ФМИ ПС 2018 - Домашна работа 1

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

1 юни 2018

Задача 1

Нека X_1, X_2, X_3 е извадка над експоненциално разпределена случайна величина с плътност

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \theta \geq 0.$$

Предложени са оценките

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1 &= X_1, \\
\tilde{\theta}_2 &= \frac{X_1 + X_2}{2}, \\
\tilde{\theta}_3 &= \frac{X_1 + 2X_2}{3}, \\
\tilde{\theta}_4 &= \min\{X_1, X_2, X_3\}, \\
\tilde{\theta}_5 &= \overline{X}_3.
\end{aligned}$$

Кои от тях са неизместени? Измежду неизместените оценки кои имат най-малка дисперсия?

Решение. Всички оценки освен $\tilde{\theta}_4$ са неизместени. Наистина,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\tilde{\theta}_1 &= \mathbb{E}\,X_1 = \mathbb{E}\,X = \theta, \\
\mathbb{E}\,\tilde{\theta}_2 &= \frac{\mathbb{E}\,X_1 + \mathbb{E}\,X_2}{2} = \frac{2\theta}{2} = \theta, \\
\mathbb{E}\,\tilde{\theta}_3 &= \frac{\mathbb{E}\,X_1 + 2\,\mathbb{E}\,X_2}{3} = \frac{3\theta}{3} = \theta, \\
\mathbb{E}\,\tilde{\theta}_5 &= \frac{\mathbb{E}\,X_1 + \mathbb{E}\,X_2 + \mathbb{E}\,X_3}{3} = \frac{3\theta}{3} = \theta.
\end{aligned}$$

За да намерим очакването на оценката $\tilde{\theta}_4$, първо ще намерим функцията ѝ на разпределение. Имаме

$$F_{\tilde\theta_4}(x) = 1 - \mathrm{P}(\tilde\theta_4 > x) = 1 - \mathrm{P}(\min\{X_1, X_2, X_3\} > x) =$$
$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > x)\,\mathrm{P}(X_2 > x)\,\mathrm{P}(X_3 > x) = 1 - (e^{-\frac{x}{\theta}})^3 = 1 - e^{-x\frac{3}{\theta}},$$

което е ФР на $\mathrm{Exp}(\frac{\theta}{3})$-разпределена случайна величина. Следователно

$$\mathbb{E}\,\tilde\theta_4 = \mathbb{E}\min\{X_1, X_2, X_3\} = \frac{\theta}{3} \neq \theta = \mathbb{E}\,X.$$

Дисперсиите на неизместените оценки са съответно

$$\begin{aligned}
&\mathbb{D}\,\tilde\theta_1 = \mathbb{D}\,X_1 = \mathbb{D}\,X = \theta^2,\\
&\mathbb{D}\,\tilde\theta_2 = \frac{1}{4}\,\mathbb{D}(X_1 + X_2) = \frac{1}{4}(2\theta^2) = \frac{\theta^2}{2},\\
&\mathbb{D}\,\tilde\theta_3 = \frac{1}{9}\,\mathbb{D}(X_1 + 2X_2) = \frac{1}{9}(\mathbb{D}\,X_1 + 4\,\mathbb{D}\,X_2) = \frac{5}{9}\theta^2,\\
&\mathbb{D}\,\tilde\theta_5 = \frac{1}{9}\,\mathbb{D}(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{\theta^2}{3}.
\end{aligned}$$

Да отбележим, че границата на Рао-Крамер за дисперсиите е $I(\theta)^{-1} = n^{-1}(\frac{1}{\theta^2})^{-1} = \frac{\theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{3}$. Лесно се вижда, че

$$\mathbb{D}\,\tilde\theta_5 < \mathbb{D}\,\tilde\theta_2 < \mathbb{D}\,\tilde\theta_3 < \mathbb{D}\,\tilde\theta_1,$$

като оценката $\tilde\theta_5$ е ефективна.

Задача 2

Ако $X \in \mathrm{Bi}(n,p)$, докажете, че $\hat p_1 = \frac{X}{n}$ е неизместена оценка на p. Докажете, че $\hat p_2 = \frac{X+1}{n+2}$ е изместена оценка и намерете изместването. Намерете $\mathrm{MSE}(\hat p_1)$ и $\mathrm{MSE}(\hat p_2)$. За кои стойности на p $\mathrm{MSE}(\hat p_1) < \mathrm{MSE}(\hat p_2)$?

