Аналитична геометрия (упражнения)

11.10.2018

Д-во (на т-ма 2 от 2 тема на лекции)

(б) $(\lambda.\mu)\vec{u} = \lambda(\mu.\vec{u})$

Лема 1 $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

Д-во:

1 сл. Ако $\vec{u} = \vec{0}$, то $(-1)\vec{u} = (-1).\vec{0} = \vec{0} = -\vec{0} = -\vec{u}$

2 сл. Ако $\vec{u} \neq \vec{0}$, взимаме произв. точка O и нека т.P: $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$

$\exists!$ т.Q върху правата OP: $|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|$ и $\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$

$= 1\,|\overrightarrow{OP}|$, т.е. $\overrightarrow{OQ} = (-1)\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PO} = -\vec{u} = -\overrightarrow{OP}$

$|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PO}|$

$\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PO} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PO}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ □

Лема 2 $(-\lambda)\vec{u} = -(\lambda.\vec{u}) = \lambda(-\vec{u})$

Д-во (използва се (б), което в свой ред не използва лема 2)

$(-\lambda)\vec{u} = ((-1)\lambda)\vec{u} \underset{(б)}{=} (-1)(\lambda.\vec{u}) \underset{\text{лема 1}}{=} -(\lambda\vec{u})$

$(-\lambda)\vec{u} = (\lambda(-1))\vec{u} \underset{(б)}{=} \lambda((-1)\vec{u}) \underset{\text{лема 1}}{=} \lambda(-\vec{u})$ □

Д-во (св-во (б))

1 сл. $\vec{u} = \vec{0}$

$(\lambda.\mu)\vec{u} = (\lambda.\mu)\vec{0} = \vec{0} = \lambda.\vec{0} = \lambda(\mu\vec{0}) = \lambda(\mu.\vec{u})$

2 сл. $\lambda = 0$

$(\lambda.\mu)\vec{u} = (0.\mu)\vec{u} = 0.\vec{u} = \vec{0} = 0(\mu.\vec{u}) = \lambda(\mu.\vec{u})$

3сл. $\mu = 0$

$(\lambda.\mu)\vec{u} = (\lambda.0).\vec{u} = 0.\vec{u} = \vec{0} = \lambda.\vec{0} = \lambda(0.\vec{u}) = \lambda(\mu.\vec{u})$

4сл. Нека $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ и $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Нека т.O е произвална т.P: $\vec{OP} = \vec{u}$

т.Q: $\vec{OQ} = \mu.\vec{u}$

т.R: $\vec{OR} = \lambda.(\mu.\vec{u}) = \lambda.\vec{OQ}$

т.S: $\vec{OS} = (\lambda.\mu)\vec{u} = (\lambda.\mu)\vec{OP}$

$|\vec{OR}| = |\lambda||\vec{OQ}| = |\lambda|(|\mu||\vec{OP}|) = |\lambda||\mu||\vec{OP}|$

$|\vec{OS}| = |\lambda.\mu|.|\vec{OP}| = |\lambda||\mu||\vec{OP}|$

$\Big\} |\vec{OR}| = |\vec{OS}|$

(а) $\lambda > 0, \mu > 0 \Rightarrow \lambda\mu > 0$

$\mu > 0 \Rightarrow \vec{OQ} \uparrow\uparrow \vec{OP}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OQ}$

$\Big\} \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OP}$ (1а)

$\lambda\mu > 0 \Rightarrow \vec{OS} \uparrow\uparrow \vec{OP}$ (2а)

От (1а) и (2а) $\Rightarrow \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OS}$

(б) $\lambda > 0, \mu < 0 \Rightarrow \lambda\mu < 0$

$\mu < 0 \Rightarrow \vec{OQ} \uparrow\downarrow \vec{OP}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OQ}$

$\Big\} \Rightarrow \vec{OR} \uparrow\downarrow \vec{OP}$

$\Big\} \Rightarrow \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OS}$

$\lambda\mu < 0 \Rightarrow \vec{OS} \uparrow\downarrow \vec{OP}$

(в) $\lambda < 0, \mu > 0 \Rightarrow \lambda\mu < 0$

аналогично на (б)

