Тема 2

https://github.com/v--/se2018

Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Янис Василев

Оригинал: 5 юли 2019
Ревизия: `7e5ed38` от 28 януари 2024
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Някои твърдения и доказателства са заимствани от Knapp, *Basic Algebra* и Роячки, *Разписани лекции по висша алгебра*.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Определение за симетричен оператор и матрица на симетричен оператор.
2. Всички характеристични корени на симетричен оператор са реални числа.
3. Всеки два вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални.
4. Съществува ортонормиран базис на пространството, в който матрицата на симетричен оператор е диагонална.

1.2. Основни понятия

Нека V_n е фиксирано n-мерно евклидово пространство над полето $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{R}$-линейно пространство снабдено със скаларно произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.

1. Линейният оператор $L : V_n \to V_n$ наричаме **симетричен**, ако за произволен вектор $x \in V_n$ е изпълнено равенството

$$\langle x, L(x) \rangle = \langle L(x), x \rangle.$$

2. Квадратната матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ наричаме **симетрична**, ако $A = A^T$.

Теорема 2. *Симетричните оператори имат симетрични матрици.*

Доказателство. Нека $e_1, \dots, e_n$ е (нареден) ортонормиран базис на V_n, нека $L : V_n \to V_n$ е линеен оператор и нека $A = (a)_{i,j}$ е матрицата на L спрямо $e_1, \dots, e_n$.

Да отбележим първо, че действието на оператора върху произволен вектор се определя напълно от действието му върху базисните вектори.

За произволни базисни вектори e_i и e_j имаме

$$\langle e_i, L(e_j) \rangle = \left\langle e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \delta_{i,k} = a_{i,j}.$$

Доказателство на достатъчност. Ако операторът L е симетричен, за произволни базисни вектори получаваме

$$a_{i,j} = \langle e_i, L(e_j) \rangle = \langle L(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, L(e_i) \rangle = a_{j,i}.$$

Следователно матрицата A е симетрична.

Доказателство на необходимост. Обратно, ако матрицата A е симетрична, за произволни базисни вектори получаваме

$$\langle e_i, L(e_j) \rangle = a_{i,j} = a_{j,i} = \langle e_j, L(e_i) \rangle = \langle L(e_i), e_j \rangle.$$

Следователно операторът L е симетричен. □

1.3. Собствени стойности на симетрични оператори

Тъй като в общия случай корените на характеристичния полином на линеен оператор могат да не бъдат реални числа, ще работим с по-базови понятия от собствени стойности и собствени вектори, тъй като не разполагаме с необходимия апарат за комплексни линейни пространства. В частност, „имитираме“ комплексно скаларно произведение.

Теорема 3. *Корените на характеристичния полином* $\det(A - \lambda I_n)$ *на симетрична матрица* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *са реални числа.*

Доказателство. Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е корен на характеристичния полином $\det(A - \lambda I_n)$. Ще покажем, че $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тъй като $\det(A - \lambda I_n) = 0$, матрицата $A - \lambda I_n$ има нетривиално ядро и значи съществува ненулев комплексен вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, такъв че

$$(A - \lambda I_n)x = x,$$

което е еквивалентно на равенството

$$Ax = \lambda x$$

и на системата

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i, i = 1, \dots, n.$$

За фиксирано i умножаваме двете страни на равенството с комплексно спрегнатото $\overline{x_i}$ на x_i и сумираме по i, за да получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j &= \lambda x_i \ \mid \cdot \overline{x_i} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\overline{x_i}x_j &= \lambda x_i\overline{x_i} = \lambda |x_i|^2 \ \mid \sum_{i=1}^{n} \cdot \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\overline{x_i}x_j &= \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.
\end{aligned}$$

Поради симетричността на матрицата A е изпълнено

$$\overline{a_{i,j}\overline{x_i}x_j} = a_{j,i}x_i\overline{x_j}, \ i, j = 1, \dots, n,$$