Решение. Намираме очакванията на $\hat p_1$ и $\hat p_2$,

$$\mathbb{E}\,\hat p_1 = \frac{\mathbb{E}\,X}{n} = \frac{np}{n} = p,$$
$$\mathbb{E}\,\hat p_2 = \mathbb{E}\,\frac{X+1}{n+2} = \frac{np+1}{n+2}.$$

От последното равенство намираме изместването на $\hat p_2$

$$b_2 = \frac{np+1}{n+2} - p = \frac{np + 1 - np - 2p}{n+2} = \frac{1-2p}{n+2}.$$

За да намерим средноквадратичната грешка, ще се възползваме от формулата $\mathrm{MSE}(\hat p) = \mathbb{D}\,\hat p + b^2$, където b^2 е изместването на съответната оценка. И така,

$$\mathrm{MSE}(\hat{p}_1) = \mathbb{D}\,\hat{p}_1 = n^{-2}\,\mathbb{D}\,X = \frac{p(1-p)}{n},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\hat{p}_2) = \mathbb{D}\,\hat{p}_2 + b_2^2 = \mathbb{D}\,\frac{X+1}{n+2} + \frac{(1-2p)^2}{(n+2)^2} = \frac{\mathbb{D}\,X + (1-2p)^2}{(n+2)^2} = \\
= \frac{np(1-p) + (1-2p)^2}{(n+2)^2} = \frac{np - np^2 + 1 - 4p + 4p^2}{(n+2)^2} = \frac{(n-4)p(1-p)+1}{(n+2)^2}
\end{aligned}$$

Сега решаваме уравнението $\mathrm{MSE}(\hat{p}_1) < \mathrm{MSE}(\hat{p}_2)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\hat{p}_1) &< \mathrm{MSE}(\hat{p}_2), \\
\frac{p(1-p)}{n} &< \frac{(n-4)p(1-p)+1}{(n+2)^2}, \\
(n+2)^2 p(1-p) &< n(n-4)p(1-p) + n \;\Big/ p(1-p), \\
(n+2)^2 &< n(n-4) + \frac{n}{p(1-p)}, \\
n^2 + 4n + 4 &< n^2 - 4n + \frac{n}{p(1-p)}, \\
8n + 4 &< \frac{n}{p(1-p)}, \\
p(1-p) &< \frac{n}{4(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Полагаме $q = p - \frac{1}{2}$ и заместваме в последното неравенство

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\hat{p}_1) &< \mathrm{MSE}(\hat{p}_2), \\
\left(\frac{1}{2} + q\right)\left(\frac{1}{2} - q\right) &< \frac{n}{4(2n+1)}, \\
\frac{1}{4} - q^2 &< \frac{n}{4(2n+1)}, \\
-q^2 &< \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2n+1} - 1\right), \\
-q^2 &< -\frac{n+1}{4(2n+1)} \;\Big|(-1) \\
q^2 &> \frac{n+1}{4(2n+1)},
\end{aligned}$$

откъдето следва, че неравенството е еквивалентно на условието

$$p \in [0,1] \setminus \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right).$$

Задача 3

Нека $X_1, \dots, X_n$ е извадка над случайна величина X с $\mathbb{E}\,X = \mu$ и $\mathbb{D}\,X = \sigma^2$. Докажете, че

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

е изместена оценка за σ^2, докато

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

е неизместена.

Решение. Намираме очакването на $\overline{\sigma}_n^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\overline{\sigma}_n^2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + (\overline{X}_n)^2\right) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}\left(\overline{X}_n^2\right) + \mathbb{E}\left(\overline{X}_n^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\left(\overline{X}_n^2\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

Прилагаме тъждеството

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_i a_j,$$

за да намерим $\mathbb{E}\left(\overline{X}_n^2\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\overline{X}_n^2\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i^2) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_j\right) = \\ &= \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X^2) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X^2) + \frac{n-1}{n}(\mathbb{E}\,X)^2.\end{aligned}$$

Заместваме в (1) и получаваме

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\overline{\sigma}_n^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\left(\overline{X}_n^2\right) &= \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X^2) - \frac{n-1}{n}(\mathbb{E}\,X)^2 = \\ &= \frac{n-1}{n}\left(\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}\,X)^2\right) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{D}\,X = \frac{n-1}{n}\sigma^2.\end{aligned}$$

Получихме, че $\overline{\sigma}_n^2$ има изместване $-\frac{\sigma^2}{n}$. Същевременно, $\overline{S}_n^2$ е неизместена, тъй като $\overline{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{\sigma}^2$.

Задача 4

Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над случайна величина $X \in \mathrm{Ge}(p)$. Докажете, че $\overline{X}_n$ е достатъчна статистика за p.

Решение. Образуваме функцията на правдоподобие

$$L(\vec{x}; p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

където x_i са неотрицателни цели числа $\forall i = 1, \ldots, n$.

От теоремата на Нейман-Фишър за факторизацията следва, че $\sum_{i=1}^{n} X_i$ е достатъчна статистика за p.

Задача 5

Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над случайна величина X с плътност от вида

$$f_X(x) = \alpha\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)}, x \geq \beta,$$

където $\alpha, \beta > 0$ и β е неизвестен параметър. Покажете, че $\prod_{i=1}^{n} X_i$ е достатъчна статистика за α.

Решение. Образуваме функцията на правдоподобие

$$L(\vec{x}; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \alpha\beta^\alpha x_i^{-(\alpha+1)} = (\alpha\beta^\alpha)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-(\alpha+1)},$$

където $x_i \geq \beta \ \forall i = 1, \ldots, n$.

