11.10.2019 Обща топология (упражнения)

Заб. Редът на темите в конспекта понякога не отговаря на реда им в записките

1. Множества

Тв.1 $f: X \to Y$

$$f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i),\ A_i \subseteq X$$

Д-во ($\Rightarrow$) Нека $y \in f(\bigcup A_i)$. Тогава $\exists x \in \bigcup A_i : f(x) = y$ и $\exists i_0 : x \in A_{i_0}$. Тогава $y \in f(A_i)$

($\Leftarrow$) Нека $y \in \bigcup_i f(A_i)$, т.е. $\exists i_0 : y \in f(A_{i_0})$. Тогава $\exists x \in A_{i_0} : f(x) = y$

$\Rightarrow x \in \bigcup_i A_i$ и $y = f(x) \Rightarrow y \in f(\bigcup_i A_i)$.

$\square$

Тв.2 $f: X \to Y$. Нека $A, B \subseteq X$. Тогава $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$, като равенство се достига, когато f е инекция.

Д-во Ако $f(A) \setminus f(B) \neq \emptyset$ и $y \in f(A) \setminus f(B)$, то $\exists x \in A : f(x) = y$.

При това $x \notin B$, понеже иначе получаваме $f(B) \ni f(x) = y \notin f(B)$.

Следователно $x \in A \setminus B$ и $f(x) = y \in f(A \setminus B)$, т.е. $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

Ако f е инективна, то от $y \in f(A \setminus B) \Rightarrow \exists x \in A \setminus B : f(x) = y$.

Тогава $x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)$ и, от инективността на $f \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists z \in B : x \neq z$ и $f(z) = y$

$\Rightarrow f(x) = y \notin f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$

$\Rightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

$\square$

3. Мощност на множества

Опр. Ако същ. инекция $f: A \to B$, казваме, че $|A| \leq |B|$. Ако f е биекция, казваме, че $|A| = |B|$.

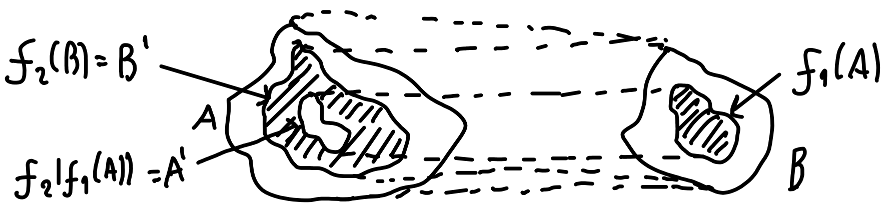
Ако $|A| = |B|$, казваме, че мн. A и B са равномощни.

Т-ма 3 (Кантор-Шрьодер-Бернщайн)

Нека A и B са множества. Ако $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$

Д-во Нека има инекции $f_1 : A \to B$ и $f_2 : B \to A$.

Полагаме $B' = f_2(B)$, $A' = f_2(f_1(A))$. Имаме $A' \subseteq B' \subseteq A$.



Тъй като очевидно $|A'| = |A|$, задачата се свежда до следното:

Нека $X_1 \subseteq Y \subseteq X$ и има биекция $f: X \to X_1$. Трябва да докажем, че $\exists$ биекция $g: X \to Y$. Построяваме редицата

$X_0, Y_0, X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n, \dots$, където

$$X_n := \begin{cases} X, & n = 0 \\ f(X_{n-1}), & n > 0 \end{cases} \qquad Y_n := \begin{cases} Y, & n = 0 \\ f(Y_{n-1}), & n > 0 \end{cases}$$

С инд. по n ще докажем включването $X_0 \subseteq Y_0 \subseteq \cdots$

За $n=0$ имаме $X_0 = X \subseteq Y = Y_0$. Доп., че твърдението е вярно за всяко $n > 0$. От монотонността на $\subseteq$ следва, че ако $Y_n \subseteq X_n$, то $Y_{n+1} = f(Y_n) \subseteq f(X_n) = X_{n+1}$, т.е. $\forall n, Y_n \subseteq X_n$.

Полагаме $g: X \to Y, \; x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in X_n \setminus Y_n \text{ за някое } n \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$

Имаме $X \overset{\text{тв.1}}{=} \bigcup_n \big[\underbrace{(X_n \setminus Y_n) \cup (Y_n \setminus X_{n+1})}_{\text{всички множества са дизюнктни}}\big]$, $f(X_n \setminus Y_n) \overset{\text{тв.2}}{=} X_{n+1} \setminus Y_{n+1}$ и

$f(Y_n \setminus X_{n+1}) \overset{\text{тв.2}}{=} Y_{n+1} \setminus X_{n+1}$.

Следователно $g(X) = Y$.

Нека $x_1 \neq x_2 \in X$.

- Ако $x_1 \in X_n \setminus Y_n$ и $x_2 \in X_m \setminus Y_m$, то $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$.
- Ако $x_1 \in X_n \setminus Y_n$ и $x_2 \in Y_m \setminus X_{m+1}$, то $g(x_1) = f(x_1) \neq x_2 = g(x_2)$, понеже от $f_1(x_1) = x_2$ би следвало, че $f(X_n \setminus Y_n) = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} \subseteq Y_m \setminus X_{m+1}$
- Ако $x_1 \in Y_n \setminus X_{m+1}$ и $x_2 \in Y_m \setminus X_{m+1}$, то $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$

$\Rightarrow g$ е биекция $\square$

Тв.4 Нека $f: X \to Y$ и $A, B \subseteq X$. Тогава $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, като равенство се достига за инекции.

Д-во Нека $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y$. Но $x \in A$ и $x \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow y = f(x) \in f(A)$ и $y = f(x) \in f(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$
$\Rightarrow f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Ако f е инекция и $y \in f(A) \cap f(B)$, то $y \in f(A)$ и $\exists x \in A : f(x) = y$ и $\exists z \in B : f(z) = y$. Но понеже f е инекция, $x = z \in A \cap B \Rightarrow y \in f(A \cap B)$
$\Rightarrow f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

$\square$

Тв.5 Нека $f: X \to Y$ и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(а) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, като равенство се достига за инекция

(б) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, като равенство се достига за сюрекция

Д-во

(а) Нека $a \in A$. Тогава $f(a) \in f(A)$ и $a \in f^{-1}(f(A)) = \{\alpha \in A \mid f(\alpha) \in f(A)\}$
Ако f е инекция, $f^{-1}(f(a)) = \{a\} \Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$.

(б) Нека $b \in B$. Тогава

- Ако $b \in f(A)$, имаме $f(f^{-1}(b)) = f(\{\alpha \in A \mid f(\alpha) = b\}) = b$
- Ако $b \notin f(A)$, $f(f^{-1}(b))$ не е деф.

$\Rightarrow f(f^{-1}(b)) \subseteq B$.

Ако f е сюрекция, вторият случай не е възможен и $f(f^{-1}(b)) = B$.

$\square$

18.10.2019

Опр. (Операции с кардинални числа)

ξ, τ - кард. числа

A, B - множества: $|A| = \xi, |B| = \tau, A \cap B = \emptyset$

1) $\xi + \tau := |A \cup B|$, аналог. $\sum_{\alpha \in \Gamma} \tau_\alpha$

2) $\xi \cdot \tau := |A \times B|$, аналог $\prod_{\alpha \in \Gamma} \tau_\alpha$

3) $\tau^\xi := |\{f : \xi \to \tau\}|$

Когато $\tau = 2$, $2^\xi = |\{f : A \to \{0, 1\}\}|$

Тв. 6 Ако $|A| = \tau$, то $|\mathcal{P}(A)| = 2^\tau$

Д-во $\forall B \subseteq A$ деф. характеристична функция χ_B

$\chi_B : A \to \{0, 1\}$

$\chi_B(a) = \begin{cases} 1, a \in B \\ 0, a \notin B \end{cases}$

Ако $B, C \subseteq A$ и $B \neq C$

$\chi_B \neq \chi_C$

Деф. $g : \mathcal{P}(A) \to \{f : A \to \{0, 1\}\}$

$g(B) := \chi_B$ е биекция

$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = |2^A|$ □

Сл. 7 $\tau < 2^\tau$

Т-ма 8 За всяко безкрайно кардинално число τ имаме $\tau^2 = \tau$

Сл. 9 ——— || ——— τ имаме $\tau + \tau = \tau$

Д-во $\tau \leq \tau + \tau \leq \tau^2 = \tau$ □

Сл. 10 $\aleph_0^2 = \aleph_0$

Д-во (без т-ма 3) нареждаме безброй копия на $\aleph_0$ едно под друго

$$\begin{array}{cccc} a_{00} \to & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{array}$$

