08.10.2019 Обща топология (лекции)

Заб. Редът на темите в конспекта понякога не отговаря на реда им в записките

0. Увод

1879 - 1884 - Георг Кантор създава теорията на множествата и въвежда основни понятия за топологията в $\mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ f е непрекъсната в т. $x_0 \in X$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x (\|x - x_0\| < \delta) \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Фреше дефинира метрични пространства като двойката

(X, ρ), $\rho : X \times X \to [0, \infty)$

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

f е непрекъсната в $x_0 \in X$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x (\rho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

През 1914 около Хаусдорф въвежда понятието „топологично пространство", започвайки от околности в $\mathbb{R}^n$:

$$B(x_0, r) := \{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}, \ r > 0$$

f е непрекъсната в т. x_0, ако

$$\forall \text{ок. } B(f(x_0), \varepsilon) \, \exists \text{ ок. } B(x_0, \delta), \text{ т.че } f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

За всяка точка x_0 деф. фамилиите $\mathcal{B}(x) := \{B(x_0, \delta) \mid \delta > 0\}$

$$\forall \text{ок. } \underbrace{U(f(x_0))}_{\in \mathcal{B}(f(x_0))} \, \exists \text{ ок. } \underbrace{V(x_0)}_{\in \mathcal{B}(x_0)}, \text{ т.че } f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$$

Куратовски през 1922 г. изхожда от деф. на Хайне

f е непр. в т. $x_0 \in X$, ако $\forall \{x_n \in X\} \xrightarrow[n]{} x_0$, $(f(x_n)) \xrightarrow[n]{} f(x_0)$.

Нека $A \subseteq X$. Полагаме $\overline{A} := \{x \in X \mid \exists \{a_n \in A\} \xrightarrow[n]{} x\}$ - затв. обвивка на A в X.

f е непр. в X, ако $\forall A \subseteq X$, $x_0 \in \overline{A}$, то $f(x_0) \in \overline{f(A)}$

$$\forall A \subseteq X, f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Писмен $x \delta A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

f е непр. в X, ако $\forall A \subseteq X$, $x \delta A \Rightarrow f(x) \delta f(A)$.

Куратовски аксиоматизира затворените обвивки, т.е. ф-ции $\overline{\cdot} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, които отговарят на определени условия. Получените пространства са еквивалентни на тези на Хаусдорф, но не изискват отделимост.

През 1924 Александров аксиоматизира отворените множества. В $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено, ако

$\forall x \in X \ \exists \delta > 0 \Rightarrow B(x, \delta) \subseteq U$.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е непр., ако $\forall$ отв $U \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(U)$ е отв. в $\mathbb{R}^n$.

Топологично пространство Александров нарича двойката (X, τ), $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, където τ удовл. определени условия.

$f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ е хомеоморфизъм, ако f и f^{-1} са непрекъснати. Топологията не различава хомеоморфни множества.

Поанкаре създава алгебричната топология, изхождайки от нуждите на диф. уравнения.

1. Множества

<u>Опр.</u> (Кантор) <u>Множеството</u> е съвкупност от елементи с някакви свойства

$M = \{x \mid \varphi(x)\}$

формален подход:

- множество и елемент на множество са неопределяеми понятия
- предиката „принадлежност" също е неопределяем
- свойствата са предикатни формули:
  - $a = b$ и $a \in b$ са атомарни ф-ли
  - ако φ и ψ са ф-ли, $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg \varphi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ също са ф-ли

Така $R := \{A \mid A \notin A\}$ е парадокс (на Ръсел), защото $R \in R$ и $R \notin R$

Затова се въвежда понятието клас, така че класовете да удовлетворяват наивната деф., а множествата да бъдат само онези класове, които удовлетворяват следните аксиоми

<u>Аксиоми:</u>

A1) Две множества са равни, ако имат едни и същи елементи

A2) Същ. поне едно множество: $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$ (празното мн.)
от 1) следва, че $\emptyset$ е единствено

A3) Ако A е мн, то $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ е множество

Така избягваме от парадокса на Ръсел. За множество A деф. $R_A = \{a \in A \mid a \notin a\}$. Ако $R_A \notin R_A$, то $R_A \in R_A$ <u>или</u> $R_A \notin A$.

<u>Универсум</u> наричаме класът на всички множества, т.е. $\mathcal{U} := \{x \mid x = x\}$.

<u>Тв.1</u> $\mathcal{U}$ не е множество

<u>Д-во</u> Доп, че $\mathcal{U}$ е множество. Тогава $R_{\mathcal{U}}$ е множество (A3) и $R_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ и следователно $R_{\mathcal{U}} \in R_{\mathcal{U}}$. Но тогава $R_{\mathcal{U}} \notin R_{\mathcal{U}}$. Противоречие.

Следователно $\mathcal{U}$ не е множество

$\square$

<u>Следствия от А3:</u>

- Нека A е мн-во. Полагаме $\bigcap A := \{x \mid \forall a \in A, x \in a\}$. Ако $A \neq \emptyset$, т.е. $\exists a_0 \in A$, тогава $\bigcap A = \{x \in a_0 \mid \forall a \in A, x \in a\}$ по А3 е мн-во.
- Ако A и B са мн-ва, то $A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$ по А3 е мн-во.

А4) Ако A е мн-во, то $\bigcup A := \{x \mid \exists a \in A, x \in a\}$ е мн-во

За да докажем, че обединението на 2 мн-ва е мн-во, ни трябва

А5) Ако a и b са мн-ва, то $\{a, b\}$ е мн-во.

В частност, ако $a = b$, то $\{a\}$ е мн-во

<u>Тв.2</u> Ако M и N са мн., то $M \cup N$ е мн-во.

<u>Д-во</u> $A := \{M, N\}$ е мн (А5)

Тогава $M \cup N := \bigcup A$, т.е. $M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ е мн. по А4

$\square$

<u>Опр.</u> Нека A и B са мн. Казваме, че A е <u>подмножество</u> на B, ако всеки ел. на A е ел. на B. Пишем $A \subseteq B$ и $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$.

<u>Тв.3</u> $\forall A, \emptyset \subseteq A$

<u>Опр.</u> Ако A е мн., деф. <u>булеан</u> $\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$

А6) Ако A е мн., то $\mathcal{P}(A)$ е мн-во.

<u>Опр.</u>(Куратовски) Нека a и b са мн-ва. <u>Наредена двойка</u> наричаме $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$

<u>Опр.</u> <u>Декартово произведение</u> на две множества A и B наричаме класа $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

<u>Тв.4</u> $A \times B$ е множество

<u>Д-во</u> Нека $a \in A$, $b \in B$. Тогава $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

$\{a\}$ - мн-во и $\{a\} \subseteq A$, т.е. $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

$\{a, b\}$ - мн-во и $\{a, b\} \subseteq A \cup B$, т.е. $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\Rightarrow (a,b) \subseteq \mathcal{P}(A\cup B)$, т.е. $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$.
Тогава $A\times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ и $A\times B$ е множество $\square$

<u>Опр.</u> <u>Релация</u> от мн. A в мн. B наричаме всяко подмн. на $A\times B$

Ако A и B са класове, то $A\times B := \{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$ е клас. Тогава релация от A в B наричаме всеки подклас на $A\times B$. Ако $B=A$, релацията ρ се нарича <u>бинарна релация</u> в A.

Ако ρ е релация от A в B и $a\in A$, то $\rho(a) := \{b\in B \mid (a,b)\in \rho\}$. По А3, ако A и B са мн., то $\rho(a)$ е мн.

Една релация ρ от A в B се нарича <u>функция</u>, ако $\forall a\in A, \rho(a)$ има точно един елемент.

Функцията $f: A\to B$ се нарича <u>инекция</u>, ако от $a_1, a_2 \in A$ и $a_1 \neq a_2$ следва $f(a_1)\neq f(a_2)$ и <u>сюрекция</u>, ако $\forall b\in B$ $\exists a\in A: b=f(a)$. f е <u>биекция</u>, ако е инекция и сюрекция. f е биекция $\Leftrightarrow \forall b\in B\ \exists! a\in A: f(a)=b$.

Ако $f: A\to B$ и $g: B\to C$, то $g\circ f: A\to C$ се деф. чрез $(g\circ f)(a) = g(f(a))\ \forall a\in A$.

Ако A е мн-во, то идентитетът $id: A\to A$ се деф. чрез $id_A(a)=a\ \forall a\in A$.

<u>Лема 5</u> Ако $f: A\to B$, $g: B\to A$ и $g\circ f = id_A$, то f е инекция, а g е сюрекция

<u>Д-во</u> Нека $a_1, a_2\in A$, $a_1\neq a_2$. Да допуснем, че $f(a_1)=f(a_2)$. Тогава $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$, т.е. $a_1=a_2$ - прот. След. $f(a_1)\neq f(a_2)$, т.е. f е инекция.

Нека $a\in A$. Тогава пол. $b := f(a)$. $g(b) = g(f(a)) = a \Rightarrow g$ е сюрекция. $\square$

<u>Т-ма 6</u> Нека A и B са мн. и $f: A\to B$. Тогава f е биекция $\Leftrightarrow \exists! g: B\to A$, т.че $g\circ f = id_A$ и $f\circ g = id_B$.

Д-во ($\Leftarrow$) От $g \circ f = id_A$ и лема 5 $\Rightarrow$ f е инекция
От $f \circ g = id_B$ и лема 5 $\Rightarrow$ f е сюрекция $\Big\} \Rightarrow f$ е биекция.

($\Rightarrow$) Нека f е биекция. Понеже $\forall b \in B\ \exists!\ a_b \in A : f(a_b) = b$,
полагаме $g(b) := a_b\ \forall b \in B$.

Разгл. $g(f(a))\ \forall a \in A$. Полагаме $b := f(a)$. Тогава $a = a_b$.

Следователно $\forall a \in A, g(f(a)) = g(b) = a_b = a = id_A(a) \Rightarrow g \circ f = id_A$.

$\forall b \in B$, $f(g(b)) = f(a_b) = b \Rightarrow f \circ g = id_B$

Доп., че $\exists g' : B \to A$, такa че $f \circ g' = id_B$ и $g' \circ f = id_A$.

Тогава $\forall b \in B$, $f(g(b)) = b = f(g'(b))$. Но f е инекция $\Rightarrow g(b) = g'(b) \Rightarrow g \equiv g'$. $\square$

Опр. Такава функция се нарича обратна на f и озн. f^{-1}, а
ако $M \subseteq B$, то $f^{-1}(M) := \{a \in A \mid f(a) \in M\}$ наричаме праобраз на M.

Опр. Нека ρ е бинарна релация в A. Тогава записваме
$(a, b) \in \rho$ като $a \rho b$

ρ се нарича:

а) рефлексивна, ако $\forall a \in A$, $a \rho a$

б) симетрична, ако $\forall a, b \in A$, $a \rho b \Leftrightarrow b \rho a$

в) антисиметрична, ако $\forall a, b \in A$, $a \rho b, b \rho a \Rightarrow a = b$

г) транзитивна, ако $\forall a, b, c \in A$, $a \rho b, b \rho c \Rightarrow a \rho c$

(A, ρ) се нарича частична наредба, ако са изпълнени а), в) и г)
и рел. на еквивалентност, ако —||— а), б), г).

Тв. 7 Нека ρ е релация на еквивалентност в A. Тогава:

а) $\cup \{\rho(a) \mid a \in A\} = A$

б) $a \rho b \Leftrightarrow \rho(a) = \rho(b)$

в) $a \not\rho b \Leftrightarrow \rho(a) \neq \rho(b)$

Д-во $\forall a \in A$, $\rho(a) = \{b \in A \mid a \rho b\}$

а) Тъй като ρ е рефл., то $\forall a \in A$, $a \rho a$, т.е. $a \in \rho(a)$

б) Нека $a \rho b$ и $c \in \rho(b)$.

Тогава $b \rho c$. Но $a \rho b$ и от транз. следва $a \rho c \Rightarrow c \rho a$, т.е. $c \in \rho(a)$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \rho(b) \subseteq \rho(a) \\ \text{Анал. } \rho(a) \subseteq \rho(b)\end{array}\right\} \rho(a) = \rho(b).$

Нека $\rho(a) = \rho(b)$. Тогава $a \in \rho(a) = \rho(b)$. Сл. $b \rho a \Rightarrow a \rho b$.

в) Нека $a \bar{\rho} b$. Да доп., че $\exists c \in \rho(a) \cap \rho(b)$. Тогава $a \rho c$ и $b \rho c$.
$\Rightarrow c \rho b$. от транз. $\Rightarrow a \rho b$ - прот. $\Rightarrow \rho(a) \cap \rho(b) = \emptyset$.

Обратно, нека $\rho(a) \cap \rho(b) = \emptyset$. Да доп., че $a \rho b$. Тогава от б) и $\rho(a) = \rho(b)$.
$\Rightarrow \rho(a) \cap \rho(b) = \rho(a) \neq \emptyset \Rightarrow a \bar{\rho} b$.

$\triangledown$

15.10.2019

Опр. Нека X е множество, а Ω е фамилия от подмножества на X. Ω се нарича <u>покритие на X</u>, ако $\bigcup \Omega = X$.
Ω се нарича <u>дизюнктна фамилия</u>, ако всеки две различни елемента на Ω имат празно сечение.
Ω се нарича <u>разбиване</u>, ако Ω е диз. покритие на X.

Факт 8 Нека ρ е рел. на еквив. в X. Тогава $\Omega_\rho := \{\rho(x) \mid x \in X\}$ е разбиване на X.

Д-во $\rho(x) = \{y \in X \mid x \rho y\}$. $x \rho y \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y)$ и $x \bar{\rho} y \Leftrightarrow \rho(x) \cap \rho(y) = \emptyset$.
$\rho \mapsto \Omega_\rho := \{\rho(x) \mid x \in X\}$.

$\square$

Факт 9 Нека Ω е разбиване на X. Тогава релацията ρ_Ω в X, деф. чрез $x \rho_\Omega y \Leftrightarrow \exists A \in \Omega$, т.ч. $x, y \in A$, е рел. на еквив.

Д-во Очевидно ρ_Ω е рефл. и сим.
Нека $x \rho_\Omega y$, $y \rho_\Omega z$. Тогава $\exists A, B \in \Omega$, т.че $x, y \in A$, $y, z \in B$.
Тогава $y \in A \cap B$. Ω е диз. с-во, след. $A = B \Rightarrow x, z \in A = B$, т.е. $x \rho_\Omega z$.
След. ρ_Ω е рел. на еквив.

$\square$

Тв.10 Нека X е мн-во, $\mathcal{R}$ е м-вото от всички разбивания на X, а $\mathcal{E}$ е мн. от всички рел. на еквив. на X.
Тогава $\exists$ биекция $f: \mathcal{R} \to \mathcal{E}$.

Д-во $\forall \Omega \in \mathcal{R}$, пол. $f(\Omega) := \rho_\Omega$. Тогава $\rho_\Omega \in \mathcal{E}$. Полагаме
$g: \mathcal{E} \to \mathcal{R}$, $\rho \mapsto \Omega_\rho$.
Тогава $\Omega_\rho \in \mathcal{R}$. Ще док, че $f \circ g = id_{\mathcal{E}}$ и $g \circ f = id_{\mathcal{R}}$. Тогава f ще е биекция.
Нека $\rho \in \mathcal{E}$. Тогава $(f \circ g)(\rho) = f(g(\rho)) = f(\Omega_\rho) = \rho_{(\Omega_\rho)}$

$\forall x,y \in X,\ x\,\rho_{(\Omega_\rho)}\,y \Leftrightarrow \exists A \in \Omega_\rho$, така че $x,y \in A \Leftrightarrow \exists z \in X$, така че $x,y \in \rho(z) \Leftrightarrow x \rho y$.

Наистина, ако $x,y \in \rho(z)$, то $z \rho x$ и $z \rho y \Rightarrow x \rho z$ и $z \rho y \Rightarrow x \rho y$.
Обратно, ако $x \rho y$, то пол. $z = x \Rightarrow x,y \in \rho(x)$.

Ще док., че $g \circ f = id_{\mathcal{R}}$.

Нека $\Omega \in \mathcal{R}$. Тогава $(g \circ f)(\Omega) = g(f(\Omega)) = g(\rho_\Omega) = \Omega_{(\rho_\Omega)}$.

$\Omega_{(\rho_\Omega)} = \{\rho_\Omega(x) \mid x \in X\}$.

$y \in \rho_\Omega(x) \Leftrightarrow x \rho_\Omega y \Leftrightarrow \exists A \in \Omega$, т.ч. $x,y \in A$.

Ω обаче е дизюнктно покритие. След. $\forall x \in X, \exists! A_x \in \Omega$, така че $x \in A_x$. След. $\Omega_{(\rho_\Omega)} \equiv \Omega \Rightarrow g \circ f = id_{\mathcal{R}} \Rightarrow f$ е биекция $\square$

<u>Заб.</u> В теория на множествата се разглеждат фактор-множества, т.е. на двойка X, ρ съпоставяме $X_{/\rho} := \{\rho(x) \mid x \in X\}$.

В топологията вместо по рел. ρ мн. често се факторизират по разбивания.

A7) и A8) няма да ги формулираме.

Следствия от A7):

- Ако $\underset{\text{мн.}}{f : X} \to \underset{\text{клас}}{C}$ е функция, то $f(X)$ е мн-во.

- Ако J е мн. и $f : J \to \mathcal{U}$ е ф-ция, то $f(j) = X_j \in \mathcal{U}$, т.е. X_j е множество $\forall j \in J$. Това ни дава основание да разглеждаме индексирани фамилии.

Следствия от A8):

- $\forall$ мн-во X, $X \notin X$. След. $R = \{x \mid x \notin x\} \overset{A8}{\Rightarrow} R = \mathcal{U}$.

2. Частично наредени множества. Аксиома за избора.

Опр. Нека $(X, \leq)$ е частично наредено множество, $A \subseteq X$, $x_0 \in X$. Тогава

1) Два ел. $x, y \in X$ се наричат <u>сравними</u>, ако $x \leq y$ или $y \leq x$.

2) $\leq$ се нарича <u>лин. наредба</u>, ако всеки два ел. на X са сравними. Тогава $(X, \leq)$ се нарича <u>лин. наредено мн-во</u>.

3) x_0 е <u>мажоранта на A</u>, ако $a \leq x_0$, $\forall a \in A$.

4) x_0 е <u>миноранта на A</u>, ако $x_0 \leq a$, $\forall a \in A$

5) x_0 е <u>макс. ел. на $(X, \leq)$</u>, ако от $x \in X$ и $x_0 \leq x$ следва $x_0 = x$.

6) x_0 е <u>мин. ел. на $(X, \leq)$</u>, ако от $x \in X$ и $x \leq x_0$ следва $x_0 = x$.

7) x_0 е <u>най-голям ел. на $(X, \leq)$</u>, ако $x \leq x_0$ $\forall x \in X$

8) x_0 е <u>най-малък ел. на $(X, \geq)$</u>, ако $x_0 \leq x$ $\forall x \in X$

9) <u>супремум</u> на A наричаме най-малката мажоранта на A (ако съществува)

10) <u>инфимум</u> на A наричаме най-голямата миноранта на A (ако съществува)

11) $(X, \leq)$ се нарича <u>добре наредено множество</u>, ако $X \neq \emptyset$ и всяко непразно подмножество на X има най-малък елемент

<u>Факт 11</u> Нека $(X, \leq)$ е ч.н.м. и $Y \subseteq X$. $\forall y_1, y_2 \in Y$, полагаме $y_1 \leq_Y y_2 \Leftrightarrow y_1 \leq y_2$. Тогава $(Y, \leq_Y)$ е ч.н.м.

<u>Факт 12</u> Всяко добре наредено множество е линейно наредено

<u>Д-во</u> Нека $x, y \in X$ и $x \neq y$. Пол. $A := \{x, y\}$. Тогава A има най-малък елемент $\Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$, т.е. x и y са сравними. $\square$

<u>Пр. 13</u> $(\mathbb{N}, \leq)$ е добре наредено

$(\mathbb{R}, \leq)$ не е добре наредено

$(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ не е линейно наредено

A9) (AC / Аксиома за избора)

Нека $J \neq \emptyset$ и $\forall j \in J$, X_j е непразно множество и $\{X_j \mid j \in J\}$ е дизюнктна фамилия. Тогава $\exists$ мн. M, така че $\forall j \in J$ $M \cap X_j$ има точно един елемент.

Т-ма 14 (Банах - Тарски) (AC) Нека K е единичното кълбо в $\mathbb{R}^3$. Тогава K може да се раздели на 5 части, така че от тях чрез ротации и транслации да се сглобят две кълбета, конгруентни на K.

Т-ма 15 Следните условия са еквивалентни:

(а) Аксиомата за избора

(б) Теорема на Цермело: всяко множество може да бъде добре наредено

(в) Лема на Куратовски - Цорн: ако $(X, \leq)$ е ч.н.м. и всяко негово лин. наредено подмн-во има мажоранта в $(X, \leq)$, то $(X, \leq)$ има поне един максимален елемент.

(г) Ако $\{X_j \mid j \in J\}$ е непразна фамилия от непразни мн-ва, то $\exists f: J \to \bigcup_{j \in J} X_j$, така че $f(j) \in X_j \ \forall j \in J$

(такава функция f се нар. функция на избора)

Опр. Нека $J \neq \emptyset$ и $\forall j \in J$, $X_j \neq \emptyset$ са мн-ва. Тогава множеството

$$\prod_{j \in J} X_j := \{f: J \to \bigcup_{j \in J} X_j \mid f(j) \in X_j, \forall j \in J\}$$ се нар. декартово произведение

Ако $X_i = X_j \ \forall i, j \in J$ и $X = \bigcup_{j \in J} X_j$, тогава $\prod_{j \in J} X_j$ се бележи още с

$X^J = \{f: J \to X \mid f$ е ф-ция$\}$.

Тв. 16 Следните са еквивалентни

(а) AC

(б) Дадена е фамилията $\{\overset{\neq \emptyset}{X_j} \mid j \in \overset{\neq \emptyset}{J}\}$. Тогава $\prod_{j \in J} X_j \neq \emptyset$

Опр. Нека A е мн-во. Полагаме $A^+ := A \cup \{A\}$.

Факт 17 $A \subsetneq A^+$ и $A \in A^+$

Опр. Едно мн. се нар. индуктивно, ако $\emptyset \in I$ и $a \in I$ влече $a^+ \in I$

A10) (за безкрайни мн.) Съществува индуктивно множество

<u>Опр.</u> Полагаме $\omega := \bigcap \{A \mid A$ е инд. мн-во$\}$.

Ако A_0 е инд. мн., то $\omega = \{a \in A_0 \mid a \in A, \forall$ инд. мн. $A\}$.

След. ω е множество.

<u>Факт 18</u> ω е инд. мн-во

<u>Д-во</u> $\emptyset \in A, \forall$ инд. мн-во $A \Rightarrow \emptyset \in \omega$.

Ако $a \in \omega$, то $a \in A, \forall$ инд. мн-во A. Тогава $a^+ \in A, \forall$ инд. мн. A.

Значи $a^+ \in \omega \Rightarrow \omega$ е индуктивно.

