \nu) - 3(3 + \nu) - (4 - \nu) + 4 &= 0 \\ -2 + \nu - 9 - \nu - 4 + \nu + 4 &= 0 \\ \nu &= 11 \end{aligned}$$

т.е. пресечната точка $N$ на $l'$ и $\alpha$ има координати $N(9, 14, -7)$.

Сега намираме векторно параметрично уравнения на правата $l$, минаваща през т. $D$ и т. $N$:

$$l : \overrightarrow{OD} + \xi \overrightarrow{DN}, \xi \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларното параметрично уравнение

$$l : \begin{cases} x = 9\xi \\ y = -3 + 17\xi \\ z = 2 - 9\xi \end{cases}, \xi \in \mathbb{R}.$$

з) Първо намираме два нормални за правата $m$ вектора. Нека $u(x, y, z)$ е произволен вектор. Тъй като $v$ е направляващ за $m$, $u$ е нормален за $m$ само ако

$$\langle u, v\rangle = x + z = 0.$$

От горното условие виждаме, че два нормални за $m$ вектора са

$$u_1(0, 1, 0), \qquad\qquad u_2(-1, 0, 1).$$

Нека т. $P$ има спрямо $K$ координати $(x, y, z)$. Тогава т. $P \in \pi_1$ точно тогава, когато векторът $\overrightarrow{AP}$ е колинеарен с $u_1$ и $u_2$, т.е.

$$\pi_1 : \det\begin{pmatrix} x-3 & 0 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x-3) - (-1)(z-4) = \boxed{x + z - 7 = 0}.$$

и) Имаме, че т. $D'(-2, 3, 4) \in l'$ и векторът $n_\beta(1, 1, -1)'$ е направляващ за $l'$, а $v(1, 0, 1)$ е направляващ за $m$. Нека т. $P$ има спрямо $K$ координати $(x, y, z)$. Тогава т. $P \in \pi_2$ точно тогава, когато са колинеарни векторите $\overrightarrow{D'P}$, $n_\beta$ и $v$, т.е.

$$\begin{aligned} \pi_2 : \det\begin{pmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ y-3 & 1 & 0 \\ z-4 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= (x+2) + (y-3)(-1) - (z-4) - (y-3) = \\ &= \boxed{x - 2y - z + 12 = 0}. \end{aligned}$$

к) Аналогично на $\pi_2$, имаме, че т. $P \in \pi_3$ точно тогава, когато са колинеарни векторите $\overrightarrow{D'P}$, $n_\beta$ и $n_\alpha(1, -3, -1)$

$$\pi_3 : \det\begin{pmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ y-3 & 1 & -3 \\ z-4 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= (x+2)(-1) + (-3)(z-4) + (y-3)(-1) - (z-4) - (y-3)(-1) - (x+2)(-3)(-1) =$$
$$= (-4)(x+2) + (-4)(z-4) = 0$$

или $\boxed{\pi_3 : x + z - 2 = 0}$.

□

## 2.3. Прави в пространството

**Задача 4.** *В пространството е зададена ортонормирана координатна система $K = Oxyz$. Спрямо нея кръстосаните прави $g$ и $h$ имат скаларни параметрични уравнения*

$$g : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \qquad и \qquad h : \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - 5\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

*Да се намери (скаларно) параметрично уравнение на трансверзалата $t$ на $g$ и $h$, за която:*

а) *Точката $A(1,1,1)$ лежи върху $t$*

б) *$t$ лежи в равнината $\alpha : 2x + y - 3z + 6 = 0$*

в) *$t$ е успоредна на правата*

$$a : \begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

*Решение.* Тъй като правата $t$ е трансверзала на $g$ и $h$, тя има по една обща точка с двете прави. Да означим тези точки с $G$ и $H$, т.е.

$$t \cap g = \{G(x_g, y_g, z_g)\} \qquad \text{и} \qquad t \cap h = \{H(x_h, y_h, z_h)\}.$$

Тъй като $G \in g$ и $H \in h$, то техните координати удовлетворяват уравненията на $g$ и $h$ за някои стойности на параметрите $\lambda$ и $\mu$, т.е.

$$G(1 + 2\lambda_G, 4 + 4\lambda_G, 4 + 4\lambda_G) \qquad \text{и} \qquad H(-1, -1 - 5\mu_H, 1 + 3\mu_H).$$