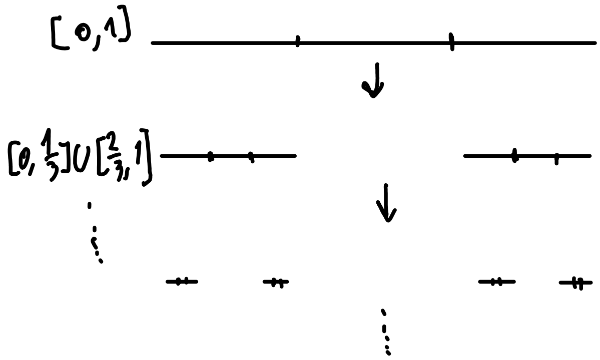
□

<u>Т-ма 11</u> $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

<u>Д-во</u> $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow |\mathbb{Q}| \geq \aleph_0$

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-| = |\mathbb{Q}^+| + |\mathbb{Q}^-| = |\mathbb{Q}^+| = |\{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0^2 = \aleph_0^2$$ □

<u>Опр.</u> (Канторово множество C)



Мярка на допълнението на C в $[0,1]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

$$X := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0,1\}$$

$$X_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$$

$$0 \leq X_k \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3^k}$$

$\exists$ биекция от всички редици над $\{0,1\}$ и $C \Rightarrow |C| = 2^{\aleph_0}$

$C \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |\mathbb{R}| \geq 2^{\aleph_0}$

$tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ е биекция и $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |(0,1)| = |\mathbb{R}|$

Нека $f: (0,1) \to \{\{a_n\}_n^{\infty} \mid a_n \in \{0,1\}\}$ е двоичното представяне на числата от $(0,1)$. То е инекция $\Rightarrow |(0,1)| \leq 2^{\aleph_0} \Rightarrow |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

25.10.2019

Тв. 12 $A \subseteq X$, $f: X \to Y$

$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, като равенство се достига, ако f е инекция

Д-во $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B$, така че $f(x) = y$

$x \in A$ и $x \in B \Rightarrow y \in f(A)$ и $y \in f(B) \Rightarrow f(x) = y \in f(A) \cap f(B)$.

Нека $x_1, x_2 \in X$ и $f(x_1) = f(x_2)$

Полагаме $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A \cap B) = \emptyset$, но $f(A) \cap f(B) = \{y\} \neq \emptyset$

Ако f е инективна и $y \in f(A) \cap f(B)$, то

$\exists x_1 \in A$ и $\exists x_2 \in B$: $y = f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \in A \cap B \Rightarrow y \in f(A \cap B)$ $\square$

Тв. 13 $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$

Д-во $x \in f^{-1}(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_i A_i \Leftrightarrow \exists i_0 : f(x) \in A_{i_0}$

$\Leftrightarrow \exists i_0 : x \in f^{-1}(A_{i_0})$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(A_{i_0})$

$\square$

Тв. 14 $f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$

Д-во $x \in f^{-1}(\bigcap_i A) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \forall i_0 : f(x) \in A_{i_0}$

$\Leftrightarrow \forall i_0 : x \in f^{-1}(A_{i_0})$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(A_{i_0})$

$\square$

Тв. 15 $f^{-1}(A\setminus B) = f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$

Д-во $x\in f^{-1}(A\setminus B) \iff f(x)\in A\setminus B \iff f(x)\in A \wedge f(x)\notin B$

$\iff x\in f^{-1}(A) \wedge x\notin f^{-1}(B)$

$\iff x\in f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$

□

Тв. 16 $A\subseteq f^{-1}(f(A))$, като рав. се достига при f-инективна

Д-во $x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A) \Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$

Нека $x_1, x_2\in X: f(x_1)=f(x_2)=y$ и $A=\{x_1\}$.

$f(A)=\{f(x_1)\}$, но $A\neq f^{-1}(f(A))\supseteq\{x_1,x_2\}$.

Нека f е инекция и $x\in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow y=f(x)\in f(A)$

$\forall x_0\neq x\in X \Rightarrow f(x_0)\neq y$. Но $y\in f(A)\Rightarrow x\in A$. □

Тв. 17 $f(A\cap f^{-1}(B)) = f(A)\cap B$

2. Топология в метрични пространства

Опр. (Метрика) $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$

(M1) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$

(M2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x,y\in X$

(M3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)\ \forall x,y,z\in X$

Двойката (X,ρ) се нарича метрично пространство.

$\tau=\{U\subseteq X \mid \forall x\in U\ \forall\varepsilon>0\ B(x,\varepsilon)\subseteq U\}$, където $B(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\}$

се нарича естествена топология в X.

Т-ма 18 τ наистина е топология

Д-во

(O1) Очевидно $X\in\tau$ и $\emptyset\in\tau$

(O2) Нека $U_1, U_2\in\tau$ и $x\in U_1\cap U_2$.

$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : B(x, \varepsilon_1) \subseteq \mathcal{U}_1$ и $B(x, \varepsilon_2) \subseteq \mathcal{U}_2$

Нека $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогава $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2)$

(O3) Нека $\tau' \subseteq \tau$ и $x \in \bigcup \tau' \Rightarrow \exists\, \mathcal{U} \in \tau' : x \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U} \subseteq \bigcup \tau' \Rightarrow \bigcup \tau' \in \tau$

$\Rightarrow \tau$ е топология в X. $\square$

Тв. 1.9 Отворените кълбета $B(x, \varepsilon)$ са отв. в ест. топология

Д-во Нека $y \in B(x, \varepsilon)$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon - \rho(x, y)$

Нека $z \in B(y, \varepsilon_1)$. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < (\varepsilon - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 = \varepsilon$

$\Rightarrow z \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow B(y, \varepsilon_1) \subseteq B(x, \varepsilon)$. $\square$

08.11.2019

6. Бази на топологии

$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$ е база на $\mathbb{R}^n$

Тв. 20 $\mathcal{B}' = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}^{>0}\}$ е база на $\mathbb{R}^n$

Д-во Нека $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{U}$ е околност на x

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$.

Нека $n \in \mathbb{N}^{>0} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ и $x' \in \mathbb{Q}^n : \rho(x, x') < \frac{1}{2n}$.

Ще докажем, че $x \in B(x', \frac{1}{2n}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$.

Нека $y \in B(x', \frac{1}{2n})$. Тогава $\rho(x, y) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\Rightarrow y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow \mathcal{B}'$ е база на топологията в $\mathbb{R}^n$.

Ако $w(\mathbb{R}^n) < \aleph_0$, то $\exists \mathcal{B}'' = \{B(x_1, \frac{1}{n_1}), \dots, B(x_k, \frac{1}{n_k})\} : \mathcal{B}''$ е база.

Но $\bigcup \mathcal{B}'' \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{B}''$ не е база. $\Rightarrow w(\mathbb{R}^n) \geq \aleph_0$.

Но $|\mathcal{B}'| = \aleph_0 \Rightarrow w(\mathbb{R}^n) = \aleph_0$

$\square$

Тв. 21 $\mathcal{B} = \{(r, s), r < s \in \mathbb{Q}\}$ е база на $\mathbb{R}$.

Д-во Нека $x \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{U}_x$ е ок. на x. Тогава $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$.

Тогава $\exists r, s \in \mathbb{Q} : x - \varepsilon < r < x < s < x + \varepsilon \Rightarrow x \in (r, s) \subseteq \mathcal{U}$.

$\square$

Пр. 22 Фам. $\mathcal{B} = \{[x, r) \mid x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$ удовл. условията (B1) и (B2) за база и след. поражда топология $\mathcal{Z}$.

Пространството $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ наричаме права на Зоргенфрей.

$|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$. Ще докажем, че $w(\mathbb{R}, \mathcal{Z}) = 2^{\aleph_0}$.

Доп., че $\exists \mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B} : \mathcal{B}'$ е база на $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ и $|\mathcal{B}'| < 2^{\aleph_0}$.

Тогава $\exists x_0 \in \mathbb{R} : [x_0, r) \notin \mathcal{B}' \ \forall r \in \mathbb{Q}$. Тогава $[x_0, r_0) \in \mathcal{Z}$ не може да бъде представено като $\bigcup \mathcal{B}''$, където $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{B}'$ не е база

Лема 23 Нека (X, τ) е т.п., $A \subseteq X$, $\mathcal{U} \in \tau$. Ако $A \cap \mathcal{U} = \emptyset$, то $\overline{A} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Д-во Имаме, че $A \subseteq X \setminus \mathcal{U} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{X \setminus \mathcal{U}} = X \setminus \mathcal{U} \Rightarrow \overline{A} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

$\square$

9. Затворени множества

Тв. 24 Нека (X, τ) е т.п. и $\bar{\ }: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ съпоставя на A затв. обв. $\bar{A}$

(CO1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$

(CO2) $A \subseteq \bar{A}$

(CO3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \forall A, B$

(CO4) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Д-во

(CO1) $\emptyset \in \mathcal{F}(\emptyset) \Rightarrow \bar{\emptyset} \subseteq \emptyset$

(CO2) $A \subseteq F \ \forall F \subseteq \mathcal{F}(A) \Rightarrow A \subseteq \cap \mathcal{F}(A) = \bar{A}$

(CO3) $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ и $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\Rightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(CO4) $\bar{A}$ е затв. $\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}(\bar{A})$ и $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$. Но $\bar{A} \subseteq (\bar{\bar{A}}) \Rightarrow \bar{A} = (\bar{\bar{A}})$. $\square$

Тв. 25 Нека X е мн. $\tilde{\ }: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$.

