

Тема 4

<https://github.com/v--/se2018>

Граница, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива. Геометрична интерпретация.

Янис Василев

Оригинал: 6 юли 2019

Ревизия: 7e5ed38 от 28 януари 2024

За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Теорията е разписана без външни източници.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Дефиниции на Хайне и Коши за граница на функция в крайна точна и в безкрайността.
2. Доказателство на еквивалентност на двете дефинициите.
3. Дефиниция за непрекъснатост на функция чрез дефинициите на Хайне и Коши.
4. Дефиниция за производна на функция като граница на диференчните частно.
5. Физична интерпретация на производната като моментна скорост.
6. Геометрична интерпретация на производната в точка като ъглов коефициент на допирателната към графиката на функцията.
7. Формули за сума, произведение, частно и съставна функция на две диференцируеми функции.
8. Производни на степенна, показателна и основните тригонометрични функции.
9. Формула за производна на обратна функция.
10. Използване на формулата за производна на обратна функция за намиране на производните на $\ln x$ и $\arcsin x$.

11. Дефиниция за примитивна функция.
12. Разликата на две примитивни функции над интервал е константа.

1.2. Отворени множества

Определение 1. Множеството $U \subseteq \mathbb{R}$ ще наричаме **отворено**, ако U е обединение на (произволен брой) отворени интервали. В частност, \emptyset е отворено като обединение на 0 множества. Това определение изглежда нагласено, но всъщност казва, че отворените интервали са база за стандартната топология в \mathbb{R} .

Ако U е отворено множество и $x \in U$, казваме, че U е **околност** на x .

За удобство, при изследване на сходимост понякога се ограничаваме до отворени интервали вместо произволни отворени множества. В.ж., например, твърдение 8.

Лема 2. Ако $a < b$ са реални числа, те имат поне една двойка непресичащи се околности.

Доказателство. Разглеждаме, например, интервалите

$$U_a = \left(a, \frac{a+b}{2}\right) \qquad U_b = \left(\frac{a+b}{2}, b\right).$$

□

1.3. Граница на редица

Определение 3. Безкрайните последователности от реални числа наричаме редици и бележим с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ или просто с $\{a_k\}$, когато няма опасност от недоразумение.

Формално, редиците са функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 4. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е произволно непразно множество. Казваме, че $a \in D$ е **точка на сгъстяване** на множеството D или **гранична точка** на D , ако във всяка околност на a има точки на D , различни от a .

Определение 5. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и $\{a_k\} \subseteq D$ е произволна редица. Казваме, че a е **граница на редицата** $\{a_k\}$ или че редицата $\{a_k\}$ **клони** към a , ако всяка околност на a съдържа цялата редица с изключение на краен брой членове. Пишем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a, \qquad a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a.$$

Ако една редица има граница, казваме, че **редицата е сходяща**. Ако една редица не е сходяща, тя е **разходяща**.

Забележка 6. В общия случай е възможно $a \notin D$.

Твърдение 7. Сходящите редици $\{a_k\} \subseteq D$ имат единствена граница.

Доказателство. Нека a и b са граници на редицата $\{a_k\}$. Ако a и b са различни, те непременно имат поне една двойка непресичащи се околности според лема 2.

От друга страна, ако U_a и U_b са някакви околности на a и b , те непременно се пресичат, тъй като и двете съдържат цялата редица с изключение на краен брой членове. Заклучаваме, че $a = b$. \square

Твърдение 8. Редица $\{a_k\} \subseteq D$ от реални числа клони към a тогава и само тогава за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува индекс k_0 такъв, че при $k \geq k_0$ да бъде изпълнено $|a_k - a| < \varepsilon$.

Доказателство. Първо ще докажем достатъчност. Фиксираме ε и предполагаме, че само краен брой членове на редицата не се съдържат в интервала $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$. Тогава съществува индекс k_0 , такъв че всички членове на редицата след a_{k_0} се съдържат в интервала, т.е. $|a - a_k| < \varepsilon$ за всяко $k \geq k_0$.