Тогава векторът $\overrightarrow{HG}$ има координати

$$\overrightarrow{HG}(2 + 2\lambda_G, 5 + 4\lambda_G + 5\mu_H, 3 + \lambda_G - 3\mu_H).$$

а) За да принадлежи точката $A$ на трансверзалата $t$, искаме векторите

$$\overrightarrow{AG}(2\lambda_G, 3 + 4\lambda_G, 3 + \lambda_G) \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{AH}(-2, -2 - 5\mu_H, 3\mu_H)$$

да бъдат колинеарни, т.е. съществува $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ такова, че $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AH}$. Разписваме това уравнение покоординатно:

$$\begin{cases} 2\lambda_G = -2k \mid (\times 1/2) \\ 3 + 4\lambda_G = -2k - 5k\mu_H \mid \text{ изваждаме третото уравнение} \\ 3 + \lambda_G = 3k\mu_H \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \lambda_G = -k \\ 3\lambda_G = -2k - 8k\mu_H \\ 3 + \lambda_G = 3k\mu_H \end{cases}.$$

От второто уравнение получаваме

$$-k = -8k\mu_H \implies \mu_H = 1/8 \implies H(-1, -13/8, 11/8).$$

Правата $t$ има векторно параметрично уравнение

$$t : \overrightarrow{OA} + 8\nu\overrightarrow{AH}, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларно параметрично уравнение

$$t: \begin{cases} x = 1 - 16\nu \\ y = 1 - 21\nu \\ z = 1 + 3\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

б) Намираме $\lambda_G$ и $\mu_H$ като директно заместваме координатите на $G$ и $H$ в уравнението на $\alpha$:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2\lambda_G) + (4 + 4\lambda_G) - 3(4 + \lambda_G) + 6 &= 0 \\ 2 + 4\lambda_G + 4 + 4\lambda_G - 12 + 3\lambda_G + 6 &= 0 \\ 5\lambda_G &= 0, \end{aligned}$$

следователно $\lambda_G = 0$ и т. $G$ има координати $G(1, 4, 4)$.

$$\begin{aligned} 2(-1) + (-1 - 5\mu_H) - 3(1 + 3\mu_H) + 6 &= 0 \\ -2 - 1 - 5\mu_H - 3 - 9\mu_H + 6 &= 0 \\ -14\mu_H &= 0, \end{aligned}$$

следователно $\mu_H = 0$ и т. $H$ има координати $H(-1, -1, 1)$.

Правата $t$ има векторно параметрично уравнение

$$t: \overrightarrow{OG} + \nu\overrightarrow{GH}, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларно параметрично уравнение

$$t: \begin{cases} x = 1 - 2\nu \\ y = 4 - 5\nu \\ z = 4 - 3\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

в) Първо намираме скаларно параметрично уравнение на правата $a$. Събирайки двете уравнения, получаваме

$$\begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - 4z + 1 = 0 \mid \text{ прибавяме първото уравнение} \end{cases} \sim$$
$$\sim \begin{cases} 4z = 3 - x - 5y = 7/3 - 5y \\ x = 2/3 \end{cases}.$$

Параметризираме горната система чрез $\xi \in \mathbb{R}$, полагайки $y = 4\xi$, и получаваме

$$a: \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 4\xi \\ z = 7/12 - 5\xi \end{cases}, \xi \in \mathbb{R}.$$

Означаваме направляващия вектор от горното уравнение чрез $v_a(0,4,-5)$. За да бъдат колинеарни правите $t$ и $a$ е достатъчно двойка техни направляващи вектори да бъдат колинеарни, т.е. $\overrightarrow{GH} \parallel v_a \iff \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \overrightarrow{GH} = kv_a$. Разписвайки това уравнение само за първата координата, получаваме

$$2 + 2\lambda_G = 0 \cdot k \implies \lambda_G = -1 \implies G(-1,0,3).$$

Разполагайки с точка $G \in t$ и направляващ вектор $v_a \parallel t$, за трансверзалата $t$ получаваме векторно параметрично уравнение

$$t : \overrightarrow{OG} + \nu v_a, \nu \in \mathbb{R}$$

и, съответно, скаларно параметрично уравнение

$$t : \begin{cases} x = -1 \\ y = 4\nu \\ z = 3 - 5\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}.$$