Ако $\tilde{\ }$ удовл. (CO1) - (CO3), то $\tau = \{X \setminus F \mid F \subseteq X$ и $F = \tilde{F}\}$ е топология в X. $\sim$ се нар. <u>оператор на Чех</u>. Ако $\tilde{\ }$ удовл. и (CO4), той се нарича <u>оператор на Куратовски</u>.

15.11.2019

(F1) - (F3) в лекциите

$\downarrow$

Д-во (Тв. 25)

Ще докажем, че $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid A = \tilde{A}\}$ удовл. (C1) - (C3).

(C1) $\emptyset = \tilde{\emptyset} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$

$X \subseteq \tilde{X} \subseteq X \Rightarrow X = \tilde{X} \in \mathcal{F}$

(C2) Нека $A, B \in \mathcal{F}$. Тогава $\tilde{A} = A$ и $\tilde{B} = B$. $\widetilde{A \cup B} = \tilde{A} \cup \tilde{B} = A \cup B \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

(C3) Нека $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$.

Нека $F' = \bigcap \mathcal{F}'$.

Ще док., че $A \subseteq B \Rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

Наистина, $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ и $\widetilde{A \cup B} = \tilde{B}$

$\widetilde{A \cup B} = \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

$\forall F \in \mathcal{F}',\ F' \subseteq F \Rightarrow \forall F \in \mathcal{F}',\ \tilde{F'} \subseteq \tilde{F} = F$

$\Rightarrow \tilde{F'} \subseteq \bigcap \mathcal{F}' = F' \subseteq \tilde{F'} \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ задава топология в X

$\square$

Тв. 26 Нека $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ е операторът на затв. обв. в (X, τ), т.е. ако $\mathcal{F}(A) := \{F \subseteq X \mid A \subseteq F$ и $F = \tilde{F}\}$, то $\bar{A} := \bigcap \mathcal{F}(A)$. Ще док., че $\tilde{A} = \bar{A}$

Д-во Нека $A \subseteq X$. За произв. $F \in \mathcal{F}(A)$, $A \subseteq F$. След. $\tilde{A} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{F} \overset{(C02)}{=} \widetilde{A \cup F} = \tilde{F} = F$.

Тогава $\tilde{A} \subseteq \bigcap \mathcal{F}(A) = \bar{A}$.

Обратно, $\tilde{\tilde{A}} \overset{(C04)}{=} \tilde{A}$ и $A \overset{(C02)}{\subseteq} \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow \bar{A} = \bigcap \mathcal{F}(A) \subseteq \tilde{A}$.

$\Rightarrow \tilde{A} = \bar{A}$ за произволно $A \subseteq X$.

Пр. 27 Нека X е мн. и $x_0 \in X$. Тогава

$$\bar{A} := \begin{cases} A \cup \{x_0\}, & A \neq \emptyset \\ \emptyset, & A = \emptyset \end{cases}$$

е затв. обвивка

10. Вътрешност и контур на множество

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) е т.п. Тогава $\forall A \subseteq X$, $\tau(A) := \{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subseteq A\}$ и $\operatorname{Int} A := \bigcup \tau(A)$. $\operatorname{Int} A$ се нарича <u>вътрешност на A</u>.

<u>Тв. 28</u> (X, τ) - т.п., $A \subseteq X$

(а) $\operatorname{Int} A \in \tau$

(б) $\operatorname{Int} A \subseteq A$

(в) $\operatorname{Int} A$ е най-голямото отворено множество, което се съдържа в A

(г) $x \in \operatorname{Int} A \iff \exists$ ок. $\mathcal{U}$ на x: $\mathcal{U} \subseteq A$

<u>Д-во</u>

(а) $\tau(A) \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup \tau(A) \in \tau$

(б) $\forall \mathcal{U} \in \tau(A)$, $\mathcal{U} \subseteq A \Rightarrow \bigcup \tau(A) \subseteq A$

(в) Ако $\mathcal{U} \in \tau$ и $\mathcal{U} \subseteq A \Rightarrow \mathcal{U} \in \tau(A) \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \bigcup \tau(A)$

(г) $(\Rightarrow)$ $\operatorname{Int} A$ е ок. на x

$(\Leftarrow)$ Ако $\mathcal{U}_x$ е ок. на x: $\mathcal{U} \subseteq A$, то $\mathcal{U} \in \tau(A)$

. $x \in \mathcal{U} \subseteq \bigcup \tau(A) = \operatorname{Int} A$

<u>Тв. 29</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A \subseteq X$.
Тогава $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

<u>Д-во</u> Полагаме $B = X \setminus A$. Ще докажем, че $\overline{B} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)$

$x \in \overline{B} \iff \forall$ ок. $\mathcal{U}_x$ на x, $\mathcal{U}_x \cap B \neq \emptyset \iff \forall$ ок. $\mathcal{U}_x$ на x, $\mathcal{U}_x \not\subseteq X \setminus B \iff$

$x \notin \operatorname{Int}(X \setminus B) \Rightarrow x \in X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)$

$\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{Int} A \iff \operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$

□

<u>Факт 30</u> $A \in \tau \iff A = \operatorname{Int} A$

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$ $\forall A$, $A \subseteq A$. Ако $A \in \tau \Rightarrow A \in \tau(A)$ и $A \subseteq \operatorname{Int} A \subseteq A \Rightarrow A = \operatorname{Int} A$

$(\Leftarrow)$ $\operatorname{Int} A \in \tau \Rightarrow A \in \tau$

□

<u>Тв. 31</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A, B \subseteq X$. Тогава:

(IO 1) $\operatorname{Int} X = X$

(IO 2) $\operatorname{Int} A \subseteq A$

(IO3) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

(IO4) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int} A$

<u>Д-во</u>

(IO1) $X \in \tau \Rightarrow \operatorname{Int} A = X$

(IO2) Очевидно

(IO3) $x \in \operatorname{Int}(A \cap B) \Rightarrow \exists\, U_x : U_x \subseteq A \cap B \Rightarrow U_x \subseteq A$ и $U_x \subseteq B$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Int} A$ и $x \in \operatorname{Int} B \Rightarrow x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Нека $x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$. Тогава $\exists\, U_x \subseteq \operatorname{Int} A \subseteq A, \exists V_x \subseteq \operatorname{Int} B \subseteq B$ и $U_x \cap V_x \subseteq A \cap B$. Но $U_x \cap V_x \in \tau \Rightarrow U_x \cap V_x \subseteq \operatorname{Int} A \cap B$.

(IO4) $\operatorname{Int}(A) = \bigcup \tau(A) = \bigcup \{ U \in \tau \mid U \subseteq A \}$. Но за $U \in \tau$, $U \subseteq A \Leftrightarrow U \subseteq \operatorname{Int} A$

$\Rightarrow \operatorname{Int}(A) = \bigcup \{ U \in \tau \mid U \subseteq \operatorname{Int} A \} = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$. □

<u>Тв. 32</u> Нека X е т.п., $\widetilde{\operatorname{Int}} \; \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ удовл. (IO1) - (IO4). Тогава $\tau = \{ U \subseteq X \mid \widetilde{\operatorname{Int}}\, U = U \}$ е топ. в X и ако Int е операторът за вътрешност в (X, τ), то $\widetilde{\operatorname{Int}} = \operatorname{Int}$.

<u>Д-во</u>

(O1) $\widetilde{\operatorname{Int}}\, X \overset{(IO1)}{=} X \Rightarrow X \in \tau$

$\widetilde{\operatorname{Int}}\, \emptyset \underset{(IO2)}{\subseteq} \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$

(O2) Нека $U, V \in \tau$, т.е. $\widetilde{\operatorname{Int}}\, U = U$ и $\widetilde{\operatorname{Int}}\, V = V$.

Тогава от $U \cap V = \widetilde{\operatorname{Int}}\, U \cap \widetilde{\operatorname{Int}}\, V \overset{(IO3)}{=} \widetilde{\operatorname{Int}}\, U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \tau$

(O3) Нека $\tau' \subseteq \tau$ и $U := \bigcup \tau'$. Нека $x \in U$. Тогава $\exists V \in \tau' : x \in V$, т.е. $x \in V = \widetilde{\operatorname{Int}}\, V = \widetilde{\operatorname{Int}}\, (V \cap U) \overset{(IO3)}{=} \widetilde{\operatorname{Int}}\, V \cap \widetilde{\operatorname{Int}}\, U \subseteq \widetilde{\operatorname{Int}}\, U \Rightarrow x \in \widetilde{\operatorname{Int}}\, U$.

