15.10.2020 Теория на апроксимациите

Задача на Лагранж

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$f(x_0), \dots, f(x_n)$

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$$

$L_n(f;x) \in \pi_n$

$L_n(f;x_i) = f(x_i)$

$i = 0, 1, \dots, n$

ИЗ на Лагранж има единствено решение

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}$$

Задача на Ермит

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ - кратностите на възлите

$\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n = N+1$

f - ф-ция, за която знаем

$f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(\nu_0-1)}(x_0)$

$\vdots$

$f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(x_n)$

$H_N(f;x) \in \pi_n$, такъв че

$H_N^{(\lambda)}(f;x_k) = f^{(\lambda)}(x_k)$,

$k = 0, 1, \dots, n$

$\lambda = 0, 1, \dots, \nu_k - 1$

Двете интерполационни задачи имат единствено решение

Обща интерполационна задача:

за дадени възли

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$,

и цели неотр. числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$,

$0 \le \lambda_i \le n$,

търсим полином $P(x) \in \pi_n$, такъв че

$P^{(\lambda_k)}(x_k) = f^{(\lambda_k)}(x_k)$ за $k = 0, 1, \dots, n$

Пр. 1 Търсим полином $p \in \pi_2$, такъв че

$p(-1) = 1$

$p'(0) = 7$

$p(1) = 2$

$x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

$p(x) = ax^2 + bx + c$,

$p'(x) = 2ax + b$

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ b = 7 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$ - преопределена система

Задачата няма решения

Двуточкова интерполационна задача

$x_0 = a$, $x_1 = b$

$(0 \leq)\ \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ - цели числа

$(0 \leq)\ \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ - цели числа

$$\begin{vmatrix} f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0m} \\ f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n} \end{vmatrix}$$ - дадени стойности

Търсим полином $p(x) \in \pi_{m+n-1}$, такъв че

$$(1) \quad \begin{cases} p^{(\lambda_i)}(a) = f_{0i}, & i = 1, \dots, m \\ p^{(\mu_j)}(b) = f_{1j}, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m+n-1} x^{m+n-1}$

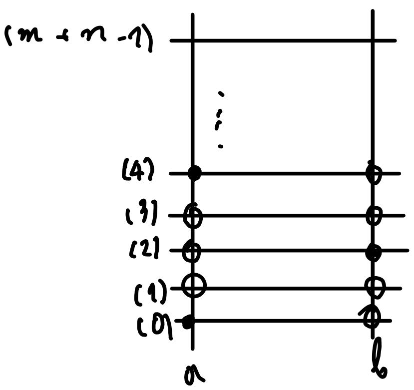
(1) е еквивалентно на система от $m+n$ линейни урав.

нения с неизвестни коефициентите на $p(x)$ (също $m+n$ на брой). Тази система има единствено решение тогава и само тогава, когато хомогенната система

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} p^{(\lambda_i)}(a) = 0,\ i = 1, \dots, m \\ p^{(\mu_j)}(b) = 0,\ j = 1, \dots, n \end{array}\right.$$

има само нулевото решение, т.е.

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m+n-1} = 0$$



Какви ограничения трябва да наложим на числата $(\lambda_i)_1^m$ и $(\mu_j)_1^n$, така че (2) да има само нулевото решение?

Нека M_k е броят на черните точки на k-то ниво и всички по-ниски нива ($k = 0, 1, \dots, m+n-1$).

Тогава няма наложени условия за стойността на $p(x)$ в $x = a$ и $x = b$

$\Rightarrow p(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ще е решение на (2)

$\Rightarrow$ необходимо изискване е $M_0 \geq 0$, т.е. на ниво 0 да има поне една черна точка.

Ако $M_1 = 1$ (на нива 0 и 1 има общо 1 черна точка) и видяхме, че тази черна точка трябва да е на ниво 0.