(г) $\lambda < 0, \mu < 0 \Rightarrow \lambda\mu > 0$

$\mu < 0 \Rightarrow \vec{OQ} \uparrow\downarrow \vec{OP}$

$\lambda < 0 \Rightarrow \vec{OR} \uparrow\downarrow \vec{OQ}$

$\Big\} \Rightarrow \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OP}$

$\Big\} \vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OS}$

$\lambda\mu > 0 \Rightarrow \vec{OS} \uparrow\uparrow \vec{OP}$

Във всички случаи $\vec{OR} \uparrow\uparrow \vec{OS}$ и $|\vec{OR}| = |\vec{OS}| \Rightarrow \vec{OR} = \vec{OS}$

$\lambda.\mu.\vec{u} = (\lambda.\mu)\vec{u}$

(7) Доказва 1 сл. Ако $\vec{u}=\vec{0}$

$(\lambda+\mu)\vec{u}=(\lambda+\mu)\vec{0}=\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}=\lambda\vec{0}+\mu\vec{0}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

2 сл. Ако $\lambda=0$

$(\lambda+\mu)\vec{u}=(0+\mu)\vec{u}=\mu\vec{u}=\vec{0}+\mu\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

3 сл. Ако $\mu=0$, анал. на 2 сл.

4 сл. Нека $\lambda\neq 0, \mu\neq 0$ и $\vec{u}\neq\vec{0}$

Нека т. O - произвална. Вземаме т. P: $\overrightarrow{OP}=\vec{u}$

т. Q: $\overrightarrow{OQ}=\lambda\vec{u}$

т. S: $\overrightarrow{QS}=\mu\vec{u}$

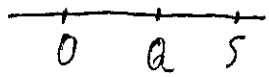
т. T: $\overrightarrow{OT}=(\lambda+\mu)\vec{u}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}$

$\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$ ■

(a) $\lambda>0, \mu>0 \Rightarrow \lambda+\mu>0$

$\left.\begin{array}{l}\lambda>0\Rightarrow\overrightarrow{OQ}\uparrow\uparrow\vec{u}\\ \mu>0\Rightarrow\overrightarrow{QS}\uparrow\uparrow\vec{u}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{OQ}\uparrow\uparrow\overrightarrow{QS}$



$\lambda+\mu>0\Rightarrow\overrightarrow{OT}\uparrow\uparrow\vec{u}$

Точките O, Q и S лежат на една права $\Rightarrow \overrightarrow{OS}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OQ}$, но $\overrightarrow{OQ}\uparrow\uparrow\vec{u}$ и $\overrightarrow{OT}\uparrow\uparrow\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{OS}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OT}$

$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{OT}|=|\lambda+\mu|\,|\overrightarrow{OP}|=(\lambda+\mu)|\overrightarrow{OP}|=(\lambda+\mu)|\vec{u}|\\ |\overrightarrow{OS}|=|\lambda|\,|\vec{u}|+|\mu|\,|\vec{u}|=(\lambda+\mu)|\vec{u}|\end{array}\right\}\Rightarrow|\overrightarrow{OT}|=|\overrightarrow{OS}|$

(б) $\lambda<0, \mu<0\Rightarrow\lambda+\mu<0$

$(\lambda+\mu)\vec{u}=((-(\lambda+\mu))(-\vec{u})=((-\lambda)+(-\mu))(-\vec{u})\overset{(a)}{=}(-\lambda)(-\vec{u})+(-\mu)(-\vec{u})=$ (лема 2)

$\overset{\text{л.2}}{=}(-(-\lambda))\vec{u}+(-(-\mu))\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

(в) $\lambda>0, \mu<0$

(в1) $\lambda+\mu=0 \Rightarrow \lambda=-\mu$

$(\lambda+\mu)\vec{u} = \vec{0} = \lambda\vec{u} + (-(\lambda\vec{u})) \underset{\text{л.2}}{=} \lambda\vec{u} + (-\lambda)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

(в2) $\lambda+\mu>0$

Нека $\nu = \lambda+\mu$. $\nu>0$ и $(-\mu)>0$. Прилагаме сл. (а) за положителните числа ν и $-\mu$:

$(\nu + (-\mu))\vec{u} = \nu\vec{u} + (-\mu)\vec{u}$

$(\lambda+\mu+(-\mu))\vec{u} = (\lambda+\mu)\vec{u} + (-\mu)\vec{u}$

$\lambda\vec{u} = (\lambda+\mu)\vec{u} + (-\mu)\vec{u} \quad | \cdot + \mu\vec{u}$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{u} = (\lambda+\mu)\vec{u} + \underbrace{(-\mu)\vec{u} + \mu\vec{u}}_{\vec{0}} = (\lambda+\mu)\vec{u}$

