Конспект за изпит по ВММФ за 2016-2017 и за 2017-2018 учебни години

1.	Диференциално смятане в нормирано пространство – производни на Фреше и Гато на функционали, критични точки на функционали. Необходимо условие за локален екстремум на функционал. Потенциални оператори. Теорема за средните стойности. Връзки между производните на Фреше и Гато.
2.	Монотонни, строго монотонни, силно монотонни оператори: $X \to X'$, където X е нормирано пространство и X' е спрегнатото му пространство. Връзки между деми-, семи-, радиално непрекъснати оператори: $X \to X'$. Радиална непрекъснатост на монотонен потенциален оператор, интегрално представяне на потенциала. Примери.
3.	Изпъкнали подмножества на нормирано пространство X. Изпъкнали функционали. Примери. Еквивалентност на условията функционалът F над X да е изпъкнал, производната му на Гато да е монотонен оператор и да е изпълнено неравенството $F(y) - F(z) \geq < F'_G(z), y-z >$ при $y, z \in X$.
4.	Връзка между уравнението $A\,u = f$ и функционала $F(u) - < f, u >$, където $A: X \to X'$ е потенциален оператор с потенциал F, X е нормирано пространство. Единственост на решението на $A\,u = f$ за строго монотонен оператор A.
5.	Слабо сходящи редици, слабо затворени множества, слабо компактни множества в Банахови пространства. Слабо полунепрекъснати отдолу (СПНО) функционали. Свойства. Примери. Минимизиране на СПНО функционал върху непразно слабо компактно множество в Банахово пространство.
6.	Необходимо и достатъчно условие за слаба полунепрекъснатост отдолу на функционал над слабо затворено множество. Достатъчни условия за слаба полунепрекъснатост отдолу на изпъкнали функционали.
7.	Минимизиране на СПНО функционал и на непрекъснат изпъкнал функционал над непразно, изпъкнало, затворено и ограничено множество в рефлексивно Банахово пространство.
8.	Коерцитивни функционали. Примери. Минимизиране на коерцитивни, СПНО функционали над непразно, изпъкнало, затворено и неограничено множество в рефлексивно Банахово пространство. Следствие за коерцитивни, непрекъснати, изпъкнали функционали.
9.	Коерцитивни оператори: $X \to X'$, X - нормирано пространство. Теорема за съществуване на решение на уравнението $Au = f$ за монотонен, потенциален и коерцитивен оператор $A : X \to X'$, X - рефлексивно Банахово пространство. Единственост на решението.
10.	Задача на Дирихле с хомогенно гранично условие за един клас полулинейни елиптични уравнения в ограничена област. Доказване на съществуване на слабо решение от подходящо рефлексивно Банахово пространство X чрез свеждане на тази задача до операторно уравнение за ограничен, монотонен, потенциален и коерцитивен оператор: $X \to X'$ и минимизиране на съответния функционал.
11.	Теорема на Браудер за съществуване на решение на уравнението $A\,u = f$ за оператор $A : X \to X'$, който е ограничен, монотонен, коерцитивен и семи-непрекъснат,а X е рефлексивно сепарабелно Банахово пространство.
12.	Приближени решения на Галеркин за уравнението $Au = f$ с оператор $A: X \to X'$ и приближени решения на Риц за същото уравнение за потенциален оператор $A: X \to X'$, когато X е сепарабелно Банахово пространство. Съвпадане на m-тите приближени решения на Риц и на Галеркин при A – допълнително монотонен. Съществуване на единствено m-то приближено решение на Риц на уравнението $Au = f$ за силно монотонен, потенциален и коерцитивен оператор A и X - рефлексивно сепарабелно Банахово пространство. Силна сходимост на приближените решения на Риц към точното решение на $A\,u = f$.
13.	Задача на Дирихле с хомогенно гранично условие за един клас линейни равномерно елиптични уравнения от втори ред $E\,u = f$ в ограничена област с регулярна граница. Проверка, че E: $D(E) \to H$ е линеен, симетричен и положително определен оператор, а $D(E)$ е навсякъде гъсто подпространство на хилбертово пространство H. Уравнението $E\,u = f$ и минимума на функционала $F(u) = (Eu, u) - 2(f, u)$ в $D(E)$.
14.	Свеждане на разглежданата задача на Дирихле за $E\,u = f$ до операторно уравнение $\mathscr{A}u = f$ за оператор $\mathscr{A}$: $V \to V$, който е линеен, симетричен и положително определен в подходящо сепарабелно хилбертово пространство V и е разширение на диференциалния оператор E.
15.	Съществуване на минимум в V на функционала $\mathscr{F}(u) = (\mathscr{A}u, u) - 2(f, u)_H$ при $f \in H$, където V е навсякъде гъсто подпространство в H относно нормата на H. Обобщено решение от V на $E\,u = f$. Единственост на обобщеното решение. Връзка с класическото решение на разглежданата задача на Дирихле за уравнението $E\,u = f$.
16.	Метод на Риц за уравнението $\mathscr{A}u = f$. Силна сходимост на редицата от приближения на Риц към обобщеното решение от V на $E\,u = f$.

