ФМИ ПС 2018 - Домашна работа 2

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

3 юни 2018

Задача 1

От десет болници са събрани клинични данни за ефективността на две лекарства. Броят на пациентите, лекувани с лекарствата, е различен в различните болници. Данните са представени в таблицата по-долу:

Болница	Лекарство 1			Лекарство 2		
	Брой лекувани	Брой излекувани	Процент излекувани	Брой лекувани	Брой излекувани	Процент излекувани
1	84	63	75.0	96	82	85.4
2	63	44	69.8	83	69	83.1
3	56	48	85.7	91	73	80.2
4	77	57	74.0	47	35	74.5
5	29	20	69.0	60	42	70.0
6	48	40	83.3	27	22	81.5
7	61	42	68.9	69	52	75.4
8	45	35	77.8	72	57	79.2
9	79	57	72.2	89	76	85.4
10	62	48	77.4	46	37	80.4

а) Можем ли да считаме, че има значима разлика в действието на двете лекарства? Намерете съответната p-стойност на теста.

б) Подходящо ли е да използваме t-тест за проверка на твърдението в подточка а) и защо?

Решение. а) Ще използваме критерия на Ман-Уитни за процентното отношение между броя лекувани и броя излекувани (т.е. третата колона от таблицата). Нека $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ са тези отношения за първото лекарство (извадка над ξ), а $\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ - за второто (извадка над η). Нулевата хипотеза е, че ξ и η са еднакво разпределени (алтернативата е, разбира се, че не са еднакво разпределени). Вариационният ред от $\{\xi_i\}\bigcup\{\eta_i\}$ е (подчертани са елементите на ξ_i)

$$\begin{array}{cccccccccc}
\overline{68.9} & \overline{69.0} & \overline{69.8} & 70.0 & \overline{72.2} & \overline{74.0} & 74.5 & \overline{75.0} & 75.4 & \overline{77.4} \\
\overline{77.8} & 79.2 & 80.2 & 80.4 & 81.5 & 83.1 & \overline{83.3} & 85.4 & 85.4 & \overline{85.7}
\end{array}$$

Сумата на ранговете за $\{\xi_i\}$ е $U = 28$. При ниво на доверие $\gamma = 0.98$ критерият с нормално приближение

$$\frac{|U - 50|}{\sqrt{175}} \approx 1.66 \leq 2.33 \approx z_{0.99},$$

е изпълнен и нямаме основание да отхвърлим нулевата хипотеза. Всъщност p-стойността на теста е $p \approx 2\Phi(-1.66) \approx 0.097$.

б) При допълниелно предположение за нормалност на данните можем да използваме t-тест, за да проверим дали $\mathbb{E}\,\xi = \mathbb{E}\,\eta$, т.е. дали тестовата ни статистика

$$T = \frac{\overline{\xi}_n - \overline{\eta}_n}{\sqrt{\overline{S}_\xi^2 + \overline{S}_\eta^2}} \sqrt{n} \approx -1.73$$

е $\mathrm{t}(v)$-разпределена, където

$$v = \frac{(\overline{S}_\xi^2 + \overline{S}_\eta^2)^2}{\overline{S}_\xi^4 + \overline{S}_\eta^4}(n-1) \approx 17.54.$$

В случая използвахме поправката на Уелш, която ни позволява да работим с хетероскедастични данни. При ниво на доверие $\gamma = 0.98$ имаме

$$|T| \approx 1.73 \leq 2.56 \approx \mathrm{t}(v)_{0.99},$$

което отново не ни дава основание да отхвърлим нулевата хипотезата.

Да отбележим, че при ниво на доверие $\gamma = 0.98$ тестът на Шапиро-Уилк ни дава основание да отхвърлим предположението за нормалност и за двете извадки.

Задача 2

Два нови хранителни продукта A и B се тестват от 10 дегустатори, които трябва да определят кой от двата предпочитат, без да използват количествена скала. Можем ли да считаме, че при ниво на съгласие от 5% има разлика във вкусовете на продукти A и B?