От теоремата на Нейман-Фишър за факторизацията следва, че оценката $\prod_{i=1}^{n} X_i$ е достатъчна статистика за α.

Задача 6

Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над случайна величина $X \in \mathrm{U}(0, \theta)$. Докажете, че $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ е достатъчна статистика за θ.

Решение. Образуваме функцията на правдоподобие

$$L(\vec{x}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \theta^{-n},$$

където $0 \leq x_i \leq \theta \ \forall i = 1, \ldots, n$. Последното условие е еквивалентно на

$$0 \leq x_i \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \theta \ \forall i = 1, \ldots, n,$$

откъдето следва, че $X_{(n)}$ е достатъчна статистика за θ.

Задача 7

Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над случайна величина $X \in \mathrm{U}(\theta_1, \theta_2)$. Докажете, че $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ и $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ са достатъчни статистики за (θ_1, θ_2).

Решение. Аналогично на предната задача, образуваме функцията на правдоподобие

$$L(\vec{x}; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} = (\theta_2 - \theta_1)^{-n},$$

където $\theta_1 \leq x_i \leq \theta_2 \; \forall i = 1, \ldots, n$. Последното условие е еквивалентно на

$$\theta_1 \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq x_i \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \theta_2 \; \forall i = 1, \ldots, n,$$

откъдето следва, че $(X_{(1)}, X_{(n)})$ са достатъчни статистики за (θ_1, θ_2).

Задача 8

Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над случайна величина X с плътност от вида

$$f_X(x) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, \theta > 0.$$

Намерете минималната достатъчна статистика за θ.

Решение. Твърдим, че $T(\vec{X}) = \prod_{i=1}^{n} X_i$ е минимална достатъчна статистика за θ. Наистина, функцията на правдоподобие

$$L(\vec{x}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \left[\theta \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}\right]^n = \left[\theta \; T(\vec{x})^{\theta-1}\right]^n$$

зависи от $\vec{x}$ само чрез $T(\vec{x})$, следователно статистиката $T(\vec{X})$ е достатъчна. Отношението

$$\frac{L(\vec{x}; \theta)}{L(\vec{y}; \theta)} = \left(\frac{T(\vec{x})}{T(\vec{y})}\right)^{(\theta-1)n}$$

не зависи от $\theta \iff T(\vec{y}) = T(\vec{x})$, откъдето следва, че $T(\vec{X})$ е минимална достатъчната статистика според теоремата на Леман-Шефе.

Задача 9

Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над случайна величина $X \in \mathrm{N}(\mu, \sigma_2)$. Ако μ е известен параметър, докажете, че $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ е минимална достатъчна статистика за σ^2. Използвайте тази статистика, за да намерите неизместена оценка с минимална дисперсия за σ^2.

Решение. Твърдим, че $T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ е минимална достатъчна статистика за σ^2. Наистина, функцията на правдоподобие

$$L(\vec{x};\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}T(\vec{x})}$$

зависи от $\vec{x}$ само чрез $T(\vec{x})$, следователно статистиката $T(\vec{X})$ е достатъчна. Отношението

$$\frac{L(\vec{x};\theta)}{L(\vec{y};\theta)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(T(\vec{x})-T(\vec{y}))}$$

не зависи от $\theta \iff T(\vec{y}) = T(\vec{x})$, откъдето следва, че $T(\vec{X})$ е минимална достатъчната статистика според теоремата на Леман-Шефе. Освен това $\sigma^2 T(\vec{X}) \in \chi^2(n) = \mathrm{Gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \implies T(\vec{X}) \in \mathrm{Gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$. Така получаваме, че очакването и дисперсията на $T(\vec{X})$ са съответно

$$\mathbb{E}\, T(\vec{X}) = n\sigma^2,$$
$$\mathbb{D}\, T(\vec{X}) = 2n\sigma^4.$$

Нека сега вземем оценката $\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}T(\vec{X})$. Тя очевидно е неизместена, а дисперсията ѝ е $\mathbb{D}\,\hat{\sigma}^2 = \frac{2\sigma^4}{n} = I(\theta)^{-1}$, което всъщност е долната граница на Рао-Крамер за дисперсията на σ^2.