Обратно, ако е зададена околност U на a , избираме отворен интервал $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U$ и индекс k_0 , така че $|a - a_k| < \varepsilon$ при $k \geq k_0$. Получаваме, че единствено краен брой членове на редицата с индекси, по-малки от k_0 , потенциално се съдържат извън $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$. \square

Твърдение 9. Ако редиците $\{a_k\} \subseteq D$ и $\{b_k\} \subseteq D$ клонят към a и b , съответно, тогава

$$1. \ a_k + b_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a + b$$

$$2. \ a_k b_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} ab$$

Доказателство. Понеже $a_k \rightarrow a$ и $b_k \rightarrow b$, можем да изберем индекс k и $\delta > 0$ такива, че да бъдат изпълнени неравенствата $|a - a_k| < \delta$ и $|b - b_k| < \delta$.

1. От неравенството на триъгълника следва

$$|(a + b) - (a_k + b_k)| = |(a - a_k) + (b - b_k)| \leq |a - a_k| + |b - b_k| < 2\delta.$$

И така, при зададено $\varepsilon > 0$, достатъчно е да положим $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, за да съществува индекс k_0 , за който

$$|(a + b) - (a_k + b_k)| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

2. Развиваме израза

$$\begin{aligned} ab - a_k b_k &= (ab - ab_k) + (ab_k - a_k b) + (a_k b - a_k b_k) = \\ &= a(b - b_k) + (ab_k - ab + ab - a_k b) + (-a_k)(b_k - b) = \\ &= a(b - b_k) + a \underbrace{(b_k - b)}_{\in (-\delta, \delta)} + (a - a_k)b + (-a_k) \underbrace{(b_k - b)}_{\in (-\delta, \delta)} = \\ &= a \underbrace{(b - b_k)}_{\in (-\delta, \delta)} + \underbrace{(a - a_k)}_{\in (-\delta, \delta)} \underbrace{(b_k - b)}_{\in (-\delta, \delta)} + \underbrace{(a - a_k)}_{\in (-\delta, \delta)} b. \end{aligned}$$

Следователно $|ab - a_k b_k| < \delta^2 + |a + b|\delta$. Ако поискаме δ да бъде по-малко от 1, ще получим $\delta^2 \leq \delta$ и, съответно, $|ab - a_k b_k| < (1 + |a + b|)\delta$.

И така, при зададено $\varepsilon > 0$, достатъчно е да положим $\delta = \frac{\min\{\varepsilon, 1\}}{1 + |a + b|}$, за да съществува индекс k_0 , за който

$$|ab - a_k b_k| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

□

Определение 10. Нека редицата $\{a_k\}$ е неограничена, т.е. всяка околност на 0 съдържа само краен брой нейни елементи. Казваме, че редицата **клони към безкрайност** и пишем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty,$$

ако редицата е (нестрого) монотонно растяща с изключение на краен брой членове.

Аналогично се дефинира сходимост към отрицателна безкрайност $-\infty$ за неограничени монотонно намаляващи редици.

1.4. Граница на функция

Забележка 11. За съжаление, когато допуснем сходимост във и към безкрайни точки, можем да получим комбинаторна експлозия от определения. Затова в началото ще дадем различни дефиниции само за сходимост във и към крайни точки и ще докажем еквивалентността им, а след това ще дадем само едно определение за останалите видове сходимост.

Алтернативен подход е да се използва компактификация, т.е. добавяне на точките ∞ и $-\infty$ като класове на еквивалентност редици, клонящи към безкрайност. Този подход, обаче, конфликттира с алгебричните свойства на реалните числа и е прекалено нестандартен, за да се използва на изпит.

Определение 12 (Сходимост по Хайне). Нека a е точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **клони към** A при x клонящо към a или A е граница на $f(x)$ при x клонящо към a и пишем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A,$$

ако за всяка сходяща към a редица $\{a_k\} \subseteq D$ съответната редица от функционални стойности $\{f(a_k)\}_{k=1}^{\infty}$ клони към A .

Определение 13 (Сходимост по Коши). Нека a е точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **клони към** A при x клонящо към a , ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in \mathbb{R}$ при $|x - a| < \delta$ да е изпълнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Забележка 14. В общия случай, функцията може не просто да не съвпада с границата си в дадена точка, а може и да не бъде дефинирана в тази точка.

Теорема 15. Определенията на Хайне и Коши за сходимост са еквивалентни.