(в3) $\lambda+\mu<0$

Нека $\nu = -(\lambda+\mu) > 0$

Прилагаме (а) за ν и λ:

$(\nu + \lambda)\vec{u} = \nu\vec{u} + \lambda\vec{u}$

$(-(\lambda+\mu)+\lambda)\vec{u} = (-(\lambda+\mu))\vec{u} + \lambda\vec{u}$

$(-\mu)\vec{u} = -(\lambda+\mu)\vec{u} + \lambda\vec{u} \quad | \cdot + \mu\vec{u}$

$(-\mu)\vec{u} + \mu\vec{u} = \vec{0} = -(\lambda+\mu)\vec{u} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \quad | \ (\lambda+\mu)\vec{u} + \cdot$

$(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

(г) $\lambda<0, \mu>0$ е аналогично

□

Опр. Нека V е лин. пр. над $\mathbb{R}$. Нека $v_1, \ldots, v_k \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогава вектора $\vec{u} = \lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_k\vec{v_k}$ се нарича линейна комбинация на векторите $v_1, \ldots, v_k$ с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Опр. Казваме, че векторите $v_1, \ldots, v_k \in V$ са линейно зависими, ако $\vec{0}$ може да се представи като линейна комбинация на $v_1, \ldots, v_k$, където поне един коефициент е различен от 0.

$\exists \lambda_1, \dots \lambda_k$, $\lambda_i \neq 0 : \vec{0} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

Пр.1 $\vec{OP}$ и $\vec{PO}$ са лин. зависими, тъй като $1.\vec{OP} + 1.\vec{PO} = \vec{0}$

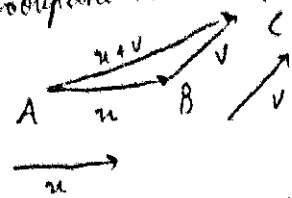
Опр. Казваме, че $v_1, \dots v_k$ са линейно независими, ако не са линейно зависими

Тв.1 $v_1, \dots v_k$ са лин. независими $\Leftrightarrow \lambda_1 . v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$ само при $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

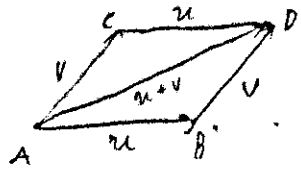
Тв.2 Векторът v е лин. зависим $\Leftrightarrow v = \vec{0}$. Ако $v \neq \vec{0}$, той е линейно независим.

13.10.2018

Събиране на вектори

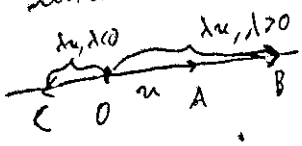


правило на триъгълника



правило на успоредника

Умножение на вектор с число



Колинеарност:

$a \parallel b \Leftrightarrow a$ и b са успоредни $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \lambda b \Leftrightarrow$

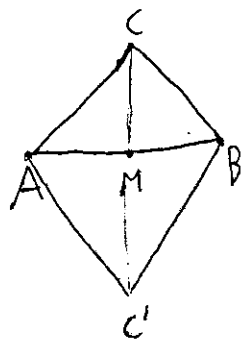
$\Leftrightarrow a$ и b са лин. зависими

Зад. 1 Нека A, B, C са произвални точки. т. M – среда на AB.

Да се докаже, че $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

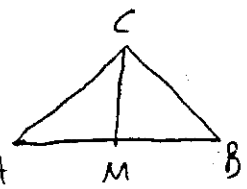
Д-во (1 начин) Нека т. C' : $ACBC'$ е успоредник.

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, но т. M разполовява диагоналите $\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ □



Д-во (2 начин) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AM}$

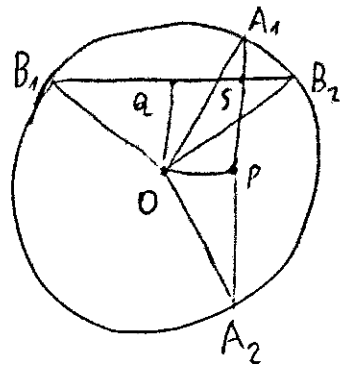
$2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ □



Зад.2 Нека $K(O,r)$ е окръжност и $A_1A_2 \perp B_1B_2$, $A_1A_2 \cap B_1B_2 = \{S\}$ и A_1A_2 и B_1B_2 са хорди. Докажете, че $\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{SB_1} + \overrightarrow{SB_2} = 2\overrightarrow{SO}$

Д-во Нека P е средата на A_1A_2, т.е.