Библиография

Основна:

1) Гаевский Х., Грегер К., Захарис К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, Москва, 1978.
2) Куфнер А., Фучик С., Нелинейные дифференциальные уравнения, Москва, 1988.
3) Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, Москва, 1973.
4) Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, Москва, 1972.
5) Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике, Москва, 1985.
6) Renardy M., Rogers R., An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 2004.

Допълнителна:

1) Weinstock R., Calculus of variations with applications to Physics and Engineering, Dover Publications, 1974.

Дата: 13.06.2017, 14.11.2017 г.

Съставил:

/ доц. Мария Каратопраклиева /

Утвърдил: ....

Декан

Дата ....

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

Факултет по математика и информатика
Специалност: Математика

Магистърска програма: *(код и наименование)*

М	И	М	2	3	2	1	1	3

Уравнения на математическата физика
Equations of Mathematical Physics

УЧЕБНА ПРОГРАМА

Дисциплина: | Т | 2 | 0 | 4 |

Вариационни методи в математическата физика

Variational Methods in Mathematical Physics

Преподавател: доц. Мария Каратопраклиева

Асистент:

Учебна заетост	Форма	Хорариум
Аудиторна заетост	Лекции	45
	Семинарни упражнения	30
	Практически упражнения	
Обща аудиторна заетост		75
Извънаудиторна заетост	Реферат	
	Доклад/Презентация	
	Учебен проект	
	Самостоятелна работа в библиотека или с Интернет ресурси	45
	Подготовка за изпита	90
	Подготовка през семестъра за упражненията	30
Обща извънаудиторна заетост		**165**
ОБЩА ЗАЕТОСТ		**240**
Кредити аудиторна заетост		**2,5**
Кредити извънаудиторна заетост		**5,5**
ОБЩО ЕСТК		**8**

№	Формиране на оценката по дисциплината[1]	% от оценката
1.	Текуща самостоятелна работа / домашни работи	
2.	Контролни работи	
3.	Учебни проекти	
4.	Изпит	100%

Анотация на учебната дисциплина:

Вариационните методи са един от мощните съвременни апарати, както за доказване на съществуване на обобщени решения на гранични задачи за различни типове линейни и нелинейни частни диференциални уравнения, така и за приближеното намиране на такива решения. Отначало се разглежда класическата теория, при която намирането на обобщено решение на дадена гранична задача се свежда до минимизиране на подходящ функционал в хилбертово пространство. За приближено намиране на обобщено решение се използват методите на ортонормираните редове, на Риц и на Галеркин. След това теорията за съществуване на минимум на квадратичен функционал в хилбертово пространство се обобщава за определен клас функционали в рефлексивно Банахово пространство, като се развива диференциалното смятане на изображения в Банахови пространства и се изучават резултати от теорията за критичните точки на функционали в тези пространства. Включени са примери за намирането на решения на гранични задачи за линейни и за нелинейни обикновени или частни диференциални уравнения. В упражненията изложената теория се прилага към редица задачи от физиката.