Нека например $\lambda_1 = 0$. Тогава полиномът $p(x) = x - a$ изпълнява (2) (условията за производни от ред 2 и по-високи са изпълнени)

$\Rightarrow M_1 \geq 2$ (на нива 0 и 1 трябва да има поне 2 черни точки).

Разсъждавайки така, стигаме до извода, че необходимо условие

(2) да има само нулевото решение е

$M_k \geq k+1$ за $k = 0, 1, \dots, m+n-1$ (УП / условие на Пойа)

ще го докажем по-късно.

Сега ще докажем, че (УП) е достатъчно за това (2) да има само нулевото решение $P(x) \equiv 0$, и съответно да е достатъчно условие за това двуточковата интерполационна задача (1) да има единствено решение.

За целта ще покажем, че ако (УП) е изпълнено и $p(x) \in \pi_{m+n-1}$ удовлетворява (2), тогава

$p^{(k)}(x)$ има поне $M_k - k$ нули в $[a, b]$ за $k = 0, 1, \dots, m+n-1$

индуктивно по k:

$k = 0$ - $p(x)$ има поне $M_0 - 0 = M_0$ нули в $[a, b]$ - вярно по условие

Да предположим, че за някое k, $p^{(k)}(x)$ има поне $M_k - k$ нули в $[a, b]$. По теоремата на Рол, $P^{(k+1)}(x)$ има поне $M_k - k - 1$ нули в (a, b)

$\Rightarrow p^{(k+1)}(x)$ има поне $M_k - k - 1$ + броя на черните точки на ниво $k+1 = M_{k+1} - k - 1$

$\Rightarrow$ твърдението е вярно за $k+1$.

$k = m+n-1$

(1) $p^{(m+n-1)}(x)$ има поне $\underbrace{M_{m+n-1}}_{m+n} - (m+m-1) = 1$ нула в $[a, b]$

но $p \in \pi_{m+n-1}$

$p^{(m+n-1)}(x)$ е константа

$\Rightarrow p \in \pi_{m+n-2} \Rightarrow p \in \pi_{m+n-3} \Rightarrow p \equiv 0$

Интерполационна задача на Биркхоф (ИЗБ)

$E = (e_{ij})_{i,j=0}^{n,r}$ – <u>матрица на инциденност</u>, ако $e_{ij} \in \{0,1\}$ и

$|E| := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r} e_{ij} = r+1$

$\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ – възли

$\{f_{ij} \in \mathbb{R} : e_{ij} = 1\}$ – данни

Търсим полином $P(x) \in \pi_r$, такъв че

$| P^{(j)}(x_i) = f_{ij} \; \forall (i,j): e_{ij} = 1$

При задача на Лагранж
$e_{i0} = 1$, $i = 0, 1, \dots, n$
$e_{ij} = 0$ за $j \geq 1$

При задача на Ермит i-тият ред на E има вида
$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\nu_i \text{ единици}}, 0, \dots, 0)$, $i = 0, \dots, n$

За $k = 0, 1, \dots, r$

$M_k := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} e_{ij}$ – брой на единиците в стълбовете на E с номера $0, 1, \dots, k$.

Условие на Пойа: $M_k \geq k+1$ за $k = 0, 1, \dots, |E|-1$.

<u>Опр. 2</u> Казваме, че матрицата на инциденност $E = (e_{ij})_{i,j=0}^{n\,r}$ е <u>балансирана</u>, ако за всеки избор на възли

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$

и на данни $\{f_{ij} : e_{ij} = 1\}$,

ИЗБ има единствено решение.

<u>Т-ма 3</u> Условието на Пойа е необходимо за това матрицата на инциденност E да е балансирана.

<u>Д-во</u> Нека $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ е произволен

вектор от възли. Условието И3П да има единствено решение при произволни данни е еквивалентно с това И3П при нулеви данни да има само нулевото решение.

Ще покажем, че ако (УП) не е изпълнено, тогава задачата

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} p^{(j)}(x_i) = 0 \quad \forall e_{ij} = 1 \\ p \in \pi_k \end{array} \right. \quad \text{има ненулево решение}$$

Да предположим, че условието на Пойа не е изпълнено. Нека k е най-малкото, за което $M_k \le k$. Това означава, че в k-тия стълб на E няма единици.