ω е най-малкото инд. мн-во

□

<u>Опр.</u> $\emptyset \in \omega$ Пол. $0 := \emptyset$

$\emptyset^+ \in \omega$ Пол $1 := \emptyset^+$

$1^+ \in \omega$ Пол $2 := 1^+$

$\vdots$

$0, 1, 2, \dots \in \omega$

$\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\}$

<u>Т-ма 19</u> $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

<u>Д-во</u>

$0 = \emptyset$

$1 = 0^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\}$

$\vdots$

$n+1 = \{\emptyset, 1, \dots, n\}$

$m \in n \in \omega \Rightarrow m \in \omega$

$n \in \omega \Rightarrow n \subseteq \omega$

□

<u>Опр.</u> Едно мн. T се нарича <u>транзитивно</u>, ако от $x \in y \in T$ следва, че $x \in T$.

<u>Факт 20</u> Едно множество T е транзитивно, ако от $y \in T \Rightarrow y \subseteq T$.

Д-во ($\Rightarrow$) Нека $y \in T$. $\forall x: x \in y \Rightarrow x \in T$. След. $y \subseteq T$.

($\Leftarrow$) Нека $x \in y \in T$. Тогава $x \in y \subseteq T \Rightarrow x \in T$

$\square$

Опр. Едно транзитивно мн. T се нарича ординал, ако то е добре наредено чрез $\in$.

Пр. 21 $0 = \{\}$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0, 1\}$

$n+1 = \{0, \dots, n\}$

$n \leq m \Leftrightarrow n \in m \ (\Leftrightarrow n \subseteq m)$

$0, 1, 2, \dots, \omega$ са ординали

$\omega = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

$0 < 1 < 2 < \dots < n < \dots < \omega$

$\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$

$\omega \in \omega^+ =: \omega + 1$

$(\omega+1)^+ =: \omega + 2$

$\vdots$

3. Мощност на множество

Опр. Две множества A и B се наричат равномощни ако същ. биекция $f: A \to B$. Тогава пишем $|A| = |B|$

Тв. 22 Релацията равномощност е релация на еквивалентност в универсума $\mathcal{U}$.

Д-во $A \rho B \Leftrightarrow |A| = |B|$

1) $i_A: A \to A$ е биекция $\Rightarrow A \rho A$

2) Ако $A \rho B$, то $\exists$ биекция $f: A \to B$. Тогава $f^{-1}: B \to A$ е биекция. След. $B \rho A$.

3) Ако $A \rho B$ и $B \rho C$, то $\exists$ биекции $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Тогава $g \circ f: A \to C$ е биекция. След. $A \rho C$.

$\square$

Опр. Класовете на еквивалентност на релацията „равномощност" в $\mathcal{U}$ наричаме кардинални числа.

Опр. Едно множество A се нарича <u>крайно</u>, ако $\exists n \in \omega$, така че $|A| = |n|$

A се нарича <u>безкрайно</u>, ако то не е крайно.

A се нарича <u>изброимо</u>, ако то е крайно или $|A| = |\omega| = |\mathbb{N}|$.

и <u>неизброимо</u> иначе.

Пр. 23 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$

$|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

Опр. $|\omega| = |\mathbb{N}|$ се бележи с $\aleph_0$

$|\mathbb{R}|$ се бележи с c

Опр. Нека A и B са мн-ва. Пишем $|A| \leq |B| \iff \exists$ инекция $f : A \to B$.

Т-ма 24 Ако $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$

Опр. С Card ще бележим класът от всички кардинални числа, които сме фиксирали във всеки клас на еквивалентност по едно мн-во, така че кард. число е фикс. мн-во, а не клас на еквивалентност.

Т-ма 25 $(\mathrm{Card}, \leq)$ е добре наредено множество (т.е. всеки непразен подклас на Card има най-малък елемент). При това, Card е собствен клас.

Опр. Ако τ е кард. число, полагаме $\tau^+ := \min\{\eta \in \mathrm{Card} \mid \tau \lneq \eta\}$

Опр. $\aleph_0, \aleph_1 := \aleph_0^+, \aleph_2 := \aleph_1^+ \ldots$

Хипотеза 26 (хипотеза за континуума) $\aleph_1 = c = |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$

Пр. 27

ординални числа

$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega+n, \ldots, 2\omega, \ldots, \omega_1, \omega_1+1, \ldots, \omega_2$

$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \ldots, \aleph_1, \ldots, \aleph_2$

кардинални числа

Т-ма 28 $\forall$ мн. X, $|X| \lneq |\mathcal{P}(X)|$

Д-во $\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{P}(X) \quad (\{x\} \subseteq X)$

Деф. $f: X \to \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$

f е инекция

след. $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$

Нека $g: X \to \mathcal{P}(X)$ е произволна ф-ция.

Ще покажем, че тя не е сюрекция (и ч. не е биекция).

Полагаме $Y_g := \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$. Тогава $Y_g \in \mathcal{P}(X)$.

Да доп., че $\exists x_0 \in X$, такова че $g(x_0) = Y_g$. Тогава $x_0 \in Y_g \Leftrightarrow x_0 \notin g(x_0)$

$\Updownarrow$

$x_0 \notin Y_g$

Полученото противоречие доказва, че $|X| \lneq |\mathcal{P}(X)|$. $\square$

Пр. 29 $|\omega| \lneq |\mathcal{P}(\omega)| \lneq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))|$

22.10.2019

Опр. Нека $(A, \leq)$ и $(B, \leq')$ са частично наредени множества и $\varphi: A \to B$ е ф-ция. φ се нарича монотонна, ако $a \leq b$ влече $\varphi(a) \leq' \varphi(b)$.

Една монотонна функция, която е биекция и такава, че φ^{-1} също е монотонна, се нарича подобие (или изоморфизъм). Две ч.н.м се наричат подобни, ако $\exists$ подобие м-ду тях.

Опр. Ако $(A, \leq)$ е добре наредено множество и $a_0 \in A$, то $I_{a_0} := \{a \in A \mid a < a_0\}$ се нарича начален сегмент, определен от a_0.

Т-ма 30 Нека $(A, \leq)$ и $(B, \leq')$ са добре наредени множества. Тогава е изпълнено точно едно от условията

(а) $(A, \leq)$ и $(B, \leq')$ са подобни

(б) $(A, \leq)$ е подобно на начален сегмент на $(B, \leq')$

(в) $(B, \leq')$ — " — $(A, \leq)$

Опр. Нека T и T' са ординали. Полагаме $T \leq T'$, ако са изпълнени (а) или (б) от Т-ма 8 $(A = T, B = T')$.

Т-ма 31 Класът $(Ord, \leq)$ на всички ординали е собствен клас, а $\leq$ е добра наредба в Ord.

Опр. $\forall$ мн-во X, полагаме $\tau_X := \min\{\alpha \in Ord \mid |\alpha| = |X|\}$

Т-ма 32 $\forall$ мн. X $\exists$ τ_X

Т-ма 33 $\forall$ непразно множество от кардинални числа има най-малък елемент, както и супремум в $(Card, \leq)$.

Д-во За min сл. от факта, че $(Card, \leq)$ е добре нареден клас

За sup нека е дадено множество $\{\tau_{X_j} \mid j \in J\}$ от кардинали. Тогава от аксиомата за обединението, $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ е мн.. Можем да считаме, че $X_j \cap X_{j'} = \emptyset$ за $j \neq j'$.

Тогава $|X_j| \le |X|, \forall j \in J$.

$\Rightarrow \exists \tau_X : \forall j \in J,\ \tau_{X_j} \le \tau_X$

Тогава $\min\{\tau \in Card \mid \tau_{X_j} \le \tau\}$ е търсеният супремум. $\square$

<u>Опр.</u> (действия с кард. числа)

X и Y - дизюнктни

$|X| + |Y| = |X \cup Y|$

$|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$

$|X|^{|Y|} := |X^Y|$

<u>Т-ма 34</u> $\forall$ кард. число $\tau \ge \aleph_0$, $\tau^2 = \tau \cdot \tau = \tau + \tau = \tau$

4. Центрирани системи и филтри

<u>Опр.</u> Нека X е непразно множество и F е фамилия от подмножества на X.

F се нарича <u>филтър в X</u>, ако F удовлетворява:

1) $X \in F$
2) Ако $A, B \in F$, то $A \cap B \in F$
3) Ако $A \in F$, $B \subseteq X$ и $A \subseteq B$, то $B \in F$

Ако е изпълнено условието,

4) $\emptyset \notin F$,

то F се нарича <u>собствен филтър</u>. Ще работим само със собствени филтри и ще ги наричаме просто филтри.

Ако $\emptyset \in F$, то $F \equiv \mathcal{P}(X)$.

<u>Пр. 35</u> X - мн.

1) $F = \{X\}$ - <u>тривиален филтър в X</u>

2) Нека $A_0 \subseteq X$. Полагаме $F_{A_0} := \{A \subseteq X \mid A_0 \subseteq A\}$. Тогава F_{A_0} е филтър, който се нарича <u>главен филтър, определен от A_0</u>

2) Ако X е безкрайно множество, то $\Phi := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ - крайно}\}$ е филтър в X. Нарича се <u>филтър на Фреше</u>.

<u>Тв. 36</u> Нека X е безкрайно множество.

Тогава Φ е филтър и не е главен филтър.

<u>Д-во</u> $\emptyset \notin \Phi$, защото $X \setminus \emptyset = X$, а X е безкрайно.

$X \in \Phi$, защото $X \setminus X = \emptyset$.

Ако $A, B \in \Phi$, то $X \setminus A$ и $X \setminus B$ са крайни, след. $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ - крайно $\Rightarrow A \cap B \in \Phi$.

Ако $A \in \Phi$, $A \subseteq B \subseteq X$, то $X \setminus A \supseteq X \setminus B \Rightarrow X \setminus B$ е крайно $\Rightarrow B \in \Phi$

След. Φ е филтър. Ще докажем, че той не е главен.

Да доп., че $\exists A_0 \subseteq X$, такова, че $A_0 \neq \emptyset$ и $\Phi = \{A \subseteq X \mid A_0 \subseteq A\}$.

Тогава $A_0 \in \Phi \Rightarrow X \setminus A_0$ е крайно.

$A_0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_0 \in A_0$. Нека $B = A \setminus \{a_0\}$. Тогава $X \setminus B$ е крайно.

След. $B \in \Phi$. Но $B \subsetneq A_0$, след. $B \notin \Phi$. Прот.

$\Rightarrow \Phi$ не е главен филтър. $\square$

<u>Тв. 37</u>

1) Ако $\mathcal{F}$ е фамилия от филтри в X, то $F := \bigcap \mathcal{F}$ е филтър в X.

2) Ако ——————— " ———————, линейно наредено отн. включване, то $F := \bigcup \mathcal{F}$ е филтър в X

<u>Д-во</u> 1) $X \in F' \ \forall F' \in \mathcal{F}$. След. $X \in F$.

Ако $A, B \in F$, то $A, B \in F' \ \forall F' \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in F', \forall F' \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in F$

Ако $A \in F$ и $A \subseteq B \subseteq X$, то $A \in F', \forall F' \in \mathcal{F}$ и след. $B \in F', \forall F' \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in F$

2) $X \in F$. Ако $A \in F$, то $\exists F' \in \mathcal{F}$, т.е. $A \in F'$. Ако $A \subseteq B \subseteq X$, то $B \in F'$ $\Rightarrow B \in F$.

Нека $A, B \in F$. Тогава $\exists F', F'' \in \mathcal{F}$, $A \in F'$, $B \in F''$. Имаме, че $F' \subseteq F''$ или $F'' \subseteq F'$. Нека, например $F' \subseteq F''$. Тогава $A, B \in F''$. След. $A \cap B \in F''$ $\Rightarrow A \cap B \in F$. $\square$

<u>Опр.</u> Нека X е множество, $G \subseteq \mathcal{P}(X)$. G се нарича <u>центрирана фамилия</u>, ако от $A_1, \dots, A_n \in G$ $(n \in \mathbb{N})$ следва, че $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

<u>Тв. 38</u> Нека $X \neq \emptyset$ - мн. и G е центр. фам. в X.

Тогава $F_G := \{A \subseteq X \mid \exists A_1, \dots, A_n \in G \ (n \in \mathbb{N}) : \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A\}$ е филтър и той е най-малкият филтър в X, съдържащ G.

<u>Д-во</u> $G \subseteq F_G$. $X \in F_G$. $A \in F_G$ и $A \subseteq B \subseteq X$, то $B \in F_G$.

Нека $A, A' \in F_G$. Тогава $\exists A_1, \dots, A_n, A_1', \dots, A_m' \in G$: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ и $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq A'$.

Тогава $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{m} A_i') \subseteq A \cap A'$

$\Rightarrow F_G$ е филтър.

Да док., че $F_G = \bigcap \{F - \text{филтър в } X \mid G \subseteq F\}$.

Нека F е филтър и $G \subseteq F$. Тогава $F_G \subseteq F$.

$\Rightarrow F_G$ е минимален.

$\square$

<u>Опр.</u> Нека X е непразно множество

(а) Един филтър F в X се нарича <u>ултрафилтър</u>, ако $\forall A \subseteq X$ е изпълнено $A \in F$ или $X \setminus A \in F$.

(б) —— " —— максимален, ако от това, че F' е филтър в X следва $F' \subseteq F$

<u>Т-ма 39</u> $X \neq \emptyset$ - мн., F - филтър в X. F е ултрафилтър в $X \Leftrightarrow F$ е максимален филтър в X.

<u>Д-во</u>

($\Rightarrow$) Нека F е ултрафилтър. Да допуснем, че F не е макс. и $\exists F'$: $F \subsetneq F'$.

$\Rightarrow \exists A \subseteq X$, т.че $A \in F' \setminus F$. Тогава $A \notin F$ и значи $X \setminus A \in F$. Но $F \subseteq F'$ и след. $X \setminus A \in F'$. Тоест, че A и $X \setminus A$ са в F' $\Rightarrow \emptyset = A \cap (X \setminus A) \in F'$ - прот.

$\Rightarrow F$ е максимален.

($\Leftarrow$) Нека F е максимален. Да допуснем, че F не е ултрафилтър.

Тогава $\exists A_0 \subseteq X$, така че $A_0 \notin F$ и $X \setminus A_0 \notin F$. Полагаме $G := F \cup \{A_0\}$.

Ще докажем, че G е центр. фамилия.

Нека $A \in F$ и да доп., че $A \cap A_0 = \emptyset$. Тогава $A \subseteq X \setminus A_0$. След. $X \setminus A_0 \in F$.

Противоречие.

Следователно $A \cap A_0 \neq \emptyset$.

Ако $A_1, \dots, A_n \in F$, то $A := \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$ и по доказаното, $A \cap A_0 \neq \emptyset$.

След. $A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_0 \neq \emptyset$.

$\Rightarrow G$ е центр. фам. Тогава $F \subsetneq G \subseteq F_G$. Само F_G е филтър и $F \subsetneq F_G$ - прот. след. F е ултрафилтър.

$\square$

Пр. 40 Нека $X \neq \emptyset$ - мн-во, $x_0 \in X$. Тогава $F_{\{x_0\}}$ е ултрафилтър.

Наистина, ако $A \subseteq X$, то $x_0 \in A$ или $x_0 \in X \setminus A$, т.е. $A \in F_{\{x_0\}}$ или $X \setminus A \in F_{\{x_0\}}$

Т-ма 41 (Тарски) Нека $X \neq \emptyset$ - мн-во и F - филтър в X. Тогава същ. ултрафилтър $\mathcal{U}$ в X, така че $F \subseteq \mathcal{U}$.

Д-во Полагаме $\mathcal{F} = \{F_0 \text{ - филтър в } X \mid F \subseteq F_0\}$.

$\Rightarrow F \in \mathcal{F}$.

Разгл. $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

Нека $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ е линейно наредено $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Тогава $F' := \bigcup \mathcal{F}'$ е филтър в X. Очевидно F' е мажоранта в $\mathcal{F}'$. Изпълнена е л. на Цорн. След. $(\mathcal{F}, \subseteq)$ има максимален елемент $\mathcal{U}$. Ще докажем, че $\mathcal{U}$ е максимален филтър.

Нека F_0 е филтър в X, т.ч. $\mathcal{U} \subseteq F_0$.

Имаме, че $F \subseteq \mathcal{U}$. Тогава $F \subseteq F_0$.

След. $F_0 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} \equiv F_0$.

$\Rightarrow \mathcal{U}$ е ултрафилтър.

$\square$

Т-ма 42 $X_0 \neq \emptyset$ е мн-во и F е филтър в X. F е ултрафилтър $\Leftrightarrow$ от $A \subseteq X$ и $A \cap B \neq \emptyset$, $\forall B \in F$, сл., че $A \in F$

Д-во ($\Rightarrow$) Нека F е ултрафилтър. Нека $A \subseteq X$, т.ч. $A \cap B \neq \emptyset$ $\forall B \in F$. Ще док., че $A \in F$.

Полагаме $G := F \cup \{A\}$. Тогава G - центрирана фамилия с $F \subseteq G \subseteq F_G$

F_G е филтър и F е макс. филтър $\Rightarrow F \equiv F_G$. Но $A \in G \subseteq F_G$ и след. $A \in F$.

($\Leftarrow$) Доп., че F не е ултрафилтър. Тогава по т-ма 5, F не е макс.

След. $\exists$ филтър F' в X, т.че $F \subsetneq F'$.

Тогава $\exists A \in F' \setminus F$. $\forall B \in F$ имаме, че $A, B \in F'$. След. $A \cap B \in F'$, $A \cap B \neq \emptyset$

След. $A \in F$ – прот.

След. F е макс. $\Rightarrow$ F е ултрафилтър

$\square$

5. Топологични пространства

<u>Опр.</u> Нека X е мн-во и $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, така че:

O 1) $\emptyset, X \in \tau$

O 2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

O 3) $\tau' \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup \tau' \in \tau$

Тогава τ се нарича <u>топология в X</u>, елем. на τ се нар. <u>отворени множества</u>, а двойката (X, τ) се нар. <u>топ. пространство</u>. Елементите на X се наричат <u>точки</u> на (X, τ)

Понякога вместо (X, τ) ще пишем просто X.

Ако $x \in X$, $U \in \tau$ и $x \in U$, то U се нарича <u>околност на x в (X, τ)</u>.

$F \subseteq X$ се нарича <u>затворено</u>, ако $X \setminus F \in \tau$.

<u>Съглашения:</u>

- Вместо „U е отворено в (X, τ)" ще пишем $U \underset{op}{\subseteq} X$
- Вместо „F е затворено в (X, τ)" ще пишем $F \underset{cl.}{\subseteq} X$
- Вместо „U е околност на x в (X, τ)" ще пишем U_x.

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) и (Y, ρ) са т.п. и $f: X \to Y$ е функция.
f се нарича <u>непрекъсната ф-ция от (X, τ) в (Y, ρ)</u>, ако $\forall V \in \rho, f^{-1}(V) \in \tau$.

<u>Пр. 43</u> 1) X-мн-во, $\tau = \mathcal{P}(X)$

Тогава (X, τ) е т.п., което се нарича <u>дискретно пр-во</u>.

2) X - мн-во, $\tau = \{\varphi, X\}$

Тогава (X, τ) е т.п., което се нарича антидискретно пр-во.

3) $\mathbb{R}$ - реалната права

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ се нар. отв., ако $\forall x \in \mathcal{U}\ \exists\ \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$.

$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U}$ е отв.$\}$

Тв. 44 Нека (X, τ) е т.п. и $M \subseteq X$. Полагаме $\tau_M := \{M \cap \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \tau\}$. Тогава τ_M е топология в M и (M, τ_M) се нарича подпространство на (X, τ).

τ_M се нар. още топология в M, индуцирана от τ.

Д-во

О1) $\emptyset \in \tau$ и $M = X \cap M \in \tau_M$

О2) $\mathcal{U}, V \in \tau$

$\Rightarrow (M \cap \mathcal{U}) \cap (M \cap V) = M \cap (\mathcal{U} \cap V) \in \tau_M$

О3) $\bigcup \{M \cap \mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A, \mathcal{U}_\alpha \in \tau\} = M \cap \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha}_{\text{ор}} \in \tau_M$ $\square$

Опр. Нека X е множество и τ_1 и τ_2 са топологии в X. Полагаме $\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subseteq \tau_2$. Казваме, че τ_1 е по-слаба от τ_2 и τ_2 е по-силна от τ_1.

Дискретната топология в X е най-силната топология в X, а антидискретната е най-слабата.

Факт 45 Фамилията от всички топологии в X с наредбата $\leq$ е частично наредено множество.

Тв. 46 (X, τ) - т.п., $V \subseteq X$. Тогава $V \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in V\ \exists$ ок. $\mathcal{U}$ на x : $\mathcal{U} \subseteq V$

Д-во ($\Rightarrow$) Нека $V \in \tau$, $x \in V$. Полагаме $\mathcal{U}_x = V$

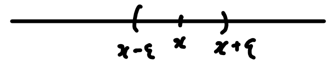
($\Leftarrow$) $\forall x \in V\ \exists\ \mathcal{U}_x : \mathcal{U}_x \subseteq V$. Тъй като $x \in \mathcal{U}_x \in \tau \Rightarrow V \subseteq \bigcup_{x \in V} \mathcal{U}_x \subseteq V$, т.е. $\bigcup_{x \in V} \mathcal{U}_x = V$.

От (3) $\Rightarrow V \in \tau$. $\square$

29.10.2019

6. Бази на топологии

<u>Опр.</u> (X,τ) – т.п., $\mathcal{B}\subseteq\tau$. $\mathcal{B}$ се нарича <u>база</u> на (X,τ), ако $\forall\, \mathcal{U}\in\tau:\ \exists\, \mathcal{B}_{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{B}:\ \mathcal{U}=\bigcup\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$.



<u>Тв. 47</u> (X,τ) – т.п., $\mathcal{B}\subseteq\tau$. Тогава $\mathcal{B}$ е база на (X,τ) ако $\forall x\in X$ $\forall$ок. $\mathcal{U}$ на x $\exists V\in\mathcal{B}: x\in V\subseteq\mathcal{U}$.

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) Нека $x\in X$ и $\mathcal{U}$ е ок. на x. Тогава $\exists\,\mathcal{B}_{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{B}: \mathcal{U}=\bigcup\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$. Тогава $\exists V\in\mathcal{B}_{\mathcal{U}}: x\in V\Rightarrow V\subseteq\mathcal{U}$ и $V\in\mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Нека $\mathcal{U}$ е отворено. Тогава $\forall x\in\mathcal{U}\ \exists V\in\mathcal{B}: x\in V\subseteq\mathcal{U}$. Полагаме $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}:=\{V\in\mathcal{B}\mid x\in V\subseteq\mathcal{U}\}$. Тогава $\bigcup\mathcal{B}_{\mathcal{U}}=\mathcal{U}\Rightarrow\mathcal{B}$ е база $\square$

<u>Пр. 48</u> В метр. пр-ва $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ е отв. $\Leftrightarrow\forall x\in\mathcal{U}\ \exists\,\varepsilon>0: B(x,\varepsilon)\subseteq\mathcal{U}$.

<u>Тв. 49</u> (X,τ) – т.п., $\mathcal{B}$ – база на (X,τ). Тогава $\mathcal{B}$ удовл.

