

# ФМИ ПС 2018 - Домашна работа 5

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

5 юни 2018

## Задача 1

Откликът  $Y$  е функция на три независими променливи  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , която се записва в следния вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

а) Оценете модела по седемте данни, дадени в следната таблица:

$Y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-3	5	-1
0	-2	0	1
0	-1	-3	1
1	0	-4	0
2	1	-3	-1
3	2	0	-1
3	3	5	1

като запишете теоретичния модел в матричен вид и направите матричните преобразования.

б) Намерете прогноза за  $Y$ , когато  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$  и  $x_3 = -1$ . Сравнете прогнозата с наблюдавания отклик в оригиналните данни. Намерете грешката на прогнозата.

в) Може ли да се счита, че предикторът  $x_3$  оказва влияние на прогнозата на  $Y$ ? Формулирайте съответната хипотеза и я проверете при ниво на съгласие  $\alpha = 0.05$ .

г) Намерете 95%-ен доверителен интервал за очакваната стойност на  $Y$  при  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$  и  $x_3 = -1$ .

д) Намерете 95%-ен доверителен интервал за прогнозата при  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$  и  $x_3 = -1$ .

**Решение.** а) В матричен вид задачата изглежда по следния начин

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

където  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , а  $\vec{\varepsilon}$  е вектор-стълб от независими и еднакво разпределени  $N(0, \sigma^2)$  случайни величини. Нека  $\hat{Y}$  са дадените отклици, а  $X$  да бъде

матрица с колони съответните стойности на  $x_1, x_2$  и  $x_3$  с добавена колона от единици отляво, т.е. имаме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

За да оценим модела по МНК ще образуваме система нормални уравнения, за които се знае, че минимизира средноквадратичното разстояние в една предетерминирана система от линейни уравнения. Тогава получаваме

$$\vec{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \hat{Y} \approx \begin{pmatrix} 1.23 \\ -0.16 \\ -0.13 \\ -0.69 \end{pmatrix}$$