Нека броят на единиците в стълбовете на E с номера $0, 1, \dots, k-1$ е l, $l \le k$.

Нека $e_{i_1, j_1} = e_{i_2, j_2} = \dots = e_{i_l j_l} = 1$ са всичките тези единици, където $j_s < k$, $s = 1, \dots, l$.

Ще покажем, че съществува полином $p(x) \in \pi_k$, такъв че $p^{(j_s)}(x_{i_s}) = 0$ за $s = 1, 2, \dots, l$.

Ще покажем, че съществува ненулев полином $p \in \pi_k$: $p^{(j_s)}(x_{i_s}) = 0$ за $s = 1, 2, \dots, l$

Да разгледаме векторите

$$\left| \begin{array}{c} \left\{ x^m \right\}^{(j_1)}_{x = x_{i_1}} \\ \left\{ x^m \right\}^{(j_2)}_{x = x_{i_2}} \\ \vdots \\ \left\{ x^m \right\}^{(j_l)}_{x = x_{i_l}} \end{array} \right|, \quad m = 0, 1, \dots, k \text{ - това са } k+1 \text{ вектора от } \mathbb{R}^l, \ l \le k.$$

$\Rightarrow$ тези вектори са линейно зависими

$\Rightarrow$ $\exists$ числа, не всичките $=0$, така че лин. комбинацията с тези коефициенти да е равна на нулевия вектор в $\mathbb{R}^{\ell}$.

Еквивалентно, ненулевият полином

$$p(x) = \sum_{m=0}^{k} b_m x^m \in \pi_k$$

изпълнява условията

$$p^{(j_s)}(x_{j_s}) = 0 \quad \text{за} \quad s = 1, 2, \dots, \ell$$

Тогава $p^{(j)}(x) = 0$ за всяко $j > k$.

$\Rightarrow$ зад (3) притежава ненулево решение

$\Rightarrow$ E не е балансирана.

<u>Пр.1</u> (продължение) Условието от т-ма 3 не е достатъчно. За задачата, матрицата на инцидентност има вида

$$E = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f & f' & f'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрицата на инцидентност за примера изпълнява условията на Поля, но не е балансирана.

<u>Опр.4</u> <u>Блок от единици</u> наричаме всяка максимална последователност от единици в ред на E, т.е. за блок на i-ти ред между s-тата и $(s+\ell)$-тата колона имаме

$$e_{i,s} = e_{i,s+1} = \dots = e_{i,s+\ell} = 1,$$

като $e_{i,s-1} = 0$ или $s = 0$

и $e_{i,s+\ell+1} = 0$ или $s + \ell = r$.

Броят единици в един блок наричаме <u>дължина на блока</u>.

Блокът е __четен__ или __нечетен__ в зависимост от това дали дължината му е четна или не.

Блокът $e_{i,s}, \ldots, e_{i,s+l}$ наричаме __подкрепен__, ако съществуват индекси $(0 \le)\, i_1 < i < i_2\, (\le n)$ и $(0 \le)\, j_1 < j_2\, (\le r)$, такива че

$$\underline{e_{i_1,j_1} = e_{i_2,j_2} = 1}$$

В матрицата

$$E = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

блокът 1, 1 е подкрепен.

__Т-ма 5__ (1969, Еткинсон-Шарма)

Ако матрицата на инцидентност удовлетворява условието на Пойа и не съдържа подкрепени нечетни блокове от единици, тогава E е балансирана.

__Д-во__ Индукция по отношение на $|E| = r+1$.

При $r = 0, 1$, няма подкрепени блокове. При $r=0$ твърдението е очевидно, а при $r=1$ следва от разсъжденията за двуточковата интерполационна задача.

Нека теоремата е вярна за някое $r > 1$. Ще го докажем за $r+1$.