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2})$



Нека Q е средата на B_1B_2, т.е.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2})$

$\sphericalangle OQS = \sphericalangle OPS = \sphericalangle QSP = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OPSQ$ - правоъгълник

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2})$

$2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}$

$-2\overrightarrow{OS}$

$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA_1}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA_2}$

$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB_1}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB_2}$

$-2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB_1} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB_2} = 4\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{SB_1} + \overrightarrow{SB_2}$

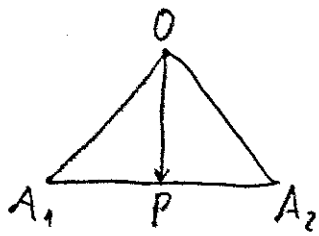
$\Rightarrow 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{SB_1} + \overrightarrow{SB_2}$

□

Зад.3 т. A_1, A_2, O, $A_1 \neq A_2$

Да се докаже, че $P \in A_1A_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2}$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Д-во $P \in A_1A_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in [0,1]: \overrightarrow{A_1P} = \alpha \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$ (1)



$\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_1}$ (2)

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ (3)

От (1), (2) и (3) $\Rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA_2} - \alpha\overrightarrow{OA_1}$

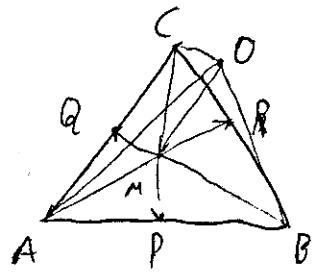
$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA_2} + (1-\alpha)\overrightarrow{OA_1}$

Полагаме $\left.\begin{matrix}\lambda_1 = 1-\alpha \\ \lambda_2 = \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OP}$

Зад. 4 $\triangle ABC$; $\overrightarrow{AC} = a$, $\overrightarrow{CB} = b$; P, Q, R - среди на $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$

(а) Да се изразят векторите $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{QB}$ и $\overrightarrow{RA}$ чрез a и b.

(б) Да се докаже, че за произвольна точка O $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, където M е медицентърът на $\triangle ABC$



Решение

(а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = a + b$

$\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{PB} = \frac{b-a}{2}$

$\overrightarrow{CB} = b$, $\overrightarrow{PB} = \frac{a+b}{2}$

$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CB} = \frac{a+2b}{2}$

$\overrightarrow{QC} = \frac{a}{2}$, $\overrightarrow{CB} = b$

$\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CA} = -\frac{2a+b}{2}$

$\overrightarrow{RC} = -\frac{b}{2}$, $\overrightarrow{CA} = -a$

(б) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}) =$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})$

Тъй като M е медицентър, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AR} = \frac{2a+b}{3}$

$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BQ} = -\frac{a+2b}{3}$

$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP} = \frac{b-a}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

□

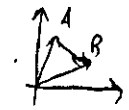
25.10.2018

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} =$

$= \vec{OB} + (-1)(\vec{OA}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AB}(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$



$A(x_1, x_2)$

$B(y_1, y_2)$

Зад. 1 $A(1,0,2)$

$B(3,7,-5)$

$AB = ?$

Решение $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2,7,-7)^T$

↓

O е ~~[illegible]~~ център на координатната система

Зад. 2 $A(0,1,2)$

$\vec{AB}(3,7,5)$

$\vec{BC}(-2,3,8)$

$C = ?$

Решение $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = (1,11,15)^T$

Зад. 3 Да се намерят координатите на медицентъра M на $\triangle ABC$, където $A(1,0,3)$, $B(1,2,0)$, $C(7,-5,6)$

Решение Нека O е началото на координатната система

$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ (зад. 4 от 18.10.2018)

$\Rightarrow \vec{OM}(3,-1,3)$

Зад. 4 Да се докаже, че ако M е медицентър на $\triangle ABC$, то

$M\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$

Решение $\forall$ т. Q е в сила $\vec{QM} = \frac{1}{3}(\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC})$

$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, където O е центърът на координатната система

$\Rightarrow \vec{OM}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$ □

Зад. 5 $A(2,-1)$ Да се намерят координатите на т. B и C, ако

$M(0,5)$ M е медицентър, а N е среда на BC в $\triangle ABC$.