Задача 10

Броят на повредите на един ден на дадена машина се подчинява на поасонов закон на разпределение със средно λ. Цената на поправката на тези дневни повреди се определя по формулата $C = 3X^2$. Ако $X_1, \ldots, X_n$ са наблюдения над броя повреди за n случайно избрани дни, намерете неизместена оценка с минимална дисперсия за математическото очакване $\mathbb{E}\, C$

Решение. Първо ще изразим $\theta = \mathbb{E}\, C$ чрез λ. Имаме

$$\theta = \mathbb{E}\, C = 3\,\mathbb{E}\, X^2 = 3(\mathbb{D}\, X + (\mathbb{E}\, X)^2) = 3(\lambda + \lambda^2).$$

Да отбележим, че $T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ е (минимална) достатъчна статистика за λ. Остава да намерим оценка $\hat{\theta}$, която да зависи от извадката само чрез $T(\vec{X})$. За целта ще намерим линейна комбинация на $T(\vec{X})$ и $T(\vec{X})^2$, която да бъде неизместена оценка за θ. Намираме съответните моменти:

$$\mathbb{E}\, T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, X_i = \sum_{i=1}^n \lambda = n\lambda$$

$$\mathbb{E}[T(\vec{X})^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_iX_j) = \sum_{i=1}^{n}[\mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[\lambda^2 + \lambda + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\lambda^2] = n(\lambda^2 + \lambda + (n-1)\lambda^2) = (n\lambda)^2 + n\lambda,$$

което ни позволява лесно да построим неизместената оценка

$$\hat{\theta} = \frac{3}{n^2}(T(\vec{X})^2 + (n-1)T(\vec{X})).$$

Тъй като $\hat{\theta}$ зависи от извадката само чрез $T(\vec{X})$, то тя има минимална дисперсия сред всички неизместени оценки според теоремата на Рао-Блекуел.

Задача 11

Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина ξ с функция на разпределение $F_\xi(x)$. Намерете разпределението на $X_{(1)}, X_{(n)}$ и $F_\xi(X_k)$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$.

Решение. Функциите на разпределение на $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ и $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ са съответно

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leq x) = P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x) = 1 - P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^n,$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \leq x) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = F_\xi(x)^n.$$

Нека сега $U = F_\xi(X_k)$ за някое $k = 1, \ldots, n$. Дефинираме квантилната функция

$$Q_\xi(y) = \min\{z \in \mathbb{R} \colon y \leq F(z)\}.$$

Очевидно Q_ξ е ненамаляваща.

Ще разгледаме само случаите, когато ξ е дискретна или непрекъсната (не непременно абсолютно непрекъсната). Нека първо ξ е непрекъсната. За произволни $x \in \mathbb{R}$ и $y \in [0, 1]$ имаме

$$(F_\xi \circ Q_\xi)(y) = F_\xi(Q_\xi(y)) = F_\xi(\min\{z \in \mathbb{R} \colon y = F_\xi(z)\}) = y,$$

$$(Q_\xi \circ F_\xi)(x) = Q_\xi(F_\xi(x)) = \min\{z \in \mathbb{R} \colon F_\xi(x) = F_\xi(z)\} \geq x,$$

като равенство винаги се достига, когато F_ξ е строго растяща. В крайна сметка за $y \in [0,1]$ получаваме

$$F_U(y) = P(U \le y) = P(F_\xi(X_k) \le y) = P((Q_\xi \circ F_\xi)(X_k) \le Q_\xi(y)) = \\ = P(X_k \le Q_\xi(y)) = F_\xi(Q_\xi(y)) = (F_\xi \circ Q_\xi)(y) = y,$$

откъдето следва, че $U \in \mathrm{U}(0,1)$.

Нека сега ξ е дискретна и са дадени редиците $\{x_i\}_{i\in I}$ и $\{p_i\}_{i\in I}$ от стойности на ξ и съответстващите им вероятности. Тук $I \in \mathbb{N}$ е крайна или безкрайна верига. Дефинираме сумите $s_m = \sum_{i\le m} p_i = F_\xi(x_m) \forall m \in I$.

За $m \in I$ имаме

$$(F_\xi \circ Q_\xi)(s_m) = F_\xi(Q_\xi(s_m)) = F_\xi(x_m) = s_m,$$
$$(Q_\xi \circ F_\xi)(x_m) = Q_\xi(F_\xi(x_m)) = Q_\xi(s_m) = x_m,$$

а за произволни $s \in [0,1]$ и $x \in \mathbb{R}$

$$(F_\xi \circ Q_\xi)(s) = \min\{s_m \in \{s_i\}_{i\in I} \colon s \le s_m\} \ge s,$$
$$(Q_\xi \circ F_\xi)(x) = \min\{x_m \in \{x_i\}_{i\in I} \colon x \le x_m\} \ge x.$$

В крайна сметка

$$F_U(s) = P(U \le s) = P(F_\xi(X_k) \le s) = P((Q_\xi \circ F_\xi)(X_k) \le Q_\xi(s)) = \\ = P(X_k \le Q_\xi(s)) = F_\xi(Q_\xi(s)) = (F_\xi \circ Q_\xi)(s) \ge s,$$

като равенство се достига само за стойностите $\{s_m\}_{m\in I}$. От горните разсъждения става ясно, че непрекъснатостта (по-точно „свойството на междинните стойности“) на $F(x)$ всъщност е и необходимо условие за $U \in \mathrm{U}(0,1)$.

Задача 12

Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина $\xi \in \mathrm{Bi}(1,\theta)$. Намерете ефективна оценка за неизвестния параметър θ.