(B1) $\bigcup\mathcal{B}=X$

(B2) $\forall\,\mathcal{U},V\in\mathcal{B}$ и $\forall x\in\mathcal{U}\cap V\ \exists W\in\mathcal{B}: x\in W\subseteq\mathcal{U}\cap V$

<u>Д-во</u>

(B1) $x\in X\Rightarrow\exists\,\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{B}: X=\bigcup\mathcal{B}_x$. Но $\bigcup\mathcal{B}\subseteq X\Rightarrow X=\bigcup\mathcal{B}_\alpha=\bigcup\mathcal{B}$

(B2) $\mathcal{U},V\in\mathcal{B}$ и $x\in\mathcal{U}\cap V$. $\mathcal{B}\subseteq\tau\Rightarrow\mathcal{U}\cap V\in\tau$. От тв.46 $\exists W\in\mathcal{B}: x\in W\subseteq\mathcal{U}\cap V$ $\square$

<u>Т-ма 50</u> Нека X е мн-во и $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$, т.че $\mathcal{B}$ удовл. (B1) и (B2). Тогава $\tau:=\{\bigcup\mathcal{B}'\mid\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{B}\}$ е топология в X, за която $\mathcal{B}$ се явява база. τ се нарича <u>топология в X, породена от „базата" $\mathcal{B}$.</u>

<u>Д-во:</u>

(O1) $X=\bigcup\tau$ по (B1) $\Rightarrow X\in\tau$. $\varnothing=\bigcup\varnothing\subseteq\mathcal{B}$

(O3) Нека $\tau'=\{\mathcal{U}_\alpha\mid\alpha\in A\}\subseteq\tau$. След. $\forall\alpha\in A\ \exists\,\mathcal{B}_\alpha\subseteq\mathcal{B}: \mathcal{U}_\alpha=\bigcup\mathcal{B}_\alpha$.

Полагаме $\mathcal{B}':=\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{B}_\alpha$. Очев. $\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{B}$. Тогава $\bigcup\mathcal{B}'=\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{U}_\alpha$, т.е. $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{U}_\alpha\in\tau$.

(O2) Нека $\mathcal{U}, V \in \tau$. Тогава $\exists \mathcal{B}_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}_V : \mathcal{U} = \cup \mathcal{B}_{\mathcal{U}}, V = \cup \mathcal{B}_V$.

След. $\mathcal{U} \cap V = \cup \{\mathcal{U}' \cap V' \mid \mathcal{U}' \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ и $V' \in \mathcal{B}_V\}$.

Дост. е да покажем, че ако $\mathcal{U}' \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, а $V' \in \mathcal{B}_V$ то $\mathcal{U}' \cap V' \in \tau$.

По (B2) $\forall x \in \mathcal{U}' \cap V' \exists W_x \in \mathcal{B} : x \in W_x \subseteq \mathcal{U}' \cap V'$. Полагаме

$\mathcal{B}_{\mathcal{U}', V'} := \{W_x \mid x \in \mathcal{U}' \cap V'\}$. Тогава $\mathcal{B}_{\mathcal{U}', V'} \subseteq \mathcal{B}$ и $\cup \mathcal{B}_{\mathcal{U}', V'} = \mathcal{U}' \cap V' \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{U}' \cap V' \in \tau$. От (O3) $\Rightarrow \mathcal{U} \cap V \in \tau$.

Очев. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ и от деф. на $\tau \Rightarrow \mathcal{B}$ е база на τ

$\square$

<u>Пр. 51</u> Нека X е мн. и $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. $\mathcal{B}$ удовл. (B1) и (B2) и поражда $\tau_{\mathcal{B}}$ в X. Очев. $\tau_{\mathcal{B}} \equiv \mathcal{P}(X)$.

<u>Пр. 52</u> (Права на Зоргенфрай) $X := \mathbb{R}$, $\mathcal{B} := \{[x, r) \mid x, r \in X, x < r\}$

$[x, r) := \{y \in \mathbb{R} \mid x \leq y < r\}$

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) е т.п. Полагаме $w(X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ е база на $(X, \tau)\}$.

$w(X)$ се нарича <u>тегло на (X, τ)</u>.

<u>Пр. 53</u>

$w(X, \mathcal{D}(X)) = |X|$

$w(\mathbb{R}^n) = \aleph_0$

$w(\mathbb{Z}) = 2^{\aleph_0} = c$

права на Зоргенфрай

<u>Лема 54</u> (X, τ) - т.п., $\tau' \subseteq \tau$, $w(X) = \eta$. Тогава $\exists \tau'' \subseteq \tau' : |\tau''| \leq \eta$ и $\cup \tau'' = \cup \tau'$.

<u>Д-во</u> $\exists$ база $\mathcal{B}$ на X с $|\mathcal{B}| = \eta$. Полагаме $\mathcal{B}_0 := \{\mathcal{U} \in \mathcal{B} \mid \exists V \in \tau', \mathcal{U} \subseteq V\}$.

$\Rightarrow |\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}| = \eta$.

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{B}_0$ да фикс. $V_{\mathcal{U}} \in \tau' : \mathcal{U} \subseteq V_{\mathcal{U}}$. Полагаме $\tau'' := \{V_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{B}_0\}$

$\Rightarrow |\tau''| \leq |\mathcal{B}_0| \leq \eta$, $\tau'' \subseteq \tau'$.

Ще док., че $\bigcup\tau'' = \bigcup\tau'$. Очев. $\bigcup\tau'' \subseteq \bigcup\tau'$. Нека $x \in \bigcup\tau'$. Тогава $\exists V \in \tau' : x \in V$. $\mathcal{B}$ е база $\Rightarrow \exists \mathcal{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{U} \subseteq V$. След. $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_n$.

$\Rightarrow x \in \mathcal{U} \subseteq V_n \in \tau''$.

$\Rightarrow x \in \bigcup\tau''$.

$\Rightarrow \bigcup\tau' \subseteq \bigcup\tau'' \Rightarrow \bigcup\tau' = \bigcup\tau''$.

□

Т-ма 55 (Александров - Урисон) (X,τ) - т.п., $w(X,\tau) = \eta$, а $\mathcal{B}$ е база на (X,τ). Тогава $\exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} : \mathcal{B}_0$ е база на (X,τ) и $|\mathcal{B}_0| = \eta$.

Д-во $\exists$ база $\mathcal{B}_1$ на $(X,\tau) : |\mathcal{B}_1| = \eta$. Понеже $\mathcal{B}$ е база, то $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{B}_1$ фамилията $\mathcal{B}_\mathcal{U} := \{V \in \mathcal{B} \mid V \subseteq \mathcal{U}\}$ е наредена и $\bigcup\mathcal{B}_\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

1сл. $\eta \geq \aleph_0$. $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{B}_1\ \exists \mathcal{B}'_\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{U} : |\mathcal{B}'_\mathcal{U}| \leq \eta$ и $\bigcup\mathcal{B}'_\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{B}_\mathcal{U} = \mathcal{U}$ (съгласно лема 54).

Полагаме $\mathcal{B}_0 := \bigcup\limits_{\mathcal{U} \in \mathcal{B}_1} \mathcal{B}'_\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ и $|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}_1| \cdot \eta = \eta \cdot \eta = \eta$.

Ще докажем, че $\mathcal{B}_0$ е база на (X,τ).

Нека $W \in \tau$ и $x \in W$. $\mathcal{B}_1$ е база $\Rightarrow \exists \mathcal{U} \in \mathcal{B}_1 : x \in \mathcal{U} \subseteq W$. Но $\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{B}'_\mathcal{U}$ $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}'_\mathcal{U} : x \in V$.

Тогава $x \in V \subseteq \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{B}'_\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_0 \Rightarrow \mathcal{B}_0$ е база на (X,τ)

$\Rightarrow |\mathcal{B}_0| \geq \eta \Rightarrow |\mathcal{B}_0| = \eta$ и $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$.

2сл. $n < \aleph_0$. Тогава $\mathcal{B}_1 = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\}$. Ще док., че $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$.

Да отбележим, че ако $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_1$ и $\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{B}'_1$, където $\mathcal{B}'_1 \subseteq \mathcal{B}_1$, то $\mathcal{U} \in \mathcal{B}'_1$.

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$. Ако $\mathcal{U}_1 \notin \mathcal{B}_1$, то $\{\mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n\}$ ще бъде база на (X,τ).

Нека $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_1$. Тогава $\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{B}_\mathcal{U}$. $\forall V \in \mathcal{B}_\mathcal{U}\ \exists \mathcal{B}_1^V \subseteq \mathcal{B}_1 : V = \bigcup\mathcal{B}_1^V$.

Нека $\mathcal{B}'_1 := \bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}_\mathcal{U}} \mathcal{B}_1^V$. Тогава $\mathcal{B}'_1 \subseteq \mathcal{B}_1$ и $\bigcup\mathcal{B}'_1 = \mathcal{U}$. След. $\mathcal{U} \in \mathcal{B}'_1 \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_\mathcal{U} :$ $\mathcal{U} \subseteq V$. Но $V \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} = V$, а $V \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{B}$. След. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$.

□

Сл. 56 Ако (X,τ) е т.п. и $w(X,\tau) < \aleph_0$, то (X,τ) има най-малка по включване база.

Пр. 57 В $\mathbb{R}$ няма най-малка база. Пол. $\mathcal{B}_1 := \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q}, p > q\}$.

$\mathcal{B}_1$ е база. Пол. $\mathcal{B}_2 := \{(t,s) \mid t,s \in \mathbb{I}, t < s\}$. $\mathcal{B}_2$ е база.

Ако $\mathbb{R}$ имаше най-малка база $\mathcal{B}_0$, то трябва да имаме, че $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

9. Затворени множества

Опр. (X,τ) - т.п. Полагаме $\mathcal{F}_\tau := \{F \subseteq X \mid X \setminus F \in \tau\}$

Тв. 58 (X,τ) - т.п. Тогава $\mathcal{F}_\tau$ има следните свойства

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_\tau$

(F2) $\forall F, G \in \mathcal{F}_\tau$, $F \cup G \in \mathcal{F}_\tau$

(F3) $\forall \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_\tau$, $\bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}_\tau$

Д-во

(F1) $\tau \ni \emptyset = X \setminus X \Rightarrow X \in \mathcal{F}_\tau$

$\tau \ni X = X \setminus \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}_\tau$

(F2) Нека $F, G \in \mathcal{F}_\tau$. Тогава $X \setminus F, X \setminus G \in \tau$, и

$X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G) \in \tau$

$\Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}_\tau$

(F3) Нека $\mathcal{F}' = \{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогава $\forall x \in A, X \setminus F_\alpha \in \tau$.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha) \in \tau \Rightarrow \bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}_\tau$$

□

Т-ма 59 Нека X е множество и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$: (F1) - (F3).

Полагаме $\tau := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \in \mathcal{F}\}$. Тогава τ е топология в X и $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_\tau$.

τ се нарича „топология, породена от фамилията от всички затворени множества на X".

Пр. 60 1) Нека X е безкрайно мн. Полагаме

$\mathcal{F} := \{X\} \cup \{F \subseteq X \mid F$ е крайно$\}$. Тогава $\mathcal{F}$ удовл. условията (F1)-(F3) и след. поражда топология τ в X. Тя се нарича кофинитна топология в X. $\forall\, \mathcal{U}, V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ е изп., че $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$.

Д-во Нека $\mathcal{U}, V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Ако $\mathcal{U} = X$ или $V = X$, то $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$. Нека $\mathcal{U}, V \neq X$ и $X \setminus \mathcal{U}, X \setminus V \in \mathcal{F} \setminus \{X\}$. След. $X \setminus \mathcal{U}$ и $X \setminus V$ са крайни множества.

Ако $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$, то $X = X \setminus \emptyset = X \setminus (\mathcal{U} \cap V) = (X \setminus \mathcal{U}) \cup (X \setminus V)$ - крайно

$\Rightarrow \mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$. $\square$

2) Нека X е мн-во и $|X| > \eta \geq \aleph_0$. Полагаме

$\mathcal{F} := \{X\} \cup \{F \subseteq X \mid |F| \leq \eta\}$. Тогава $\mathcal{F}$ удовл. (F1)-(F3) и след. поражда топология в X. Тя се нарича ко-η-топология.

7. Предбази на топологии

Опр. (X, τ) - т.п., $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. P се нарича предбаза на (X, τ), ако фамилията $FI(P)$ от всички крайни сечения на елементи от P е база на (X, τ).

Факт 61 Нека $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. Тогава:

(а) $P \subseteq FI(P)$

(б) $FI(FI(P)) = FI(P)$

(в) $\bigcup FI(P) = \bigcup P$

Тв. 62 Нека (X, τ) е т.п., а P е предбаза на (X, τ). Тогава $P \subseteq \tau$ и $\bigcup P \subseteq X$

Д-во От ф. 18 $\Rightarrow P \subseteq FI(P) \subseteq \tau \Rightarrow P \subseteq \tau$.

Знаем, че $\forall$ база $\mathcal{B}$, $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Тогава $\bigcup P = \bigcup FI(P) = X$. $\square$

Т-ма 63 Нека X е мн-во и $P \subseteq \mathcal{P}(X)$: $\bigcup P = X$. Тогава $FI(P)$ удовл. (B1) и (B2) за база и поражда топология τ X.
P се явява предбаза на (X, τ). τ се нарича топологията в X, породена от „предбазата" P.

Д-во (B1) $\bigcup FI(P) = \bigcup P = X$

(B2) Нека $U, V \in FI(P)$ и $x \in U \cap V$. Тогава $U \cap V \in FI(P)$. Полагаме $W = U \cap V \Rightarrow W \in FI(P)$, $x \in W \subseteq U \cap V$.
$FI(P)$ е база на (X, τ). От деф. за предбаза $\Rightarrow P$ е предбаза на (X, τ)

$\square$

Забл. Нека X е мн-во и $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. Тогава фами. $P' = P \cup \{X\}$ удовл. условието $\bigcup P' = X$ и $\Rightarrow$ същ. топологията в X, породена от предбазата P'.

Опр. Едно ч.н.м. $(X, \leq)$ се нарича решетка, ако съществуват най-малък елемент 0, най-голям елемент 1 и $\forall x, y \in X$ $\exists \sup\{x, y\}$ и $\exists \inf\{x, y\}$. Пишем $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.
Една решетка се нарича пълна решетка, ако $\forall X' \subseteq X$, $\exists \sup X'$ и $\exists \inf X'$.

Т-ма 64 Нека X е мн-во, а $\Pi_X := \{\tau \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \tau$ е топология в $X\}$.
Полагаме за $\tau, \tau' \in \Pi_X$, $\tau \leq \tau' \Leftrightarrow \tau \subseteq \tau'$. Тогава $(\Pi_X, \leq)$ е пълна решетка

Д-во Нека $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \Pi_X$. Полагаме $\tau := \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$. Тогава $\tau \in \Pi_X$.
Наистина, $\emptyset \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in A \Rightarrow \emptyset \in \tau$.
Аналог., $X \in \tau$. Нека $U, V \in \tau$. Тогава $U, V \in \tau_\alpha$ $\forall \alpha \in A \Rightarrow U \cap V \in \tau_\alpha \forall \alpha$ $\Rightarrow U \cap V \in \tau$.
Ако $\{U_j \mid j \in J\} \subseteq \tau$, то $U_j \in \tau_\alpha$ $\forall \alpha \in A$ и $\forall j \in J$.

След. $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau_\alpha$ $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in \tau$

$\tau' \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha = \tau \Rightarrow \tau = \inf\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Нека $\mathcal{O}$ е топологията, породена от фамилията $\bigvee_{\alpha \in A} \tau_\alpha$. Тогава $\mathcal{O} \in \mathbb{T}_X$ и $\mathcal{O}$ е мажоранта на $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Ще док., че $\mathcal{O} = \sup\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Нека $\mathcal{O}'$ е мажоранта на $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогава $\mathcal{O}' \supseteq \tau_\alpha \ \forall \alpha \in A$. След. $\mathcal{O}' \supseteq \bigvee_{\alpha \in A} \tau_\alpha = \bar{\tau} \Rightarrow \mathcal{O}' \supseteq FI(\bar{\tau}) \Rightarrow \mathcal{O}' \supseteq \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O} = \sup\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$\square$

<u>Пр. 65</u> (Две топологии в X, чието обединение не е топология)

Полагаме $X = \mathbb{R}$, τ - ест. топ. в X, $\mathcal{O}$ - ко-$\aleph_0$-топология в X.

Тогава $\tau \cup \mathcal{O}$ не е топ. в X. Наистина,

Имаме, че $(0,1) \in \tau$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, а $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

След. $\mathbb{I} \in \mathcal{O}$.

Ако $\tau \cup \mathcal{O}$ беше топология, то $A = (0,1) \cap \mathbb{I} \in \tau \cup \mathcal{O}$.

Тогава $A \notin \tau$ и $A \notin \mathcal{O}$, защото $|X \setminus A| > \aleph_0 \Rightarrow \tau \cup \mathcal{O}$ не е топ.

$\square$

05.11.2019 $(X, \leq)$ - лин. наредено множество

Всяка крайна решетка очевидно е пълна

Пр. 66 (Решетка, която не е пълна)

$L = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

Множествата от вида $P = \{x \in L \mid x < p\}$ за ирационални p нямат супремуми.

X - мн-во, $P \subseteq \mathcal{P}(X)$

P поражда топология чрез предбазата $P' = P \cup \{X\}$

Фраза 67 Топологията в X, породена от предбазата P', е най-малката топ. в X, съдържаща P.

Д-во Ако τ' - топ. в X и $P \subseteq \tau'$, то $X \in \tau' \Rightarrow P' \subseteq \tau'$ и $FI(P') \subseteq \tau'$ $\square$

8. Локални бази на топологии

Опр. (X,τ) - топ. пр., $x \in X$. Една фамилия $\mathcal{B}(x) \subseteq \tau$ се нарича локална база в т. x, ако $\forall$ ок. U на x $\exists V \in \mathcal{B}(x)$: $x \in V \subseteq U$. Ако $\forall x \in X$ е зададена лок. база $\mathcal{B}(x)$ в X, то фамилията $\{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$ се нарича базисна система от околности на (X, τ)

Характер на (X,τ) в т. x се нарича кард. число

$$\chi(x, (X,\tau)) := \min\{|\mathcal{B}(x)| : |\mathcal{B}(x)| \text{ е лок база в т. } x\}$$

Характер на (X,τ) наричаме кард. число

$$\chi(X,\tau) := \sup\{\chi(x, (X,\tau)) \mid x \in X\}$$

Ако $\chi(X) \leq \aleph_0$, то казваме, че X удовл. първата аксиома за изброимост.

Ако $w(X) \leq \aleph_0$, ——"—— втората аксиома за изброимост

Тв. 68 (X,τ) - т.п., $\mathcal{B}$ - база на (X,τ)

Полагаме $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$

Тогава $\{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$ е базисна система от ок. на X

Д-во Нека $x \in X$ и U - ок. на x. Тогава $\exists V \in \mathcal{B} : x \in V \subseteq U$

$\Rightarrow V \in \mathcal{B}(x)$.

След. $\mathcal{B}(x)$ е лок. база в x. $\square$

Тв. 69 (X,τ) - т.п., $\{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$ - б. система в X. Тогава $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ е база на (X,τ)

Д-во Нека $x \in X$, U - ок. на x. Тогава $\exists V \in \mathcal{B}(x) : x \in V \subseteq U \Rightarrow V \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ е база $\square$

Тв. 70 $\forall$ т.п. (X,τ), $\chi(X) \leq w(X)$

Д-во $\exists$ база $\mathcal{B}$ на X с $|\mathcal{B}| = w(X)$. От тв. 68 $\Rightarrow \forall x \in X$,

$\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ е лок. база в т. x.

Очевидно $|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$.

Тогава $\forall x \in X$, $\chi(x, X) \leq |\mathcal{B}(x)| \leq w(X) \Rightarrow \chi(X) \leq w(X)$ $\square$

Пр. 71

(а) $w(\mathbb{R}^n) = \aleph_0 = \chi(\mathbb{R}^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(б) Нека X е дискр. пр-во и $|X| > 1$.

Тогава $w(X) = |X|$, а $\chi(x, X) = 1 \Rightarrow \chi(X) = 1$

$$\chi(X) = 1 < 2 \leq |X| = w(X)$$

Тв. 72 (X,τ) - т.п. и $\{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$ - б.с. ок. на X. Тогава са изпълнени

(BN1) $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ и $\forall U \in \mathcal{B}(x)$, $x \in U$.

(BN2) $\forall x \in X$ и $\forall U, V \in \mathcal{B}(x)$ $\exists W \in \mathcal{B}(x) : W \subseteq U \cap V$

(BN3) $\forall x, y \in X$, от $x \in U \in \mathcal{B}(y) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(x) : V \subseteq U$.

Д-во очевидно □

Т-ма 73 Нека X е множество и $\forall x \in X$ е зададена фам. $\mathcal{B}(x)$ от подмн. на X, така че да са изпълнени (BN1)-(BN3).
Тогава $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ удовл. (B1) и (B2) и след. поражда топология τ в X.

При това, $\{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$ се явява базисна система от околности на (X, τ)

τ се нарича топология в X, породена от „базисната система от околности" $\{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$.

Зад. Хаусдорф добавя допълнително и четвърта аксиома

(BN4) $\forall x, y \in X,\ x \neq y \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{B}(x)\ \exists\, V \in \mathcal{B}(y) : U \cap V = \emptyset$.

Д-во

(B1) $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$

От (BN1) сл., че $\forall x \in X\ \exists\, U \in \mathcal{B}(x)$ и $x \in U$. $x \in U \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq X$

$\Rightarrow \bigcup \mathcal{B} = X$

(B2) Нека $U, V \in \mathcal{B}$ и $x \in U \cap V$. $\exists\, y, z \in X : U \in \mathcal{B}(y), V \in \mathcal{B}(z)$.

От $x \in U \in \mathcal{B}(y)$ следва, че съгл. (BN3) $\exists\, W_1 \in \mathcal{B}(x) : x \in W_1 \subseteq U$

Аналогично $x \in V \in \mathcal{B}(z)$. След. $\exists\, W_2 \in \mathcal{B}(x) : x \in W_2 \subseteq V$

От (BN2) $\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{B}(x) : x \in W \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq U \cap V$.

$W \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow W \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ (B2) е изп.

Нека τ е породена от $\mathcal{B}$. Ще док., че $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ е лок. база.
Нека $x \in X$, $U \in \tau$ и $x \in U$. Знаем, че $\mathcal{B}$ е база на (X, τ).
Следователно $\exists\, V \in \mathcal{B} : x \in V \subseteq U$. $\exists\, y \in X : V \in \mathcal{B}(y)$. Знаем, че $x \in V \in \mathcal{B}(y)$.
От (BN3) $\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{B}(x) : x \in W \subseteq V \subseteq U \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ е л.б. в т.x.
$\Rightarrow \{\mathcal{B}(x) \mid x \in X\}$ е базисна система от околности.