$N(-1,8)$

Решение Нека $B(b_x, b_y)$; $C(c_x, c_y)$

$\overrightarrow{BC}(c_x - b_x, c_y - b_y) = 2\overrightarrow{BN}(-1 - b_x, 8 - b_y)$

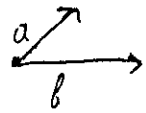
$\Rightarrow \begin{cases} c_x = -b_x - 2 \\ c_y = -b_y + 16 \end{cases}$ удовлетворяват условието на задачата

08.11.2018 Скаларно произведение

a, b - вектори

Ако $a = \vec{0}$ или $b = \vec{0}$, то $\langle a, b \rangle = 0$

Ако $a \neq \vec{0}$ и $b \neq \vec{0}$, то $\langle a, b \rangle = |a||b| \cos \sphericalangle(a, b)$



(1) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

(2) $\langle a+b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$

(3) $\langle \lambda a, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle$

(4) $a \perp b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0$

(5) $|a|^2 = \langle a, a \rangle$

(6) Ако работим в ортонормирана координатна система, $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Зад. 1 Да се намери $\langle a, b \rangle$, ако $|a| = 2$, $|b| = 1$, $\sphericalangle(a, b) = \frac{\pi}{4}$

Решение $\langle a, b \rangle = |a||b| \cos \sphericalangle(a, b) = \sqrt{2}$

Зад. 2 Имаме a, b, c, $|a| = |b| = 2$, $|c| = 1$, $\sphericalangle(a, b) = \frac{\pi}{3}$, $\sphericalangle(a, c) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(b, c) = \frac{2\pi}{3}$

$\langle a, b \rangle = 2$
$\langle a, c \rangle = 0$
$\langle b, c \rangle = -1$

(а) $p = a + b + c$ - Да се намери $|p|$.

(б) $p = a - 2b + 4c$ - Да се намери $|p|$

Решение (а) $|p|^2 = \langle p, p \rangle = \langle a+b+c, a+b+c \rangle = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) +$
$+ 2(\langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle) = 9 + 2(2 + 0 + (-1)) = 11 \Rightarrow |p| = \sqrt{11}$

(б) $|p|^2 = \langle p, p \rangle = |a|^2 + 4|b|^2 + 16|c|^2 + 2(-2\langle a, b \rangle + 4\langle a, c \rangle - 8\langle b, c \rangle) =$
$= (4 + 16 + 16) + 2(-4 + 4 \cdot 0 + 8) = 44 \Rightarrow |p| = \sqrt{44}$

Зад. 3 Да се докаже косинусовата теорема

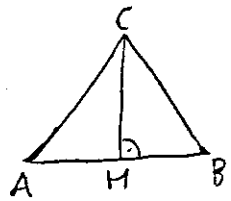
Д-во $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

$|\vec{AB}|^2 = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 + \langle \vec{AC}, \vec{CB} \rangle = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 + |\vec{AC}||\vec{CB}| \cos \sphericalangle(\vec{AC}, \vec{CB}) =$
$= |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 - |\vec{AC}||\vec{BC}| \cos \sphericalangle(\vec{CA}, \vec{CB})$ □

Зад. 4 Даден е триъгълник $\triangle ABC$, където $A(-1,-1,1)$, $B(1,1,2)$, $C(-1,9,-2)$.

Да се намерят координатите на петата на височината през т. C.

Решение



$$\left.\begin{aligned}\vec{CH} &= \vec{CA} + \vec{AH}\\ \vec{AH} &= \lambda\vec{AB}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{CH} = \vec{CA} + \lambda\vec{AB} \quad | \langle \cdot, \vec{AB}\rangle$$

$$0 = \langle \vec{CH}, \vec{AB}\rangle = \langle \vec{CA}, \vec{AB}\rangle + \lambda|\vec{AB}|^2$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{CA}(0,-4,3)\\ \vec{AB}(2,2,1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\langle \vec{CA}, \vec{AB}\rangle &= -5\\ |AB|^2 &= 9\end{aligned}\right\} \Rightarrow -5 + \lambda 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{9}$$

$$\vec{CH} = \vec{CA} + \lambda\vec{AB} = \left(\frac{10}{9}, -\frac{26}{9}, \frac{32}{9}\right) \Rightarrow \text{т.} H\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{14}{9}\right)$$

Зад. 5 Да се докаже, че векторите $a+b$ и $a-b$ за произволни ($|a|=|b|$) вектори a и b са перпендикулярни.