$\Rightarrow U \subseteq \widetilde{\operatorname{Int}}\, U \Rightarrow U = \widetilde{\operatorname{Int}}\, U \Rightarrow U \in \tau$.

Нека сега $A \subseteq X$. $x \in \operatorname{Int} A = \bigcup \tau(A) \Rightarrow \exists\, U \in \tau : x \in U$ и $U \subseteq A$.

$U \in \tau \Rightarrow U = \widetilde{\operatorname{Int}}\, U = \widetilde{\operatorname{Int}}\, (U \cap A) = \widetilde{\operatorname{Int}}\, A \Rightarrow \operatorname{Int} A \subseteq \widetilde{\operatorname{Int}}\, A$.

От друга страна, $\widetilde{\operatorname{Int}}\, (\widetilde{\operatorname{Int}}\, A) \overset{(IO4)}{=} \widetilde{\operatorname{Int}}\, A \Rightarrow \widetilde{\operatorname{Int}}\, A \in \tau$. Следователно, понеже $\widetilde{\operatorname{Int}}\, A \subseteq A$, $\widetilde{\operatorname{Int}}\, A \in \tau(A)$ и $\Rightarrow \widetilde{\operatorname{Int}}\, A \subseteq \bigcup \tau(A) = \operatorname{Int} A$.

$\overset{(IO2)}{\Rightarrow} \operatorname{Int} A = \widetilde{\operatorname{Int}}\, A$ за произволно $A \subseteq X$. □

22.11.2019

<u>Д-во</u> (алт. д-во на тв. 32) Полагаме $\tilde{A} = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus A)$

(CO1) $\tilde{\emptyset} = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus \emptyset) = X \setminus \widetilde{Int}\, X = \emptyset$

(CO2) $\tilde{A} = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus A) \supseteq X \setminus (X \setminus A) = A$

$\widetilde{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$

(CO3) $\widetilde{A \cup B} = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus (A \cup B)) = X \setminus \widetilde{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$

$= X \setminus (\widetilde{Int}(X \setminus A) \cap \widetilde{Int}(X \setminus A)) = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus A) \cup X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus B) = \tilde{A} \cup \tilde{B}$

(CO4) $(\tilde{\tilde{A}}) = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus \tilde{A}) = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus (X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus A)) =$

$= X \setminus \widetilde{Int}(\widetilde{Int}(X \setminus A)) = X \setminus \widetilde{Int}(X \setminus A) = \tilde{A}$

$Int\, A = X \setminus (\widetilde{X \setminus A}) = X \setminus (X \setminus \widetilde{Int}(X (X \setminus A)) = \widetilde{Int}\, A$

$\square$

<u>Тв. 33</u> Нека X е мн. и $X_0 \subseteq X$.

Полагаме $Int\, A := \begin{cases} A, & A = X \\ A \cap X_0, & A \neq X \end{cases}$

Ако $X_0 = X$, получаваме дискр. топология

Ако $X_0 = \emptyset$, получаваме антидискретната топология

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A \subseteq X$.

<u>Контур (граница)</u> на A наричаме $Fr\, A := \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

frontier

<u>Тв. 34</u> $x \in Fr\, A \iff \forall$ ок. U на x, $U \cap A \neq \emptyset$ и $U \setminus A = U \cap \bar{A} \neq \emptyset$

<u>Тв. 35</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A, B \subseteq X$

Тогава:

(а) $Fr\, A = \bar{A} \setminus Int\, A$

(б) $Int\, A = A \setminus Fr\, A$

(в) $\bar{A} = A \cup Fr\, A = Int\, A \cup Fr\, A$

(г) $Fr\, A = Fr(X \setminus A)$

(д) $X = Int\, A \cup Fr\, A \cup Int\, (X \setminus A)$

(е) $Fr(A\cup B)\cup Fr(A\cap B)\cup Fr(A\setminus B)\subseteq Fr\,A\cup Fr\,B$

(ж) $Fr\,\bar{A}\subseteq Fr\,A$

(з) $Fr(Int\,A)\subseteq Fr\,A$

(и) A е отв. $\Leftrightarrow Fr\,A=\bar{A}\setminus A$

(й) A е зат. $\Leftrightarrow Fr\,A=A\setminus Int\,A$

(к) A е отв.-зат. $\Leftrightarrow Fr\,A=\emptyset$

Д-во

(а) $\bar{A}\setminus Int\,A=\bar{A}\setminus(X\setminus(\overline{X\setminus A}))=\bar{A}\cap\overline{X\setminus A}=Fr\,A$

(б) $A\setminus Fr\,A=A\setminus(\bar{A}\cap\overline{X\setminus A})=\underbrace{A\setminus\bar{A}}_{\emptyset}\cup A\setminus(\overline{X\setminus A})=A\cap X\setminus(\overline{X\setminus A})=$

$=A\cap Int\,A=Int\,A$

(в) $A\cup Fr\,A=A\cup(\bar{A}\cap\overline{X\setminus A})=(A\cup\bar{A})\cap(A\cup\overline{X\setminus A})=\bar{A}\cap X=\bar{A}$

$Int\,A\cup Fr\,A=Int\,A\cup(\bar{A}\cap\overline{X\setminus A})=(Int\,A\cup\bar{A})\cap(Int\,A\cup\overline{X\setminus A})=$

$=\bar{A}\cap(X\setminus(X\setminus\bar{A})\cup\overline{X\setminus A})=\bar{A}$

(г) $Fr(X\setminus A)=\overline{X\setminus A}\cap\overline{X\setminus X\setminus A}=\overline{X\setminus A}\cap\bar{A}=Fr\,A$

(д) $Int\,A\cup Fr\,A\cup Int(X\setminus A)=X\setminus(\overline{X\setminus A})\cup(\bar{A}\cap\overline{X\setminus A})\cup X\setminus\bar{A}=$

$=(X\setminus(\overline{X\setminus A})\cup X\setminus\bar{A}\cup\bar{A})\cap(X\setminus\overline{X\setminus A}\cup X\setminus\bar{A}\cup\overline{X\setminus A})=X\cap X=X$

(е) $Fr(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{X\setminus(A\cup B)}=\overline{A\cup B}\cap\underbrace{\overline{X\setminus A\cap X\setminus B}}_{\subseteq\overline{X\setminus A}\cap\overline{X\setminus B}}\subseteq\overline{A\cup B}\cap\overline{X\setminus A}\cap\overline{X\setminus B}=$

$=\underbrace{(\bar{A}\cap\overline{X\setminus A}\cap\overline{X\setminus B})}_{\subseteq Fr\,A}\cup\underbrace{(\bar{B}\cap\overline{X\setminus A}\cap\overline{X\setminus B})}_{\subseteq Fr\,B}$

$\Rightarrow Fr(A\cup B)\subseteq Fr\,A\cup Fr\,B$

$Fr(A\cap B)=\overline{A\cap B}\cap\overline{X\setminus(A\cap B)}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\overline{X\setminus A\cup X\setminus B}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap(\overline{X\setminus A}\cup\overline{X\setminus B})=$

$=(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\overline{X\setminus A})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\overline{X\setminus B})\subseteq Fr\,A\cup Fr\,B$

$Fr(A\setminus B)=\overline{A\setminus B}\cap\overline{X\setminus(A\setminus B)}=\overline{A\cap(X\setminus B)}\cap\overline{X\setminus(A\cap(X\setminus B))}\subseteq\bar{A}\cap\overline{X\setminus B}\cap\overline{(X\setminus A)\cup B}=$

$=\bar{A}\cap\overline{X\setminus B}\cap(\overline{X\setminus A}\cup\bar{B})=(\bar{A}\cap\overline{X\setminus B}\cap\overline{X\setminus A})\cup(\bar{A}\cap\overline{X\setminus B}\cap\bar{B})\subseteq Fr\,A\cup Fr\,B$

29.11.2019

(ж) $\operatorname{Fr}\overline{A} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} \subseteq \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} = \operatorname{Fr} A$

(з) $\operatorname{Fr}\operatorname{Int} A = \overline{\operatorname{Int} A} \cap \overline{X \setminus \operatorname{Int} A} = \overline{X \setminus \overline{X\setminus A}} \cap \overline{X \setminus (X \setminus \overline{X \setminus A})} = \overline{X \setminus \overline{X\setminus A}} \cap \overline{X \setminus A} =$

$= \overline{\operatorname{Int} A} \cap \overline{X\setminus A} \subseteq \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \operatorname{Fr} A$

$\operatorname{Int} A \subseteq A \Rightarrow \overline{\operatorname{Int} A} \subseteq \overline{A}$

(и) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$ и A е отв $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A \Rightarrow \operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus A \Leftrightarrow A$ е отворено