□

### 2.4. Канонизиране на криви от втора степен

**Задача 5.** *Спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ е зададена кривата*

$$c : 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 16y - 8 = 0.$$

*Да се намери метрично канонично уравнение на $c$ и да намерят координатите на фокусите на $c$ спрямо $K$.*

*Решение.* 1. Търсим ортонормирана координатна система $K'$, в която уравнението на кривата $c$ да няма смесен квадратен член $xy$. Означаваме матрицата на квадратичната форма $4x^2 - 4xy + y^2$ с

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Търсим собствените вектори на $A$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

което уравнение е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} 4x - 2y = \lambda x \\ -2x + y = \lambda y \end{cases} \sim \begin{cases} -2y = (\lambda - 4)x \\ (1-\lambda)y = 2x \end{cases} \sim \begin{cases} y = \frac{4-\lambda}{2}x \\ y = \frac{2}{1-\lambda}x. \end{cases} \tag{4}$$

За да получим нормирани собствени вектори, искаме

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 1 \\
\left(1 + \frac{4}{(1-\lambda)^2}\right)x^2 &= 1 \\
\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 5}{(1-\lambda)^2}x^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

За определеност взимаме само една двойка корени

$$
x = \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}} \text{ и } y = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}} \tag{5}
$$

Изваждайки двете уравнения в (4), стигаме до характеристичния полином на $A$:

$$
\frac{4-\lambda}{2} - \frac{2}{1-\lambda} = 0 \iff 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = 0,
$$

чиито корени са $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 = 5$, а замествайки в (5), директно получаваме собствените вектори

$$
v_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad v_2\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).
$$

Желаната ротация има вида

$$
R : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \end{cases}
$$

Спрямо новата координатна система $K'$ кривата $c$ има вида

$$
c : 5y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{16}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 8 = 5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x' - \frac{20}{\sqrt{5}}y' - 8 = 0,
$$

което можем да опростим до

$$
c : 5\sqrt{5}y'^2 - 30x' - 20y' - 8\sqrt{5} = 0,
$$

2. Имаме уравнения на парабола, но то не е канонично. Търсим афинна координатна система $K''$, в която параболата да е центрирана, т.е. търсим транслация

$$
T : \begin{cases} x' = x'' + a \\ y' = y'' + b, \end{cases}
$$

так че в новата координатна система уравнението да има вида $c : y'' = 2px''$ за някое число $p$.

Правим транслацията и след това намираме подходящи стойности за параметрите $a$ и $b$:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{5}y'^2 - 30x' - 20y' - 8\sqrt{5} = 0 \\ 5\sqrt{5}y''^2 + 10\sqrt{5}y''b + 5\sqrt{5}b^2 - 30x'' - 30a - 20y'' - 20b - 8\sqrt{5} = 0 \\ 5\sqrt{5}y''^2 + (10\sqrt{5}b - 20)y'' = 30x'' + (-5\sqrt{5}b^2 + 30a + 20b + 8\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Приравняваме на нула коефициента пред $y''$ и свободния коефициент:

$$10\sqrt{5}b - 20 = 0 \implies b = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{5\sqrt{5}b^2 - 20b - 8\sqrt{5}}{30} = \frac{4\sqrt{5} - \frac{40}{\sqrt{5}} - 8\sqrt{5}}{30} = \frac{20 - 40 - 40}{30\sqrt{5}} = \frac{-60}{30\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Тогава за композираната смяна на координатната система от $K''$ към $K$ получаваме

$$R \circ T : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'' + a - 2y'' - 2b) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'' + 2a + y'' + b) \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x'' - 2y'' - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x'' + y'' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

и спрямо $K''$ параболата има уравнение

$$c : 5\sqrt{5}y''^2 = 30x'' \iff c : y''^2 = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}x''$$

3. Фокусът на параболата $c$ има спрямо $K''$ координати $F\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}, 0\right)$. Спрямо $K$ фокусът има координати

$$R \circ T : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{9}{10} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5} \end{cases},$$

т.е. $F\left(-\frac{9}{10}, \frac{1}{5}\right)$.

□

## 3. Литература


Богдан Александров (лекции), Станислав Иванов (упражнения) и Янис Василев (записки). *Записки от лекции и упражнения по аналитична геометрия*. 2019. URL: https://ivasilev.net/files/%D0%A4%D0%9C%D0%98/%D0%90%D0%93/ (дата на посещ. 19.01.2019).

*Конспект за ДИ за спец. статистика*. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX (дата на посещ. 24.03.2019).