Доказателство. (Хайне \implies Коши). Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ клони към A в точката a според определението на Хайне и нека $\varepsilon > 0$ е произволно.

С цел да получим противоречие, допускаме, че условието на Коши за сходимост не е изпълнено, т.е. за всяко $\delta > 0$ съществува $a_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$, такова че $f(a_\delta)$ е извън интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Построяваме редица $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, където a_n избираме така, че $a_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ и $f(a_n) \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Построената редица очевидно клони към a и според определението на Хайне за сходимост на функция, само краен брой членове от редицата $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ са извън интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Но това противоречи на избора на елементи на редицата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Следователно е изпълнено определението на Коши за сходимост.

(Коши \implies Хайне). Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ клони към A в точката a според определението на Коши.

Нека U е произволна околност на A и нека числото $\varepsilon > 0$ е такова, че интервалът $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, който също е околност на A , се съдържа в U . От определението на Коши за сходимост съществува число $\delta > 0$, за което за произволно $x \in \mathbb{R}$ неравенството $0 < |x - a| < \delta$ да влече $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Нека редицата $\{a_k\}$ клони към a и нека n е най-големият индекс, за който $|a - a_n| \geq \delta$, или $n = 0$, ако няма такива членове. Тогава подредицата $\{a_k\}_{k>n}$ също клони към a , а редицата $\{f(a_k)\}_{k>n}$ се съдържа изцяло в околността $(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \subseteq U$ на a .

Но това означава, че редицата $\{f(a_k)\}_{k>0}$ клони към A и следователно е изпълнено определението на Хайне за сходимост. \square

Твърдение 16. Нека a е точка на съгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Ако $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ клони към A в точката a и $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ клони към B в точката a , тогава

1. За произволна константа $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cA.$$

2. Граничният преход е адитивен

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B.$$

3. Граничният преход е мултипликативен

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

Доказателство. Следва директно от теорема 15 and твърдение 9. \square

Определение 17 (Обобщена сходимост по Хайне). Нека редицата $\{a_k\} \subseteq D$ клони към крайна или безкрайна граница a , т.е. a е точка на съгъстяване на D или $a = \pm\infty$, а редицата от функционални стойности $\{f(a_k)\}$ клони към крайна или безкрайна граница A , т.е. $A \in \mathbb{R}$ или $A = \pm\infty$. Казваме, че функцията $f(x)$ **клони** към A при x клонящо към a и пишем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

1.5. Непрекъснатост

Определение 18 (Непрекъснатост по Хайне). Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in D$ е точка на съгъстяване на D . Казваме, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е **непрекъсната** в точката a , ако за произволна редица $\{a_k\} \subseteq D$, клоняща към a , съответната редица $\{f(a_k)\}$ от функционални стойности клони към $f(a)$.

Определение 19 (Непрекъснатост по Коши). Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in D$ е точка на съгъстяване на D . Казваме, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е **непрекъсната** в точката a , ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in \mathbb{R}$ при $0 < |x - a| < \delta$ да е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Забележка 20. От теорема 15 следва, че двете определения за непрекъснатост съвпадат и са еквивалентни на следната проста формула:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right).$$

Определение 21. Казваме, че една $f(x)$ е **непрекъсната навсякъде** или **поточно непрекъсната**, ако $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционната си област.

1.6. Диференцируемост

Определение 22. Нека точката a принадлежи на D заедно със своя дясна околност, т.е. за някое число $\varepsilon > 0$ интервалът $[a, a + \varepsilon)$ лежи изцяло в D . **Производна** на функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ в точка $a \in D$ наричаме границата

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Частното $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ наричаме **диференчно частно**. За простота, ще изпускаме условието $h \neq 0$ от записа, но ще предполагаме, че е изпълнено.

Ако $f(x)$ има производна в точка a , казваме, че тя е **диференцируема** в тази точка.

Ако $D \subseteq \mathbb{R}$ е отворено множество и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в цялата си дефиниционна област, казваме, че тя е диференцируема, без да правим допълнително пояснения. В такъв случай производните се разглеждат като функция на $x \in D$. Ако производната $f'(x)$ съществува в околност на a и е непрекъсната в a , казваме, че $f(x)$ е непрекъснато диференцируема.