Дегустатор	Предпочитание	Дегустатор	Предпочитание
1	A	6	A
2	A	7	B
3	A	8	A
4	A	9	B
5	A	10	A

Решение. Ще отъждествим A с 0 и B с 1. Нека X е случайна величина, приемаща стойности 0 и 1 и нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над X. Разглеждаме следните хипотези:

$$H_0 : X \in \text{Bernoulli}(1/2)$$
$$H_1 : X \text{ има друго разпределение.}$$

Ще използваме статистика $U = \sum_{i=1}^{n} X_i \in \text{Bi}(10, 1/2)$. При ниво на съгласие $\alpha = 0.05$ разглеждаме критерия

$$|U - 5| \leq 3.$$

Той задава критична област, тъй като

$$\mathrm{P}_0(|U-5| > 3) = 1 - \mathrm{P}_0(|U-5| \leq 3) = 1 - \mathrm{P}_0(2 \leq U \leq 8) = 1 - \mathrm{P}_0(1 < U \leq 8) = \\ = 1 - \mathrm{P}_0(U \leq 8) + \mathrm{P}_0(U \leq 1) \approx 0.021 < \alpha.$$

В нашия случай $U = 2$, което при избраното ниво на съгласие не ни дава основание да отхвърлим хипотезата, че има разлика във вкусовете на A и B.

Задача 3

Провежда се психологически тест с цел да се определи времето (в сек.) за реакция на два различни стимула. И двата са приложени на 9 доброволци. Резултатите са дадени в таблицата по-долу.

Субект	Стимул 1	Субект 2
1	9.4	10.3
2	7.8	8.9
3	5.6	4.1
4	12.1	14.7
5	6.9	8.7
6	4.2	7.1
7	8.8	11.3
8	7.7	5.2
9	6.4	7.8

а) Използвайте критерия на знаците, за да определите дали има основание да се твърди, че времето за реакция под влиянието на двата стимула е различно, ако нивото на съгласие $\alpha \leq 0.05$.

б) Използвайки t-критерия на Стюдънт, тествайте хипотезата за равенство в средното време за реакция.

Решение. а) Нека $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ е извадка над ξ, отговаряща на стимул 1, а $\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ е извадка над η, отговаряща на стимул 2. Отхвърляме двойките наблюдения, за които $\xi_i = \eta_i$ (в контретния случай нямаме такива). Разглеждаме

$$d_i = \begin{cases} 1, & \xi_i > \eta_i \\ 0, & \xi_i < \eta_i \end{cases}$$

Искаме да проверим хипотезите

$$H_0 : d_i \in \text{Bernoulli}(1/2)$$
$$H_1 : d_i \text{ има друго разпределение.}$$

Ще използваме тестовата статистика $U = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Критерият е същият като този в задача 2:

$$|U - 5| \leq 3.$$

Тъй като $U = 2$, нямаме основание да отхвърлим нулевата хипотеза, тоест че влиянието на двата стимула е различно.

б) Аналогично на направеното в задача 1, пресмятаме

$$v = \frac{(\overline{S}_\xi^2 + \overline{S}_\eta^2)^2}{\overline{S}_\xi^4 + \overline{S}_\eta^4}(n-1) \approx 14.53,$$

$$T = \frac{\overline{\xi}_n - \overline{\eta}_n}{\sqrt{\overline{S}_\xi^2 + \overline{S}_\eta^2}}\sqrt{n} \approx -0.78,$$

$$|T| \approx 0.78 \leq 2.30 \approx \mathrm{t}(v)_{0.975}.$$

Отново нямаме основание да отхвърлим нулевата хипотеза.

Задача 4

В таблицата по-долу е даден тестовият бал на група от 15 ученика по Математика и по Изкуства.