□

11. Непрекъснати функции

<u>Опр.</u> $f:(X,\tau)\to(Y,O)$ се нарича <u>непрекъсната функция</u>, ако $\forall V\in O,\ f^{-1}(V)\in\tau$

<u>Пр. 74</u> Всяка функция $f:(X,\mathcal{P}(X))\to(Y,O)$ е непрекъсната

Всяка функция $f:(X,\tau)\to(Y,\{\emptyset,Y\})$ е непрекъсната

<u>Заб.</u>

(X,ρ) - метр. пр-во

$B(x,\varepsilon):=\{y\in X \mid \rho(x,y)<\varepsilon\}$

$\mathcal{B}:=\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X,\ \varepsilon>0\}$ удовл. (B1) и (B2) $\Rightarrow$ поражда топ.

<u>Тв. 75</u> Всяко топологично пространство е непрекъснат и биективен образ на метрично пространство.

<u>Д-во</u>

Нека (X,τ) е т.п. В мн. X въвеждаме следната метрика

$$\forall x,y\in X,\ \rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

$B(x,\frac{1}{2})=\{x\}\in\tau_\rho \Rightarrow \tau_\rho\equiv\mathcal{P}(X)$

Разгл. $id_X:(X,\tau_\rho)\to(X,\tau)$ - непр.

<u>Т-ма 76</u> Нека (X,τ) и (Y,O) са т.п. и $f:X\to Y$ е функция. Тогава следните са еквивалентни:

(а) $f:(X,\tau)\to(Y,O)$ е непрекъсната

(б) $\exists$ предбаза P на (Y,O): $\forall V\in P,\ f^{-1}(V)\in\tau$

(в) $\exists$ база $\mathcal{B}$ на (Y,O): $\forall V\in\mathcal{B},\ f^{-1}(V)\in\tau$

(г) $\exists$ базисни системи от околности $\{\mathcal{B}(x)\mid x\in X\}$ и $\{\mathcal{B}'(y)\mid y\in Y\}$:
$\forall x\in X\ \forall V\in\mathcal{B}'(f(x))\ \exists U\in\mathcal{B}(x): f(U)\subseteq V$

д) $\forall F \underset{cl}{\subseteq} Y,\ f^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} X$

<u>Д-во</u> (а) $\Rightarrow$ (б) Полагаме $P := O$ и сме готови

(б) $\Rightarrow$ (в) Полагаме $\mathcal{B} := FI(P)$. Тогава $\mathcal{B}$ е база на Y. Нека $V \in \mathcal{B}$. Тогава $\exists V_1, \dots, V_n \in P$: $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. След.

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i) \in \tau$$

(в) $\Rightarrow$ (г) $\forall y \in Y$ полагаме $\mathcal{B}(y) := \{U \in \mathcal{B} \mid y \in U\}$. Тогава $\{U \in \mathcal{B} \mid y \in U\}$ е базисна система от околности на y.

$\forall x \in X$ полагаме $\mathcal{B}(x) := \{U \in \tau \mid x \in U\}$.

Тогава $\mathcal{B}(x)$ е локална база в т. x.

Нека $x \in X$ и $V \in \mathcal{B}'(f(x))$. Тогава $f(x) \in V$ и, от (в), $f^{-1}(V) \in \tau$.

Очевидно, $x \in f^{-1}(V)$ и следователно $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}(x)$. Полагаме

$U := f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

(г) $\Rightarrow$ (д) Нека $F \underset{cl}{\subseteq} Y$. Ще док., че $f^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} X$, т.е. $X \setminus f^{-1}(F) \underset{op}{\subseteq} X$.

Нека $x \in X \setminus f^{-1}(F)$. Тогава $f(x) \notin F$, т.е. $f(x) \in Y \setminus F \underset{op}{\subseteq} Y$.

След. $\exists V \in \mathcal{B}'(f(x))$: $f(x) \in V \subseteq Y \setminus F$. От (г) $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}(x)$:

$f(U) \subseteq V$. Тогава $f(U) \subseteq Y \setminus F$, т.е. $U \subseteq f^{-1}(Y \setminus F) = \underset{X}{\underset{\parallel}{f^{-1}(Y)}} \setminus f^{-1}(F)$.

$\Rightarrow X \setminus f^{-1}(F)$ е отв. $\Rightarrow f^{-1}(F)$ е затв.

(д) $\Rightarrow$ (а) Нека $V \in O$. Тогава $F = Y \setminus V \underset{cl}{\subseteq} Y$. Имаме, че $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus V))$

$= f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus \underbrace{f^{-1}(F)}_{\text{затв. в } X} \in \tau \Rightarrow f$ е непрекъсната $\square$

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) – т.п. и $A \subseteq X$. Полагаме $\mathcal{F}_A := \{F \underset{cl}{\subseteq} X \mid A \subseteq F\}$ и $\bar{A} := \bigcap \mathcal{F}_A$. Тогава $\bar{A}$ се нарича <u>затв. обвивка</u> на A в (X, τ). $\bar{A} \underset{cl}{\subseteq} X$

Факт 77 (X,τ) - т.п., $A, B \subseteq X$. Тогава $A \subseteq \bar{A}$ и от $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Д-во $A \subseteq F \ \forall F \in \mathcal{F}_A \Rightarrow A \subseteq \cap \mathcal{F}_A = \bar{A}$.

Нека $A \subseteq B$. Тогава $\mathcal{F}_A \supseteq \mathcal{F}_B$ (ако $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $F \supseteq B$, то $F \supseteq A$). Само $A = \cap \mathcal{F}_A \subseteq \cap \mathcal{F}_B = \bar{B}$.

Тв. 78 (X,τ) - т.п., $A \subseteq X$ и $x \in X$. Тогава $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall$ок. U на x, $U \cap A \neq \emptyset$.

Д-во $(\Rightarrow)$ Нека $x \in \bar{A}$. Да доп., че $\exists$ ок. U на x: $U \cap A = \emptyset$. Тогава $A \subseteq X \setminus U \underset{cl}{\subseteq} X$. След. $X \setminus U \in \mathcal{F}_A \Rightarrow \bar{A} \subseteq X \setminus U$: $U \cap \bar{A} = \emptyset$, а $x \in U \cap \bar{A}$ - противоречие.

$(\Leftarrow)$ Доп., че $x \notin \bar{A}$. Тогава $x \in X \setminus \bar{A} \underset{op}{\subseteq} X$. Полагаме $U := X \setminus \bar{A}$. Тогава U е околност на x и $U \cap \bar{A} = \emptyset$.

Но $A \subseteq \bar{A}$ и $x \notin A$ - противоречие □

Т-ма 79 (X,τ), (Y,σ) - т.п., $f: X \to Y$ - ф-я.

Тогава следните са еквивалентни:

(а) $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ е непр.

(б) $\forall A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Д-во (а)$\Rightarrow$(б) Знаем, че f е непр. $\Leftrightarrow \forall F \underset{cl}{\subseteq} Y$, $f^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} X$.

Нека $A \subseteq X$. Тогава $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \underset{cl}{\subseteq} X$.

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(б)$\Rightarrow$(а) Нека $F \underset{cl}{\subseteq} X$. Полагаме $A = f^{-1}(F) \subseteq X$. От (б)$\Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, т.е.

$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))}$

$f(f^{-1}(F)) \subseteq F$

$\overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \bar{F} = F$

$\Rightarrow f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(\bar{F}) \Rightarrow f^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} X$. □

Зад. Полагаме $x \in \bar{A} \iff x \delta A$

x е близко до A

Тогава непрекъснатостта на f се изразява чрез

$$x \,\delta_X\, A \Rightarrow f(x) \,\delta_Y\, f(A)$$

Т-ма 80 Ако $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{O}) \xrightarrow{g} (Z,\Theta)$ и f, g са непр., то $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\Theta)$ е непр.

Д-во Нека $V \in \Theta$. Тогава $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(V)}_{\in \mathcal{O}}) \in \tau$ □

Тв. 81 (X,τ) - т.п., $A \subseteq X$. Тогава $i_A : (A, \tau_A) \to (X,\tau)$, $a \mapsto a$, е непр

Д-во $\forall \mathcal{U} \in \tau$, $i_A^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap A \in \tau_A$ □

Тв. 82 Ако $f : (X,\tau) \to (Y,\mathcal{O})$ е непр. и $A \subseteq X$, то $f|_A : (A, \tau_A) \to (Y, \mathcal{O})$ е непр.

Д-во

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{непр}}}{f|_A = f} \circ \underset{\nwarrow \text{непр}}{i_A} \Rightarrow f|_A \text{ е непр}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, hook, "i_A"] \arrow[ur, "f|_A"'] & \end{tikzcd}$$

□

Т-ма 83 (X,τ) - т.п., $\Omega \subseteq \tau$ и $\bigcup \Omega = X$ ($\equiv \Omega$ е отв. покритие на X) и $f : (X,\tau) \to (Y,\mathcal{O})$: $\forall \mathcal{U} \in \Omega$, $f|_{\mathcal{U}} : (\mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}}) \to (Y, \Theta)$ е непр.

Тогава f е непр.

Д-во Нека $V \underset{op}{\subseteq} Y$. Тогава $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \bigcup \Omega =$

$$= \bigcup \{ f^{-1}(V) \cap \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \Omega \} = \bigcup \{ \underbrace{(f|_{\mathcal{U}})^{-1}(V)}_{\text{отв. в } \mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \Omega \} \in \tau$$

□

12.11.2019

<u>Тв. 84</u> Нека X, Y - т.п., $\Omega = \{F_1, \dots, F_n\}$ е затв. покритие на X и $f: X \to Y$ е функция. Тогава f е непрекъсната $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f|_{F_i}: F_i \to Y$ е непрекъсната.

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) следва от т-ма 82

($\Leftarrow$) Нека $G \underset{cl}{\subseteq} Y$. Тогава $f^{-1}(G) = X \cap f^{-1}(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \cap f^{-1}(G) =$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (F_i \cap f^{-1}(G)) = \bigcup_{i=1}^{n} \overbrace{(\underbrace{f|_{F_i}}_{\text{непр.}})^{-1}(G)}^{\text{затв. в } F_i}$$

$\Rightarrow f^{-1}(G)$ е затворена

$\Rightarrow f$ е непрекъсната $\square$

<u>Тв. 85</u> X - т.п., $F_1, F_2 \underset{cl}{\subseteq} X$, $F_1 \cup F_2 = X$, $f_1: F_1 \to Y$, $f_2: F_2 \to Y$ са непрекъснати и $f_1|_{F_1 \cap F_2} = f_2|_{F_1 \cap F_2}$. Тогава функцията $f: X \to Y$, деф. чрез $f|_{F_1} \equiv f_1$ и $f|_{F_2} \equiv f_2$, е непр.

<u>Д-во</u> Очевидно, f е добре деф. След. $f|_{F_1} = f_1$ е непр и $f|_{F_2} = f_2$ е непр. От тв. 84 $\Rightarrow f$ е непр. $\square$

<u>Тв. 86</u> Ако $f: X \to Y$ е непр и $f(X) \subseteq Y' \subseteq Y$, то $g := f|_{X, Y'}: X \to Y'$ е непрекъсната

Ако $Y' \equiv f(X)$, то пишем просто $f|_X: X \to f(X)$.

<u>Д-во</u> Нека $U' \underset{op}{\subseteq} Y'$. Тогава $\exists U \underset{op}{\subseteq} Y: U \cap Y' = U'$.

Тогава $g^{-1}(U') = f^{-1}(U') = f^{-1}(U) \underset{op}{\subseteq} X$. $\square$

<u>Опр.</u> X, Y - т.п., $f: X \to Y$, $x_0 \in X$. Казваме, че f е <u>непр. в т. x_0</u>, ако $\forall$ ок. V на $f(x_0)$ $\exists$ ок. U на x_0: $f(U) \subseteq V$.

Факт 87 $f: X \to Y$ е непр. в т. $x_0 \in X \iff \exists$ лок. бази $P(f(x_0))$ на $f(x_0)$ в Y и $\mathcal{B}(x_0)$ на x_0 в X: $\forall V \in P(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{B}(x_0): f(U) \subseteq V$

Тв. 88 $f: X \to Y$ е непр. $\iff$ f е непр. за всяко $x \in X$.

Пр. 89 В анализа, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непр. в т. $x_0 \in \mathbb{R}$, ако

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f е непрекъсната, ако е непрекъсната във всяка точка.

В анализа, околност на $x_0 \in \mathbb{R}$ наричаме всеки интервал от вида $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.

В анализа, $U \subseteq \mathbb{R}$ е отворено, ако $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0: (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$.

С помощта на нашите понятия, зададена е фамилия

$\mathcal{B} := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ и топология в $\mathbb{R}$, породена от „базата" $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ очевидно удовл. (B1) и (B2).

$\forall x$, $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$, е локална база в т. x

$\mathcal{B}'(x) := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$

$\mathcal{B} := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$.

$\mathcal{B}$ очевидно удовл. (B1) и (B2).

$\forall x$, $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ е локална база в т. x.

$\mathcal{B}'(x) := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$

$\Rightarrow \exists$ топология в $\mathbb{R}$, породена от „базата" $\mathcal{B}$. Това е стандартната топология.

12. Финални топологии

Опр. (фин. топология) Нека $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to Y \mid \alpha \in A\}$. Полагаме $\mathcal{O} := \{U \subseteq Y \mid \forall \alpha \in A, f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha\}$. Тогава $\mathcal{O}$ е топология в Y и $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y, \mathcal{O})$ е непр. При това, $\mathcal{O}$ е най-силната топология в Y с това свойство.

Д-во (О1) $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset \subseteq \tau_\alpha \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{O}$.

$\forall \alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(Y) = X_\alpha \in \tau_\alpha \Rightarrow Y \in \mathcal{O}$

(О2) Нека $U, V \in \mathcal{O}$. Тогава $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(U), f_\alpha^{-1}(V) \in \tau_\alpha$.

След. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \tau_\alpha$, $\forall \alpha \in A \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$.

(О3) Нека $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{O}$. Тогава $\forall \alpha \in A$, $f^{-1}(U_\gamma) \in \tau_\alpha$ $\forall \gamma \in \Gamma$.

След. $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(U_\gamma) \in \tau_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \in \mathcal{O}$.

Нека $\mathcal{O}'$ е топ. в Y: $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha (X_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y, \mathcal{O}')$ е непр.

Тогава $\forall U \in \mathcal{O}'$ и $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha$. От деф. на $\mathcal{O} \Rightarrow U \in \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ □

Тв. 90 Нека $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to Y \mid \alpha \in A\}$ и $\mathcal{O}$ е фин. топология в Y, породена от $\mathcal{F}$. Ако $g : (Y, \mathcal{O}) \to (Z, \mathcal{O}')$ е ф-ция, то g е непр. $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in A$, $g \circ f_\alpha$ е непр.

Д-во ($\Rightarrow$) Ако g е непр., то тъй като f_α е непр. $\forall \alpha \in A$, $g \circ f_\alpha$ е непр.

($\Leftarrow$) Нека $V \in \mathcal{O}'$. Тогава $\forall \alpha \in A$, $(g \circ f_\alpha)^{-1}(V) \in \tau_\alpha$. Следователно $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(\underbrace{g^{-1}(V)}_{U}) \in \tau_\alpha$. От деф. на $\mathcal{O} \Rightarrow g^{-1}(V) \in \mathcal{O} \Rightarrow g$ е непр. □

Опр. Нека (X, τ) е т.п. и ρ е рел. на еквив. в X. Нека $q : X \to X/_\rho$, $x \to [x]$ е <u>естественото изображение</u>

Финалната топология в $X/_\rho$, породена от фам. $\{q\}$, се нарича <u>фактор-топология в $X/_\rho$</u>.

$\rho \leftrightarrow \Omega_\rho$ - разбиване на X

Ω - разбиване на X

$X/_\Omega := X_{\rho_\Omega}$

Пр. 91 $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$

$\Omega = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}^2$ и $\|x\| < 1\} \cup \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{R}^2$ и $\|x\| = 1\}$

$X/_\Omega = \mathbb{RP}^2$

Пр. 92 $X = [0,1]$

$\Omega = \{\{x\} \mid x \in (0,1)\} \cup \{\{0,1\}\}$

$X/_\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$

Опр.

Нека $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от множества

Дизюнктна сума $X = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ наричаме множеството $X := \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \times \{\alpha\}$.

Ако фамилията е дизюнктна, можем да вземем $X := \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.

$\forall \alpha \in A$, полагаме $i_\alpha : X_\alpha \to X$, $x \mapsto (x, \alpha)$.

Опр. Нека $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е дизюнктна фамилия от топологични пространства.

$X := \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ и $\mathcal{F} := \{i_\alpha : X_\alpha \to X \mid \alpha \in A\}$

Нека $\mathcal{O}$ е финалната топология в X, породена от $\mathcal{F}$.

Тогава $(X, \mathcal{O})$ се нарича топологична сума на $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

Пишем $(X, \mathcal{O}) = \left(\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha, \bigoplus\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha\right)$

Тв. 93 Нека $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to Y \mid \alpha \in A\}$ и $\mathcal{O}$ е финалната топ. в Y, породена от $\mathcal{F}$. Тогава едно множество $F \subseteq Y$ е затворено в $(Y, \mathcal{O}) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A, f_\alpha^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} (X_\alpha, \tau_\alpha)$

Д-во $F \underset{cl}{\subseteq} (Y, \mathcal{O}) \Leftrightarrow Y \setminus F \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall \alpha \in A, f_\alpha^{-1}(Y \setminus F) \in \tau_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in A, X_\alpha \setminus f_\alpha^{-1}(F) \in \tau_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ f_\alpha^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ $\square$

<u>Тв. 94</u> Нека $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е диз. фамилия от т.п. и

$(X, \tau) := \bigoplus_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$. Тогава $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ и ако $U \subseteq X$, то

$U \in \tau \Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha$. Ако $F \subseteq X$, то $F \underset{cl}{\subseteq} (X, \tau) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ F \cap X_\alpha \underset{cl}{\subseteq} (X_\alpha, \tau_\alpha)$

<u>Д-во</u> Нека $U \subseteq X$. Тогава $U \in \tau \Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ i_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha$.

Ако $F \subseteq X$, то $F \underset{cl}{\subseteq} (X, \tau) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ i_\alpha^{-1}(F) \underset{cl}{\subseteq} (X_\alpha, \tau_\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ F \cap X \underset{cl}{\subseteq} \tau$. $\square$

<u>Сл. 95</u> Ако $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$, то $\forall \alpha \in A$, X_α е отв.-затв. подмн. на (X, τ)

<u>Д-во</u> $X_\alpha \cap X = X_\alpha \in \tau_\alpha$

$X_\alpha \underset{cl}{\subseteq} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ $\square$

<u>Сл. 96</u> Ако $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$, то $\forall \alpha \in A,\ \tau_\alpha \equiv \tau_{X_\alpha}$.

<u>Опр.</u> Нека е зададена фамилия $\mathcal{F} := \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y_\alpha, O_\alpha) \mid \alpha \in A\}$,

$\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\alpha\}$ са дизюнктни фамилии, $X := \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$, $Y := \bigoplus_{\alpha \in A} Y_\alpha$,

$i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$, $j_\alpha : Y_\alpha \hookrightarrow Y$.

Дефинираме $f(X, \tau) \to (Y, O)$ чрез $f|_{X_\alpha} := j_\alpha \circ f_\alpha$. Тогава f се нарича <u>директна сума на $\{f_\alpha\}$</u> и се бележи с $\bigoplus_{\alpha \in A} f$.

<u>Тв. 97</u> В усл. на опр., f е непр $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A, f_\alpha$ е непр

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$ Нека f е непр. Тогава, $\forall \alpha \in A,\ f|_{X_\alpha} : X_\alpha \to Y$ е непр.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & Y \\ & Y_\alpha \arrow[u, "j_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Но $f|_{X_\alpha} = j_\alpha \circ f_\alpha$ и $(f|_{X_\alpha})(X_\alpha) \subseteq Y_\alpha \subseteq Y$

$(f|_{X_\alpha})|_{X_\alpha, Y_\alpha} : X_\alpha \to Y_\alpha$ е непр.

(<=) Ако f_α е непр. $\forall \alpha \in A$, то той като j_α е непр. $\forall \alpha$, $j_\alpha \circ f_\alpha$ е непр. и $\forall \alpha \in A$, $f|_{X_\alpha} = j_\alpha \circ f_\alpha$ е непр.

$\Omega = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е отв. диз. покритие на X. след. f е непр. ○

<u>Опр.</u> Нека е зададена $\Phi = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y, O) \mid \alpha \in A\}$, $\{X_\alpha\}$ - диз.,
$X := \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$, $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$.

Деф. $f : (X, \tau) \to (Y, O)$ чрез $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$. Тогава f се нарича <u>сума на $\{f_\alpha\}$</u> и се бележи с $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha$.

<u>Тв. 98</u> f е непр. <=> $\forall \alpha \in A$, f_α е непр.

<u>Тв. 99</u> Нека (X, τ) е т.п. и $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е отв. диз. покритие на X. Тогава $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in A} (U_\alpha, \tau_{U_\alpha})$.

<u>Д-во</u> Нека $U \subseteq X$. Тогава $U \in \tau \iff \forall \alpha \in A, U \cap U_\alpha \in \tau_{U_\alpha}$.

$U = \bigcup_{\alpha \in A} U \cap U_\alpha$. Следователно $(X, \tau) = \bigoplus_{\alpha \in A} (U_\alpha, \tau_{U_\alpha})$. □

<u>Опр.</u> Едно т.п. (X, τ) се нарича <u>свързано</u>, ако то не може да се представи като топологична сума на две свои непразни подпространства.

<u>Тв. 100</u> (X, τ) е свързано <=> единствените отворено-затворени мн. са празното и цялото X.

<u>Д-во</u> (=>) Нека $F \subsetneq X$, F е отв. и затв. и F е непразно. Полагаме $U = X \setminus F$. Тогава U е отв., затв. и непразно. Тогава $\{F, U\}$ е дизюнктно отв. покритие на X и от тв. 99 $X = F \oplus U$.
Противоречие

(<=) Ако $X = F \oplus U$, където $F, U \neq \emptyset$, то F и U са отв. и затв. и $F = X \setminus U$. След. $F \neq X$, $F \neq \emptyset$. Противоречие.
свързано

$U \neq \emptyset$ □

Пр. 101 $\mathbb{R}$ с ест. топология е свързано.

Д-во Доп., че $\mathbb{R}$ не е свързано. Тогава $\exists X_1, X_2 : X_1, X_2 \neq \emptyset, X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $\mathbb{R} = X_1 \oplus X_2$. Тогава X_1 и X_2 са отв. и затв. в $\mathbb{R}$ и $X_1 \cup X_2 = \mathbb{R}$. $\exists x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Можем да считаме, че $x_1 < x_2$.

Полагаме $F = X_1 \cap [x_1, x_2]$. Тогава F е огр. и затв. След. F има супремум, $x_0 : x_0 \in F \Rightarrow x_0 \in X_1 \Rightarrow x_0 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \leq x_0 < x_2$.

$X_1 \underset{op}{\subseteq} \mathbb{R}$ и $x_0 \in X_1$. След $\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_1$. Можем да считаме, че $\varepsilon < x_2 - x_0$. Тогава имаме, че $x_0 < x_0 + \varepsilon < x_2$.

След $[x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq F$. Ако $y \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$, то $y \in F$ и $y > x_0$ - противоречие.