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в a , **диференциал** $df(a)$ на $f(x)$ в точката a наричаме линейната функция $h \mapsto f'(a) \cdot h$.

Диференциалът на променливата x , разглеждана като идентитет, е също идентитет, тъй като диференчното частно $\frac{(x+h)-x}{h}$ на идентитета е константата 1. Понеже диференциалът $dx(a)$ не зависи от точката a , ще пишем просто dx .

Това ни дава основание да въведем **означенията на Лайбниц** за производни като частно на диференциалите

$$\frac{df(a)}{dx} = \frac{f'(a) \cdot h}{h} = f'(a).$$

Забележка 23. Ако множеството D не е отворено, за функцията $f(x)$ с дефиниционна област D не е възможно да се определят леви или десни производни в някои точки. Затова обикновено, когато говорим за диференцируемост, искаме функцията да бъде дефинирана в отворено множество.

Твърдение 24. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е отворено и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $a \in D$. Тогава $f(x)$ е и непрекъсната в a .

Доказателство. Производната $f'(a)$ е крайно число, следователно от твърдение 9 получаваме

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

□

Теорема 25 (Механична интерпретация на производна). Ако пътят, изминат от материална частица за време t , се описва чрез диференцируемата функция $f(t)$, тогава моментната скорост във времето t е равна на $f'(t)$.

Доказателство. Нека $T > 0$ и нека функцията $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $t \in (0, T)$.

Изразявайки приблизително нарастването на пътя $f(t+h) - f(t) \approx hv(t)$ като нарастването на времето умножено по скоростта $v(t)$ на движение в момента t , получаваме

$$v(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t).$$

□

Теорема 26 (Геометрична интерпретация на производна). Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $a \in D$. Разглеждаме графиката

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

на $f(x)$ като параметрична крива в равнината.

За някое достатъчно малко по абсолютна стойност число $h \in \mathbb{R}$ разглеждаме секущата d_h през точките с координати $(a, f(a))$ и $(a + h, f(a + h))$ (фигура 1). При намаляващо h , декартовите уравнения на тези секущи при се приближават към декартово уравнение на допирателна права d към Γ_f в точката a .

Твърдим, че декартовото уравнение на тази допирателна права е

$$d : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Доказателство. Тъй като точките $(a, f(a))$ и $(a + h, f(a + h))$ лежат върху правата d_h , получаваме общото уравнение за d_h

$$d_h : \det \begin{pmatrix} (a + h) - x & (a + h) - a \\ f(a + h) - y & f(a + h) - f(a) \end{pmatrix} = 0.$$

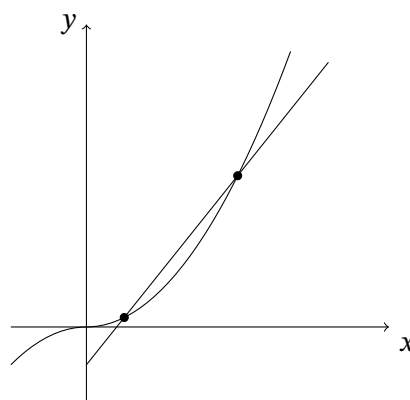
Оттук намираме декартовото уравнение на d_h :

$$\begin{aligned} d_h : (f(a + h) - f(a))(a + h - x) - (f(a + h) - y)h &= 0 \mid \cdot \frac{1}{h}, \\ \Rightarrow d_h : \frac{f(a + h) - f(a)}{h}(a - x) + (f(a + h) - f(a)) - f(a + h) + y &= 0, \\ \Rightarrow d_h : y = -\frac{f(a + h) - f(a)}{h}(a - x) + f(a), \\ \Rightarrow d_h : y = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}(x - a) + f(a). \end{aligned}$$

С граничен предох при $h \rightarrow 0$ получаваме уравнението от твърдението на теоремата. \square

Теорема 27. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са едновременно диференцируеми в точка a , имаме

$$1. (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$



Фигура 1: Секуща през две точки от графиката

$$2. (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f'(a)g(a)$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Доказателство.