Ученик	Математика	Изкуства	Ученик	Математика	Изкуства
1	22	53	9	62	55
2	37	68	10	65	74
3	36	52	11	66	68
4	38	49	12	56	64
5	42	51	13	66	67
6	58	65	14	67	73
7	58	51	15	62	65
8	60	71			

Използвайте ранговия критерий на знаците на Уилкоксън, за да определите дали средните балове по двата предмета са съществено различни при ниво на съгласие $\alpha = 0.05$. Пресметнете p-value за дадения тест.

Решение. Нека $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ е извадка над ξ, отговаряща на бала по математика, а $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ е извадка над η, отговаряща на бала по изкуства. Разглеждаме разликите $d_i = \eta_i - \xi_i$ и изключваме двойките наблюдения, за които $d_i = 0$ (в случая нямаме такива). Разглеждаме абсолютните стойности на разликите и техните рангове

Разлика	-1	-2	-3	-6	-7	7	7	-8	-9	-9	-11	-11	-16	-31	-31
Абс. разл.	1	2	3	6	7	7	7	8	9	9	11	11	16	31	31
Ранг	1	2	3	4	6	6	6	8	9.5	9.5	11.5	11.5	13	14.5	14.5

Тестовата статистика е

$$W = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rank} d_i \operatorname{sign} d_i = -89.$$

Критерият с нормално приближение

$$|W| \leq z_{0.975}\sqrt{310} \approx 69.02.$$

не е изпълнен, следователно попадаме в критичната област и имаме основание да твърдим, че средните балове са различни. p-стойността на теста е ~ 0.01.

Задача 5

В таблицата по-долу са дадени честотите на размаха на крилете на два вида пчели от групата Euglossine (известни още като орхидейни пчели). Изследвани са четири пчели от рода Euglossa mandibularis Friese и шест от рода Euglossa imperialis Cockerell.

Euglossa mandibularis Friese	Euglossa imperialis Cockerell
235	180
225	169
190	180
188	185
	178
	183

Можем ли да считаме, че при ново на съгласие $\alpha \leq 0.10$ честотата на размаха на крилете за двата вида пчели е различна? Използвайте U-теста на Mann-Whitney.

Решение. Аналогично на задача 1 образуваме вариационния ред

$$169 \quad 178 \quad 180 \quad 180 \quad 183 \quad 185 \quad \overline{188} \quad \overline{190} \quad \overline{225} \quad \overline{235}$$

откъдето пресмятаме тестовата статистика $U = 24$. Критерият с нормално приближение

$$\frac{|U - 12|}{\sqrt{22}} \leq 1.64 \approx z_{0.95},$$

не е изпълнен, тъй като $\frac{|U-12|}{\sqrt{22}} \approx 2.56$, следователно попадаме в критичната област и имаме основание да твърдим, че честотата на размаха на крилете е различна.

Задача 6

Изделията от дадена поточна линия се класифицират като дефектни (D) или изправни (N). Наблюдавана е следната последователност от изделия:

D N N N N N N D D N N N N N N D D
D N N N N N D N N N D D N N N D D

Можем ли да считаме, че данните представляват случаен избор на дефектни и изправни изделия? Нивото на съгласие е $\alpha = 0.05$.

Решение. Ще отъждествим D с 0 и N с 1. Нека X е случайна величина, приемаща стойности 0 и 1 и нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над X. Искаме да проверим хипотезите

$$H_0 : X \in \text{Bernoulli}(1/2)$$
$$H_1 : X \text{ има друго разпределение.}$$

Имаме $U = \sum_{i=1}^{n} X_i \in \text{Bi}(34, 1/2)$ и построяваме критерий аналогично на направеното в задача 2:

$$|U - 17| \leq 6$$

с вероятност за грешка от първи род

$$\text{P}_0(|U - 17| > 6) = 1 - \text{P}_0(10 < U \leq 23) \approx 0.024 < \alpha.$$

В нашия случай $U = 11$ и следователно нямаме основание да отхвърлим нулевата хипотеза.