След. $\mathbb{R}$ е свързано. $\square$

13. Инициални топологии

Опр. (Инициална топология) Нека $\mathcal{F} := \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Нека O е топологията в X, породена от предбазата

$P := \{f_\alpha^{-1}(U) \mid \alpha \in A, U \in \tau_\alpha\}$.

Тв. 102 $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha (X, O) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ е непр. и O е най-слабата топология в X с това свойство.

Д-во От опр. за непр. следва, че f_α е непр. $\forall \alpha \in A$. Нека O' е топология в X: $\forall \alpha \in A$, $f_\alpha : (X, O') \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ е непр.

Тогава $\forall \alpha \in A, \forall U \in \tau_\alpha$, $f_\alpha^{-1}(U) \in O'$. След. $P \subseteq O' \Rightarrow FI(P) \subseteq O' \Rightarrow O \subseteq O'$ $\square$

Т-ма 103 Нека $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ и O е инициалната топология в X, породена от фамилията $\mathcal{F}$.

Нека $g : (Z, O') \to (X, O)$ е изобр.

g е непр. $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A$ изобр. $f_\alpha \circ g$ е непр.

Д-во (⇒) Ако g е непр., то тъй като f_α е непр. $\forall \alpha$, то $f_\alpha \circ g$ е непр.

(⇐) Имаме, че P е предбаза на $(X, \mathcal{O})$. Нека $V \in P$. Тогава $\exists \alpha \in A$ и $\exists U \in \tau_\alpha : V = f_\alpha^{-1}(U)$. След. $g^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(U)) = (\underbrace{f_\alpha \circ g}_{\text{непр.}})^{-1}(U) \in \mathcal{O}'$

⇒ g е непр. □

Пр. 104 Нека (X, τ) е т.п. и $M \subseteq X$. Нека $i_M : M \hookrightarrow X$, $x \mapsto x$. Тогава инициалната топология в M, породена от $\{i_M\}$, съвпада с индуцираната τ_M.

Д-во Имаме, че $P := \{ i_M^{-1}(U) \mid U \in \tau \}$ е предбаза, индуцирана от $\{i_M\}$. Но $i_M^{-1}(U) = U \cap M$ и $P = \{ U \cap M \mid U \in \tau \} = \tau_M$ □

19.11.2019

<u>Опр.</u> (Произведение на т.п.)

$\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от т.п. и $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, т.е.

$X = \{ f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid \forall \alpha \in A, f(\alpha) \in X_\alpha \}$.

Полагаме $\forall \alpha \in A$, $x_\alpha := f(\alpha)$ $(f \in X)$. Тогава $f = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$

$\forall \alpha_0 \in A$, полагаме $p_{\alpha_0} : X \to X_0$, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_{\alpha_0}$.

p_{α_0} се нарича <u>α_0-ва проекция на X в</u> X_{α_0}. Нека

$\mathcal{F} := \{ p_{\alpha_0} : X \to X_{\alpha_0} \mid \alpha_0 \in A \}$

Понеже в X_α има топология τ_α, то индуцираната топология τ, породена от $\mathcal{F}$, се нар. <u>Тихоновска топология в X</u>.

<u>Пр. 105</u> Нека $(X, \tau) = \prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ и

$\mathcal{B}_c := \{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha \ \forall \alpha \in A$ и $|\{\alpha \in A \mid U_\alpha \neq X_\alpha\}| < \aleph_0 \}$

Тогава $\mathcal{B}_c$ е база на (X, τ), която се нарича <u>канонична база</u>.

Ако $\forall \alpha \in A$ е дадена база $\mathcal{B}_\alpha$ на (X_α, τ_α), то

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{B}_c \;\middle|\; U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \ \forall \alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha \right\}$$

е база на (X, τ).

<u>Д-во</u> Полагаме $P := \{ p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A, U_\alpha \in \tau_\alpha \}$. От деф. на τ следва, че P е предбаза на τ.

Нека $\alpha_0 \in A$ и $U_{\alpha_0} \in \tau_{\alpha_0}$. Тогава $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = U_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}} X_\alpha$.

Наистина, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \Leftrightarrow p_{\alpha_0}(x) \in U_{\alpha_0} \Leftrightarrow x_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$.

Полагаме $\mathcal{B}_c := FI(P)$. Тогава $\mathcal{B}_c$ е база на (X, τ).

Ще използваме, че за $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$: $\prod_{\alpha\in A} V_\alpha \cap \prod_{\alpha\in A} W_\alpha = \prod_{\alpha\in A}(V_\alpha \cap W_\alpha)$

$\mathcal{U}\in FI(P) \Leftrightarrow \mathcal{U} = p_{\alpha_1}^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_2}) \cap \dots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_k})$, $\alpha_i \in A, \forall i = 1,\dots,k, k\in\mathbb{N}$

Ако напр. $\alpha_1 = \alpha_2$, то $p^{-1}_{\alpha_1}(\mathcal{U}_{\alpha_1}) \cap p^{-1}_{\alpha_2}(\mathcal{U}_{\alpha_2}) = p^{-1}_{\alpha_1}(\underbrace{\mathcal{U}_{\alpha_1}\cap\mathcal{U}_{\alpha_2}}_{\in\tau_{\alpha_1}})$.

Можем да считаме, че $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ са различни.

$$(\mathcal{U}_{\alpha_1}\times \prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1\}} X_\alpha) \cap \dots \cap (\mathcal{U}_{\alpha_k}\times\prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_k\}} X_\alpha) = \mathcal{U}_{\alpha_1}\cap \dots \cap \prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}} X_\alpha$$

Нека $\mathcal{B}_\alpha$ е база на (X_α,τ_α) и $\mathcal{U}_\alpha \in \tau_\alpha$. Тогава $\exists \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{U}_\alpha} \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, т.ч.

$\mathcal{U}_\alpha = \bigcup \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{U}_\alpha}$

$$p^{-1}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha \times \prod_{\alpha'\in A\setminus\{\alpha\}} X_{\alpha'} = \left(\bigcup \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{U}_\alpha}\right)\times \prod_{\alpha'\in A\setminus\{\alpha\}} X_{\alpha'} = \bigcup\{V \mid V\in\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{U}_\alpha}\}\times\prod_{\alpha'\in A\setminus\{\alpha\}} X_{\alpha'} =$$

$$= \bigcup\{V\times\prod_{\alpha'\in A\setminus\{\alpha\}} X_{\alpha'} \mid V\in \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{U}_\alpha}\}$$

□

<u>Опр.</u>

За всяко безкр. Y, $\mathcal{P}_{\aleph_0}(Y) = \{\{y_1,\dots,y_n\} \mid y_i\in Y, \forall i=1,\dots,n\in\mathbb{N}\}$.

Очевидно $|\mathcal{P}_{\aleph_0}(Y)| = |Y|$

<u>Ст. 106</u> Ако $|A|\le m \ge \aleph_0$ и $\forall \alpha\in A$, $w(X_\alpha,\tau_\alpha)\le m$, тогава $w(X,\tau)\le m$, където $(X,\tau) = \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha)$

<u>Д-во</u> $\forall\alpha\in A$ $\exists$ база $\mathcal{B}_\alpha$ на (X_α,τ_α): $|\mathcal{B}_\alpha| = w(X_\alpha)\le m$.

От тв. 1 следва, че $\mathcal{B} := \{\prod_{\alpha\in A}\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{B}_c \mid \mathcal{U}_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha, \forall\alpha\in A: \mathcal{U}_\alpha \neq X_\alpha\}$ е база на (X,τ).

Полагаме $\mathcal{B} := \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{B}_\alpha \Rightarrow |\mathcal{B}| \le m.m = m \Rightarrow w(X)\le|\mathcal{B}|\le m$.

□

__Сл. 107__ Нека $(X,\tau) = \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ и $x^0 = (x^0_\alpha)_{\alpha\in A}$

Нека $\mathcal{B}_\alpha$ е база на (X_α, τ_α) и

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{B}_c \mid U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, \forall \alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}$$

Тогава фам. $\mathcal{B}(x^0) := \{U \in \mathcal{B} \mid x^0 \in \mathcal{B}\}$ е локална база в т. x_0.

__Д-во__ От Тв. 105 сл., че $\mathcal{B}$ е база на (X,τ). От сл. 106 $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(x^0)$ е лок. база в т. x^0. □

__Тв. 108__ Ако $|A| \leq m \geq \aleph_0$ и $\forall \alpha \in A$, $\chi(X_\alpha) \leq m$, то $\chi(X,\tau) \leq m$.

__Д-во__ Нека $\alpha_0 \in A$. $\forall x \in X_{\alpha_0}$ $\exists$ лок. база $\mathcal{B}^x_{\alpha_0}$ в т. x : $|\mathcal{B}^x_{\alpha_0}| = \chi(x, X_{\alpha_0})$

Тогава $\mathcal{B}_{\alpha_0} := \bigcup_{x\in X_{\alpha_0}} \mathcal{B}^x_{\alpha_0}$ е база на X_{α_0}.

Тогава $\forall x^0 \in X$, $\mathcal{B}(x^0)$ е лок. база в т. x_0

$x^0 = (x^0_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\forall \alpha \in A$ фикс. лок. база $\mathcal{B}^{x^0_\alpha}_\alpha$ на x^0_α в $(X_\alpha, \tau_\alpha) \Rightarrow |\mathcal{B}^{x^0_\alpha}_\alpha| \leq m$

Пол. $\mathcal{B}_{x^0} := \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{B}^{x^0_\alpha}_\alpha \Rightarrow |\mathcal{B}_{\alpha_0}| \leq m$

$$\mathcal{B}(x^0) := \{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \ni x^0 \mid U_\alpha \in \mathcal{B}^{x^0_\alpha}_\alpha \; \forall \alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}$$

$\mathcal{B}(x^0)$ е лок. база в т. x^0 на (X,τ).

$\mathcal{B}_c(x^0)$ е лок. база в т. x^0 в (X,τ).

$$\mathcal{B}_c(x^0) = \{U \in \mathcal{B}_c \mid x^0 \in U\}$$

Нека $x^0 \in U \in \mathcal{B}_c(x^0)$. $U = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \dots \times U_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}} X_\alpha$

$\forall i=1,\dots,k,\ x^0_{\alpha_i}\in \mathcal{U}_{\alpha_i}\ \exists V_{\alpha_i}\in \mathcal{B}^{x^0_{\alpha_i}}_{\alpha_i}$.

$x^0_{\alpha_i}\in \mathcal{U}_{\alpha_i}\ \exists V_{\alpha_i}\in \mathcal{B}^{x^0_{\alpha_i}}_{\alpha_i}$, т.е. $x^0_{\alpha_i}\in V_{\alpha_i}\subseteq \mathcal{U}_{\alpha_i}$

$$x^0\in V_{\alpha_1}\times V_{\alpha_2}\times\dots\times V_{\alpha_k}\times \prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}} X_\alpha \subseteq \mathcal{U}$$

$x^0\in \mathcal{U}\in \mathcal{B}_t(x^0)$

$\Rightarrow \chi(x^0,X)\leq m \Rightarrow \chi(X)\leq m$. □

<u>Тв. 109</u> Нека $(X,\tau)=\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ и $\forall\alpha\in A,\ M_\alpha\subseteq X_\alpha$, а $M=\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$.
Тогава τ_M (инд. от τ топология в M) съвпада с
$$(M,\tau_M)=\prod_{\alpha\in A}(M_\alpha,(\tau_\alpha)_{M_\alpha})$$

<u>Д-во</u> $\forall\alpha\in A,\ p_\alpha|_{(M,\tau_M)}:(M,\tau_M)\to (M_\alpha,(\tau_\alpha)|_{M_\alpha})$ е непр., защото p_α е непрекъснато. Понеже τ_Π е най-слабата топология, в която те са непр., имаме $\tau_\Pi\subseteq\tau_M$.

Нека $\mathcal{U}'\in\tau_M$. Тогава $\exists\mathcal{U}\in\tau: \mathcal{U}'=\mathcal{U}\cap M$. $\exists \mathcal{B}^{\mathcal{U}}_t\subseteq\mathcal{B}_t: \mathcal{U}=\bigcup\mathcal{B}^{\mathcal{U}}_t$.

$\Rightarrow \mathcal{U}'=\bigcup\{V\cap M\mid V\in\mathcal{B}^{\mathcal{U}}_t\}$.

Нека $V\in\mathcal{B}^{\mathcal{U}}_t$. Тогава $V=V_{\alpha_0}\times\dots\times V_{\alpha_k}\times\prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}} X_\alpha$

$$\Rightarrow V\cap M=V\cap\prod_{\alpha\in A}M_\alpha=(V\cap M_{\alpha_1})\times\dots\times(V\cap M_{\alpha_k})\times\prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}}X_\alpha \in\tau_\Pi.$$ □

<u>Опр.</u> Едно непр. изображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{O})$ се нарича <u>отворено</u>, ако $\forall\mathcal{U}\in\tau,\ f(\mathcal{U})\in\mathcal{O}$.

Аналогично, едно непр. изобр. се нарича <u>затворено</u>, ако

$\forall F \underset{cl}{\subseteq} X,\ f(F) \underset{cl}{\subseteq} Y$

Тв. 110 Едно непр. изобр. $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{O})$ е отв. $\iff \exists$ база $\mathcal{B}$ на X:

$f(U)\in\mathcal{O}\ \forall U\in\mathcal{B}$.

Д-во (⇒) $\mathcal{B}:=\tau$

(⇐) Нека $U\in\tau$. $\exists\, \mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}: U=\bigcup \mathcal{B}_U$. Тогава

$$f(U) = f\left(\bigcup\{V \mid V\in\mathcal{B}_U\}\right) = \bigcup\{f(V)\mid V\in\mathcal{B}_U\}$$

□

Тв. 111 Нека $(X,\tau)=\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha)$. Тогава, $\forall \alpha_0\in A$, $p_{\alpha_0}:(X,\tau)\to(X_{\alpha_0},\tau_{\alpha_0})$ е отв.

Д-во Нека $U\in\mathcal{B}_\tau$. Тогава $U = U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\dots\times U_{\alpha_k}\times\prod_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}} X_\alpha$.

Нека $\alpha_0\in A$. Тогава $p_{\alpha_0}(U) = \begin{cases} U_{\alpha_0}, \text{ ако } \alpha\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} & \in\tau_{\alpha_0} \\ X_{\alpha_0}, \text{ ако } \alpha\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} & \in\tau_{\alpha_0} \end{cases}$

⇒ p_{α_0} е отворено.

□

Пр. 112 $\pi_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е отворено, но не е затворено.

$F=\{(x,y)\mid xy=1\}$

$p_\alpha(F)=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ не е затв.

Опр. Едно изобр. $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{O})$ се нарича **факторно**, ако $\forall U\in Y$, $U\underset{op}{\subseteq}Y \iff f^{-1}(U)\underset{op}{\subseteq}X$

Тв. 113 $f:(X,\tau)\to(Y,\mathcal{O})$ е факторно $\iff \forall F\subseteq Y$, $F\underset{cl}{\subseteq}Y \iff f^{-1}(F)\underset{cl}{\subseteq}X$

Д-во (⇒) Нека $F\underset{cl}{\subseteq}Y$. Тогава $f^{-1}(F)\underset{cl}{\subseteq}X$, защото f е непрекъснато

(⇐) Нека $f^{-1}(F)$ е затв. Тогава $f^{-1}(F)=f^{-1}(Y\setminus(Y\setminus F))=X\setminus f^{-1}(Y\setminus F)$

⇒ $Y\setminus F\underset{cl}{\subseteq}Y$ ⇒ $F\underset{cl}{\subseteq}Y$.

□

Тв. 114 Ако $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ е отв. (съотв. затв.) сюрекция, то f е факторно изобр.

Д-во Нека f е отворена сюрекция, $U\subseteq Y$ и $f^{-1}(U)\underset{op}{\subseteq}X$. Тогава

$U=f(f^{-1}(U))\underset{op}{\subseteq}Y$. Аналог. за затв. $\square$

Сл. 115 Всяка проекция е факторна

Тв. 116 Ако $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ е факторно и $g:(Y,\theta)\to(Z,\Theta)$, то g е непр $\Leftrightarrow$ $g\circ f$ е непр.

Д-во ($\Rightarrow$) g - непр. $\Rightarrow$ $g\circ f$ е непр.

($\Leftarrow$) Нека $g\circ f$ е непр и $U\in\Theta$. Тогава

$$\tau\ni(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))\Rightarrow g^{-1}(U)\underset{op}{\subseteq}Y$$ $\square$

Тв. 117 Нека (Y,τ) е произв. на $\prod_{\alpha\in A}(Y_\alpha,\tau_\alpha)$ и $p_\alpha:Y\to Y_\alpha$ - проекция и $f:(X,\theta)\to(Y,\tau)$.

изобр. f е непр. $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in A$, изобр. $p_\alpha\circ f$ е непр.

Д-во τ е породена в Y от коорд. изобр. $\{p_\alpha \mid \alpha\in A\}$. $\square$

Тв. 118 Нека $(X,\tau)=\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha)$, $(Y,\Theta)=\prod_{\alpha\in A}(Y_\alpha,\theta_\alpha)$ и $f_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha$, $\forall\alpha\in A$.

Полагаме $f:X\to Y$, $f((x_\alpha)_{\alpha\in A}):=(f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A}$. Тогава f е непр. $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in A$, f_α е непр. Пишем $f:=\prod_{\alpha\in A}f_\alpha$.

Д-во Нека $p_\alpha^X:X\to X_\alpha$ и $p_\alpha^Y:Y\to Y_\alpha$ са проекциите

Тогава $\underbrace{p_\alpha^Y\circ f=f_\alpha\circ p_\alpha^X}_{(1)}$. Наистина, $\forall x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}\in X$, $p_\alpha^Y(f(x))=p_\alpha^Y((f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A})=$

$=f_\alpha(x_\alpha)=f_\alpha(p_\alpha(x))$.

($\Rightarrow$) Нека f е непр.

$\Rightarrow p_\alpha^Y\circ f$ е непр. $\forall\alpha\in A$. От (1) следва, че $f_\alpha\circ p_\alpha^X$ е непр. $\forall\alpha\in A$.

Тъй като p_α^X е факторно, то f_α е непр. $\forall \alpha \in A$

($\Leftarrow$) Нека f_α е непр., $\forall \alpha \in A$.

$\Rightarrow f_\alpha \circ p_\alpha^X$ е непр. $\forall \alpha \in A$. От (1) сл., че $p_\alpha \circ f$ е непр. $\forall \alpha$.

$\Rightarrow f$ е непр. $\square$

<u>Тв.119</u> Нека $(Y, O) = \prod_{\alpha \in A} (Y_\alpha, O_\alpha)$ и $f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, O_\alpha)$. Полагаме

$f : X \to Y$, $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$.

Тогава f е непр. $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A$, f_α е непр.

f се нарича <u>диагонално произведение на $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$</u> и се бележи с

$\underset{\alpha \in A}{\Delta} f_\alpha$.

<u>Д-во</u> Нека $p_\alpha : Y \to Y_\alpha$ са пр. От деф. на f следва, че

$$p_\alpha \circ f = f_\alpha, \forall \alpha \in A \qquad (2)$$

($\Rightarrow$) Нека f е непр. Тогава $p_\alpha \circ f$ е непр. $\forall \alpha \in A$, т.к. (2), f_α е непр, $\forall \alpha$.

($\Leftarrow$) Нека f_α е непр. $\forall \alpha \in A$. От (2) следва, че $p_\alpha \circ f$ е непр., $\forall \alpha \in A$.

$\Rightarrow$ От Тв.116, f е непр. $\square$

<u>Опр.</u> Нека (X, τ) е т.п. и $f, g : X \to \mathbb{R}$. Полагаме

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \ g(x) \neq 0$$
$$|f|(x) := |f(x)|$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\max\{f, g\} := \max\{f(x), g(x)\}$$
$$\min\{f, g\} := \min\{f(x), g(x)\}$$

Ако f, g са непр, то горните функции също.

Д-во Нека $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Тогава φ е непр.

Тогава $f + g = \varphi \circ (f \Delta g)$. Наистина,

$$\underbrace{\overset{\text{непр.}}{\varphi} \circ \underbrace{(f \Delta g)}_{\text{непр.}}}(x) = \varphi((f \Delta g)(x)) = \varphi(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

$\Rightarrow \varphi \circ (f \Delta g) = f + g$ е непрекъсната

Аналогично и за останалите

$\square$

10.12.2019

Тв. 120 Нека $(X,\tau) = \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha)$, $M_\alpha \subseteq X_\alpha, \forall \alpha\in A$ и $M = \prod_{\alpha\in A} M_\alpha$.

Тогава

(а) $\overline{M}^X = \prod_{\alpha\in A} \overline{M_\alpha}^{X_\alpha}$

(б) $M \underset{\text{гл}}{\subseteq} X \iff \forall \alpha\in A,\ M_\alpha \underset{\text{гл}}{\subseteq} X_\alpha$

(в) $\overline{M}^X = X \iff \forall \alpha\in A,\ \overline{M}_\alpha^{X_\alpha} = X_\alpha$

Д-во (а) $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \overline{M}^X \iff \forall U \in \mathcal{B} : x\in U$, е изп., че $U\cap M \neq \emptyset$

$\iff \forall U = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha,\ U_\alpha \underset{\text{отв}}{\subseteq} X_\alpha,\ U_\alpha \neq X_\alpha$ само за краен брой $\alpha\in A$,

$x\in U$, $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \cap \prod_{\alpha\in A} M_\alpha \neq \emptyset$,

$\prod_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap M_\alpha) \neq \emptyset$,

$\forall \alpha\in A,\ U_\alpha \cap M_\alpha \neq \emptyset$,

$\iff \forall \alpha\in A$ и $\forall$ ок. $U_\alpha \ni x_\alpha$, $U_{\alpha}{x_\alpha} \cap M_\alpha \neq \emptyset$

$\iff \forall \alpha\in A,\ x_\alpha \in \overline{M}_\alpha^{X_\alpha} \iff x \in \prod_{\alpha\in A} \overline{M}_\alpha^{X_\alpha}$

(б) $(\Rightarrow)$ Нека $M = \overline{M}^X \underset{(а)}{=} \prod_{\alpha\in A} \overline{M}_\alpha^{X_\alpha}$
$$\| $$
$$\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$$

$(\Leftarrow)$ Нека $M_\alpha = \overline{M}_\alpha^{X_\alpha} \Rightarrow M = \prod_{\alpha\in A} M_\alpha = \prod_{\alpha\in A} \overline{M_\alpha}^{X_\alpha} \underset{(а)}{=} \overline{M}^X \Rightarrow M \underset{\text{гл}}{\subseteq} X$

(в) $(\Rightarrow)$

Нека $\overline{M}^X = X$. Тогава $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \overline{M}^X \underset{(а)}{=} \prod_{\alpha\in A} \overline{M}_\alpha^{X_\alpha}$

$\Rightarrow X_\alpha = \overline{M}_\alpha^{X_\alpha},\ \forall \alpha\in A.$

(<=) Нека $\forall \alpha \in A$, $\overline{M_\alpha}^{X_\alpha} = X_\alpha \Rightarrow \overline{M}^X = \prod_{\alpha\in A} \overline{M_\alpha}^{X_\alpha} = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha = X_\alpha$ □

14. Аксиоми за отделимост T_0, T_1 и T_2

<u>Опр</u> Едно т.п. (X,τ) се нарича <u>T_0-пространство</u>, ако от $x,y\in X$ и $x\neq y \Rightarrow \exists U\in\tau : |U\cap\{x,y\}| = 1$ (<u>аксиома на Колмогоров</u>)

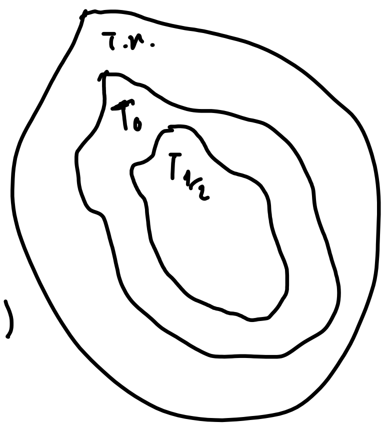
<u>Пр.121</u> Ако $|X|>1$ и X е антидискретно, то X не е T_0-пр-во.