1. От адитивността на граничния преход (твърдение 16) директно следва

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(a + h) - (f + g)(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} = \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

2. Използваме мултипликативността на граничния преход от твърдение 16, за да получим

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a + h) - (f \cdot g)(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a + h) - f(a + h)g(a) + f(a + h)g(a) - f(a)g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a + h) - f(a + h)g(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a) - f(a)g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot g(a) = \\ &= f(a)g'(a) - f'(a)g(a).\end{aligned}$$

3. Отново използваме свойствата от твърдение 16, за да получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(a + h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a) - f(a)g(a + h)}{h \cdot g(a) \cdot g(a + h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a) \cdot g(a + h)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a) - f(a)g(a + h)}{h} = \\ &= \frac{1}{g(a)^2} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a) - f(a)g(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)g(a + h) - f(a)g(a)}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{g(a)^2} \left(g(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \right) = \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

□

Теорема 28. Ако функцията $g(x)$ е диференцируема в точка a и $f(x)$ е диференцируема в точка $g(a)$, имаме

$$(f \circ g)'(a) = (f' \circ g)(a) \cdot g'(a).$$

Доказателство. Ще разгледаме два случая.

1. Ако $g'(a) = 0$, поради непрекъснатостта на $f(x)$ в точка $g(a)$ имаме

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = 0 = f'(g(a)) \cdot 0 = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

2. Ако $g'(a) \neq 0$, можем да считаме, че $g(a+h) - g(a) \neq 0$ за достатъчно малки по абсолютна стойност $h \in \mathbb{R}$. Тогава

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + \Delta_h) - f(g(a))}{\Delta_h} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a), \end{aligned}$$

където $\Delta_h := g(a+h) - g(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, тъй като $g(x)$ е непрекъсната в a .

□

Забележка 29. Сега ще докажем добре познатите формули за производни за e^x , $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Доказателство силно зависи от начина, по който сме определили съответните функции. Например, ако ги определим чрез степенни редове, тъждествата ще последват директно от свойствата на степенните редове.

Не знам какъв е правилният подход за ДИ, затова съм направил предположението, че $\sin(x)$ и $\cos(x)$ удовлетворяват известните от училище тригонометрични тъждества, независимо от това как са определени самите функции.

За експоненциалната функция e^x ще използвам определението (1).

Теорема 30.

1. Константните функции $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ са диференцируеми навсякъде в \mathbb{R} и имат производни 0.
2. Степенните функции $f(x) = x^n, n = 1, 2, \dots$ са диференцируеми навсякъде в \mathbb{R} и имат производни $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Показателните функции $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ са диференцируеми навсякъде в \mathbb{R} и имат производни $f'(x) = \ln \alpha \cdot \alpha^x$.
4. Функциите $\sin(x)$ и $\cos(x)$ са диференцируеми навсякъде в \mathbb{R} и имат производни $\sin'(x) = \cos(x)$ и $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Доказателство.

1. За $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ пресмятаме

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

2. За $f(x) = x^n, n = 1, 2, \dots$ използваме биномната теорема, за да пресметнем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} + n \cdot x^{n-1} \cdot h^1 + 1 \cdot x^n \cdot h^0 - x^n \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} + nx^{n-1} = \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

3. За $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ пресмятаме

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha^{x+h} - \alpha^x}{h} = \alpha^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = f'(0)\alpha^x.$$

Остава само да намерим производната на $f(x) = \alpha^x$ в нулата. За целта временно се ограничаваме до $\alpha = e$ и използваме определението

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n. \quad (1)$$

Така получаваме

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{n} \right)^n - 1 \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{h}{n} \right)^k - 1 \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{h}{n} \right)^k - 1 \right) = \\ &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{h^{k-1}}{n^k} = 1. \end{aligned}$$

Следователно производната на e^x е e^x и по теорема 28 за $f(x) = \alpha^x = e^{\ln \alpha \cdot x}$ имаме

$$f'(x) = e^{\ln \alpha \cdot x} \cdot \ln \alpha \cdot 1 = \ln \alpha \cdot \alpha^x.$$

4. Преди да пресметнем производните на $\sin(x)$ и $\cos(x)$, нека се убедим в два факта:

