ФМИ ПС 2018 - Домашна работа 3

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

3 юни 2018

Задача 1

Средното време за извършване на определена операция от работници на конвейер е 65 сек. със стандартно отклонение от 15 сек. Времето за работа може да се счита приблизително нормално разпределена случайна величина. Производителите на нова машина твърдят, че техният продукт намалява времето за извършване на същата операция поне с 10 сек. Отговорникът за производството планира статистическо изследване, за да провери това твърдение. Времената на колко работника трябва да измери, ако е избрал стойности за $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.05$?

Решение. Ще разгледаме по-обща задача и след това ще дадем конкретен отговор. Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над $X \in \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ нека $0 < d < \mu, \alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$ са фиксирани числа.

Разглеждаме следните хипотези за X:

$$H_0 : X \in \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$H_1 : X \in \mathrm{N}(\mu - d, \sigma^2)$$

Ще използваме критерия

$$\overline{X}_n < \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Искаме вероятността за грешка от втори род да бъде най-много β:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_1\left(\overline{X}_n \le \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) &\le \beta,\\
\mathrm{P}_1\left(\frac{\overline{X}_n - \mu + d}{\sigma}\sqrt{n} \le z_{1-\alpha} - \frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\right) &\le \beta,\\
\Phi\left(z_{1-\alpha} + \frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\right) &\le \beta,\\
z_{1-\alpha} + \frac{d}{\sigma}\sqrt{n} &\le -z_{1-\beta},\\
\sqrt{n} &\le -\frac{\sigma(z_{1-\beta} + z_{1-\alpha})}{d},\\
n &\ge \frac{\sigma^2(z_{1-\beta} + z_{1-\alpha})^2}{d^2},\\
n &\ge \frac{15^2(1.64 + 2.33)^2}{10^2} \approx 35.48.
\end{aligned}
$$

Получихме, че n трябва да бъде поне 36.

Задача 2

Ръководството на водеща автомобилна компания се интересува дали има разлика в продължителността на експлоатация на два модела автомобили до необходимостта от първия им основен ремонт. Желателно е да се установят разлики от 3 или повече месеца с ниво на съгласие 2% и мощност на критерия 95%. По пилотните наблюдения върху броя месеци на експлоатация на автомобили от двата модела са пресметнати извадъчните дисперсии $\overline{S}_1^2 = 60.84$ и $\overline{S}_2^2 = 108.16$. Какъв брой автомобили трябва да бъдат наблюдавани?

Решение. Нека $X_1, \dots, X_n$ е извадка над $X \in \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, съответстваща на продължителността на експлоатация на първия модел и $Y_1, \dots, Y_n$ е извадка над $Y \in \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, съответстваща на втория модел.

Разглеждаме хипотезите:

$$
\begin{aligned}
&H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0\\
&H_1 : |\mu_1 - \mu_2| \ge d = 3
\end{aligned}
$$

Ще се възползваме от приближението

$$
\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n}{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}\sqrt{n} \in \mathrm{t}(v) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(0,1)
$$

и от критерия

$$|\overline{X}_n - \overline{Y}_n| < \frac{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}.$$

Искаме мощността на критерия да бъде най-малко $\pi = 0.95$:

$$\mathrm{P}_1\left(|\overline{X}_n - \overline{Y}_n| \geq \frac{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \geq \pi,$$

$$2\,\mathrm{P}_1\left(\overline{X}_n - \overline{Y}_n \geq \frac{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \geq \pi,$$

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n - d}{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}\sqrt{n} \geq z_{1-\alpha/2} - \frac{d}{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}\sqrt{n}\right) \geq \frac{\pi}{2},$$

$$1 - \Phi\left(z_{1-\alpha/2} - \frac{d}{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}\sqrt{n}\right) \geq \frac{\pi}{2},$$

$$\Phi\left(z_{1-\alpha/2} - \frac{d}{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}\sqrt{n}\right) \leq 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\beta}{2},$$

$$z_{1-\alpha/2} - \frac{d}{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}}\sqrt{n} \leq -z_{1-\beta/2},$$

$$\sqrt{n} \leq -\frac{\sqrt{\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2}(z_{1-\beta/2} + z_{1-\alpha/2})}{d},$$

$$n \geq \frac{(\overline{S}_1^2 + \overline{S}_2^2)(z_{1-\beta/2} + z_{1-\alpha/2})^2}{d^2},$$

$$n \geq \frac{(60.84 + 108.16)(1.96 + 2.33)^2}{3^2} \approx 344.99.$$

Получихме, че n трябва да бъде поне 345.