<u>Опр.</u> (X,τ) се нарича <u>$T_{1/2}$-пространство</u>, ако $\forall x\in X$, $\{x\}$ е или отворено, или затворено.

<u>Тв.122</u> Всяко $T_{1/2}$-пространство е T_0-пространство

<u>Д-во</u> Нека $x,y\in X$, $x\neq y$. Ако $\{x\}\in\tau$, то от $U=\{x\} \Rightarrow |U\cap\{x,y\}|=1$.

Ако $\{x\} \subseteq_{cl} X$, то $U := X\setminus\{x\} \Rightarrow U\in\tau$ и $|U\cap\{x,y\}|=1$ □



<u>Пр.123</u> Нека $X=\{0,1,2\}$, $\tau := \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2\}\}$.

X е T_0-пространство и X не е $T_{1/2}$-пр-во, защото $\{1\}$ не е нито отв., нито затв.

<u>Т-ма 124</u> Нека (X,τ) е T_0-пр-во. Тогава $|X|\leq 2^{w(X)}$

<u>Д-во</u> $\exists$ база $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| = w(X)$.

$\forall x\in X$, полагаме $\varphi(x) := \{U\in\mathcal{B} \mid x\in U\}$.

Получаваме функция $\varphi: X\to\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Ще докажем, че φ е инекция.

Нека $x\neq y$ $(x,y\in X)$. X е $T_0 \Rightarrow \exists U\in\tau : |U\cap\{x,y\}|=1$.

Нека, например, $x\in U$, $y\notin U$.

$\mathcal{B}$ е база и след. $\exists V\in\mathcal{B} : x\in V\subseteq U$. Тогава $y\notin V$.

след. $V\in\varphi(x)\setminus\varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)\neq\varphi(y)$

$\Rightarrow \varphi$ е инекция

$\Rightarrow |X| = |\varphi(X)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|} = 2^{w(X)}$. $\square$

Заб. Оценката $|X| \leq 2^{w(X)}$ е точна.

Пр. 125 Полагаме $X := \mathbb{R}$. Тогава $w(X) = \aleph_0$, а $|X| = 2^{\aleph_0}$.

X е T_0-пр-во.

Опр. (X,τ) се нарича T_1-пр-во или пространство на Фреше ако $\forall x \in X$, $\{x\}$ е затворено.

Факт 126 Всяко T_1-пространство е $T_{1/2}$-пространство.

Пр. 127 (Пространство на Серпински)

$X := \{0,1\}$, $\tau := \{\emptyset, X, \{1\}\}$.

(X,τ) е $T_{1/2}$-пр-во, но не е T_1-пр-во, защото $\{1\}$ не е затв.

$\{1\}$ не съдържа 0, но не $\exists$ ок. на 1, която да не съдържа 0.

Тв. 128 (X,τ) е T_1-пр-во $\Leftrightarrow \forall x,y \in X : x \neq y \Rightarrow \exists U \in \tau : x \in U$, а $y \notin U$.

Д-во

($\Leftarrow$) Нека $x \in X$. Ще докажем, че $\{x\} \underset{cl}{\subseteq} X$, т.е. $X \setminus \{x\} \underset{op}{\subseteq} X$.

Нека $y \in X \setminus \{x\}$. Тогава $\exists$ ок. U на y : $x \notin U$

$\Rightarrow U \subseteq X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\}$ е отв. $\Rightarrow \{x\}$ е затв.

($\Leftarrow$) Нека $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow y \in X \setminus \{x\} \in \tau$ $\square$

Тв. 129 (X,τ) е T_1-пр-во $\Leftrightarrow \forall x \in X$, $\{x\} = \bigcap \{U \in \tau \mid x \in U\}$

Д-во ($\Rightarrow$) X е T_1-пр-во. Нека $x \in X$. Тогава $\forall y \neq x$, $\exists$ ок. $U_y : x \in U_y$ и $y \notin U_y$. Тогава $\{x\} = \bigcap \{U_y \mid y \neq x\} \subseteq \bigcap \{U \in \tau \mid x \in U\} \subseteq \{x\}$

($\Leftarrow$) Нека $x \neq y$. Тогава $\exists U : x \in U$ и $y \notin U$. От Тв. 128 $\Rightarrow X$ е T_1. $\square$

Опр. (X,τ) се нарича T_2-пр-во или Хаусдорфово пр-во, ако от $x, y \in X$ и от $x \neq y \Rightarrow \exists U, V \in \tau : x \in U$, $y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Тв. 130 Всяко T_2-пр. е T_1-пр-во.

Пр. 131 Нека X е безкр. мн-во с кофинитната топология.

$\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \underset{\text{крайно}}{F \subseteq X}\}$ - затв. мн-ва

$\Rightarrow X$ е T_1 пр-во

Всеки две непразни отв. подмн. $\mathcal{U}$ и V на X имат непразно сечение.

$\Rightarrow X$ не е T_2 пр-во.

Това пространство е анти-Хаусдорфово.

Т-ма 132 Нека $f, g : (X, \tau) \to (Y, \mathcal{O})$ са две непр. изобр. и $(Y, \mathcal{O})$ е T_2.

Тогава $F := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \underset{cl}{\subseteq} X$.

Д-во Ще докажем, че $X \setminus F \in \tau$.

Нека $x \in X \setminus F$. Според опр. за F, $f(x) \neq g(x)$. След. $\exists\, \mathcal{U}, V \in \mathcal{O}$: $f(x) \in \mathcal{U}$ и $g(x) \in V$ и $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

Полагаме $W := f^{-1}(\mathcal{U}) \cap g^{-1}(V)$. Тогава $W \in \tau$ и освен това $x \in W$.

Ще док., че $W \subseteq X \setminus F$.

Нека $y \in W$. Тогава $f(y) \in \mathcal{U}$ и $g(y) \in V$. Но $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$ и след. $f(y) \neq g(y)$, т.е. $y \notin F$, т.е. $y \in X \setminus F$.

$\square$

Сл. 133 Нека $f, g : (X, \tau) \to (Y, \mathcal{O})$ са две непр. изобр., $(Y, \mathcal{O})$ е T_2 и A е гъсто в X и $f_{|A} = g_{|A}$. Тогава $f \equiv g$.

Д-во Мн. $\mathcal{F} := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \supseteq A$. След. $X = \bar{A} \subseteq F \subseteq X \Rightarrow F = X$.

$\square$

Опр. Нека (X, τ) е т.п. Гъстота на (X, τ) наричаме кард. число $d(X) = d(X, \tau) := \min\{|A| \mid A \text{ е гъсто в } X\}$.

Т-ма 134 Ако (X, τ) е T_2-пр-во, то $|X| \leq 2^{(2^{d(X)})}$

Д-во $\exists\, A \subseteq X : \bar{A} = X$ и $|A| = d(X)$.

$\forall x \in X$, полагаме $\varphi(x) := \{\mathcal{U} \cap A \mid \mathcal{U} \in \tau, x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

След. $\varphi: X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Ще докажем, че φ е инекция. Нека $x \neq y$.
X е T_2-пр.во и след. $\exists U, V \in \tau: x \in U, y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

$\Rightarrow U \cap A \in \varphi(x) \setminus \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$
$V \cap A \in \varphi(y) \setminus \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi$ е инекция

$\Rightarrow |X| = |\varphi(X)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| = 2^{2^{|A|}} = 2^{2^{d(X)}}$ $\square$

<u>Заб.</u> Оценката $|X| \leq 2^{(2^{d(X)})}$ е точна.

<u>Тв. 135</u> (X, τ) е T_2-пр.во $\Leftrightarrow \forall x \in X, \{x\} = \bigcap \{\overline{U} \mid U \in \tau, x \in U\}$.

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$ X е T_2, $x \in X$. Нека $y \neq x$. След $\exists U, V \in \tau: x \in U, y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

$\Rightarrow y \notin \overline{U} \Rightarrow \{x\} = \bigcap \{\overline{U} \mid U \in \tau, x \in U\}$ $\square$

$(\Leftarrow)$ Нека $x \neq y \Rightarrow \exists U \in \tau: x \in U$ и $y \notin \overline{U}$. Полагаме $V := X \setminus \overline{U}$. Тогава $y \in V, V \in \tau$ и $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Аксиоми за отделимост 3 и $3\frac{1}{2}$

<u>Опр.</u> (X, τ) се нарича <u>регулярно пространство</u>, ако от $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$ сл., че $\exists U, V \in \tau: x \in U, F \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$.

(X, τ) се нарича <u>T_3-пр-во</u>, ако то е регулярно T_0-пр-во.

<u>Пр. 136</u> Всяко антидискретно пространство е регулярно, но не T_0

<u>Тв. 137</u> Всяко T_3-пр.во е T_2 пр-во

<u>Д-во</u> Нека $x, y \in X, x \neq y$. $\exists U \in \tau: |U \cap \{x, y\}| = 1$. Нека, например, $x \in U$ и $y \notin U$.
Тогава полагаме $F := X \setminus U$.

$\Rightarrow F$ е затворено и $y \in F$, а $x \notin F$.

$\Rightarrow \exists V, W \in \tau: x \in V, F \subseteq W$ и $V \cap W = \emptyset$.

Тогава $y \in W$ и V и W са дизюнктни.

Аналогично покриваме случая $x \notin U$ и $y \in U$. $\square$

<u>Пр. 138</u> Полагаме $X = \mathbb{R}$. $\forall x \neq 0$, полагаме $\mathcal{B}(x) := \{(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$.
При $x = 0$, пол. $\mathcal{B}(0) := \{(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \setminus Z, i \in \mathbb{N}\}$, където $Z := \{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\{B(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ удовл. (BN1) - (BN3) и следователно поражда топология τ в X.

(X,τ) е T_2 - пространство.

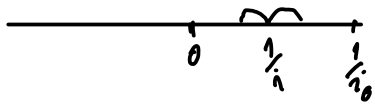
Множ. Z е затворено и $0\notin Z$. Нека U е ок. на 0 и $\overbrace{V \text{ е ок. на } Z}^{V\in\tau \text{ и } Z\subseteq V}$.

Ще докажем, че $U\cap V\neq\emptyset$.

$\exists\, i_0\in\mathbb{N}$, то $\left(-\frac{1}{i_0},\frac{1}{i_0}\right)\setminus Z\subseteq U$.

Нека $i>i_0$. Тогава $\frac{1}{i}\in\left(-\frac{1}{i_0},\frac{1}{i_0}\right)\cap Z$. $\frac{1}{i}\in Z\subseteq V\Rightarrow\exists\, j>\max\left\{i,\frac{i\,i_0}{i-i_0}\right\}$

$\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{j},\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)\subseteq V$.



Тв. 139 Нека P е предбаза на (X,τ).

Тогава (X,τ) е регулярно $\iff\forall x\in X$ и $\forall U\in P: x\in U\ \exists V\in\tau: x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

Д-во ($\Rightarrow$) X - регулярно. Нека $x\in X$ и $U\in P$. Полагаме $F=X\setminus U$. Тогава $F\underset{cl}{\subseteq}X$ и $x\notin F$. Значи $\exists V,W\in\tau: x\in V,\ F\subseteq W$ и $V\cap W=\emptyset$.

$X\setminus U\subseteq W\Rightarrow U\supseteq X\setminus W$. $\overline{V}\cap W=\emptyset$.

$\Rightarrow\overline{V}\subseteq X\setminus W\subseteq U$.

След. $x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

($\Leftarrow$) Нека $x\in X$, $F\underset{cl}{\subseteq}X$ и $x\in F$. След. $x\in X\setminus F\in\tau$.

P е предбаза на $(X,\tau)\Rightarrow\exists U_1,\dots,U_k\in P: x\in\bigcap_{i=1}^{k}U_i\subseteq X\setminus F$

$\forall i\in\{1,\dots,k\},\ \exists V_i\in\tau: x\in V_i\subseteq\overline{V_i}\subseteq U_i$.

Полагаме $V=\bigcap_{i=1}^{k}V_i$ и $W=X\setminus\bigcap_{i=1}^{k}\overline{V_i}\Rightarrow F\subseteq X\setminus\bigcap_{i=1}^{k}U_i\subseteq X\setminus\bigcap_{i=1}^{k}\overline{V_i}=W$ и $V\cap W=\emptyset$.

Сл. 140 (X,τ) е рег. $\iff\forall x\in X$ и $\forall$ ок. U на $x\ \exists V\in\tau: x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$

Тв. 141 (X,τ) е т.п., A - гъсто в X, U - отв.

Тогава $\overline{U\cap A}=\overline{U}$.

Д-во Очевидно $\overline{U\cap A}\subseteq\overline{U}$. Ще док., че $\overline{U}\subseteq\overline{U\cap A}$.

Нека $x\in\overline{U}$ и V е ок. на x. Ще док., че $V\cap(U\cap A)\neq\emptyset$

Имаме, че $V\cap U\neq\emptyset$ $(x\in\overline{U})$ $\exists y\in V\cap U$, $y\in X=\overline{A}\Rightarrow(V\cap U)\cap A\neq\emptyset$

$\Rightarrow V\cap(U\cap A)\neq\emptyset\Rightarrow x\in U\cap A$.

__Т-ма 142__ Нека (X,τ) е рег. Тогава $w(X) \leq 2^{2^{d(X)}}$.

__Д-во__ $\exists A \subseteq X : \bar{A} = X$ и $|A| = d(X)$.

Полагаме $\mathcal{B} := \{ \operatorname{Int}(\bar{B}) \mid B \subseteq A \}$. Тогава $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{d(X)}$.

Ще покажем, че $\mathcal{B}$ е база на (X,τ).

Нека $x \in X$ и $U : x \in U \in \tau$. Тъй като X е рег. $\Rightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

Тогава $V \subseteq \operatorname{Int} \bar{V}$, а $\bar{V} = \operatorname{Int}(\overline{\underbrace{V \cap A}_{B}}) \in \mathcal{B}$.

$\operatorname{Int}(\bar{V}) \subseteq \bar{V} \subseteq U \Rightarrow x \in \operatorname{Int} \bar{B} = \operatorname{Int} \bar{V} \subseteq U$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ е база

$\Rightarrow w(X) \leq 2^{|\mathcal{B}|} \leq 2^{2^{d(X)}}$

__Опр.__ (X,τ) се нарича __напълно регулярно пространство__, ако

$x \in X, F \subseteq X$ и $x \notin F \Rightarrow \exists$ непр. $f : (X,\tau) \to ([0,1], \mathcal{O})$ ← стандартна топология

$f(F) = 0$ и $f(x) = 1$

(X,τ) се нарича __$T_{3\frac{1}{2}}$-пр-во__ или __тихоново пространство__, ако то е напълно регул. T_0-пр-во.

__Тв. 143__ Всяко напълно рег. пр-во е рег.

__Д-во__

Нека $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$. Тогава $\exists$ непр. $f : X \to I : f(x) = 1$ и $f(F) = 0$.

Полагаме $U = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, 1])$, $V = f^{-1}([0, \tfrac{1}{2}))$.

Тогава $x \in U$, $F \subseteq V$, $U, V \in \tau$ и $U \cap V = \emptyset$.

$\Rightarrow (X,\tau)$ е рег. □

17.12.2019

Зад. $\exists T_1$-пр-во, което не е $T_{3\frac{1}{2}}$

Факт 144 Нека (X, τ) е т.п. Тогава следните са еквив.

(а) X е напълно регулярно

(б) $\forall x \in X$ и $\forall F \underset{cl}{\subseteq} X : x \notin F$, $\exists$ непр. $g : X \to I$: $g(x) = 0$, $g(F) = 1$

(в) $\forall x \in X$ и $\forall F \underset{cl}{\subseteq} X : x \notin F$, $\exists$ непр. $h : X \to I : h(F) = 0$, $h(x) > 0$

Д-во (а) $\Rightarrow$ (б) $x \notin F \underset{cl}{\subseteq} X$. $\exists$ непр. $X \to I$: $f(x) = 1$ и $f(F) = 0$. Полагаме $g(x) = 1 - f(x)$
$\Rightarrow g(x)$ е непр., $g : X \to I$, $g(x) = 0$ и $g(F) = 1$.

(б) $\Rightarrow$ (а) Аналогично

(а) $\Rightarrow$ (в) Очевидно

(в) $\Rightarrow$ (а) $x_0 \notin F$, $\exists h : X \to I : h(F) = 0$ и $h(x_0) > 0$. Полагаме $f = \frac{1}{h(x_0)} \max(0, h(x))$ $\square$

Опр. (X, τ) - т.п., $A \subseteq X$. A се нарича нулево множество, ако $\exists$ непр. $f : X \to I$, такова че $A = f^{-1}(0)$. A се нарича конулево, ако $X \setminus A$ е нулево, т.е. ако $\exists$ непр. $f : X \to I : A = f^{-1}((0, 1])$.

$Coz(X) :=$ {всички конулеви множества на X}

Тв. 145 (X, τ) е напълно регулярно $\Leftrightarrow$ то има база, състояща се от конулеви множества.

Д-во ($\Rightarrow$) Нека $x \in X$, $U \in \tau$, $x \in U$.

Полагаме $F := X \setminus U \Rightarrow F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$. След. същ. непр. $f : X \to I$: $f(x) = 1$ и $f(F) = 0$. Полагаме $V = f^{-1}((0, 1]) \Rightarrow F \cap V = \emptyset$, $x \in V$.

След. $V \subseteq U$ и $V \in Coz(X)$.

$\Rightarrow Coz(X)$ е база.

($\Leftarrow$) $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$, $x \notin F$. Полагаме $U = X \setminus F \Rightarrow x \in U \in \tau$. $Coz(X)$ е база
$\Rightarrow \exists V \in Coz(X)$: $x \in V \subseteq U$.

$\exists$ непр. $f: X \to I: V = f^{-1}((0,1])$. Тогава $f(x) > 0$, а $f(F) = 0$.

От факт 144 $\Rightarrow$ X е напълно регулярно.

Тв. 146 Нека P е предбаза на (X, τ). Тогава X е напълно регулярно $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, \forall U \in P: x \in U$ $\exists$ непр. $f: X \to I$: $f(x) = 1$, $f(X \setminus U) = 0$

Д-во $(\Rightarrow)$ Нека $x \in X$, $U \in P$ и $x \in U$. Тогава $F := X \setminus U \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$.

След. $\exists$ непр. $f: X \to I$: $f(x) = 1$, $f(F) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Нека $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$. Полагаме $V := X \setminus F \Rightarrow x \in V \in \tau$. P е предбаза и след. $\exists U_1, \dots, U_k \in P: x \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i \subseteq V$.

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, k$ $\exists$ непр. $f_i: X \to I$: $f_i(x) = 1$ и $f_i(X \setminus U_i) = 0$.

Полагаме $f = \min\{f_1, \dots, f_k\}$. Тогава $f: X \to I$ е непрекъсната, а $f(x) = 1$

Ще докажем, че $f(F) = 0$. Имаме, че $F = X \setminus V \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{i=1}^{k} X \setminus U_i$.

След. $\forall y \in F$ $\exists i = 1, \dots, k$: $y \in X \setminus U_i$.

$\Rightarrow f_i(y) = 0 \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow f(F) = 0$ $\square$

16. T_4 пространства

Опр. Едно т.п. (X, τ) се нарича <u>нормално</u>, ако от $F, G \underset{cl}{\subseteq} X$ и $F \cap G = \emptyset \Rightarrow \exists U, V \in \tau: F \subseteq U$ и $G \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$.

(X, τ) се нарича <u>T_4-пространство</u>, ако то е нормално T_1-пространство.

Факт 147 Всяко T_4-пространство е T_3-пространство.

Пр. 148

Нека $S = \{0, 1\}$ е правата на Серпински, т.е. $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. Тогава S е нормално T_0-пространство, но не T_1-пространство.

Тв. 149 („Малка лема" на Урисон) (X, τ) е нормално $\Leftrightarrow$ $\forall F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $\forall U \in \tau: F \subseteq U$, $\exists V \in \tau: F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Д-во $(\Rightarrow)$ Нека $F \underset{cl}{\subseteq} X$, $U \in \tau$ и $F \subseteq U$. Полагаме $G := X \setminus U$. Тогава $G \underset{cl}{\subseteq} X$ и $F \cap G = \emptyset$.

X е нормално $\Rightarrow \exists V, W \in \tau : F \subseteq V,\ G \subseteq W$ и $V \cap W = \emptyset$.

$V \cap W = \emptyset \Rightarrow \overline{V} \cap W = \emptyset \Rightarrow F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus G \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Нека $F, G \underset{cl}{\subseteq} X$ и $F \cap G = \emptyset$. Полагаме $U := X \setminus G \Rightarrow U \in \tau$ и $F \subseteq U$.

От даденото следва, че $\exists V \in \tau : F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Полагаме $W := X \setminus \overline{V}$. Тогава $W \in \tau$ и $V \cap W$.

Ще покажем, че $G \subseteq W$. Имаме, че $G = X \setminus U \subseteq X \setminus \overline{V} = W$. $\square$

<u>Т-ма 150</u> („Голяма лема" на Урисон)

Едно т.п. (X, τ) е нормално $\Leftrightarrow \forall F, G \underset{cl}{\subseteq} X,\ F \cap G = \emptyset,\ \exists$ непр. $f : X \to I : f(F) = 0$ и $f(G) = 1$.

<u>Д-во</u> Нека $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. $\forall r \in \mathbb{Q}_1$ ще построим $V_r \in \tau$:

$V_1 = X \setminus G,\ F \subseteq V_0$ и за $r < r' \Rightarrow \overline{V}_r \subseteq V_{r'}$.

Полагаме $r_1 := 1,\ r_2 := 0$ и $r_3, r_4, \ldots$ да бъде номерация на $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Полагаме $V_1 = V_{r_1} := X \setminus G$. Тогава $V_1 \in \tau$ и $F \subseteq V_1$. От Тв. 149 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V \in \tau : F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_1$. Полагаме $V_0 = V_{r_2} := V$. Тогава $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

След. е изпълнено (1_n). Ако $i, j = 1, \ldots, k$ и $r_i < r_j$, то $\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}$ за $k = 2$.

Да доп., че (1_n) е изп. Ще покажем, че (1_{n+1}) е изп.