- а) $\sin(x)$ и $\cos(x)$ са непрекъснати функции в \mathbb{R} . Наистина, нека фиксираме $\varepsilon > 0$. С цел да определим какво δ ни е необходимо, нека фиксираме произволно $\delta > 0$. Тогава за произволно $x_0 \in \mathbb{R}$ имаме

$$\begin{aligned} |\sin(x_0 + \delta) - \sin(x_0)| &= |\sin(x_0 + \delta) + \sin(-x_0)| = \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| \leq \\ &= 2 \left| \frac{\delta}{2} \right| = \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ е достатъчно да изберем $\delta < \varepsilon$, за да бъде изпълнено

$$|\sin(y) - \sin(x_0)| < \varepsilon \text{ при } |y - x_0| < \delta.$$

Покажахме, че $\sin(x)$ е непрекъснатата функция в точката x_0 , а понеже x_0 беше произволна, то $\sin(x)$ е непрекъснат навсякъде. Като следствие, $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ също е непрекъснат навсякъде.

- б) $\sin'(0)$ съществува и е равна на единица. Наистина, за $h \in (0, \pi/2]$ имаме

$$\begin{aligned} \tan(h) &\geq h \geq \sin(h), \\ \frac{\cos(h)}{\sin(h)} &\leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{\sin(h)}, \quad | \cdot \sin(h) \\ \cos(h) &\leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1, \end{aligned}$$

откъдето следва

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \leq \sin'(0) \leq 1.$$

За произволно $\sin(x)$ пресмятаме

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(-x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2) \cos(x+h/2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \\ &= \cos(x) \cdot 1. \end{aligned}$$

Тогава за $\cos(x)$ получаваме

$$\cos'(x) = \sin'(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1) = -\sin(x).$$

□

За константите важи и по-слаб вариант на обратното твърдение:

Твърдение 31. Нека $a < b \in \mathbb{R}$, функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в (a, b) и непрекъсната в $[a, b]$ и производната ѝ е тъждествено нула в (a, b) . Тогава $f(x)$ е константа.

Забележка 32. Доказателството на този факт използва теоремата за крайните нараствания, която е извън рамките на тази тема.

Теорема 33 (Теорема за обратната функция). Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е произволно множество и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема в точка $a \in D$, при това $f'(a) \neq 0$. Тогава $f(x)$ е обратима в околност на a и обратната функция $f^{-1}(x)$ е непрекъснато диференцируема в точката $f(a)$ с производна $\frac{1}{f'(a)}$.

Доказателство. Доказателството не е тривиално и няма да го даваме. □

Забележка 34. Да забележим, че в околността, в която функцията е обратима, имаме

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \mid \frac{d}{dx} \\ f^{-1}'(f(x)) \cdot f'(x) &= 1 \\ f^{-1}'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

На практика е удобно да използваме означението на Лайбниц:

$$\frac{dx}{df} = \left(\frac{df}{dx} \right)^{-1}.$$

Естествено, тази формула важи само в околността, в която функцията е обратима.

Теорема 35.

1. Производната на $\ln(x)$ при $x > 0$ е $\frac{1}{x}$.
2. Производната на $\arcsin(x)$ при $x \in [-1, 1]$ е $\frac{1}{\cos(x)}$.

Доказателство. Ще използваме забележка 34.

1. Функцията $\ln(x)$ е обратна на e^x за всички стойности на e^x , следователно

$$\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

Тогава за $x > 0$ имаме

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. Функцията $\arcsin(x)$ е обратна на $\sin(x)$, когато $x \in [0, 2\pi]$, следователно

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)^2}}.$$

Тогава за $x \in \sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$ имаме

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

1.7. Примитивни функции

Определение 36. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е отворено и $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е някаква функция. Казваме, че **функцията** $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ **е примитивна за** $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема и производната ѝ съвпада с $f(x)$.

Теорема 37. Нека $a < b \in \mathbb{R}$, функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в (a, b) и непрекъсната в $[a, b]$ и функциите $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ са примитивни функции на $f(x)$ в (a, b) . Тогава съществува константа $c \in \mathbb{R}$, такава че

$$F(x) = c + G(x).$$

Доказателство. Ако $F(x)$ и $G(x)$ са едновременно диференцируеми в точката $a \in D$, за тяхната разлика имаме

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Според твърдение 31, функцията $F(x) - G(x)$ е константа. Полагаме $c := F(x) - G(x)$, с което доказваме теоремата. □

2. Литература

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: <https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX> (дата на посещ. 24.03.2019).