(й) A е затв. $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow \operatorname{Fr} A = A \setminus \operatorname{Int} A$

(к) A е отв.-затв. $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A = \overline{A}$

$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = A \setminus A = \emptyset$

$\square$

Зад. 36 (Равнина на Немицки)

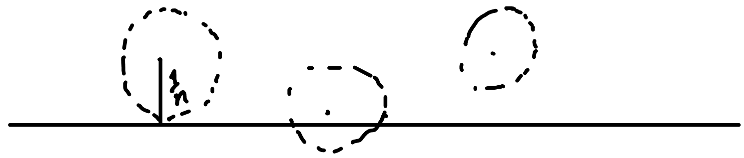
$X = L_1 \cup L_2$

$L_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, y > 0\}$

$\forall (x,0) \in L_1,\ \mathcal{B}((x,0)) := \{\{(x,0)\} \cup B((x,\tfrac{1}{n}),\tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^{>0}\}$

$\forall (x,y) \in L_2,\ \mathcal{B}((x,y)) := \{B((x,y),\tfrac{1}{n}) \cap X \mid n \in \mathbb{N}^{>0}\}$



$\{\mathcal{B}(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ удовл. (BN1)-(BN3)

(BN1) $\forall x,\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ и $\forall U \in \mathcal{B}(x),\ x \in U$

(BN2) Нека $U, V \in \mathcal{B}(x,y)$, $(x,y) \in X$

ако $(x,y) \in L_1 \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^{>0}$:

$U = \{(x,0)\} \cup B((x,\tfrac{1}{n_1}),\tfrac{1}{n_1})$

$V = \{(x,0)\} \cup B((x,\tfrac{1}{n_2}),\tfrac{1}{n_2})$

$\mathcal{U} \cap V = \{(x,0)\} \cup B\left(\left(x, \frac{1}{\max\{n_1,n_2\}}\right), \frac{1}{\max\{n_1,n_2\}}\right) \in \mathcal{B}(x,0)$

Ако $(x,y) \in L_2$, $\exists n_1, n_2$:

$\mathcal{U} = B\left((x,y), \frac{1}{n_1}\right) \cap X$

$V = B\left((x,y), \frac{1}{n_2}\right) \cap X$

$\mathcal{U} \cap V = B\left((x,y), \frac{1}{\max\{n_1,n_2\}}\right) \cap X \in \mathcal{B}((x,y))$

(BN3) Ако $(x_1,y_1) \in \mathcal{U} \in \mathcal{B}((x_2,y_2))$,

_1 сл._ $(x_i,y_i) \in L_2$, $i=1,2$

Нека n е такова, че $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \frac{1}{n}$

$\mathcal{U} := B\left((x_2,y_2), \frac{1}{n}\right) \cap X$

$\exists m \in \mathbb{N}^{>0}: \frac{1}{m} < \frac{1}{n} - \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

$V := B\left((x_1,y_1), \frac{1}{m}\right) \cap X$

Нека $z \in V$

$\rho(z,(x_2,y_2)) \le \rho(z,(x_1,y_1)) + \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \frac{1}{n} - \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \frac{1}{n} \Rightarrow V \subseteq \mathcal{U}$

_2 сл._ $(x_1,y_1) \in L_1$, $(x_2,y_2) \in L_2$

Аналогично с $\mathcal{U} := B\left((x_2,y_2),\frac{1}{n}\right) \cap X$ и $V := B\left(\left(x_1, \frac{1}{m}\right), \frac{1}{m}\right) \cup \{(x_1,0)\} \subseteq \mathcal{U}$

_3 сл._ $(x_1,y_1) \in L_1$, $(x_2,y_2) \in L_1$

Аналогично с $\mathcal{U} := B\left(\left(x_2, \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right) \cup \{(x_2,0)\}$ и $V := B\left(\left(x_1, \frac{1}{m}\right), \frac{1}{m}\right) \cup \{(x_1,0)\}$ □

Опр. Нека X е т.п., $A \subseteq X$ и $x \in X$.

Казваме, че x е _точка на сгъстяване на A_, ако $x \in \overline{A\setminus\{x\}}$

Точката x се нарича _изолирана точка на A_, ако $x \in A$ и x не е точка на сгъстяване на A.

Множеството $A^\alpha = \{x \in X \mid x$ е т. на сг. на $A\}$ се нарича _производно множ. на A_.

A се нарича _съвършено_, ако A е затв. и няма изолирани точки.

06.12.2019

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A \subseteq X$. Казваме, че

(а) A е <u>навсякъде гъсто в X</u>, ако $\overline{A} = X$

(б) A е <u>копгъсто (контурно) в X</u>, ако $X \setminus A$ е навсякъде гъсто в X

(в) A е <u>никъде гъсто в X</u>, ако $\overline{A}$ е копгъсто в X

<u>Тв. 37</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A \subseteq X$. Тогава A е навсякъде гъсто в $X \Leftrightarrow \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}, U \cap A \neq \emptyset$.

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$ Нека $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ и $x \in U$. Тогава U е ок. на $x \in X = \overline{A}$
$\Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

$(\Leftarrow)$ Нека $x \in X$ и U е произволна околност на x. $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$
$\Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow X = \overline{A}$

□

<u>Тв. 38</u> Нека (X, τ) е т.п. и $A \subseteq X$. Тогава A е копгъсто в $X \Leftrightarrow \operatorname{Int} A = \emptyset$

<u>Д-во</u>

$(\Leftarrow)$ $X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \emptyset$
$X = \overline{X \setminus A} \Rightarrow X \setminus A$ е гъсто в $A \Rightarrow A$ е копгъсто в X

$(\Rightarrow)$ A е контурно $\Rightarrow X \setminus A$ е гъсто в $X \Rightarrow \overline{X \setminus A} = X \Rightarrow \operatorname{int} A = X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \emptyset$

□

<u>Тв. 39</u> A е копгъсто в $X \Leftrightarrow \overline{A} = \operatorname{Fr} A$
$(\Leftrightarrow \operatorname{int} A = \emptyset)$

<u>Д-во</u> $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A = \overline{A} \setminus \emptyset = \overline{A}$

□

<u>Тв. 40</u> A е копгъсто в $X \Leftrightarrow A \subseteq \operatorname{Fr} A$

<u>Д-во</u> $A \subseteq \overline{A} = \operatorname{Fr} A \Leftrightarrow A$ е копгъсто

□

<u>Тв. 41</u> A е никъде гъсто в $X \Leftrightarrow \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, A не е гъсто в U

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$ $\overline{A}$ е копгъсто в X, т.е. $X \setminus \overline{A}$ е гъсто в X
$X \setminus \overline{A} \cap U \neq \emptyset, \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \not\subseteq \overline{A}, \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$
$\Rightarrow A$ не е гъсто в U, $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U} \in \tau \setminus \{\emptyset\}, \mathcal{U} \not\subseteq \bar{A} \Rightarrow \mathcal{U} \cap X \setminus \bar{A} \neq \emptyset$

$\Rightarrow X \setminus \bar{A}$ е гъсто в X

$\Rightarrow A$ е никъде гъсто в X

$\square$

Тв. 42 A е никъде гъсто в $X \Leftrightarrow \forall \mathcal{U} \in \tau \setminus \{\emptyset\}\ \exists V \in \tau \setminus \{\emptyset\} : V \subseteq \mathcal{U}$ и $A \cap V = \emptyset$

Д-во ($\Rightarrow$) A е никъде гъсто в $X \Rightarrow X \setminus \bar{A}$ е отв. и навсякъде гъсто.

Нека $\mathcal{U} \underset{op}{\subseteq} X$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Тогава $\underbrace{\mathcal{U} \cap X \setminus \bar{A}}_{V \in \tau \setminus \{\emptyset\}} \neq \emptyset$

Имаме, че $V \subseteq \mathcal{U}$ и $V \cap A = \emptyset$, т.к. $V \subseteq X \setminus \bar{A} \subseteq X \setminus A$

($\Leftarrow$) Нека $\mathcal{U} \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Тогава $\exists V \in \tau \setminus \{\emptyset\} : V \subseteq \mathcal{U}$ и $V \cap A = \emptyset \Rightarrow V \subseteq X \setminus A$

$\Rightarrow V \subseteq \operatorname{int} X \setminus A$

$V \subseteq X \setminus \bar{A} \Rightarrow V \cap X \setminus \bar{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \cap X \setminus \bar{A} = \emptyset \Rightarrow X \setminus \bar{A}$ е гъсто в X.