Нека $E := (e_{ij})_{i,j=0}^{n,r}$, $|E| = r+1$

$x := (x_0, x_2, \ldots, x_r)$, $x_0 < \cdots < x_r$.

Ще покажем, че от

(4) $p \in \pi_r$, $p^{(j)}(x_i) = 0 \ \forall e_{ij} = 1$

следва, че $p \equiv 0$, откъдето ще следва балансираност на E.

Условията върху p могат да се преформулират като условия върху p' по следния начин:

а) $p^{(j)}(x_i)=0 \iff p'^{(j-1)}(x_i)=0$ при $j \geq 1$

Съответно, нека $E' = (e_{ij})_{i,j=0}^{n,r-1}$ е матрицата, получена от E след изтриване на нулевия стълб в E.

б) Условията $p(x_i)=0$ за всички $e_{i,0}=1$ чрез теоремата на Рол пораждат условия за p'.

Ако $e_{i_1,0}=e_{i_2,0}=1$ са две последователни единици в нулевия стълб на E, имаме $p(x_{i_1})=p(x_{i_2})=0$

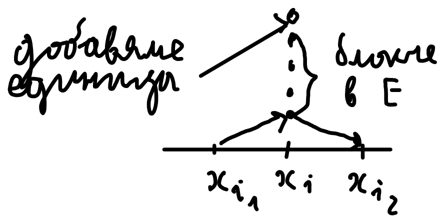
$\Rightarrow p'(\xi)=0$ за някое $\xi \in (x_{i_1}, x_{i_2})$ (нула на Рол).

б₁) Ако $\xi \neq x_i$ за някое i, тогава в нулевия стълб на матрицата E' вмъкваме ред с една единица, отговаряща на разположението на ξ спрямо останалите възли.

б₂) Ако $\xi = x_i$ за някое i, $i_1 < i < i_2$

б₂а) Ако $e_{i,1}=0$, полагаме $e'_{i,0}=1$

б₂б) Ако $e_{i,1}=1$, т.е. $e_{i,1}$ е началото на блок от единици в E, тогава в блока от единици в E' добавяме още една единица след последната.



Твърдим, че

1) E' удовлетворява усл. на Пойа

2) не съдържа подкрепени нечетни блокчета

3) $|E'| = r \overset{\text{инд. пред.}}{\Rightarrow} E'$ е балансирана

$\Rightarrow p' \equiv 0$

$\Rightarrow p$ е константа и $M_0 \geq 1$

$\Rightarrow p \equiv 0$.

22.10.2020

Т-ма 5 (Еткинсон-Шарма)

Ако матрицата на инцидентност E удовлетворява условието на Пойа и не притежава подкрепени нечетни блокове от единици, тогава E е балансирана.

Тоест $\forall \bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$\forall$ набор от данни $\{f_{ij} : e_{ij} = 1\}$

$\exists!$ полином $p \in \pi_{|E|-1}$, такъв че $p^{(j)}(x_i) = f_{ij}$ $\forall (i,j) : e_{ij} = 1$

Опр. 6 Един блок от единици в матрица на инцидентност се нарича ермитов, ако започва от нулевия стълб, т.е. $e_{i0} = e_{i1} = \dots = e_{ik} = 1$ и ($e_{i,k+1} = 0$ или $k = r$).

Матрицата на инцидентност наричаме

- Ермитова, ако всеки ред в E съдържа само един блок от единици, който да е ермитов.