Д-во $\langle a+b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle + \underbrace{\langle b,a\rangle - \langle a,b\rangle}_{=0} - \langle b,b\rangle = |a| - |b| = 0$

$\Rightarrow (a+b) \perp (a-b)$. □

Зад. 6 Да се докаже, че за произвални точки A, B, C и D е в сила

$$\langle \vec{AB}, \vec{CD}\rangle + \langle \vec{BC}, \vec{AD}\rangle + \langle \vec{CA}, \vec{BD}\rangle = 0$$

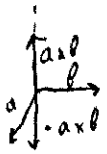
Д-во Нека O е произвална

$$\langle \vec{AO}+\vec{OB}, \vec{CO}+\vec{OD}\rangle + \langle \vec{BO}+\vec{OC}, \vec{AO}+\vec{OD}\rangle + \langle \vec{CO}+\vec{OA}, \vec{BO}+\vec{OD}\rangle =$$

$$= \langle \vec{AO}, \vec{CO}\rangle - \langle \vec{AO}, \vec{DO}\rangle - \langle \vec{BO}, \vec{CO}\rangle + \langle \vec{BO}, \vec{DO}\rangle +$$
$$+ \langle \vec{BO}, \vec{AO}\rangle - \langle \vec{BO}, \vec{DO}\rangle - \langle \vec{CO}, \vec{AO}\rangle + \langle \vec{CO}, \vec{DO}\rangle +$$
$$+ \langle \vec{CO}, \vec{BO}\rangle - \langle \vec{CO}, \vec{DO}\rangle - \langle \vec{AB}, \vec{BO}\rangle + \langle \vec{AO}, \vec{DO}\rangle = 0$$

15.11.2018 Векторно произведение

$\underbrace{a \times b}_{\text{вектори}} = c$



1) $a \times b \perp a$
   $a \times b \perp b$
2) $|a \times b| = |a||b| \sin \sphericalangle(a,b)$
3) $(a, b, a \times b) \in S^+$
   положително ориентирани бази

Свойства:

1) $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$
2) $(\lambda b) \times c = \lambda (b \times c)$
3) $a \times b = - b \times a$
4) Двойно векторно произведение
   $(a \times b) \times c = b \langle a, c \rangle - a \langle b, c \rangle$
   $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$
5) Лицето на успоредник, построен в-ху a и b, S, е равен на $S = |a \times b|$
   Лицето на триъгълник, построен в-ху a и b, $S_\Delta = \frac{|a \times b|}{2}$
6) $K = Oxyz$ - ортонормирана
   $a(a_1, a_2, a_3)$
   $b(b_1, b_2, b_3)$
   $a \times b \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

Смесено произведение

$\langle a, b, c \rangle := \langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$

Свойства:

1) $\langle a_1 + a_2, b, c \rangle = \langle a_1, b, c \rangle + \langle a_2, b, c \rangle$
2) $\langle \lambda a, b, c \rangle = \lambda \langle a, b, c \rangle$
3) $\langle a, b, c \rangle = \langle b, c, a \rangle = \langle c, a, b \rangle = - \langle b, a, c \rangle$
   $\langle b, a, c \rangle = + \langle c, b, a \rangle = \langle a, c, b \rangle$
4) Обемът на паралелепипед, построен в-ху a, b, c, е $V = |\langle a, b, c \rangle|$
   Обемът на тетраедър, построен в-ху a, b, c, е $V = \frac{|\langle a, b, c \rangle|}{6}$

5) a, b, c са компланарни $\Leftrightarrow \langle a,b,c\rangle = 0$

6) $a(a_1, a_2, a_3)$
$b(b_1, b_2, b_3)$
$c(c_1, c_2, c_3)$

$$\langle a,b,c\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

7) Детерминанта на Грам

$$(\langle a,b,c\rangle)^2 = \begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \\ \langle c,a\rangle & \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle \end{vmatrix}$$

Зад 1 Даден са вектори a, b, c и т. A, B, C, D

$\vec{AB} = (a \times b) \times c$
$\vec{BC} = (b \times c) \times a$
$\vec{CD} = (c \times a) \times b$

Да се докаже, че $D \equiv A$.