$\square$

Опр. Нека (X, τ) е т.п. и $A \subseteq X$. Казваме, че A е <u>G_δ-множество</u> (съотв. <u>F_σ-множество</u>), ако A е сечение на изброимо много отворени множества (съотв. A е обединение на изброимо много затворени множества)

Пр. 43 $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

затворено — отворени

Тв. 44 A е G_δ-множество $\Leftrightarrow X \setminus A$ е F_σ-множество

Д-во

$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i \underset{op}{\subseteq} X$

$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus \mathcal{U}_i)$, $X \setminus \mathcal{U}_i \underset{cl}{\subseteq} X$

$\square$

13.12.2019

22. Свързани пространства

<u>Тв. 45</u> Нека (X, τ) е т.п.. Тогава следните условия са еквивалентни

(а) X е <u>свързано пространство</u> (само $\emptyset$ и X са отв.-затворени)

(б) X не може да се представи като обединение на отделими подмн. на X $(\overline{X_1} \cap X_2 = X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset)$

(в) $\forall$ непр. функция $f: X \to \{0,1\}$ е константна

↖ дискр. топология

<u>Д-во</u>

(а)⇒(б) Нека $X = X_1 \cup X_2$ и $\overline{X_1} \cap X_2 = X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset$.

$\overline{X_1} = X \setminus X_2 = X_1$ и $\overline{X_2} = X \setminus X_1 = X_2 \Rightarrow X_1$ и X_2 са отв.-затворени

Но само X и $\emptyset$ са отв.-затворени

$\Rightarrow X_1 = \emptyset$ или $X_2 = \emptyset$.

(б)⇒(в) Нека $f: X \to \{0,1\}$ е непр. Полагаме $X_1 = f^{-1}(0)$, $X_2 = f^{-1}(1)$.

Тогава X_1 и X_2 са отделими и $X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow X_1 = \emptyset$ или $X_2 = \emptyset$

$\Rightarrow f(X) = \{1\}$ или $f(X) = \{0\}$.

(в)⇒(а) Нека X_1 е отв.-затв. подмн. на X. Полагаме

$$f: X \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \setminus X_1 \\ 1, & x \in X_1 \end{cases}$$

f е непрекъсната $\Rightarrow f$ е конст. $\Rightarrow X_1 = \emptyset$ или $X_1 = X$. □

<u>Тв. 46</u> Едно т.п. е свързано ⇔ то не може да се представи като обединение на две непразни дизюнктни затворени (или отворени) множества

<u>Т-ма 47</u> Едно подпространство C на т.п. X е свързано ⇔ $\forall$ две отделими в X мн. X_1 и X_2, за които $C = X_1 \cup X_2$, е изпълнено, че или $X_1 = \emptyset$, или $X_2 = \emptyset$.

<u>Д-во</u> (⇒) Нека $C = X_1 \cup X_2$, $\overline{X_1}^X \cap X_2 = X_1 \cap \overline{X_2}^X = \emptyset$. $\overline{X_1}^C = \overline{X_1}^X \cap C$ и

$\overline{X_2}^c = \overline{X_2}^x \cap C \Rightarrow X_1$ и X_2 са отделими в $C \Rightarrow X_1 = \emptyset$ или $X_2 = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Допускаме, че C не е свързано. Тогава $\exists X_1, X_2 \underset{cl}{\subseteq} C$:
$C = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. $X_1 = \overline{X_1}^c = \overline{X_1}^x \cap C$ и $X_2 = \overline{X_2}^c = \overline{X_2}^x \cap C$

$\Rightarrow \overline{X_1}^x \cap X_2 = \overline{X_1}^x \cap \overline{X_2}^x \cap C = (\overline{X_1}^x \cap C) \cap (\overline{X_2}^x \cap C) = X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

$\Rightarrow X_1$ и X_1 са отделими в $X \Rightarrow X_1 = \emptyset$ или $X_2 = \emptyset$ - прот. с това че C не е свързано.

$\square$

Сл. 48 Ако C е св. подмн. на т.п. X и $C \subseteq X_1 \cap X_2$, където X_1 и X_2 са непразни отделими подмн. на X, то $C \subseteq X_1$ или $C \subseteq X_2$.

Д-во Нека $X_1' = C \cap X_1$ и $X_2' = C \cap X_2$. Тогава X_1' и X_2' са отделими подмн. на X и $C = X_1' \cap X_2' \Rightarrow X_1' = \emptyset$ или $X_2' = \emptyset$
$\Rightarrow C \subseteq X_1$ или $C \subseteq X_2$.

$\square$

Т-ма 49 Едно подмножество E на $\mathbb{R}$ е свързано $\Leftrightarrow$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x < z < y$, то $z \in E$

Д-во $(\Rightarrow)$ Нека $x, y \in E$ и $x < y$. Доп., че $\exists z : x < z < y$ и $z \notin E$. Озн. с
$A_z = E \cap (-\infty, z)$, $B_z = E \cap (z, \infty)$.

Тогава $E = A_z \cup B_z$ и A_z и B_z са непразни и отделими
$\Rightarrow$ прот. със свързаността на $\mathbb{R}$. $\Rightarrow z \in E$.

$(\Leftarrow)$ Доп, че E не е свързано $\Rightarrow \exists A, B \subseteq \mathbb{R}$: A и B са отделими и
$E = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$.

Нека $x \in A$, $y \in B$. Нека $x < y$. Нека $z = \sup\{A \cap [x, y]\}$. $z \in \overline{A} \Rightarrow z \notin B$.

1сл. $z \notin A \Rightarrow z \notin E \Rightarrow z \notin [x, y]$ - прот. с избора на z.

2сл. $z \in A \Rightarrow z \notin B \Rightarrow \exists$ ок. U на z : $U \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists z_1 \in U \setminus A \cap U \setminus B : z_1 > z$

$\Rightarrow z_1 \notin A$ и $z_1 \notin B \Rightarrow z_1 \notin E$, което противоречи на $x < z_1 < y$.

$\Rightarrow E$ е свързан

$\square$

20.12.2019

Т-ма 50 Нека $\{C_s\}_{s\in S}$ е фамилия от свързани подпространства на т.п. X и $\forall s_1, s_2 \in S$, C_{s_1} и C_{s_2} не са отделими. Тогава $C = \bigcup_{s\in S} C_s$ е свързано.

Д-во Нека $C = \bigcup_{s\in S} C_s = X_1 \cup X_2$, X_1 и X_2 са отделими. Нека $s_0 \in S$. C_{s_0} е свързано и $C_{s_0} \subseteq X_1 \cup X_2 \overset{\text{сл.48}}{\Rightarrow} C_{s_0} \subseteq X_1$ или $C_{s_0} \subseteq X_2$.

б.о.о. $C_{s_0} \subseteq X_1$. $\forall s \in S$, C_s не е отделимо от $C_{s_0} \Rightarrow C_s \subseteq X_1, \forall s \in S$

$\Rightarrow X_2 = \emptyset \Rightarrow C$ е свързано.

Сл. 51 Нека $\{C_s\}_{s\in S}$ е фамилия от свързани подпр. на т.п. X и $\bigcap_{s\in S} C_s \neq \emptyset$. Тогава $\bigcup_{s\in S} C_s$ е свързано.

Тв. 52 Нека C е св. подпр. на т.п. X. Тогава $\forall A \subseteq X : C \subseteq A \subseteq \overline{C}$, имаме, че A е свързано.

Д-во $\{C, \{x\}_{x\in A}\}$ удовл. усл. на т-ма 6 $\Rightarrow A = C \cup \bigcup_{x\in A} \{x\}$ е свързано.

Сл. 53 Ако едно т.п. X има гъсто свързано подпространство, X е свързано.

Тв. 54 Ако всеки две точки на едно т.п. X можем да свържем със свързано подпространство на $X \Rightarrow X$ е свързано.

Д-во Нека $x_0 \in X$. Тогава $\forall x \in X$ $\exists$ свързано подпространство C_x на X: $x_0, x \in C_x$. Тогава $\emptyset \neq \{x_0\} \subseteq \bigcap_{x\in X} C_x \Rightarrow$ по сл. 51, X е свързано $\square$

Т-ма 55 Нека $f: X \to Y$ е непр. Ако $C \subseteq X$ е свързано, то $f(C) \subseteq Y$ е свързано.

Д-во Доп., че $f(C) = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ и $Y_1, Y_2 \underset{op}{\subseteq} Y$. Полагаме $X_1 = f^{-1}(Y_1)$, $X_2 = f^{-1}(Y_2)$. Тогава $C \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) = X_1 \cup X_2$.

X_1 и X_2 са отворени и $X_1 \cap X_2 = \emptyset \Rightarrow C \subseteq X_1$ или $C \subseteq X_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(C) \subseteq Y_1$ или $f(C) \subseteq Y_2$. Оттук следва, че $f(C)$ е свързано. $\square$

Т-ма 56 Нека $\{X_s\}_{s\in S}$ са т.п. и $X = \prod_{s\in S} X_s$. Пространството X е свързано $\Leftrightarrow$ X_s е свързано $\forall s\in S$.