$r_{n+1} \in (0,1)$, т.е. $0 = r_2 < r_{n+1} < r_1 = 1$. Нека r_k е най-голямото от числата $\{r_1, \ldots, r_n\}$, което стои вляво от r_{n+1}, а r_ℓ е най-малкото от числата $\{r_1, \ldots, r_k\}$, което стои вдясно от r_{n+1}.

Тогава $r_k < r_\ell$ и след. $\overline{V}_{r_k} \subseteq V_{r_\ell}$. От Тв. 149 $\Rightarrow \exists V \in \tau : \overline{V}_{r_k} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{r_\ell}$

Полагаме $V_{r_{n+1}} := V$.

Ако $r_i < r_{n+1}$, то $r_i \leq r_k$ и $V_{r_i} \subseteq V_{r_k} \subseteq \overline{V}_{r_k} \subseteq V_{r_{n+1}} = V$

Ако $r_i > r_{n+1}$, то $r_i \geq r_\ell$ и $V_{r_{n+1}} = V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{r_\ell} \subseteq V_{r_i}$

$V_1 = X \setminus G,\ F \subseteq V_0$, т.е. $r < r' \Rightarrow \overline{V}_r \subseteq V_{r'}$ $(r \in \mathbb{Q}_1)$

Полагаме $\forall x \in X$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin V_1 \\ \inf\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid x \in V_r\}, & x \in V_1 \end{cases}$

$V_1 = X \setminus G$; $X \setminus V_1 = G$; $x \in V_1 \Leftrightarrow x \in X \setminus V_1 = G$.

След. $f(G) = 1$

$F \subseteq V_0 \Rightarrow f(F) = 0$

$\operatorname{Im} f \subseteq [0,1]$

Остава да се докаже, че f е непр.

Фамилията $\{[0,a), (b,1] \mid 0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1\}$ е предбаза на $[0,1] = I$

(ако $b < a$, то $[0,a) \cap (b,1] = (b,a)$).

Дост. е да покажем, че $\forall U \in P$, $f^{-1}(U) \in \tau$. Нека $0 < a \le 1$. Ще пок., че

$f(x) < a \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}_1 : r < a$ и $x \in V_r$.

($\Rightarrow$) Нека $f(x) < a$. Доп., че $\forall r \in \mathbb{Q} : r < a$, $x \notin V_r$. Тогава за $x \in V_r$ ще следва, че $r \ge a \Rightarrow f(x) \ge a$ – противоречие. Следователно $\exists r < a : x \in V_r$.

($\Leftarrow$) от деф.

$f^{-1}([0,a)) = \{x \in X \mid f(x) < a\} = \cup\{V_r \mid r < a\} \in \tau$

Нека $0 \le b < 1$. Ще докажем, че $f(x) > b \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}_1$, т.е. $r > b$ и $x \notin V_r$.

($\Rightarrow$) Доп., че $\forall r \in \mathbb{Q}_1 : r > b$, $x \in V_r$. Тъй като $b = \inf\{r \in \mathbb{Q}_1 \; b < r\}$, то $f(x) \le b$ – противоречие. След. $\exists r \in \mathbb{Q}_1 : r > b$ и $x \notin V_r$.

($\Leftarrow$) Ако $r' < r$, то $\overline{V_{r'}} \subseteq V_r$, $x \notin V_r$ и след. $x \notin V_{r'}$.

След. ако $x \in V_{r''}$, то $r'' > r \Rightarrow f(x) \ge r > b$

Ще докажем, че $(\exists r \in \mathbb{Q}_1, r > b$ и $x \notin V_r) \Leftrightarrow (\exists r' \in \mathbb{Q}_1 : r' > b$ и $x \notin \overline{V}_{r'})$.

($\Rightarrow$) Нека $\exists r \in \mathbb{Q}_1 : r > b$ и $x \notin V_r$. Тогава $\exists r' \in \mathbb{Q}_1 : b < r' < r$.

След. $\overline{V_{r'}} \subseteq V_r$. Тогава $x \notin \overline{V}_{r'}$.

(⇐) Ясно

$f^{-1}((b,1]) = \{x \in X \mid f(x) > b\} = \bigcup\{X \setminus \overline{V_r} \mid r \in \mathbb{Q}, r > b\} \in \tau$

(⇐ на т-мата) Нека $F, G \underset{cl}{\subseteq} X$ и $F \cap G = \emptyset$. $\exists$ непр. $f: X \to I$: $f(F) = 0$ и $f(G) = 1$.

Полагаме $\mathcal{U} = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ и $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \Rightarrow \mathcal{U}, V \in \tau$, $F \subseteq \mathcal{U}$, $G \subseteq V$ и $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$. □

<u>Сл. 151</u> Всяко нормално T_4 пространство е $T_{3\frac{1}{2}}$

<u>Лема 152</u> (лема на Джоунс) Нека (X, τ) е т.п. с $d(X) = \aleph_0$ и $\exists F \underset{cl}{\subseteq} X$, така че $|F| = 2^{\aleph_0}$ и (F, τ_F) е дискретно. Тогава (X, τ) не е нормално

<u>Д-во</u> $\exists C \subseteq X$, т.е. $|C| = \aleph_0$ и $\overline{C} = X$. Да допуснем, че (X, τ) е нормално. Тогава ще построим функция $\varphi: P(F) \to P(C)$ и ще док., че тя е инекция, което ще доведе до противоречие. $(|P(F)| = 2^{|F|} = 2^{(2^{\aleph_0})}, |P(C)| = 2^{|C|} = 2^{\aleph_0})$.

(F, τ_F) е дискретно. След. $\forall A \subseteq F$, $A \subseteq (F, \tau_F)$, но и $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и след. $A \underset{cl}{\subseteq} X$.

$\forall A \subseteq F \ \exists \mathcal{U}_A, V_A \in \tau$: $A \subseteq \mathcal{U}_A$, $F \setminus A \subseteq V_A$ и $\mathcal{U}_A \cap V_A = \emptyset$.

$\forall A \in P(F)$ полагаме $\varphi(A) := \mathcal{U}_A \cap C \in P(C)$, $\varphi: P(F) \to P(C)$.

Нека $A, B \in P(F)$ и $A \neq B$. Ще докажем, че $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Можем да допуснем, че $A \setminus B \neq \emptyset$.

$\emptyset \neq A \setminus B = A \cap (F \setminus B) \subseteq \mathcal{U}_A \cap V_B \Rightarrow \emptyset \neq \mathcal{U}_A \cap V_B \in \tau$.

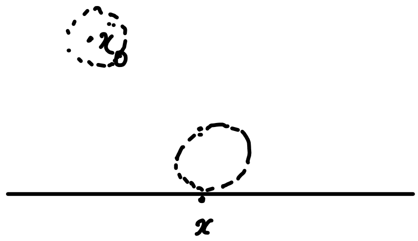
Тъй като C е гъсто, $\emptyset \neq C \cap \mathcal{U}_A \cap V_B = \varphi(A) \cap (X \setminus \mathcal{U}_B) \subseteq \overbrace{\varphi(A) \cap (X \setminus \underbrace{\varphi(B)}_{C \cap \mathcal{U}_B \subseteq \mathcal{U}_B})}^{\varphi(A) \setminus \varphi(B)}$

$\Rightarrow \varphi(A) \neq \varphi(B)$ – противоречие.

След. X не е нормално □

<u>Пр. 153</u> ($T_{3\frac{1}{2}}$- пространство, което не е T_4-пространство)

Полагаме $X = L$ - равнината на Немицки.



$F := \vec{Ox}$.

Тогава (F, τ_F) е дискретно.

$F \underset{cl}{\subseteq} L$

От лема 152 $\Rightarrow$ L не е T_4.

Нека $\mathcal{P} := \mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(x) \mid x \in L\}$

$$f : L \to I, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in L \setminus \mathcal{U} \\ \dfrac{|x_0 x|}{|x_0 x'|}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 0,\ f(L \setminus \mathcal{U}) = 1.$

$\Rightarrow L$ е $T_{3\frac{1}{2}}$ - пространство.

07.01.2020

Т-ма 154 Едно т.п. (X,τ) е нормално $\Leftrightarrow \forall F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $\forall \mathcal{U}\in\tau, F\subseteq \mathcal{U}$ $\exists \{V_i \mid i\in\mathbb{N}\}\subseteq \tau : F\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ и $\overline{V_i}\subseteq \mathcal{U}$ $\forall i\in\mathbb{N}$

Д-во

$(\Rightarrow)$ Нека X е нормално, $F\underset{cl}{\subseteq} X$, $\mathcal{U}\in\tau$, $F\subseteq\mathcal{U}$. От малката лема на Урисон $\Rightarrow \exists V\in\tau : F\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq\mathcal{U}$. Полагаме $\forall i\in\mathbb{N}$, $V_i := V$.

$(\Leftarrow)$ Нека $A,B\underset{cl}{\subseteq} X$ и $A\cap B=\emptyset$. Полагаме $F:=A$, $\mathcal{U}:=X\setminus B$. Тогава $F\subseteq\mathcal{U}$, $F\underset{cl}{\subseteq} X$, $\mathcal{U}\in\tau$. Следователно $\exists\{V_i, i\in\mathbb{N}\}\subseteq\tau : A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ и $\overline{V_i}\cap B=\emptyset$

Полагаме $F:=B$, $\mathcal{U}:=X\setminus A \Rightarrow \exists\{W_i \mid i\in\mathbb{N}\}\subseteq\tau : B\subseteq\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i$ и $\overline{W_i}\cap A=\emptyset$.

$\forall i\in\mathbb{N}$, полагаме $G_i := V_i\setminus\bigcup_{j\leq i}\overline{W_j}$ и $H_i := W_i\setminus\bigcup_{j\leq i}\overline{V_j}$. Тогава

$\forall i\in\mathbb{N}$, $G_i, H_i\in\tau$. Ще докажем, че $\forall i,j\in\mathbb{N}$, $G_i\cap H_j=\emptyset$. Нека $i\leq j$.

Тогава $H_j = W_j\setminus\bigcup_{k\leq j}\overline{V_k}$, $G_i = V_i\setminus\bigcup_{k\leq i}\overline{W_k}$ и $H_j\cap G_i=\emptyset$.

Ако $i>j$ - аналогично.

Полагаме $V:=\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ и $W:=\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. Тогава $V,W\in\tau$.

$V\cap W = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} G_i\cap H_j = \emptyset$. Ще докажем, че $A\subseteq V$ и $B\subseteq W$.

Имаме, че $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ и $A\cap\overline{W_j}=\emptyset$ $\forall j\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = V$

$B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = W$

$\square$

Т-ма 155 (Тихонов за норм. пр.) Ако (X,τ) е регулярно и $w(X)\leq\aleph_0$, то X е нормално.

Д-во Нека $F\underset{cl}{\subseteq} X$, $\mathcal{U}\in\tau$ и $F\subseteq\mathcal{U}$. $\exists$ база $\mathcal{B}$ на $X : |\mathcal{B}|=\aleph_0$

$\forall x\in F$, $\exists V_x\in\mathcal{B} : x\in V_x\subseteq\overline{V_x}\subseteq\mathcal{U}$. Тогава $F\subseteq\bigcup_{x\in F} V_x$ и $\overline{V_x}\subseteq\mathcal{U}$.

$|\mathcal{B}|\leq\aleph_0 \Rightarrow |\{V_x \mid x\in F\}|\leq\aleph_0$. От т-ма 154 $\Rightarrow X$ е нормално.

$\square$

Сл. 156 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ е T_4

Д-во $\mathbb{R}^n$ е T_3 и $w(\mathbb{R}^n) = \aleph_0 \Rightarrow \mathbb{R}^n$ е нормално $\square$

Сл. 157 Ако (X,τ) е изброимо и регулярно, то е нормално

Д-во Нека $F \underset{cl}{\subseteq} X$, $U \in \tau$, $F \subseteq U$

X е регулярно $\Rightarrow \forall x \in F\ \exists V_x \in \tau : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$

$\Rightarrow F \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x$ и $\overline{V_x} \subseteq U\ \forall x \in F$. Но $|F| \leq |X| \leq \aleph_0 \Rightarrow X$ е нормално $\square$

18. Т-ми за диаг. изобр. и за влагане в Тихоновски и александровски куб

Опр. Нека τ е кардинал. Тогава I^τ се нарича Тихонов куб.
$I^{\aleph_0}$ се нарича Хилбертов куб. $\quad I = [0,1]$

Опр. X и Y са хомеоморфни, ако $\exists$ непр. биекция $f: X \to Y$: $f^{-1}: Y \to X$ е непр.

f се нарича хомеоморфно влагане, ако $f|_X : X \to f(X)$ е хомеоморфизъм

Т-ма 158 Нека $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ е непр. биекция. Тогава следните са еквивалентни:

(а) f е хомеоморфизъм

(б) f е отворено

(в) f е затворено

Д-во $(f^{-1})^{-1} = f$

(а) $\Rightarrow$ (б) Нека $U \underset{op}{\subseteq} X$. $f^{-1}: Y \to X$ е непр. $\Rightarrow f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) \underset{op}{\subseteq} Y$

(а) $\Rightarrow$ (в) Аналогично

(б) $\Rightarrow$ (а) Нека $U \underset{op}{\subseteq} X \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \underset{op}{\subseteq} Y$ $\square$

Опр. Нека $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Казваме, че $\mathcal{F}$ разделя точките на X, ако за $x, y \in X$, $x \neq y$ $\exists \alpha : f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$. Ако X и Y_α са т.п., то казваме, че $\mathcal{F}$ разделя точките и затв. мн. на X, ако от $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$, $x \notin F$ следва, че $\exists \alpha \in A : f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$.

Лема 159 Нека (X,τ) е T_0 - пространство и $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathcal{O}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ разделя точките и затворените мн. на X. Тогава $\mathcal{F}$ разделя и точките на X.

Д-во Нека $x, y \in X$ и $x \neq y$. X е $T_0 \Rightarrow \exists\, U \in \tau : |U \cap \{x,y\}| = 1$.
Нека б.о.о. $x \in U$, $y \notin U$. Полагаме $F := X \setminus U$. Тогава $F \subseteq X$ и $x \notin F$. След. $\exists\, \alpha \in A : f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$. Тогава $f_\alpha(x) \notin f_\alpha(F)$.
Но $y \in F$ и след. $f_\alpha(y) \in f_\alpha(F)$ и $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. $\square$

Т-ма 160 Една непр. инекция $f : (X,\tau) \to (Y, \mathcal{O})$ е хомеоморфно влагане $\Leftrightarrow$ когато фамилията $\{f\}$ разделя точките и затв. мн. на X.

Д-во $(\Rightarrow)$ f е хом. влагане. Нека $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$. Тогава $f(x) \notin f(F)$ и $f(F) \underset{cl}{\subseteq} f(X)$. Тогава $\overline{f(F)}^{f(X)} \subseteq f(F) = \overline{f(F)}^{Y} \cap f(X)$
$\Rightarrow f(x) \notin \overline{f(F)}$

$(\Leftarrow)$ Нека f е непрекъсната инекция. Ще док., че $f_{|X} : X \to f(X)$ е хомеоморфно влагане.
Достатъчно е да покажем, че $f|_X$ е затворено изображение. Нека $F \underset{cl}{\subseteq} X$. Тогава трябва да докажем, че $f(F) = \overline{f(F)}^{f(X)} : f(F) = \overline{f(F)}^{Y} \cap f(X)$

Очевидно $f(F) \subseteq \overline{f(F)}^{Y} \cap f(X)$. Ще докажем обратното.
Нека $y \in \overline{f(F)}^{Y} \cap f(X)$. Да допуснем, че $y \notin f(F)$. $y \in f(X)$ и след. $\exists\, x \in X : y = f(x) \Rightarrow f(x) \notin f(F) \Rightarrow x \notin F$.
Следователно $f(x) \notin \overline{f(F)}^{Y}$, $y \notin \overline{f(F)}$ - противоречие
След. $y \in f(F)$. $\square$

Т-ма 161 (за диагоналното изображение) Нека $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $f := \underset{\alpha \in A}{\Delta} f_\alpha$.

- Ако $\mathcal{F}$ разделя точките на X, то f е инекция
- Ако X и Y_α са т.п., f_α е непр $\forall \alpha \in A$ и $\mathcal{F}$ разделя т. и з. м. на X, то $f : X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ е хомеоморфно влагане

В частност, ако f_α е хомеоморфно влагане за някое $\alpha \in A$, то и f е хом. влагане.

<u>Д-во</u> Нека $\mathcal{F}$ разделя точките на X, $x, y \in X$ и $x \neq y$.
Тогава $\exists \alpha_0 \in A : f_{\alpha_0}(x) \neq f_{\alpha_0}(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Нека сега $\mathcal{F}$ разделя точките и затв. множества.
$\forall \alpha, f_\alpha$ е непр. и от тв. 119 $\Rightarrow f$ е непр.
f е инекция. Ще докажем, че $\{f\}$ разделя точките и затворените множества на X.

Нека $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$.
$f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$. Нека $p_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \to Y_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in A$ са проекции.
Тогава $f_\alpha = p_\alpha \circ f$
Доп, че $f(x) \in \overline{f(F)} \Rightarrow \forall \alpha \in A$, $p_\alpha(f(x)) \in p_\alpha(\overline{f(F)}) \subseteq \overline{p_\alpha(f(F))} = \overline{f_\alpha(F)}^{Y_\alpha}$
$\Rightarrow \forall \alpha \in A$, $f_\alpha(x) \in \overline{f_\alpha(F)}^{Y_\alpha}$ - прот., понеже $\mathcal{F}$ разделя точките и з. м.
От т-ма 160 $\Rightarrow f$ е хом. влагане.

Нека $\exists \alpha_0 \in A : f_{\alpha_0}$ е хом. вл. Тогава $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow f_\alpha x \neq f_\alpha y$ (f_α е инекция).

$\mathcal{F}$ разделя точките на X.

$f_{\alpha_0} : X \to Y_0$ е хом. вл., то от т-ма 160

$\Rightarrow \{f_{\alpha_0}\}$ разделя т. и з. м. на X.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ разделя т. и з. м. на X

$\Rightarrow f$ е хом. влагане

□

Тв. 162 Нека (X, τ) е T_i-пространство, където $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ и $M \subseteq X$.

Тогава (M, τ_M) е T_i-пространство $\square$

Т-ма 163 Нека (X_α, τ_α) е T_i-пространство, където $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ $\forall \alpha \in A$ и $(X, \tau) = \prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \tau_\alpha)$. Тогава X е T_i-пространство.

Д-во

$(i=0)$ Нека $x, y \in X$ и $x \neq y$. $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$

$\Rightarrow \exists \alpha_0 \in A : x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$.

X_{α_0} е T_0-пр-во. След. $\exists U \in \tau_{\alpha_0} : |U \cap \{x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0}\}| = 1$.

Нека $p_{\alpha_0} : X \to X_{\alpha_0}$ е α_0-проекция.

Ако б.о.о. $x_{\alpha_0} \in U$, $y_{\alpha_0} \notin U \Rightarrow x \in p_\alpha^{-1}(U)$, $y \notin p_\alpha^{-1}(U)$

Тогава $|p_{\alpha_0}(U) \cap \{x, y\}| = 1$.

$(i=1)$ $\forall x \in X$, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ и $\{x\} = \prod_{\alpha \in A}\{x_\alpha\}$, $\forall \alpha$, $\{x_\alpha\} \underset{cl}{\subseteq} X$.

От тв. $\Rightarrow \{x\} \underset{cl}{\subseteq} X$.

$(i = 3\frac{1}{2})$ Тогава X е T_0. От тв $\Rightarrow$ дост. е да док., че $x \in X$, $U \underset{op}{\subseteq} X_\alpha$ и $x \in p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, то $\exists$ непр. $f : X \to I$: $f_\alpha(x) = 0$, $f_\alpha(X \setminus p_\alpha^{-1}(U)) = 1$

$\Rightarrow p_\alpha(X) = X_\alpha \in U_\alpha$ и понеже X_α е $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow \exists$ непр. $\varphi : X_\alpha \to I : \varphi(x_\alpha) = 0$

и $\varphi(X_\alpha \setminus U_\alpha) = 1$. Полагаме $f = \varphi \circ p_\alpha$. Тогава $f : X \to I$ и f е непрекъсната.

$$\left.\begin{aligned} &f(x) = \varphi(p_\alpha(x)) = \varphi(x_\alpha) = 0. \quad \forall \overset{(y_\alpha)_{\alpha \in A}}{\overset{\shortparallel}{y}} \notin p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \\ &f(y) = \varphi(p_\alpha(y)) = \varphi(y_\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_\alpha \notin U_\alpha \Rightarrow \varphi(y_\alpha) = 1$$

$\square$

Т-ма 164 (Тихонов, за влагане в Тихонов куб)

$\forall$ кард. число $\tau \geq \aleph_0$, I^τ е $T_{3\frac{1}{2}}$-пр. с $w(I^\tau) = \tau$, а ако X е

$T_{3\frac{1}{2}}$ - пр-во с $w(X) = \tau$, то X се влага хомеоморфно в I^τ.

След. Всяко $T_{3\frac{1}{2}}$ - пр.во X с $w(X) \le \tau$ се влага хомеоморфно в I^τ.

<u>Д-во</u> I е T_3 пространство с $w(I) = \aleph_0$. След I е T_4- пр-во.

$\Rightarrow I$ е $T_{3\frac{1}{2}}$ - пространство $\overset{\text{т-ма 163}}{\Rightarrow} I^\tau$ е $T_{3\frac{1}{2}}$ и $w(I^\tau) \le \tau$.

От втората част на т-мата $\Rightarrow$ $D(\tau)$ се влага хомеоморфно в I^τ.

дискр. простр. с мощност τ

Нека X е $T_{3\frac{1}{2}}$ пространство и $\tau := w(X)$.

Тогава $Coz(X)$ е база на X (от тв. 145)

От т-мата на Александров - Урисон $\Rightarrow \exists$ база $\mathcal{B}$ на X: $\mathcal{B} \subseteq Coz(X)$ и $|\mathcal{B}| = w(X) = \tau$. Нека $\mathcal{B} = \{ U_\alpha \mid \alpha \in A, |A| = \tau \}$ и $\forall \alpha \in A \; \exists$ непр. $f_\alpha : X \to I$: $U_\alpha = f_\alpha^{-1}((0,1])$. Нека $\mathcal{F} = \{ f_\alpha : X_\alpha \to I \mid \alpha \in A \}$

Ще докажем, че $\mathcal{F}$ разделя точките и затворените множества на X. Нека $x \in X_\alpha$, $F \underset{a}{\subseteq} X$, $x \notin F$.

Тогава $\exists \alpha_0 \in A$: $x \in U_{x_0} \subseteq X_{\alpha_0} \setminus F$

$\Rightarrow f_{\alpha_0}(x) > 0$ и $f_{\alpha_0}(F) = 0 = \overline{\{0\}}$

$\Rightarrow f_{\alpha_0}(x) \notin \overline{f_{\alpha_0}(F)}$.

От лема 159 $\Rightarrow \mathcal{F}$ разделя точките на X.

От т-мата за диаг. изобр. $\Rightarrow f = \underset{\alpha \in A}{\Delta} f_\alpha : X \to I^A = I^\tau$ е хомеоморфно влагане

$\square$

<u>Опр.</u> Нека (S, θ) е пространството на Серпински, т.е.

