Конспект за изпит по ВММФ за 2014-2015 учебна година

1	Уравнението $Au = f$ и минимума на функционала $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ в D_A, където $A: D_A \to H$ е линеен, симетричен и положителен оператор, D_A е навсякъде гъсто подпространство на хилбертово пространство H. Теорема за единственост за уравнението $Au = f$
2	Дефиниция и свойства на пространството H_A със скаларно произведение $\langle u, v \rangle_A$ в случая на линеен, симетричен и положително определен оператор $A: D_A \to H$.
3	Продължение на функционала $F(u)$, дефиниран в D_A, до функционала $\Phi(u) = \langle u, u \rangle_A - 2(f, u)$ върху H_A. Съществуване и единственост на минимум на функционала $\Phi(u)$.
4	Обобщено решение от H_A на уравнението $Au = f$. Връзка с решението от D_A. Непрекъсната зависимост на обобщеното решение от дясната страна на уравнението.
5	Достатъчно условие за сепарабелност на H_A. Съществуване на ортонормирани базиси в H_A и H от елементи на D_A.
6.	Построяване на пространството H_A за задачите на Дирихле и Нойман за уравнението на Поасон с хомогенни гранични условия.
7.	Метод на Риц. Метод на Галеркин. Сравняване с метода на Риц. Сходимост на редиците от методите на Риц и Галеркин в H_A към обобщеното решение от H_A на уравнението $Au = f$.
8	Приложение на метода на Галеркин за доказване на съществуване на обобщено решение за задачата на Дирихле за равномерно елиптично уравнение от втори ред с хомогенно гранично условие.
9	Диференциално смятане в нормирано пространство – производни на Фреше и Гато на функционали, критични точки на функционали. Необходимо условие за локален екстремум. Потенциални оператори. Теорема за средните стойности. Връзки между производните на Фреше и Гато.
10	Монотонни оператори и изпъкнали функционали. Връзката между уравнението $\boldsymbol{A}u = \boldsymbol{f}$ и функционала $\boldsymbol{F}(u) - \boldsymbol{f}(u)$, където $\boldsymbol{A}: X \to X'$ е потенциален оператор с потенциал $\boldsymbol{F}$, X е нормирано пространство и X' е неговото дуално пространство.
11	Слабо сходящи редици и секвенциално слабо затворени множества в Банахови пространства. Слабо полунепрекъснати отдолу (СПНО) функционали. Свойства. Примери. Достатъчни условия за слаба полунепрекъснатост отдолу на изпъкнали функционали.
12	Минимизиращи редици. Коерцитивни функционали. Минимизиране на СПНО функционали върху секвенциално слабо затворени множества в рефлексивно Банахово пространство.
13	Съществуване на решение на уравнението $\boldsymbol{A}u = \boldsymbol{f}$, където $\boldsymbol{A}: X \longrightarrow X'$ е ограничен, монотонен, потенциален и коерцитивен оператор, X е рефлексивно Банахово пространство и X' е неговото дуално пространство. Достатъчни условия за единственост на решението.
14	Задача на Дирихле за полулинейни елиптични уравнения.

Библиография

Основна:

1) Гаевский Х., Грегер К., Захарис К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, Москва, 1978.
2) Ekeland I., Temam R., Convex Analysis and Variational Problems, SIAM edition, 1999.
3) Куфнер А., Фучик С., Нелинейные дифференциальные уравнения, Москва, 1988.
4) Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, Москва, 1973.
5) Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике, Москва, 1985.
6) Renardy M., Rogers R., An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 2004.

Допълнителна:

1) Weinstock R., Calculus of variations with applications to Physics and Engineering. Dovel Publications, 1974.

Дата: 18.06.2015

Съставил:

/ доц. Мария Каратопраклиева/