Предварителни изисквания:

Изискват се знания в рамките на задължителните дисциплини по Линейна алгебра, ДИС 1, ДИС 2, Математически анализ 1, Математически анализ 2, Диференциални уравнения, Частни диференциални уравнения /или Уравнения на математическата физика/ от Бакалавърските степени на обучение на различните специалности в ФМИ, и владеене на техниките от теорията за пространства на Соболев. Знания за свойствата на банаховите пространства и линейните оператори в тях от изборни курсове по Функционален анализ са полезни при усвояване на материала на дисциплината. Студентите трябва да могат да четат математически текстове на английски или руски език.

Очаквани резултати:

Студентите да изучат основни теми от класическата теория за намирането на обобщено решение на гранична задача чрез свеждане до минимизиране на подходящ функционал в хилбертово пространство, а също и за конструиране на приближения на обобщеното решение по методите на ортонормираните редове, на Риц и на Галеркин. Да усвоят умения за прилагане на вариационни методи за решаване на практически задачи от физиката. Да придобият представа за изследване

[1] В зависимост от спецификата на учебната дисциплина и изискванията на преподавателя е възможно да се добавят необходимите форми, или да се премахнат ненужните.

на задачи за някои класове нелинейни диференциални уравнения с използване на теорията за критичните точки на функционали в Банахови пространства.

Учебно съдържание

№	Тема:	Хорариум
1	Уравнението $Au = f$ и минимума на функционала $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$, където $A: D_A \to H$ е линеен, симетричен и положителен оператор, D_A е навсякъде гъсто подпространство на хилбертово пространство H. Дефиниция и свойства на пространството H_A. Съществуване на ортонормирани базиси в H_A и H от елементи на D_A. Пространството H_A за задачите на Дирихле и Нойман за уравнението на Поасон с хомогенни гранични условия.	10 + 6
2	Съществуване и единственост на минимум в H_A на функционала $F(u) = \langle u, u \rangle_A - 2(f, u)$. Обобщено решение от H_A на уравнението $Au = f$. Методи на Риц, Галеркин и ортонормираните редове за приближено намиране на минимума на функционала $F(u)$. Приложение към задачи за огъване и за усукване на прът.	9 + 6
3	Приложение на метода на Галеркин за доказване на съществуване на обобщено решение за задачата на Дирихле за равномерно елиптично уравнение от втори ред с хомогенно гранично условие. Обобщение за решаване на първа гранична задача за едно хиперболично частно диференциално уравнение от втори ред.	2 + 3
4	Обобщение на задачата за намиране на минимум на квадратичния функционал. Приложение за решаване на гранични задачи за диференциални уравнения с нехомогенни гранични условия.	3 + 3
5	Диференциално смятане в нормирано пространство, критични точки на функционали. Потенциали, монотонни оператори, изпъкнали функционали. Уравнението $Au = f$ и функционалът $F(u) - f(u)$, където $A: X \to X^*$ е потенциален оператор с потенциал F, X е нормирано пространство и X^* е неговото дуално пространство.	11 + 6
6	Минимизиране на слабо полунепрекъснати отдолу функционали върху секвенциално слабо затворени множества в рефлексивно Банахово пространство X. Съществуване и единственост на решение на уравнението $Au = f$, където $A: X \to X^*$ е ограничен, монотонен, потенциален, коерцитивен оператор. Задача на Дирихле за полулинейни елиптични уравнения. Задача за брахистохроната.	10 + 6