Решение. Ще използваме теоремата на Рао-Крамер за да покажем, че $T(\vec{X}) = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ е ефективна оценка за θ. Функцията на вероятностите на ξ е

$$P(\xi = x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x},$$

където $x = 0, 1$, а съответната функцията на правдоподобие е

$$L(\vec{x},\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{nT(\vec{x})}(1-\theta)^{n(1-T(\vec{x}))}.$$

Логаритмуваме функцията $L(\vec{x},\theta)$:

$$\ln L(\vec{x},\theta) = n\big[T(\vec{x})\ln\theta - (1-T(\vec{x}))\ln(1-\theta)\big]$$

и я диференцираме по θ:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x},\theta)}{\partial\theta} = n\left[\frac{T(\vec{x})}{\theta} + \frac{1-T(\vec{x})}{1-\theta}\right] = \frac{n}{\theta-\theta^2}[T(\vec{x})(1-\theta) + (1-T(\vec{x}))\theta] =$$
$$= \frac{n}{\theta-\theta^2}[T(\vec{x}) - \theta T(\vec{x}) + \theta - T(\vec{x})\theta] = \frac{n}{\theta-\theta^2}(T(\vec{x})-\theta).$$

От последното равенство и от теоремата на Рао-Крамер следва, че $T(\vec{X})$ е ефективна оценка за θ.

Задача 13

Нека $X_1,\dots,X_n$ са независими наблюдения над случайната величина $\xi \in \mathrm{U}(0,\beta)$.

а) Да се намери м.п.о. за параметъра β. Да се провери дали намерената оценка е неизместена и състоятелна.

б) Да се провери дали $t = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ е неизместена и състоятелна оценка за β. Да се сравнят оценките от а) и б)

Решение. а) Функцията на правдоподобие $L(\vec{x},\beta) = \beta^{-n}, 0 \le x_i \le \beta\ \forall i = 1,\dots,n$ е намаляваща, следователно максимално правдоподобната оценка за β е най-малката възможна стойност, която може да приеме β. От това, че $X_i \le \beta\ \forall i = 1,\dots,n$ следва, че тази минимална стойност е $\hat{\beta} = \max\{X_1,\dots,X_n\} = X_{(n)}$.

б) Очакването на оценката t е

$$\mathbb{E}\, t = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, X_i = 2\,\mathbb{E}\,\xi = \beta,$$

следователно t е неизместена.

От усиления закон за големите числа имаме $\overline{X} \xrightarrow{\text{п.с.}} \mathbb{E}\,\xi$, следователно $t = 2\overline{X}$ е силно състоятелна оценка.

От задача 11 следва, че

$$f_{\hat{\beta}}(x) = f_{X_{(n)}}(x) = nF_\xi(x)^{n-1}f_\xi(x) = \frac{n}{\beta^n}x^{n-1},$$

където $0 \le x \le \beta$, което ни позволява да намерим моментите на $\hat{\beta}$

$$\mathbb{E}\,\hat{\beta}^k = \frac{n}{\beta^n}\int_0^\beta x^{n-1+k}dx = \frac{n}{n+k}\beta^k,$$

в частност $\mathbb{E}\,\hat{\beta} = \frac{n}{n+1}\beta$.

Виждаме, че $\hat{\beta}$ е изместена, но асимптотично неизместена оценка. Ще покажем, че тя е и състоятелна, като намерим първо дисперсията ѝ, а после средноквадратичното ѝ отклонение (използваме, че L_p сходимост $\implies$ сходимост по вероятност).

$$\mathbb{D}\,\hat{\beta} = \mathbb{D}\,X_{(n)} = \mathbb{E}\,X_{(n)}^2 - (\mathbb{E}\,X_{(n)})^2 = \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right) n\beta^2 = \\ = \frac{(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} n\beta^2 = \frac{n\beta^2}{(n+1)^2(n+2)},$$

$$\mathrm{MSE}(\hat{\beta}) = \mathbb{D}(X_{(n)}) + \left(\frac{\beta}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\beta^2 = \\ = \frac{2n+2}{(n+1)^2(n+2)}\beta^2 = \frac{2\beta^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

За дисперсията на t имаме

$$\mathbb{D}\,t = 4\,\mathbb{D}\,\overline{X} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\,X_i = \frac{4}{n}\,\mathbb{D}\,\xi = \frac{\beta^2}{3n}.$$

Очевидно $\hat{\beta}$ има значително по-малка дисперсия от t $\forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 14

Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина $\xi \in \mathrm{U}(\theta_1, \theta_1 + \theta_2)$. Да се намери оценка по метода на моментите за параметрите θ_1 и θ_2.