$S = \{0, 1\}$

$\theta = \{\emptyset, S, \{1\}\}$

Нека τ е кард. число

Пространството S^τ се нарича <u>Александровски куб</u>.

Т-ма 164 Нека $\tau \geq \aleph_0$. S^τ е T_0-пространство с $w(S^\tau) = \tau$

Всяко T_0-пр-во X с $w(X) = \tau$ се влага хомеоморфно в S^τ.

Д-во Нека X е T_0-пространство с $w(X) = \tau$. Тогава $\exists$ база $\mathcal{B}$ на X с $|\mathcal{B}| = \tau$. Нека $\mathcal{B} = \{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$, $|A| = \tau$

$\forall \alpha \in A$, полагаме $f_\alpha : X \to S$, $f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in U_\alpha \\ 0, & x \in X \setminus U_\alpha \end{cases}$

f_α е непр ($f_\alpha^{-1}(1) = U_\alpha \underset{op}{\subseteq} X$)

Полагаме $\mathcal{F} = \{ f_\alpha \mid \alpha \in A \}$. Ще покажем, че $\mathcal{F}$ разделя т. и з.м. на X.

Нека $x \in X$, $F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $x \notin F$.

Тогава $\exists \alpha_0 \in A : x \in U_{\alpha_0} \subseteq X \setminus F$. След. $f_{\alpha_0}(x) = 1$, а $f_{\alpha_0}(F) = 0$

$\Rightarrow f_\alpha(x) \notin f_\alpha(F) \Rightarrow \mathcal{F}$ разделя т. и з.м.

X е $T_0 \Rightarrow F$ разделя т. на X.

От т-мата за диаг. изобр. $\Rightarrow f = \underset{\alpha \in A}{\Delta} f_\alpha : X \to S^A = S^\tau$ е хом. влагане

S е $T_0 \overset{\text{Т-ма 163}}{\Rightarrow} S^\tau$ е T_0.

$w(S) < \aleph_0 \leq \tau \Rightarrow w(S^\tau) \leq \tau$.

Дискретното пространство $D(\tau)$ е T_0 с $w(D(\tau)) = \tau$

След. $D(\tau)$ се влага хом. в $S^\tau \Rightarrow w(S^\tau) \geq w(D(\tau)) = \tau$

$\Rightarrow w(S^\tau) = \tau$

$\square$

14.01.2020

19. Компактни пространства

<u>Опр.</u> Едно т.п. (X, τ) се нарича <u>компактно</u>, ако всяко негово отворено покритие притежава крайно подпокритие

<u>Заб.</u> Всяко крайно пространство е компактно

<u>Т-ма 165</u> Едно т.п. (X, τ) е компактно $\Leftrightarrow$ всяка центрирана фамилия от подмножества на X има непразно сечение

<u>Д-во</u>

$(\Rightarrow)$ Нека X е комп., $\mathcal{F}$ е цент. фам. от затв. подмн. на X.

Доп., че $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

$\forall F \in \mathcal{F}$, полагаме $\mathcal{U}_F := X \setminus F \Rightarrow \mathcal{U}_F \underset{op}{\subseteq} X$

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{U}_F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = X \setminus \bigcap \mathcal{F} = X$$

$\Rightarrow \mathcal{U} := \{\mathcal{U}_F \mid F \in \mathcal{F}\}$ е отв. покритие на X.

$\Rightarrow \exists$ крайно подпокр. $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, т.е. $\bigcup \mathcal{U}' = X$. Тогава

$$\emptyset \neq \bigcap \{F \in \mathcal{F} \mid X \setminus F \in \mathcal{U}'\} = \bigcap \{X \setminus \mathcal{U}_F \mid \mathcal{U}_F \in \mathcal{U}'\} =$$

$$= X \setminus \bigcup_{\mathcal{U}_F \in \mathcal{U}'} \mathcal{U}_F = X \setminus \bigcup \mathcal{U}' = X \setminus X = \emptyset$$ - противоречие

$(\Leftarrow)$ Нека $\mathcal{U}$ е отв. покр. на X. Доп., че $\mathcal{U}$ няма крайно подпокритие. Нека $\mathcal{F} := \{X \setminus \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{U}\}$

$\mathcal{F}$ е фам. от затв. мн. Ако $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ и $|\mathcal{F}'| \leq \aleph_0$, то

$$\bigcap \mathcal{F}' = \bigcap \{X \setminus \mathcal{U} \mid X \setminus \mathcal{U} \in \mathcal{F}'\} = X \setminus \bigcup_{X \setminus \mathcal{U} \in \mathcal{F}'} \mathcal{U} \neq 0.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ е центрирана фамилия $\Rightarrow \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

$\emptyset \neq \bigcap \{X \setminus \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{U}\} = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = X \setminus X = \emptyset$ - прот.

$\square$

<u>Т-ма 166</u> Нека (X, τ) е компактно пространство и $F \underset{cl}{\subseteq} X$. Тогава (F, τ_F) е компактно

<u>Д-во</u> Нека $\mathcal{F}$ е центр. фам. от затв. подмн на F.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ е центр. фам. от затв. подмн. на X.

От т-ма 165 $\Rightarrow (F, \tau_F)$ е комп.

$\square$

Лема 167 Нека (X, τ) е т.п., $A \subseteq X$ и (A, τ_A) е комп. Ако $\mathcal{U} \subseteq \tau$, $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, то $\exists$ крайно подпокр. $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} : A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$

Д-во $\forall U \in \mathcal{U}$ полагаме $V_U := U \cap A$. Тогава V_U е отв. в (A, τ_A) и

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} V_U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (U \cap A) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \cap A = A$$

След. $\exists$ крайно подпокр. $\{V_{U_1}, \dots, V_{U_k}\}$ на покр. $\{V_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ на A.

Тогава $\mathcal{U}' = \{U_1, \dots, U_k\} \Rightarrow \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ е крайно и $\bigcup_{U \in \mathcal{U}'} V_U = X$. $\square$

Тв. 168 Нека (X, τ) е т.п., $A, B \subseteq X$, (A, τ_A) е комп., $A \cap B = \emptyset$.

Тогава, ако е изп. поне едно от следните 3 условия:

1) X е регулярно, B е затворено

2) X е T_2 и $|B| = 1$

3) X е T_2 и B е компакт

то съществуват отв. мн. U и V на X : $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Д-во

1) Нека X е регулярно. Тогава $\forall x \in A$ $\exists$ ок. U_x на x и отв. мн. $V_x \in \tau$: $B \subseteq V_x$ и $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Нека $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in A\}$. Тогава $A \subseteq \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow \exists$ крайна подфамилия $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\} : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$

Полагаме $U := \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ и $V := \bigcap_{j=1}^{k} V_{x_j}$. Тогава $U, V \in \tau$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k} V_{x_j}\right) = \bigcup_{i=1}^{k} \left(U_{x_i} \cap \bigcap_{j=1}^{k} V_{x_j}\right)$$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $U_{x_i} \cap \bigcap_{j=1}^{k} V_{x_j} \subseteq U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$.

2) Нека X е T_2 и $B = \{y_0\}$. Тогава $\forall x \in A$ $\exists U_x, V_x \in \tau : x \in U_x$, $y_0 \in V_x$ и $U_x \cap V_y = \emptyset$. Продължаваме аналогично на 1).

3) Нека $x \in A$. $\forall y \in B$ $\exists U_x$ и $V_x \in \tau : x \in U_x$, $y \in V_x$ и $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Т-ма 169 Всяко компактно T_2 - пространство е T_4

Д-во Ако $A, B \underset{cl}{\subseteq} X$, $A \cap B = \emptyset$.

Тогава A и B са компактни. тв. 168, 3) $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}, V \underset{op}{\subseteq} X : A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq V$ и $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

$\Rightarrow X$ е T_4 □

Т-ма 170 Нека (X, τ) е T_2-пр.во и (A, τ_A) е комп. под-пр-во на X. Тогава $A \underset{cl}{\subseteq} X$.

Д-во Ще пок., че $X \setminus A \underset{op}{\subseteq} X$. Нека $x \in X \setminus A$. Тогава от тв. 168, 2)

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}, V \in \tau : x \in \mathcal{U}$, $A \subseteq V$ и $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$. Тогава $\mathcal{U} \subseteq X \setminus A \Rightarrow X \setminus A$ е отв. □

Т-ма 171 Нека (X, τ) е комп. и $f : (X, \tau) \to (Y, 0)$ е непр. сюрекция. Тогава $(Y, 0)$ е комп.

Д-во Нека V е отв. покр. на Y. Тогава $\mathcal{U} = \{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{U} \}$ е отв. покр. на $X \Rightarrow \exists$ крайно подпокр $\{ f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_k) \}$ на X.

$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \bigcup_{i=1}^{k} f(f^{-1}(V_i)) = f(\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(V_i)) = f(X) = Y$ □

Т-ма 172 Нека $f : (X, \tau) \to (Y, 0)$ е непр., $(Y, 0)$ е T_2 и (X, τ) е комп. Тогава f е затв. изобр.

Д-во Нека $F \underset{cl}{\subseteq} X$. Тогава F е комп. $\Rightarrow f(F)$ е комп. $\Rightarrow f(F) \underset{cl}{\subseteq} Y$ □

Т-ма 173 Нека $f : (X, \tau) \to (Y, 0)$ е непр. биекция, (X, τ) е комп., а $(Y, 0)$ е T_2. Тогава f е хомеоморфизъм.

Д-во От т-ма 172 $\Rightarrow f$ е затв. изобр. $\overset{T. 158}{\Rightarrow} f$ е хомеоморфизъм □

Т-ма 174 Нека (X, τ_1) е компакт, (X, τ_2) е T_2 и $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Тогава $\tau_2 = \tau_1$

Д-во

$id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ е непр. биекция. От т-ма 173 $\Rightarrow id$ е хом.

$\Rightarrow id$ е отв.

$\forall U \in \tau_1$, $id(U) = U \in \tau_2$ и $\tau_1 \subseteq \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$ $\square$

20. Т-ма на Тихонов за пр. на комп.; хар. на комп. в $\mathbb{R}^n$ и т-ма на Вайерщрас

Т-ма 175 (Тихонов, за пр. на компакти)
Нека $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от т.п., а $(X,\tau) := \prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \tau_\alpha)$

Тогава (X,τ) е комп. T_2 пр-во $\Leftrightarrow$ (X_α, τ_α) е комп. T_2 пр-во $\forall \alpha \in A$

Д-во Знаем, че X е $T_2 \Leftrightarrow \forall \alpha \in A$, X_α е T_2.

($\Rightarrow$) Нека (X,τ) е комп., нека $\forall \alpha \in A$, $p_\alpha: X \to X_\alpha$ е проекция. Тогава p_α е непр. сюрекция.
От т-ма 171 $\Rightarrow$ (X_α, τ_α) е компакт

($\Leftarrow$) X_α е комп. $\forall \alpha \in A$. Нека Φ_0 е центр. фам. от затв. подмн. на A
Нека Φ' е филтърът в X, породен от Φ_0.
От т-мата на Тарски $\Rightarrow \exists$ ултрафилтър Φ в X: $\Phi' \subseteq \Phi$.
Ще покажем, че $\cap\{\bar{B}^X \mid B \in \Phi\} \neq 0$, откъдето ще следва $\cap \Phi_0 \neq 0$.
$\forall \alpha \in A$, полагаме $\Phi_\alpha := \{\overline{p_\alpha(B)}^{X_\alpha} \mid B \in \Phi\}$. Тогава Φ_α е центр. фам. от затв. подмн. на X_α.
Наистина, нека $B_1, \dots, B_k \in \Phi$. Φ е филтър $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} B_i \neq \emptyset$.

$$\emptyset \neq p_\alpha\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} p_\alpha(B_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \overline{p_\alpha(B_i)}^{X_\alpha}$$

X_α е комп. $\Rightarrow \cap \Phi_\alpha \neq \emptyset$.

Нека $x_\alpha \in \cap \Phi_\alpha$. Нека W_α е околност на $x_\alpha \in X_\alpha$
$\Rightarrow W_\alpha \cap p_\alpha(B) \neq \emptyset \ \forall B \in \Phi$.
$\Rightarrow \exists b \in B: p_\alpha(b) \in W_\alpha \Rightarrow b \in B \cap p_\alpha^{-1}(W_\alpha)$
$\Rightarrow p_\alpha^{-1}(W_\alpha) \in \Phi$

Полагаме $x := (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Нека $\mathcal{B}$ е каноп. база в X и нека $\mathcal{B}(x) := \{W \in \mathcal{B} \mid x \in W\}$. Ще покажем, че $\mathcal{B}(x) \subseteq \Phi$.
Наистина, нека $W \in \mathcal{B}(x)$. Тогава $x \in W = \bigcap_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})$, $W_{\alpha_i} \underset{op}{\subseteq} X_{\alpha_i}$

$\forall i = 1, \dots, k \quad \underset{X_{\alpha_i}}{\overset{}{p_{\alpha_i}(x) \in W_{\alpha_i}}}$

От доказаното $\Rightarrow p_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \in \Phi$

$\Rightarrow W \in \Phi \Rightarrow \mathcal{B}(x) \subseteq \Phi.$

$\forall W \in \mathcal{B}(x)$ и $\forall B \in \Phi$

$\Rightarrow W \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{B}^X, \ \forall B \in \Phi$

$\Rightarrow x \in \bigcap \{ \overline{B}^X \mid B \in \Phi \}$

$\Rightarrow \bigcap \Phi_i \neq \emptyset \overset{\text{T.165}}{\Rightarrow} X$ е компакт

$\square$

Тв. 176 $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, \ J := [a, b]$ е компакт в ест. топ.

Д-во Ако $a = b$, д-вото е тривиално

Нека $a \neq b$. Нека $\mathcal{U}$ е отв. покр. на J. Нека

$A := \{ x \in J \mid \exists$ крайно подпокр. $\mathcal{U}'$ на $\mathcal{U}$ и $[a, x] \subseteq \bigcup \mathcal{U}' \}$.

Очевидно $a \in A$, $A \underset{op}{\subseteq} J$.

Ако $x \in A$, то $\exists U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U} : [a, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$.

$\exists j \in \{1, \dots, k\} : x \in U_j$.

Ако $x = b$, т-мата е доказана.

Нека $x < b$. Тогава $\exists \varepsilon > 0 : x + \varepsilon < b$ и $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_j$.

След. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$. $\Rightarrow A$ е отв. в J.

Доп., че $J \setminus A \neq \emptyset$. Тогава $J \setminus A \underset{cl}{\subseteq} J$. Нека $x_0 := \inf(J \setminus A)$. Тогава $x_0 \in J \setminus A$.

$x_0 > a \Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U} : x_0 \in U_0$. $U_0 \underset{op}{\subseteq} J$, $\exists y > a, \ y < x_0 : (y, x_0] \subseteq U_0$.

Но x_0 е инф. и $y < x_0 \Rightarrow y \in A \Rightarrow [a, y]$ се покрива от краен брой

$\{U_1, \dots, U_k\} \Rightarrow [a, x] \subseteq U_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i \right)$.

$\Rightarrow x \in A$ и $x \in J \setminus A$ - противоречие

$\Rightarrow J$ е компакт

$\square$

Т-ма 177 $\forall \tau$, I^τ е компактно T_2-пр. Ако $\tau \geq \aleph_0$, то всяко комп. T_2 пр. с тегло $w(X) \leq \tau$ се влага хомеоморфно в I^τ.

Д-во I е компакт. От т-ма 175 $\Rightarrow$ I^τ е комп. T_2.

Нека $\tau \geq \aleph_0$, X е комп. T_2 с тегло $w(X) \leq \tau$.

Тогава X е T_4 съгласно т-ма 169 $\Rightarrow$ X е $T_{3\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ от т-ма 164 $\Rightarrow$ X се влага хомеоморфно в I^τ □

Пр. 178 (T_4 пространство с подпространство, което не е T_4)

Полагаме $X := I^{c \leftarrow 2^{\aleph_0}}$. Тогава $X \in T_4$.

Нека L е пр. на Немицки. L е $T_{3\frac{1}{2}}$, но не T_4

$w(L) = c$, след L се влага хомеоморфно в I^c

Т-ма 179 Едно т.п. (X, τ) е Тихоново ($3\frac{1}{2}$) $\Leftrightarrow$ то може да се вложи хомеоморфно в комп. T_2.

Д-во ($\Leftarrow$) Нека X се влага хомеоморфно в комп. T_2 пр. Y.

Y е T_4 $\Rightarrow$ Y е $T_{3\frac{1}{2}}$. $T_{3\frac{1}{2}}$ е нас. св-во $\Rightarrow$ X е $T_{3\frac{1}{2}}$.

($\Rightarrow$) $X - T_{3\frac{1}{2}}$. Ако $w(X) \geq \aleph_0$, то от т-ма 164 $\Rightarrow$ X се влага хом. в $I^{w(X)}$ $\Rightarrow$ и Y е комп. T_2

Ако $w(X) < \aleph_0 \Rightarrow |X| \leq 2^{w(X)} \Rightarrow |X| < \aleph_0 \Rightarrow X$ е влага хом. в комп. T_2 Y

Т-ма 180 Едно подпр-во X на $\mathbb{R}^n$ е комп. $\Leftrightarrow$ то е огр. и затв.

Д-во ($\Rightarrow$) Нека X е комп. $\mathbb{R}^n$ е T_2. От т-ма 176 $\Rightarrow$ $X \underset{cl}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ е огр.

$X \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} (-i, i)^n$ ← отв. покр.

$\Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N} : X \subseteq (-i_0, i_0)^n \Rightarrow X$ е огр.

($\Leftarrow$) X е огр. $\Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N} : X \subseteq [-i_0, i_0]^n$. От т-ма 176 $\Rightarrow [-i_0, i_0]^n$ е комп.,

а $X \underset{cl}{\subseteq} [-i_0, i_0]^n$. От т-ма 166 $\Rightarrow$ X е компакт

□

Т-ма 181 (Вайерщрас) Нека (X,τ) е комп. пр-во, $f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ е непр.
Тогава f е ограничена и $\exists\, x_1, x_2 \in X:$ $f(x_1)=\min f(X)$ и $f(x_2)=\max f(X)$
Ако $g:(X,\tau)\to\mathbb{R}^n$ е непр. $\Rightarrow$ g е огр.

Д-во От т-ма 171, $f(X)$ е компакт. От т-ма 180 $\Rightarrow$ $f(X)$ е огр. и затв.

$\Rightarrow$ f е огр. и $\exists \inf f(X)$, $\exists \sup f(X)$

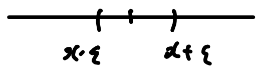
$f(X)$ е затв и $\Rightarrow$ $\inf f(X)\in f(X)$ и $\sup f(X)\in f(X)$.

Ако $g: X\to\mathbb{R}^n$ е непр., то $g(X)$ е комп. и $\Rightarrow$ $g(X)$ е огр. □

21. Локално компактни пространства

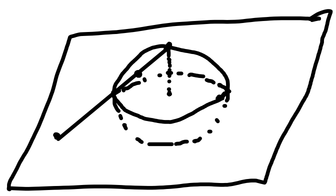
Опр. Едно т.п. (X,τ) е <u>лок. комп.</u>, ако $\forall x\in X$ $\exists$ ок. $\mathcal{U}$ на x: $\overline{\mathcal{U}}$ е компакт

Пр. 182 $\mathbb{R}^n$ е лок. комп.



Т-ма 183 (Александров) Нека (X,τ) е лок. комп., но не комп. T_2 пр.
Тогава $\exists$ комп. T_2-пр. αX: $X\subseteq \alpha X$, $|\alpha X\setminus X|=1$ и X е гъсто в αX.
αX се нарича <u>александровска компактификация</u> на X.

Д-во Нека $\infty\notin X$. Полагаме $\alpha X := X\cup\{\infty\}$.



Полагаме $\mathcal{O} = \tau \cup \{\{\infty\}\cup(X\setminus F) \mid F\subseteq X,\ F$ е затв$\}$
Тогава $\mathcal{O}$ поражда топология в αA.

$\bigcup\{\{\infty\}\cup(X\setminus F_\alpha) \mid \alpha\in A\} = \{\infty\}\cup\bigcup_\alpha X\setminus F_\alpha = \{\infty\}\cup\left(X\setminus \bigcap_\alpha F_\alpha\right)$

$F \underset{cl}{\subseteq} X \Rightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha \subseteq X$, $F \underset{cl}{\subseteq} F_\alpha \Rightarrow F$ е затв. в αA.

αA е T_2, т.к. ако $x\in X$, $\exists\, \mathcal{U}$ - ок. на x: $\overline{\mathcal{U}}$ е комп. и $V:=\alpha X\setminus\overline{\mathcal{U}}\in\mathcal{O}$
и $\mathcal{U}\cap V=\varnothing$.
Ще док., че αA е компакт. Нека $\mathfrak{U}$ е отв. покр. на αA, т.е. $\mathfrak{U}\subseteq\mathcal{O}$.
Тогава $\exists\, \mathcal{U}\in\mathfrak{U}$: $\infty\in\mathcal{U}$.

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{\infty\} \cup (X \setminus F)$, $F \subseteq X$ и F е комп.

$\Rightarrow F \subseteq \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow \exists U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U} : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. $\alpha X = U \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)$.

X е гъсто в αX. Нека $U \in \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$.

Ако $U \in \tau$, то $U \cap X \neq \emptyset$.

Ако $U \notin \tau$, то $U = \{\infty\} \cup \{X \setminus F\}$, $F \subseteq X$, F е комп.

Т.к. X не е компакт $\Rightarrow X \setminus F \neq \emptyset$.

$U \cap X = X \setminus F \neq \emptyset$.

$\Rightarrow X$ е гъсто □

<u>Сл. 184</u> Всяко лок. комп. T_2-пр. е $T_{3\frac{1}{2}}$.

<u>Д-во</u> $X \subseteq \alpha X$ - комп. $T_2 \Rightarrow \alpha X$ е $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow X$ е $T_{3\frac{1}{2}}$

<u>Пр. 185</u> (T_4-пр-во, така че X^2 не е T_4)

<u>Д-во</u> Нек. $X := Z$ - правата на Зоргенфрай.

X е T_4. Наистина, нека $A, B \subseteq_{cl} Z$, $A, B = \emptyset$.

$\forall a \in A\ \exists x_a > a : [a, x_a) \subseteq X \setminus B$.

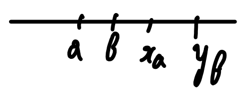
$\forall b \in B\ \exists y_b > b : [b, y_b) \subseteq X \setminus A$.

Полагаме $U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$ и $V = \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$

$U, V \subseteq_{op} Z$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$

$U \cap V = \left(\bigcup_{a \in A} [a, x_a)\right) \cap \left(\bigcup_{b \in B} [b, y_b)\right)$

Нека б.о.о. $a < b$. Доп., че $[a, x_a) \cap [b, y_b)$ не е празно



$\Rightarrow b \in [a, x_a)$ - противоречие.

$\Rightarrow U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow X$ е T_4

В Z^2 върху обратния диагонал се индуцира дискр. топология $\Rightarrow Z^2$ не е T_4