Д-во $(\Rightarrow)$ $p_s: X \to X_s$ е непр $\Rightarrow X_s$ е свързано $(X_s = p_s(X))$

$(\Leftarrow)$ Нека X_1, X_2 са свързани и $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Разгл. $\underbrace{(\{x_1\}, X_2)}_{Y_2}$ и $\underbrace{(X_1, \{y_2\})}_{Y_1}$. Те са хомеоморфни на X_2 и X_1.

$(x_1, y_2) \in Y_2 \cap Y_1 \Rightarrow Y_2 \cup Y_1$ е свързано.

$\Rightarrow \forall x_1 \in X_1\ \forall y_2 \in X_2$, $(\{x_1\}, X_2) \cup (X_1, \{y_2\})$ е свързано

$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \bigcup \{(\{x_1\}, X_2) \cup (X_1, \{y_2\}) \mid x_1 \in X_1, y_2 \in X_2\}$ е свързано.

По индукция, произведението на краен брой свързани мн. е свързано.

Нека $\{X_s\}_{s\in S}$ е фамилия от св. пр. и $X = \prod_{s\in S} X_s$. Нека $\bar{S}$ е фамилията от всички крайни подмножества на S и $\{a_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$.

$\forall T \in \bar{S}$ полагаме $A_T = \prod_{s\in S} C_s$, където $C_s = \{a_s\}, s\in S\setminus T$ и $C_s = X_s, s\in T$.

Тогава A_T е свързано $\forall T \in \bar{S}$. Тогава $A = \bigcup_{T\in\bar{S}} A_T$ е гъсто в X.

Наистина, нека $x \in X$ и $V_x = \prod_{s\in S} U_s$ е околност на x, такава че $U_s \underset{op}{\subseteq} X_s, s\in T$, $U_s = X_s, s\in S\setminus T$ за някое $T\in\bar{S} \Rightarrow \emptyset \neq A_T \cap U_x \subseteq A \cap U_x$

$\Rightarrow X$ е свързано. □

Сл. 57 Следните пространства са свързани:

- $\mathbb{R}^n$ е свързано, тъй като $\mathbb{R}$ е свързано.
- Тихоновият куб $I^n = [0,1]^n$
- Александровският куб F^m, където $F = \{0,1\}$ с топология на Серпински (породена от $\bar{A} = A \cup \{1\}$)

10.01.2020

Опр. Компонента на свързаност на т. x в т. п. X наричаме обединението на всички свързани подпространства на X, които съдържат x.

Факт 58 Компонентите на свързаност на едно множество X са затворени множества

Факт 59 Компонентите на две различни точки на X или съвпадат, или не се пресичат

Сл. 60 Компонентите на X образуват разбиване на пространството на по двойки непресичащи се затворени множества

Тв. 61 Компонентите на свързаност на $x = \{x_s\} \in \prod_{s\in S} X_s$ съвпада с $\prod_{s\in S} C_s$, където C_s е компонентата на x_s в X_s $\forall s\in S$.

Д-во Нека C е комп. на x в $\prod_{s\in S} X_s$.

Имаме, че C_s е свързано подпр.-во на X_s, $\forall s\in S$. От т-ма 56 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \prod_{s\in S} C_s$ е свързано в $\prod_{s\in S} X_s$. Значи $\prod_{s\in S} C_s \subseteq C$.

Обратно, $p_s(C)$ е свързано подпр.во на X_s, $\forall s\in S \Rightarrow p_s(C) \subseteq C_s$, $\forall s\in S$

$\Rightarrow C = \prod_{s\in S} C_s$.

□

Опр. Едно т. п. X се нарича локално свързано, ако всички точки $x\in X$ притежават базисна система от свързани околности.

Тв. 62 Едно т.п. X е лок. свързано $\Leftrightarrow$ компонентите на свързаност на всяко отворено подпространство са отворени

Д-во

($\Rightarrow$) Нека $x\in X$ и $C(x)$ е компонента на свързаност x в X.

Нека $y \in C(x)$.

$\exists$ св. ок. U на y и $y \in U \cap C(x) \Rightarrow U \cup C(x)$ е свързано $\Rightarrow y \in U \subseteq C(x)$

$\Rightarrow C(x)$ е отворено.

($\Leftarrow$) Нека $x\in X$ и U е ок. на x. Комп. на U са отв. и $x \in$ на няколко от тях, напр. V.

Тогава $x \in V \subseteq U \Rightarrow x$ има баз. система от отворени околности □

Опр. <u>Крива в т.п. X</u> наричаме всяко непр. изобр. $c : [0,1] \to X$.
Тогава $c(0)$ наричаме <u>начало на кривата</u>, $c(1)$ наричаме <u>край</u>.
Казваме, че c свързва началната и крайната точка

Тв. 63 Нека $\sim \subseteq X^2$ е релацията
"$x_1 \sim x_2 \iff \exists$ крива $c : I \to X$, свързваща точките x_1 и x_2"
Тогава $\sim$ е рел. на еквивалентност

Д-во 1) Очевидно $\forall x \in X$, $x \sim x$, т.к. функцията $c(I) = x$ е непр.
2) Ако $x \sim y$ и c ги свързва, $c'(x) = c(1-x)$ свързва y с x и е непр. $\Rightarrow y \sim x$
3) Нека $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогава $\exists\, c_1, c_2 : I \to X$, такива, че

$c_1(0) = x$, $c_1(1) = y$
$c_2(0) = y$, $c_2(1) = z$

Полагаме
$$c(t) := \underline{[c_1 \times c_2]}(t) := \begin{cases} c_1(2t), & t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1), & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогава c е непр, $c(0) = x$ и $c(1) = z \Rightarrow x \sim z$

□

Опр. Класовете на еквив. отн. тази релация наричаме <u>компоненти на линейна свързаност</u>.
Компонентата на лин. св., съдържаща т. x, наричаме <u>линейно свързана обвивка</u> и бележим с x.

Тв. 64 Компонентите на линейна свързаност на т.п. X са свързани и $\forall x \in X$, $L(x) \subseteq C(x)$.

Д-во Нека $y \in L(x) \Rightarrow \exists$ крива $c^y : I \to X : c^y(0) = x$, $c^y(1) = y$.
Озн. $A^y = c^y([0,1])$ и нека $A = \bigcup_{y \in L(x)} A^y$. A^y е св. като непр. образ на св. мн. и $\bigcap_{y \in L(x)} A^y \neq \emptyset \Rightarrow A$ е св.
Ще покажем, че $A = L(x)$. Нека $z \in A$.
$\Rightarrow \exists\, y \in L(x) : z \in A^y \Rightarrow \exists$ крива $c^y : I \to X$ и $\tau \in [0,1] : z = c^y(\tau)$.

Полагаме $c := c^y(\tau t),\ t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} c(0) = c^y(0) = x \\ c(1) = c^y(1) = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow z \in L(x) \Rightarrow A \subseteq L(x)$$

Всички точки на $L(x)$ са краища на някакви криви

$\Rightarrow \forall y \in L(x)\ \exists c^y : I \to X$ и $x, y \in A_y \subseteq A \Rightarrow L(x) \subseteq A$.

$\Rightarrow L(x) = A$ е свързано множество.

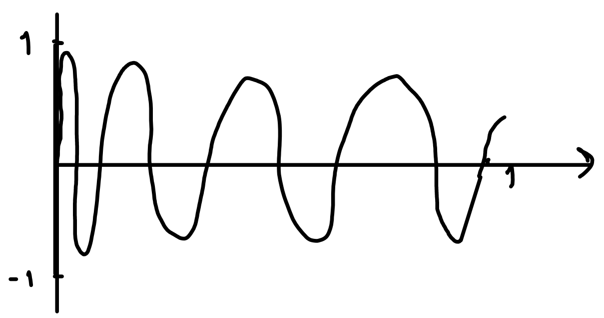
$\Rightarrow L(x) \subseteq C(x) \leftarrow$ обединението на св. множества, съдържащи x.

$\square$

<u>Опр.</u> Казваме, че едно пр. X е <u>лин. свързано</u>, ако има единствена компонента на линейна свързаност.

<u>Пр. 65</u> Нека S е мн. от вс. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x \in (0,1]$, $y = \sin\frac{1}{x}$ или $x = 0$, $y \in [-1, 1]$

S се нарича <u>топологична синусоида</u>.



$S' = \{(x,y) \mid x \in (0,1],\ y = \sin\frac{1}{x}\}$ е лин. св.

$S'' = \{(x,y) \mid x = 0,\ y \in [-1,1]\}$ е лин св.

$\overline{S'} = S \Rightarrow S$ е свързано, но не лин. св.

($\nexists$ крива $c : I \to S$ между $(0,0)$ и $(1,0)$)

<u>Тв. 66</u> Нека X е т.п. и всяка точка на X притежава лин. св. околност. Тогава компонентите на лин. свързаност на X са отв. и съвпадат с комп. на свързаност

<u>Д-во</u> Нека $x \in X$. Тогава $L(x)$ е най-голямото лин. свързано мн., съдържащо x.