Решение. Моментите на ξ имат вида

$$\mathbb{E}\,\xi^k = \frac{1}{\theta_2}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} x^k dx = \frac{1}{\theta_2}\left[\frac{\theta_1^{k+1} + (\theta_1+\theta_2)^{k+1}}{k+1}\right] = \\ = \frac{1}{\theta_2(k+1)}\left[\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\theta_1^i\theta_2^{k+1-i} - \theta_1^{k+1}\right] = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\theta_1^i\theta_2^{k-i}}{k+1-i},$$

$$m_1 = \mathbb{E}\,\xi^1 = \frac{\theta_2}{2} + \theta_1,$$
$$m_2 = \mathbb{E}\,\xi^2 = \frac{\theta_2^2}{3} + \theta_1\theta_2 + \theta_1^2.$$

Изразяваме θ_1 чрез m_1:

$$\theta_1 = m_1 - \frac{\theta_2}{2}$$

и заместваме във второто равенство

$$12m_2 = 4\theta^2 + 12\theta_1(\theta_2 + \theta_1) = 4\theta^2 + 3(2m_1 - \theta_2)(2\theta_2 + 2m_1 - \theta_2) = 4\theta^2 + 12m_1^2 - 3\theta_2^2 \implies$$
$$\implies \theta_2^2 = 12(m_2 - m_1^2).$$

Така образуваме оценките

$$\hat{\theta}_1 = \overline{X}_n - \sqrt{3\overline{\sigma^2}},$$
$$\hat{\theta}_2 = 2\sqrt{3\overline{\sigma^2}},$$

където

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \overline{X}_n^2 - (\overline{X}_n)^2.$$

Задача 15

Острата левкемия е една от най-смъртоносните форми на рак. Предишните изследвания показват, че времето на преживяване след първоначалното откриване на левкемия е нормално разпределена случайна величина с математическо очакване 13 месеца и стандартно отклонение 3 месеца. Въвежда се ново лечение, като се очаква то да удължи средното време на живот без да повлияе на дисперсията. Наблюдавани са 16 пациента:

8.0	13.6	13.2	13.6	12.5	14.2	14.9	14.5
13.4	8.6	11.5	16.0	14.2	19.0	17.9	17.0

Да се определи доверителен интервал за средното време на живот на болните с точно ниво на доверие 96% ($\overline{X}_k = 13.9, \overline{S}_n^2 = 130/15 \approx 8.67$)

Решение. Тъй като знаем стандартното отклонение, можем да използваме интервала

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z \approx 12.58, \infty\right),$$

където $z = \mathrm{N}(0,1)_\gamma \approx 1.75$ е $\gamma = 0.96$ квантил на стандартното нормално разпределение.

Можем да не разчитаме на известното стандартно отклонение и да построим интервала

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} t \approx 12.52, \infty\right),$$

където $t = \mathrm{t}(n-1)_\gamma \approx 1.88$ е $\gamma = 0.96$ квантил на разпределението на Стюдънт.

Задача 16

Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина $\xi \in \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, където параметрите μ и σ^2 са неизвестни. Да се построи доверителен интервал за σ^2 с точно ниво на доверие γ.

Решение. Използваме това, че

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),$$
$$\frac{n-1}{\sigma^2}\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \in \chi^2(n-1),$$

за да построим интервал от вида

$$\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)\overline{S}_n^2}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\overline{S}_n^2}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right) = \mathrm{P}\left(h_{\frac{1-\gamma}{2}} \le \frac{(n-1)\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \le h_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{(n-1)\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \le h_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \mathrm{P}\left(\frac{(n-1)\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \le h_{\frac{1-\gamma}{2}}\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma,$$

където $h_{\frac{1-\gamma}{2}}$ и $h_{\frac{1+\gamma}{2}}$ са съответните квантили на $\chi^2(n-1)$ разпределението.

Задача 17

Случайната величина $\xi \in \mathrm{N}(a, \sigma^2 = 2500)$. Намерете най-малкия необходим брой наблюдения над ξ, за да бъде определено a с точност $\varepsilon = 25$ и надеждност $\alpha = 0.9$.

Решение. Нека $X_1, \ldots, X_n$ е извадка над ξ и нека $Z = \frac{\overline{X}_n - a}{\sigma}\sqrt{n}$. Решаваме уравнението

$$\mathrm{P}(|\overline{X}_n - a| \le \varepsilon) = \mathrm{P}\left(|Z| \le \frac{\varepsilon}{\delta}\sqrt{n}\right) = \mathrm{P}\left(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1 \ge 0.9 = \alpha \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \ge 0.95$$

което е еквивалентно на

$$\sqrt{n} \geq 2\Phi^{-1}(0.95) \iff n \geq [2\Phi^{-1}(\alpha)]^2 \approx 10.82.$$

Получихме, че за размер на извадката $n \geq 11$ оценката $\overline{X}$ ще бъде достатъчно близка до стойността на параметъра a.

Задача 18

Нека

$$0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0$$

са независими наблюдения над случайната величина $\xi \in \mathrm{Bi}(1, p)$. Да се построи асимптотичен доверителен интервал за неизвестния параметър p при ниво на доверие $\gamma = 0.98$.