Решение

$D \equiv A \Leftrightarrow \vec{DA} = \vec{0} = \vec{AD}$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = b\langle a,c\rangle - a\langle b,c\rangle + c\langle b,a\rangle - b\langle c,a\rangle + a\langle c,b\rangle - c\langle a,b\rangle = \vec{0}$$

$\Rightarrow A \equiv D$ □

Зад. 2 a, b, c – вектори ; $|a| = |b| = |c| = 1$

$\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(b,c) = \sphericalangle(c,a) = \frac{\pi}{3}$

(а) Да се докаже, че a, b и c са линейно независими

(б) Нека $\vec{OA} = b + c$; $\vec{OB} = c + a$; $\vec{OC} = a + b$. Да се намери обемът на тетраедъра V_{OABC}

Решение

(а) a, b, c са линейно независими $\Leftrightarrow a, b, c$ не са компланарни $\Leftrightarrow \langle a,b,c\rangle \neq 0$.

Ще пресметнем детерминантата на Грам :

$$|\langle a,b,c\rangle|^2 = \det\begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle b,a\rangle & \langle c,a\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle & \langle c,b\rangle \\ \langle a,c\rangle & \langle b,c\rangle & \langle c,c\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \underset{1}{\langle a,a\rangle}\underset{1}{\langle b,b\rangle}\underset{1}{\langle c,c\rangle} + \underset{\frac12}{\langle b,a\rangle}\underset{\frac12}{\langle c,b\rangle}\underset{\frac12}{\langle a,c\rangle} + \underset{\frac12}{\langle c,a\rangle}\underset{\frac12}{\langle a,b\rangle}\underset{\frac12}{\langle b,c\rangle} - \underset{\frac12}{\langle c,a\rangle}\underset{1}{\langle b,b\rangle}\underset{\frac12}{\langle a,c\rangle} - \underset{\frac12}{\langle c,b\rangle}\underset{\frac12}{\langle b,c\rangle}\underset{1}{\langle a,a\rangle} - \underset{\frac12}{\langle c,c\rangle}\underset{\frac12}{\langle b,a\rangle}\underset{1}{\langle a,b\rangle}$$

$$= 1 + \frac18 + \frac18 - \frac14 - \frac14 - \frac14 = \frac12 > 0$$

(б) $V_{OABC} = \dfrac{|\langle \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\rangle|}{6}$; $\langle \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\rangle = \langle b+c, c+a, a+b\rangle =$

$$= \langle b,c,a\rangle + \underset{0}{\langle b,c,b\rangle} + \underset{0}{\langle b,a,a\rangle} + \underset{0}{\langle b,a,b\rangle} + \underset{0}{\langle c,c,a\rangle} + \underset{0}{\langle c,c,b\rangle} +$$

$$+ \underset{0}{\langle c,a,a\rangle} + \langle c,a,b\rangle = \langle b,c,a\rangle + \langle c,a,b\rangle = 2\langle a,b,c\rangle$$

$\langle a,b,c\rangle = \pm\sqrt{\frac12}$

(от предишната подточка)

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{\sqrt2}{6}$$

Зад. 3 a, b, c – вектори

$|a| = |b| = |c| = 2$

$\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(b,c) = \frac{\pi}{3}$

$\sphericalangle(a,c) = \frac{\pi}{2}$

$(a,b,c) \in S^+$

т. O, A, B и C

$\vec{OA} = (a \times b) \times (b \times c)$

$\vec{OB} = (a \times b) \times c + a$

$\vec{OC} = a \times b$

Търси се V_{OABC}

Решение

$$V_{OABC} = \frac{|\langle \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} \rangle|}{6}$$

$$\vec{OA} = (a \times b) \times \underbrace{(b \times c)}_{d} = |a \times b| \times d = b\langle a, d\rangle - a\langle b, d\rangle = b\langle a, b \times c\rangle - a\langle b, b \times c\rangle =$$

$$= b\langle a, b, c\rangle - a\underbrace{\langle b, b, c\rangle}_{0} = b\langle a, b, c\rangle$$

$$(\langle a, b, c\rangle)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle b,a\rangle & \langle c,a\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle & \langle c,b\rangle \\ \langle a,c\rangle & \langle b,c\rangle & \langle c,c\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle + \langle b,a\rangle\langle c,b\rangle\langle a,c\rangle + \langle c,a\rangle\langle a,b\rangle\langle b,c\rangle -$$

$$- \langle c,a\rangle\langle b,b\rangle\langle a,c\rangle - \langle c,b\rangle\langle b,c\rangle\langle a,a\rangle - \langle c,c\rangle\langle b,a\rangle\langle a,b\rangle =$$

