ФМИ ПС 2018 - Домашна работа 6

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

4 юни 2018

Задача 1

Времената за реакция (в секунди) на два различни стимула в психологически експеримент са сравнени, използвайки всеки стимул в независими извадки с големина от осем човека. По този начин общо 16 доброволци са участвали в експеримента. Дават ли данните в таблицата по-долу достатъчно доказателство в подкрепа на твърдението, че има съществена разлика в средното време за реакция на двата стимула?

Стимул 1	1	3	2	1	2	1	3	2
Стимул 2	4	2	3	3	1	2	3	3

а) Използвайте ANOVA, за да тествате хипотезата при ниво на съгласие $\alpha = 0.05$.

б) Тествайте аналогична хипотеза, използвайки двустранен t-тест за сравнение на популационни средни. Сравнете стойността на t-статистиката със стойността на F-статистиката от подточка а).

в) Какви предположения е необходимо да се направят, за да бъдат коректни решенията в подточки а) и б)?

Решение. а) Нека $Y_{it} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{it}$ е нашият модел ($\varepsilon_{it} \in \mathrm{N}(0, \sigma^2)$). Искаме да проверим хипотезите

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = 0$$
$$H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ поне за едно } i = 1, 2.$$

Ще използваме критерия

$$F = \frac{MSF}{MSE} < \mathrm{F}(1, 14)_{0.95} \approx 4.60$$

Извършваме необходимите пресмятания:

$$\overline{Y}_1 = \frac{15}{8}$$
$$\overline{Y}_2 = \frac{21}{8}$$
$$\overline{Y} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$
$$SSF = 8\sum_{i=1}^{2}(\overline{Y} - \overline{Y}_i)^2 = \frac{9}{4}$$
$$SSE = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{8}(Y_{it} - \overline{Y}_i)^2 = \frac{43}{44}$$

Тестовата статистика има стойност

$$F = \frac{MSF}{MSE} = 14\frac{SSF}{SSE} \approx 2.93 < 4.60 \approx \mathrm{F}(1,14)_{0.95},$$

което не ни дава основание да отхвърлим нулевата хипотеза.

б) Тук разглеждаме извадките $X_1, \ldots, X_n$ над $X \in \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ над $Y \in \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ и искаме да проверим хипотезите

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

използвайки критерия

$$|T| = \frac{|\overline{X}_n - \overline{Y}_n|}{\sqrt{\overline{S}_X^2 + \overline{S}_Y^2}}\sqrt{n} < \mathrm{t}(2n-2)_{1-\alpha/2} \approx 2.14,$$

След изчисления получаваме $T \approx -1.95$, при което не попадаме в критичната област и следователно нямаме основание да отхвърлим нулевата хипотеза.

Тъй като при нулевата хипотеза статистиките $F(\vec{Y}) \in \mathrm{F}(1,14)$ и $T(\vec{X}, \vec{Y}) \in \mathrm{t}(14)$, то както е известно връзката между двете е $F = T^2$ и съответната връзка между квантилите им е $\mathrm{F}(1,14)_{1-\alpha} = \mathrm{t}(14)^2_{1-\alpha/2}$.

в) ANOVA може да се разгледа като „обобщение“ на теста на Стюдънт за повече от две популации. И при двата теста се предполага нормалност и независимост на извадъчните разпределения. От една страна, ANOVA може да работи с популации с различни размерности. От друга страна, t-теста може да работи с хетероскедастични данни, докато ANOVA работи само с хомоскедастични данни.

Задача 2

При сравнение на силата на бетона, произведен от четири различни смеси, са направени по три отливки от всеки тип. Всяка от 12-те отливки е подложена на натиск до пропукване. Таблицата по-долу дава натиска в тонове на квадратен инч, при който настъпва разрушаване на отливката (в скобите е даден номерът на наблюдението в реда, в който е направено - ако разполагаме с компютър, за какво може да бъде използван?). Проверете дали при ниво на съгласие $\alpha = 0.05$ има значима разлика в здравината на смесите.

Смес A	Смес B	Смес C	Смес D
(1) 2.30	(2) 2.20	(3) 2.15	(4) 2.25
(5) 2.20	(6) 2.10	(7) 2.15	(8) 2.15
(9) 2.25	(10) 2.20	(11) 2.20	(12) 2.25

Решение. Аналогично на задача 1, построяваме модела $Y_{it} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{it}$ и проверяваме хипотезите

$$H_0 : \tau_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, 4$$
$$H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ поне за едно } i = 1, \dots, 4.$$

Използваме критерия

$$F = \frac{MSF}{MSE} \approx 2.67 < 4.06 \approx \mathrm{F}(3, 8)_{0.95}.$$

Нямаме основание да твърдим, че има разлика в здравината на смесите.

Номерата на наблюденията могат да бъдат използвани за изследване на систематични темпорални изменения в измерванията, в частност графично.

Задача 3

Клиничен психолог изследва три метода за намаляване на неудовлетвореността и враждебността у студентите. Психологически тест (наречен HLT) е използван, за да се оцени степента на враждебност на група от студенти. Високи стойност на резултатите показват увеличена враждебност. Избрани са единадесет студенти с високи резултати от теста да участват в експеримента. По случаен начин са избрани 5 от тях и са подложени на метод A. От останалите 6 отново по случаен начин са избрани 3-ма и са подложени на метод B. На последните трима е приложен метод C. След края на семестъра на всеки един от тези студенти отново е направен HDL тест и резултатите са показани в следната таблица:

Метод A	Метод B	Метод C
73	54	79
83	74	95
76	71	87
68		
80		

Показват ли данните значима разлика в средното ниво на враждебност на студентите, работили по трите метода? Нивото на съгласие е $\alpha = 0.05$.

Решение. Аналогично на задачи 1 и 2, построяваме модела $Y_{it} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{it}$ и проверяваме хипотезите

$$
\begin{aligned}
&H_0 : \tau_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, 3 \\
&H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ поне за едно } i = 1, \dots, 3.
\end{aligned}
$$

Използваме критерия

$$F = \frac{MSF}{MSE} < \mathrm{F}(2, 8)_{0.95} \approx 4.46.$$

Извършваме необходимите пресмятания:

$$
\begin{aligned}
\overline{Y}_1 &= \frac{380}{5} = 76 \\
\overline{Y}_2 &= \frac{199}{3} \\
\overline{Y}_3 &= \frac{261}{3} = 87 \\
\overline{Y} &= \frac{840}{11} \\
SSF &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{r_i} (\overline{Y} - \overline{Y}_i)^2 = 5(\overline{Y} - \overline{Y}_1)^2 + 3(\overline{Y} - \overline{Y}_2)^2 + 3(\overline{Y} - \overline{Y}_3)^2 \approx 641.88 \\
SSE &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{r_i} (Y_{it} - \overline{Y}_i)^2 \approx 498.67 \\
MSF &= \frac{SSF}{2} \approx 320.94 \\
MSE &= \frac{SSE}{8} \approx 62.33
\end{aligned}
$$

Тестовата статистика има стойност $F \approx 5.15$, следователно попадаме в критичната област и имаме основание да твърдим, че има разлика в нивото на враждебност на трите групи студенти.