Решение. Ако $X_1, \dots, X_n$ е редица от $\mathrm{Bi}(1, p)$-разпределени случайни величини, то $n\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \in Bi(n, p)$ и

$$\frac{n\overline{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} Z \in \mathrm{N}(0, 1).$$

Ако положим z да бъде $\frac{1+\gamma}{2}$ квантил на стандартното нормално разпределение, ще получим асимптотичен интервал от вида

$$-z \leq \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \leq z.$$

Ние ще използваме интервала на Валд, при който $\sqrt{p(1-p)}$ се заменя с $\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}$. Крайният резултат е

$$\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} z \leq p \leq \overline{X}_n - \sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} z$$

или

$$-0.02 \leq p \leq 0.77.$$

Задача 19

Нека X е наблюдение над случайната величина ξ. Да се провери хипотезата

$$H_0 : f_0(x) = \begin{cases} 0.10, & x \in [0, 10] \\ 0, & x \notin [0, 10] \end{cases}$$

срещу алтернативата

$$H_1 : f_1(x) = \begin{cases} 1.2, & x \in [0, 0.5) \\ 0.3, & x \in [0.5, 1.5) \\ 1/85, & x \in [1.5, 10], \\ 0, & x \notin [0, 10] \end{cases}$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.10$. Нека $W_1 = [0, 1)$, $W_2 = [0, 0.5] \bigcup [1, 1.5)$, $W_3 = [0, 0.5) \bigcup [0.75, 1.25)$, $W_4 = [0, 0.5) \bigcup [1.5, 2)$, $W_5 = [5.2, 6.2)$. Да се покаже, че $W_1, W_2, \ldots, W_5$ са критични области, а W_1, W_2, W_3 са о.к.о.

Решение. Функциите на разпределение, съответстващи на $f_0(x)$ и $f_1(x)$, са

$$F_0(x) = \frac{x}{10}\chi_{[0,10]}(x),$$

където χ_A е индикатор за множеството A, а

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{5}x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10}\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{3}{10}\left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{85}(x + 75) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{85}\left(x - \frac{3}{2}\right), & \frac{3}{2} \le x \le 10 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че всяка една от областите има вероятност за грешка от първи род равна на $\alpha = 0.10$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0(X \in W_1) &= \mathrm{P}_0(0 \le X < 1) = F_0(1) - F_0(0) = \frac{1}{10} = \alpha \\ \mathrm{P}_0(X \in W_2) &= \mathrm{P}_0\left(0 \le X < \frac{3}{2}\right) - \mathrm{P}_0\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) = \frac{1}{10} = \alpha \\ \mathrm{P}_0(X \in W_3) &= \mathrm{P}_0\left(0 \le X < \frac{5}{4}\right) - \mathrm{P}_0\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{10} = \alpha \\ \mathrm{P}_0(X \in W_4) &= \mathrm{P}_0(0 \le X \le 2) - \mathrm{P}_0\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{10} = \alpha, \\ \mathrm{P}_0(X \in W_5) &= \mathrm{P}_0(5.2 \le X \le 6.2) = \frac{1}{10} = \alpha, \end{aligned}$$

а съответните грешки от втори род са

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1(X \in \overline{W}_1) &= \mathrm{P}_1(X \in \overline{W}_2) = \mathrm{P}_1(X \in \overline{W}_3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ \mathrm{P}_1(X \in \overline{W}_4) &= 1 - \mathrm{P}_1(X \in W_4) = 1 - \frac{103}{170} = \frac{67}{170} \\ \mathrm{P}_1(X \in \overline{W}_5) &= 1 - \frac{1}{85} = \frac{84}{85}. \end{aligned}$$

Следователно $W_1, \ldots, W_5$ са α-критични области.

Нека сега разгледаме отношението на правдоподобие $l(x)$ в интервала $[0, 10]$,

$$l(x) = \frac{L_1(x)}{L_0(x)} = 10 f_1(x).$$

Да забележим, че $l(x)$ е „стъпаловидна" монотонно намаляваща функция и че $[0, 10]$ се разбива на три интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right) \bigcup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left[\frac{3}{2}, 10\right]$, като $l(x) = l(y) \iff x$ и y принадлежат на един и същ подинтервал от това разбиване. Следователно, според лемата на Нейман-Пирсън, оптимални ще бъдат точно онези критични области, които съдържат изцяло първите $i-1$ подинтервала и частично i-тия подинтервал, $i = 1, 2, 3$. А това са областите W_1, W_2 и W_3.

Задача 20

Нека случайната величина $\xi \in \mathrm{Po}(\lambda)$ е броят на прекъсвания на телевизионен сигнал в следствие на случайни смущения. Проверява се хипотезата $H_0\colon \lambda = 1$ срещу алтернативата $H_1\colon \lambda = 4$ с ниво на съгласие $\alpha = 0.03$. Да се използва нормално приближение за определяне на о.к.о. и мощността на критерия. Да се определи най-малкото n, за което мощността е не по-малка от 0.95. Ако направените наблюдения са:

$$1, 0, 2, 0, 3, 1, 0, 4, 3, 1, 0, 2, 1, 4, 0, 5,$$

може ли да се отхвърли хипотезата H_0?