Конспект за изпит

№	Въпрос
1.	Уравнението $Au = f$ и минимума на функционала $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ в D_A, където $A: D_A \to H$ е линеен, симетричен и положителен оператор, D_A е навсякъде гъсто подпространство на хилбертово пространство H. Теорема за единственост за уравнението $Au = f$.
2.	Дефиниция и свойства на пространството H_A със скаларно произведение $< u, v >_A$ в случая на линеен, симетричен и положително определен оператор $A: D_A \to H$.
3.	Продължение на функционала $F(u)$, дефиниран в D_A, до функционала $F(u) = < u, u >_A - 2(f, u)$ върху H_A. Съществуване и единственост на минимум на функционала $F(u)$.
4.	Обобщено решение от H_A на уравнението $Au = f$. Връзка с решението от D_A. Непрекъснатата зависмост на обобщеното решение от дясната страна на уравнението.
5.	Достатъчно условие за сепарабелност на H_A. Съществуване на ортонормирани базиси в H_A и H от елементи на D_A.
6.	Построяване на пространството H_A за задачите на Дирихле и Нойман за уравнението на Поасон с хомогенни гранични условия.
7.	Метод на Риц. Приложение за задачата за огъване на прът с неподвижно закрепени краища и променливо напречно сечение при вертикално натоварване.
8.	Метод на Галеркин. Сравняване с метода на Риц .
9.	Метод на ортонормираните редове за намиране на минимума на функционала $F(u)$ в H_A.
10.	Сходимост на редиците от методите на Риц и Галеркин в H_A към обобщеното решение от H_A на уравнението $Au = f$.
11	Приложение на метода на Галеркин за доказване на съществуване на обобщено решение за задачата на Дирихле за равномерно елиптично уравнение от втори ред с хомогенно гранично условие.
12	Обобщение на задачата за намиране на минимум на квадратичния функционал. Приложение за решаване на гранични задачи за диференциални уравнения с нехомогенни гранични условия.
13	Диференциално смятане в нормирано пространство – производни на Фреше и Гато на функционали, критични точки на функционали. Необходимо условие за локален екстремум. Потенциални оператори. Теорема за средните стойности. Връзки между производните на Фреше и Гато.
14	Монотонни оператори и изпъкнали функционали. Връзката между уравнението $Au = f$ и функционала $F(u) - f(u)$, където $A: X \to X'$ е потенциален оператор с потенциал F, X е нормирано пространство и X' е неговото дуално пространство.
15	Слабо сходящи редици и секвенциално слабо затворени множества в Банахови пространства. Слабо полунепрекъснати отдолу (СПНО) функционали. Свойства. Примери. Достатъчни условия за слаба полунепрекъснатост отдолу на изпъкнали функционали.
16	Минимизиращи редици. Коерцитивни функционали. Минимизиране на СПНО функционали върху секвенциално слабо затворени множества в рефлексивно Банахово пространство.

17	Съществуване на решение на уравнението $Au = f$, където $A: X \to X^*$ е ограничен, монотонен, потенциален и коерцитивен оператор, X е рефлексивно Банахово пространство и X^* е неговото дуално пространство. Достатъчни условия за единственост на решението.
18	Задача на Дирихле за полулинейни елиптични уравнения.

Библиография

Основна:

1. Гаевский Х., Грегер К., Захарис К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, Москва, 1978.
2. Ekeland I., Temam R., Convex Analysis and Variational Problems, SIAM edition, 1999.
3. Куфнер А., Фучик С., Нелинейные дифференциальные уравнения, Москва, 1988.
4. Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, Москва, 1973.
5. Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике, Москва, 1985.
6. Renardy M., Rogers R., An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 2004.

Допълнителна:

1. Fonseca I., Giovanni L., Modern Methods in the Calculus of Variations: *Lp* Spaces, Springer, 2007.
2. Weinstock R., Calculus of variations with applications to Physics and Engineering, Dover Publications, 1974.
3. Drabek P., Milota J., Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations, Birkhauser Verlag, 2007 (второ издание 2013).

Съставил: доц. Мария Каратопраклиева

Дата: 07.03.2013