- Квазиермитова, ако вътрешните редове на E съдържат единствен блок от единици и той е ермитов (не може да има подкрепен блок от единици)

Сл. 7 (от Т-ма 5) Една квазиермитова матрица на инцидентност е балансирана тогава и само тогава, когато изпълнява условието на Пойа

Д-во

(⇒) следва от т-мата на Еткинсон-Шарма

(⇐) Видяхме, че условието на Пойа е необходимо. □

Частен случай: интерполационна задача на Абел-Гончаров

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \; 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - единична матрица}$$

Ако $|E| = n+1$, то при зададени възли

$$x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \leftarrow$$ може някои възли да совпадат

и числа f_j, $j = 0, 1, \dots, n$,

съществува единствен полином $p \in \pi_n : p^{(m)}(x_m) = f_m$, $m = 0, \dots, n$

Зад. 8 Да се докаже, че матрицата на инцидентност

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

е балансирана, т.е. за всеки набор от възли $x_0 < x_1 < x_2$ и стойности f_{00}, f_{01}

f_{11}, f_{14}

f_{10}, f_{21}

съществува единствен полином $p \in \pi_5$, такъв че

$$\left| \begin{array}{l} p(x_0) = f_{00}, \ p'(x_0) = f_{01} \\ p'(x_1) = f_{11}, \ p^{(4)}(x_1) = f_{14} \\ p''(x_0) = f_{20}, \ p'(x_2) = f_{21} \end{array} \right.$$

Б.О.О. можем да смятаме, че $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_1 = t$, $t \in (0,1)$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$

Коефициенти:

$p(0)$:	1	0	0	0	0	0
$p'(0)$:	0	1	0	0	0	0
$p'(t)$:	0	1	$2t$	$3t^2$	$4t^3$	$5t^4$
$p^{(4)}(t)$:	0	0	0	0	24	$120t$
$p(1)$:	1	1	1	1	1	1
$p'(1)$:	0	1	2	3	4	5

$p'(x) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots$

$p^{(4)}(x) = 24a_4 + 120 t a_5$

Полагаме $D(t)$ да бъде детерминантата на тази матрица от коефициенти

$$D(t) = 2t\left(0 + 24.3 + 120t.4 - 120t.3 - 0 - 24.5\right) +$$

$$+1\left(3t^2.24.5 + 4t^3.120t.3 + 0 - 5t^4.24.3 - 0 - 3t^2.120t.4\right) -$$

$$-2\left(3t^2.24 + 4t^3.120t + 0 - 5t^4.24 - 0 - 3t^2.120t\right) =$$

$$= 2t(-24.2 + 120t) +$$

$$+1(9.120t^4 - 12.120t^3 + 15.24t^2) -$$

$$-2(3.120t^4 - 3.120t^3 + 3.24t^2))$$

$$= 3.120t^4 - 6.120t^3 + 19.24t^2 - 4.24t =$$

$$= 24t(15t^3 - 30t^2 + 19t - 4)$$

$$= 24(t-1)\underbrace{(15t^2 - 15t + 4)}_{15^2 - 15.16 < 0}$$

$\Rightarrow D(t)$ няма реални нули в $(0,1)$

$\Rightarrow$ матрицата E е балансирана.

Зад. 9 (за дипломна работа) Да се намери характеризация на матриците на инцидентност с $n=3$ реда, които не удовлетворяват т-ма 5, но са балансирани.

Интерполиране в комплексната равнина

$z_0, z_1, \dots, z_n$ - различни комплексни числа

$w_0, w_1, \dots, w_n$ - комплексни числа

Търсим полином

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

такъв че $p(z_i) = w_i$, $i = 0, \dots, n$

Задачата има единствено решение, т.к. тя е еквивалентна на

$$\begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

и детерминантата на матрицата е детерминантата на Вандермонд $\prod_{0\le i<j\le n}(z_j - z_i) \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ единствен интерполационен полином

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} \ell_k(z)\, w_k,$$

където ℓ_k са базисни полиноми на Лагранж:

$$\ell_k(z) = \frac{\omega(z)}{(z - z_k)\,\omega'(z_k)},$$

където

$$\omega(z) = (z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_n)$$

Ако $w_k = f(z_k)$ за някаква функция f,

$$L_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n} \ell_k(z)\cdot f(z_k)$$