Решение. Тъй като имаме две прости хипотези, ще използваме лемата на Нейман-Пирсън. Нека $\vec{x} \in \mathbb{N}_0^n$. Тогава неравенството

$$l(x) = \frac{L_1(\vec{x})}{L_0(\vec{x})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1}}{\lambda_0^{x_i} e^{-\lambda^0}} = e^{n(\lambda_0 - \lambda_1)} \frac{\lambda_1}{\lambda_0}^{\sum_{i=1}^n x_i} = e^{-3n} 4^{\sum_{i=1}^n x_i} \geq K$$

е еквивалентно на

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq C = \frac{1}{n} \log_4(e^{3n} K),$$

където C също е неизвестна константа, зависеща от α. Използвайки нормалното приближение

$$\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{n} \to Z \in \mathrm{N}(0, 1)$$

получаваме оптималната критична област

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{N}_0^n \colon \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Съответната мощност е

$$P_1\left(\overline{X}_n > 1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = P_1\left(Z > \frac{z_{1-\alpha} - 3\sqrt{n}}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{z_{1-\alpha} - 3\sqrt{n}}{2}\right)$$

За да намерим стойност на n, за която мощността да бъде не по-малка от $\pi = 0.95$, решаваме уравнението

$$\begin{aligned}
1 - \Phi\left(\frac{z_{1-\alpha} - 3\sqrt{n}}{2}\right) &\geq \pi \\
\Phi\left(\frac{z_{1-\alpha} - 3\sqrt{n}}{2}\right) &\leq 1 - \pi \\
z_{1-\alpha} - 3\sqrt{n} &\leq 2z_{1-\pi} \\
\sqrt{n} &\geq \frac{z_{1-\alpha} - 2z_{1-\pi}}{3} \\
n &\geq \left(\frac{z_{1-\alpha} - 2z_{1-\pi}}{3}\right)^2 \approx 2.70,
\end{aligned}$$

следователно мощността ще бъде достатъчно висока за $n \geq 3$.

Остава да проверим дали трябва да отхвърлим нулевата хипотеза с данните от условието. Имаме $\overline{X}_n = 1.6875 \geq 1.41 \approx 1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$, при което тестовата статистика попада в построената критична област.

Задача 21

Средното време за сглобяване на електронно устройство е 2,3 минути (смятаме, че е нормално разпределено). След въвеждане на нова организация на труда е измерено време за сглобяване:

$$1, 1.5, 2.2, 3, 2.7, 2, 2.4, 2.6, 2.3, 1.7.$$

Може ли с ниво на доверие 0.95 да се приеме, че по новата технология необходимото време е по-малко?

Решение. Използваме тест на Стюдънт, за да проверим хипотезите

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2,3 \\ H_1 : \mu < 2,3, \end{cases}$$

за извадката $X_1, \ldots, X_n \in N(\mu, \sigma^2)$. Имаме

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\overline{S}_n^2}\sqrt{n} \approx -1.39 > -1.83 = \mathrm{t}(n-1)_{0.05},$$

откъдето можем да заключим, че времето за производство не се е променило (т.е. нямаме основание да отхвърлим нулевата хипотеза).

Задача 22

Нека ξ е експоненциално разпределение с плътност $f(x) = \theta^{-1}e^{-x\theta^{-1}}, x \geq 0, \theta > 0$. Намерете р.н.м.к.о. за проверка на хипотезата $H_0 : \theta = 1$ срещу алтернативата $H_1 : \theta > 1$ с ниво на съгласие $\alpha = 0.03$. Каква е мощността на критерия при $\theta_1 = 2$ и $n = 36$.

Решение. Ще използваме това, че $\overline{X}_n \in \text{Gamma}\left(n, \frac{n}{\theta}\right)$. Неравенството от теоремата на Нейман-Пирсън при $\theta_0 = 1$ и произволно $\theta_1 > 1$ има вида (стига $\vec{x} \in \mathbb{R}^n_+$)

$$\frac{L_1(\vec{x})}{L_0(\vec{x})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_1^{-1}e^{-x_i\theta_1^{-1}}}{e^{-x_i}} = \frac{1}{\theta_1^n}e^{(1-\theta_1^{-1})\sum_{i=1}^n x_i} \geq K \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C = \frac{\ln(K\theta_1^n)}{n(1-\theta_1^{-1})},$$

откъдето следва, че критичната област

$$W = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C = \text{Gamma}(n, n)_{0.97}\right\}$$

не зависи от θ_1 и е равномерно най-мощна. Мощността на критерия при $\theta_1 = 2$ и $n = 36$ е

$$P_1(\overline{X}_n > C) = 1 - F_1(C) \approx 1 - F_1(1.3360) \approx 0.9865.$$