следователно

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} &= \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\overline{x_i}x_j} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{i,j}\overline{x_i}x_j} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\overline{x_j}x_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\overline{x_i}x_j = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.
\end{aligned}$$

Тъй като $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, получаваме, че $\lambda = \overline{\lambda}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Следствие 4. *Симетричните оператори над V_n имат n собствени стойности, броейки кратностите.*

1.4. Спектрална теорема

Теорема 5 (Спектрална теорема)**.** *Собствените вектори на симетричен оператор над V_n образуват ортонормиран базис във V_n.*

Доказателство. Ще докажем теоремата с индукция по n. За $n = 1$ линейните оператори са умножение с число, следователно всеки линеен оператор $L : V_1 \to V_1$ е симетричен и има за собствен вектор числото 1.

Нека $n > 1$. Допускаме, че теоремата е вярна за всички линейни пространства над $\mathbb{R}$ с размерност $< n$.

Нека $L : V_n \to V_n$ е симетричен оператор, λ е собствена стойност на L и v е съответния собствен вектор. Разглеждаме ортогоналното допълнение U на $\operatorname{span}\{v\}$, т.е.

$$U = \{u \in V_n \mid \langle u, v\rangle = 0\}.$$

Множествата $\operatorname{span}\{v\}$ и U не се пресичат, директната им сума е цялото пространство V_n и $\operatorname{span}\{v\}$ е едномерно линейно подпространство на V_n, следователно U е $n-1$-мерно подпространство.

Ще покажем, че подпространството U е инвариантно относно L, т.е. $L(U) \subseteq U$. За произволен вектор $u \in U$ имаме

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = 0.$$

Следователно $\langle u, v\rangle = 0$ и $L(u) \in U$.

Прилагаме индуктивната хипотеза към рестрикцията L_U на оператора L върху U и получаваме ортонормиран базис $e_1, \dots, e_{n-1}$ на U от собствени вектори на L. Всички те са ортогонални на v като елементи на U, следователно системата вектори $e_1, \dots, e_{n-1}, v$ образува ортонормиран базис на V_n, състоящ се от собствени вектори на L. □

Следствие 6. *Всеки два собствени вектора на симетричен оператор над V_n, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални.*

Следствие 7. *Симетричните оператори над V_n имат диагонални матрици спрямо базисите си от собствени стойности.*

2. Задачи

2.1. Анотация

1. За даден симетричен оператор да се намерят ортонормиран базис на пространството, в който матрицата му е диагонална, както и самата матрица.

2.2. Диагонализация на симетричен оператор

Задача 1 (*Задачи за ДИ за спец. статистика*). *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ p & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

зависеща от реален параметър p. Да се пресметнат стойностите на реалния параметър p, за които характеристичният полином $f_\varphi(x)$ на φ изпълнява равенството $f_\varphi(2) = 10$. За получените стойности на p да се намери ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 в $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица D.

Решение. Първо намираме характеристичния полином на φ:

$$\begin{aligned} f_\varphi(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & p & 0 \\ p & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - (1-\lambda)2^2 - (-1-\lambda)p^2 = \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) + 4(\lambda - 1) + (\lambda+1)p^2 = \\ &= -\lambda^3 + (5+p^2)\lambda + (p^2 - 4). \end{aligned}$$

Получаваме следното уравнение за p:

$$f_\varphi(2) = -2^3 + 2(5+p^2) + (p^2 - 4) = 3p^2 - 2 = 10,$$

което има решения $p = \pm 2$.

Тъй като p участва в характеристичния полином само чрез квадрата си p^2, и в двата случая за характеристичния полином получаваме

$$f_\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9) = \boxed{-\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)}.$$

Собствените стойности са $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = -3$.