Нека $y \in L(x)$. Имаме, че $\exists$ лин. св. ок. U на y. Тогава

$\mathcal{U} \cap L(x) \neq \emptyset$ и $\forall x' \in \mathcal{U}$ и $x'' \in L(x)$ имаме, че $\exists c', c'' : I \to X$:

$c'(0) = x'$, $c'(1) = y$, $c''(0) = y$, $c''(1) = x''$

$\Rightarrow$ $c = c_1 * c_2$ (в.ж. тв. 6) свързва x' и x''

$\Rightarrow \mathcal{U} \cup L(x)$ е лин. св.

$\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq L(x)$

$\Rightarrow L(x)$ е отв.

$L(x) \subseteq C(x)$

$$\mathcal{A} := \{L(x)\} \cup \{L(y) \mid y \in C(x) \setminus L(x)\}$$

$\mathcal{A}$ представлява разбиване на $C(x)$ на две отв. непр. мн. □

Опр. Метрично пространство наричаме двойката (X, ρ), състояща се от мн. X и ф-ция $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, за която

(M1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$

(M3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$, $\forall x, y, z \in X$

Функцията ρ наричаме метрика в мн. X. Често $\rho(x, y)$ нар. разстояние от x до y.

Ако ρ удовл. (M2), (M3) и (M1'), където

(M1') $\rho(x, x) = 0$ $\forall x$,

то ρ се нарича псевдометрика.

Нека (X, ρ) е метр. пространство, $x_0 \in X$ и $r > 0$. Кълбо с център x_0 и радиус r наричаме $B(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$.

За мн. $A \subseteq X$, кълбо наричаме $B(A, r) = \{x \in X \mid \exists x_0 \in A : \rho(x_0, x) < r\} = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$

Фамилията

$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$ удовл. (B1) и (B2) и поражда топология.

Две метрики наричаме __еквивалентни__, ако пораждат една и съща топология.

Едно т.п. се нарича __метризуемо__, ако $\exists$ метрика, която да поражда изходната топология.

__Тв. 67__ Нека (X, ρ) е метр. пр. и $x', x'' \in X : \rho(x', x'') = r$

Ако $B(x', \frac{r}{2})$ и $B(x'', \frac{r}{2})$ не се пресичат $\Rightarrow X$ е Хаусдорфово

__Опр.__ Една редица $x_1, x_2, \ldots$ от точки на метр. пр. (X, ρ) __клони към т. x__, ако редицата от реални числа $\rho(x, x_1), \rho(x, x_2), \ldots$ клони към 0.

Пишем $\lim x_i = x$. Всяка редица в метр. пр. може да има най-много една граница.

__Тв. 68__ Нека (X, ρ) е метр. пр., $A \subseteq X$ и $x \in X$.

Тогава $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists$ редица от т. на A, клоняща към x.

__Д-во__ $(\Rightarrow)$ $\forall B(x, \frac{1}{n})\ \exists x_n \in A : x_n \in B(x, \frac{1}{n})$. Получаваме редица

$x_1, x_2, \ldots : \rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow \rho(x, x_n) \to 0 \Rightarrow x = \lim x_n$.

$(\Leftarrow)$ Доп., че $x \notin \bar{A} \Rightarrow \exists B(x, r) : B(x, r) \cap A = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists n : \rho(x, x_n) < r \Rightarrow B(x, r) \cap A \ni x_n \Rightarrow x \in \bar{A}$. $\square$

__Т-ма 69__ Две метрики в X са еквивалентни $\Leftrightarrow$ те пораждат една и съща сходимост.

__Тв. 70__ Една $f : X \to Y$ между метр. пр. е непр. $\Leftrightarrow \forall$ редица

$x_1, \ldots \in X : \lim x_n = x \Rightarrow \lim f(x_i) = f(x)$

__Опр.__ __Диаметър на мн. A__ в метр. пр. X наричаме

$\delta(A) := \sup \{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$

Очевидно $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$. Полагаме $\delta(\emptyset) = 0$. Казваме, че една метрика е __ограничена__, ако $\delta(X) < \infty$.

__Т-ма 71__ $\forall$ метр. ρ в X $\exists$ метр. ρ_1 в X екв. на ρ и огр. от 1.

__Д-во__ $\rho_1(x, y) := \min\{1, \rho(x, y)\}$ $\square$

17.01.2020

Локално компактни пространства

__Т-ма 72__ За всяко компактно подпр. A на лок. комп. пр. X и $\forall$ отв. мн. $\mathcal{U}: A \subseteq \mathcal{U}$ $\exists$ отв. мн. V (Урисон) $: A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \mathcal{U}$ и $\overline{V}$ е компактно

__Д-во__ $\forall x \in A$ $\exists$ ок. $\mathcal{U}_x : \mathcal{U}_x \subseteq \overline{\mathcal{U}_x} \subseteq \mathcal{U}$ и ок. $W_x : W_x$ е комп.

Полагаме $V_x := \mathcal{U}_x \cap W_x$. Тогава V_x е отв. и $\overline{V_x} = \overline{\mathcal{U}_x \cap W_x} \subseteq \overline{W_x}$.

$\overline{V}_x$ е затв. подмн. на комп. $\overline{W_x} \Rightarrow \overline{V}_x$ е комп.

$\Rightarrow \exists$ крайно мн. $\{x_1, \dots, x_k\} : A \subseteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k} =: V$.

$\overline{V} = \overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_k}}$

$$\Rightarrow A \subseteq V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_{x_i}} \subseteq \mathcal{U}$$

$\square$

__Т-ма 73__ Ако X е лок. комп., то $\forall$ подпр. на X, което може да се представи във вида $F \cap \mathcal{U}$, където $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $\mathcal{U} \underset{op}{\subseteq} X$, също е лок. компактно.

__Д-во__ Трябва да докажем, че лок. комп. е наследствено по отв. и затв. подпространства.

Ако $\mathcal{U}$ е отв. под-во на X, то $\forall x \in \mathcal{U}$, от т-ма 72 $\exists V \underset{op}{\subseteq} X : x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \mathcal{U}$ и $\overline{V}$ е компактно.

Нека F е затв. под-во на X и $x \in F$. $\exists$ ок. $\mathcal{U}_x$ на $x : \overline{\mathcal{U}}_x$ е комп.
множеството $F \cap \mathcal{U}_x$ е отв. в $F \Rightarrow \mathcal{U}_x$ е ок. на x в F.

$F \cap \overline{\mathcal{U}_x} = \overline{\mathcal{U}_x \cap F}^{F}$ - затв. в X и затв. подмн. на комп. $\overline{\mathcal{U}_x}$

$\Rightarrow F \cap \overline{\mathcal{U}}_x$ е комп. $\Rightarrow F$ е лок. комп.

$\square$

__Т-ма 74__ Всяко лок. комп. подпр. M на T_2-пр. X е отв. в $\overline{M}$, т.е. може да се представи във вида $F \cap V$, където F е затв., а V е отв.

__Д-во__ Дост. е да разгл. случая, когато $\overline{M} = X$.

Нека $x \in M$ и $\mathcal{U}$ е ок. на x.

$\{x\}$ е комп. в $M \overset{\text{т-ма 72}}{\Longrightarrow} \exists V \underset{op}{\subseteq} M : x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \mathcal{U} \cap M$ и $\overline{V}$ е комп.

$\Rightarrow \overline{V}$ е затв. в X, а $V = W \cap M$ за някое $W \underset{op}{\subseteq} X$.

$\bar{V} = \overline{W \cap M} \subseteq M \Rightarrow W \subseteq \overline{W} \subseteq M.$

$\overline{W \cap M} = \overline{W}$

$\Rightarrow x \in W \subseteq M$, W е отв. $\Rightarrow M$ е отв. $\square$

<u>Сл. 75</u> Едно подпр. M на лок. комп. пр-во X е лок. комп. $\Leftrightarrow$ M може да се представи като $F \cap V$, където F е затв. в X, а V е отв. в X.

<u>Т-ма 76</u> Сумата $\bigoplus_{s \in S} X_s$ е лок. комп. $\Leftrightarrow$ X_s е лок. комп. $\forall s \in S$.

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) $\forall s \in S$, X_s е отв.-затв. в $\bigoplus_{s \in S} X_s \Rightarrow X_s$ е лок. комп. $\forall s$.

($\Leftarrow$) Ако X_s е лок. комп. $\forall s \in S$, то $\forall x \in X \ \exists s_x \in S : x \in X_{s_x}$ и $\exists \mathcal{U}_x$ ок. на x в X_{s_x} и $\overline{\mathcal{U}}_x$ - комп.

$\Rightarrow \mathcal{U}_x \underset{op}{\subseteq} X$, а $\overline{\mathcal{U}}_x$ е компакт $X \Rightarrow X$ е лок. комп. $\square$