Формула на Нютон за остатъка

$$(1) \quad f(z) - L(f; z) = f[z_0, z_1, \dots, z_n, z]\cdot \omega(z),$$

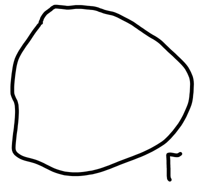
където разделените разлики $f[\dots]$ се дефинират рекурентно

$$\left|\begin{array}{l} f[z] := f(z) \\ f[z_0, \dots, z_n] := \dfrac{f[z_1, \dots, z_n] - f[z_0, \dots, z_{n-1}]}{z_n - z_0} \end{array}\right.$$

$f[z_0, z_1, \dots, z_n]$ е коефициентът пред z^n в $L_n(f; z)$

$$\Rightarrow f[z_0, z_1, \dots, z_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(z_k)}{\omega'(z_k)}$$

Нека G е област (отв. свързано мн.) в $\mathbb{C}$ с контур Γ - проста затворена крива.



Γ

Нека f е аналитична върху $G \cup \Gamma$ функция.
Нека $z_0, z_1, \dots, z_n$ са различни комплексни числа в G.

Да разгледаме

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \underbrace{\frac{f(u)}{(u-z_0)(u-z_1)\cdots(u-z_n)}}_{f^0} du$$

f^0 е мероморфна функция с полюси $z_0, z_1, \dots, z_n$.

От т-мата за резидуумите

$$I = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}(f^0; z_k),$$

където $\operatorname{Res}(f^0; z_k)$ е коефициентът пред $\frac{1}{u-z_k}$ в развитието на $f^0(u)$ по степените на $u - z_n$.

$$f^0(u) = \frac{1}{u-z_k}\cdot\frac{f(u)}{\omega_k(u)},$$

където $\omega_k(u) = \frac{\omega(u)}{u-z_k}$.

$$\operatorname{Res}(f^0; z_k) = \left.\frac{f(u)}{\omega_k(u)}\right|_{u=z_k} = \frac{f(z_k)}{\omega'(z_k)}.$$

Така получихме, че

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(z_k)}{\omega'(z_k)} = f[z_0, z_1, \dots, z_n]$$

$$\Rightarrow f[z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)(u-z_1)\cdots(u-z_n)} du$$

$$\Rightarrow f(z) - L_n(f; z) = f[z_0, z_1, \dots, z_n]\,\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(u)\,\omega(z)}{\omega(u)\cdot(u-z)} du \qquad (2)$$

Замествайки ф-лата на Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u-z} du$$

Замествайки в (2), получаваме

$$(3) \quad L_n(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{\omega(u)-\omega(z)}{\omega(u)}\right)du$$

Формула (3) остава вярна и при съвпадение на някои от точките, не само за различни $z_0, z_1, \dots, z_n$

Нека, например, $z_0 = z_1$, а останалите са различни помежду си и от $z_0 = z_1$. Ще покажем, че $L_n(f;z_0) = f(z_0)$ и $L'_n(f;z_0) = f'(z_0)$

$\omega(z_0) = 0$

$$L_n(f;z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z_0}du \overset{\text{Коши}}{=} f(z_0)$$

$$L'_n(f;z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{\omega(u)}\cdot\frac{[-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\omega'(z_0)}}\cdot(u-z_0) + \omega(u) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\omega(z_0)}}]}{(u-z_0)^2}du$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^2}du = f'(z_0).$$

ф-ла (3) е вярна и при $z_0 = z_1 = \dots = z_n = a$

$$L_n(f;z) = T_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

е отрязък от реда на Тейлор за $f(z)$ относно точката a.

Тогава (2) придобива вида

$$f(z) - T_n(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)\cdot(z-a)^{n+1}}{(u-a)^{n+1}(u-z)}du$$

Ако въведем $M := \max_{u\in\Gamma}|f(u)|$

$\rho := \min_{u\in\Gamma}|u-z|$

$$\Rightarrow |f(z) - T_n(f;z)| \le \frac{M}{2\pi}\left|\frac{z-a}{\rho}\right|^{n+1}\int_\Gamma \frac{du}{|u-z|}$$