Както ще се убедим по-късно, матрицата D на φ спрямо наредения базис от собствени вектори, съответстващи на намерените собствени стойности, е

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3. \end{pmatrix}$$

Съответстващите собствени вектори $e_k, k = 1, 2, 3$ намираме от системата

$$\begin{gathered} Ae_k = 0 \cdot e_k, \\ \begin{pmatrix} 1 & \pm 2 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,k} \\ e_{2,k} \\ e_{3,k} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} e_{1,k} \\ e_{2,k} \\ e_{3,k} \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

От първото уравнение следва

$$\begin{aligned} e_{1,k} \pm 2e_{2,k} &= \lambda e_{1,k}, \\ \pm 2e_{2,k} &= (\lambda - 1)e_{1,k}, \\ e_{2,k} &= \pm\frac{\lambda - 1}{2} e_{1,k}, \end{aligned}$$

а от третото следва

$$\begin{aligned}
2e_{2,k} - e_{3,k} &= \lambda e_{3,k},\\
2e_{2,k} &= (\lambda+1)e_{3,k},\\
e_{3,k} &= \frac{2}{\lambda+1}e_{2,k},\\
e_{3,k} &= \pm\frac{\lambda-1}{\lambda+1}e_{1,k}.
\end{aligned}$$

Тъй като искаме собствените вектори да бъдат нормирани, имаме ограничението

$$\begin{aligned}
\|e_k\|^2 = \langle e_k, e_k\rangle &=\\
&= {e_{1,k}}^2 + \left(\pm\frac{\lambda-1}{2}e_{1,k}\right)^2 + \left(\pm\frac{\lambda-1}{\lambda+1}e_{1,k}\right)^2 =\\
&= {e_{1,k}}^2\left[1 + \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2\right] = 1.
\end{aligned}$$

За конкретните собствени стойности получаваме

$$\begin{aligned}
{e_{1,1}}^2\left[1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\right] = \frac{9}{4}{e_{1,1}}^2 = 1 &\implies e_{1,1} = \frac{2}{3} \implies e_{2,1} = \mp\frac{1}{3} \implies e_{3,1} = \mp\frac{2}{3},\\
{e_{1,2}}^2\left[1 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{9}{4}{e_{2,1}}^2 = 1 &\implies e_{1,2} = \frac{2}{3} \implies e_{2,2} = \pm\frac{2}{3} \implies e_{3,2} = \pm\frac{1}{3},\\
{e_{1,3}}^2\left(1 + (-2)^2 + 2^2\right) = 9\cdot e_{1,3}^2 = 1 &\implies e_{1,3} = \frac{1}{3} \implies e_{2,3} = \mp\frac{2}{3} \implies e_{2,3} = \pm\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Следователно базисите от собствени стойности за $p = \pm 2$ има матрица

$$E = \left[e_1 \mid e_2 \mid e_3\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ \mp1 & \pm2 & \mp2\\ \mp2 & \pm1 & \pm2 \end{pmatrix}.$$

Остана да се уверим, че $AE = ED$. Наистина,

$$\begin{aligned}
AE &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \pm2 & 0\\ \pm2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ \mp1 & \pm2 & \mp2\\ \mp2 & \pm1 & \pm2 \end{pmatrix} =\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-2 & 2+4 & 1-4\\ \pm4\mp4 & \pm6 & \pm2\pm4\\ \mp2\pm2 & \pm4\mp1 & \mp4\mp2 \end{pmatrix} =\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3\\ 0 & \pm6 & \pm6\\ 0 & \pm3 & \mp6 \end{pmatrix} =\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ \mp1 & \pm2 & \mp2\\ \mp2 & \pm1 & \pm2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = ED.
\end{aligned}$$

□

3. Литература

Knapp, Anthony. *Basic Algebra*. Англ. Digital Second Edition. 2016. URL: http://www.math.stonybrook.edu/~aknapp/.

Задачи за ДИ за спец. статистика. Редовен изпит. 2011. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/JcrsrbN69QjtfGu (дата на посещ. 04.07.2019).

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrndOsX (дата на посещ. 24.03.2019).

Роячки, Александър. *Разписани лекции по висша алгебра*. 2013. URL: https://debian.fmi.uni-sofia.bg/study/materials/la/lectures/ (дата на посещ. 04.07.2019).