$$= \underset{4}{|a|^2}\underset{4}{|b|^2}\underset{4}{|c|^2} + \underset{2}{\langle a,b\rangle}\underset{0}{\langle a,c\rangle}\underset{2}{\langle b,c\rangle})^2 - \underset{4}{|a|^2}\underset{4}{\langle b,c\rangle^2} - \underset{4}{|b|^2}\underset{0}{\langle a,c\rangle^2} - \underset{4}{|c|^2}\underset{4}{\langle a,b\rangle^2} =$$

$$= 4^3 - 16 - 16 = 32$$

$$\Rightarrow \langle a,b,c\rangle = \pm\sqrt{32}$$

Ако предположим, че (a,b,c) е положително ориентирана база,

$$\langle a,b,c\rangle = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \vec{OA} = \sqrt{32}\, b$$

$$\vec{OB} = (a \times b) \times c + a = b\underset{0}{\langle a,c\rangle} - a\underset{2}{\langle b,c\rangle} + a = -a$$

$$\langle \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\rangle = \langle 4\sqrt{2}\, b, -a, a \times b\rangle = \ldots = -4\sqrt{2}\langle b, a, a \times b\rangle =$$

$$= \ldots - 4\sqrt{2}\langle b \times a, a \times b\rangle = 4\sqrt{2}\,|a \times b|^2$$

$$|a \times b| = |a||b|\sin\sphericalangle(a,b) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\rangle = \overset{48\sqrt{2}}{\ldots} \Rightarrow V_{OABC} = \frac{48\sqrt{2}}{6} = 8\sqrt{2}$$

Зад. 4 a, b - вектори; т. A, B, C и O

$|a| = \sqrt{2}$; $|b| = 2$; $\sphericalangle(a,b) = \frac{\pi}{4}$

$\vec{OA} = (a \times b) \times b$; $\vec{OB} = a \times b$; $\vec{OC} = b + a$

(а) Нека H е петата на височината през т. O на $\triangle OAC$. Да се изрази $\vec{OH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$

(б) Да се намери S_{OAC}

(в) Да се намери V_{OABC}

Зад. 5 $ABCD$ - успоредник

$\vec{CB} = \vec{a}$

$\vec{ED} = \vec{b}$

$\{O\} = AC \cap BD$, а M и N са медицентрове на $\triangle COD$ и $\triangle COB$

(а) Да се изразят векторите $\vec{CA}$, $\vec{CN}$, $\vec{MN}$ и $\vec{OB}$ чрез a и b

(б) $\vec{MN}$ и $\vec{OB}$ са колинеарни (да се докаже)

Зад. 6 $K = Oxyz$ е ортонорм.

$A(1,3,7)$

$B(0,1,1)$

$C(-2,0,1)$

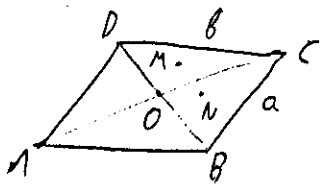
$D(3,1,0)$

(а) Да се докаже, че A, B, C и D лежат в една равнина

(б) — // — AC и BD са успоредни

22.11.2018

Зад. 1 (зад. 5 от миналия път)



$ABCD$ - успоредник

$\vec{CB} = a$

$\vec{CD} = b$

$O = AC \cap BD$

M и N - медицентрове на $\triangle COD$ и $\triangle COB$

(а) $\vec{CM}$, $\vec{CN}$, $\vec{MN}$ и $\vec{DB}$ - да се изразят чрез a и b

(б) Да се докаже, че $\vec{MN}$ и $\vec{DB}$ са колинеарни

Решение (а)

$\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CB} = -\vec{CD} + \vec{CB} = -b + a = a - b$

M - медицентър

Нека P е произволна. Тогава

$\vec{PM} = \frac{1}{3}(\vec{PC} + \vec{PB} + \vec{PD})$

В частност,

$\vec{CM} = \frac{1}{3}(\vec{CC} + \vec{CB} + \vec{CD}) = \frac{1}{3}(\vec{CB} + \vec{CD})$

$\left.\begin{array}{l} \vec{CO} = \frac{1}{2}\vec{CA} \\ \vec{CA} = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{CO} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

$\vec{CM} = \frac{1}{3}(\vec{CO} + \vec{CB}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + b) = \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b$

$\vec{CN} = \frac{1}{3}(\vec{CC} + \vec{CO} + \vec{CB}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b$

$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \vec{CN} - \vec{CM} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$

(б) a и b са колинеарни $\Leftrightarrow a = \lambda b$

$\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{DB} \Rightarrow \vec{MN}$ и $\vec{DB}$ са колинеарни

Зад. 2 (зад. 6 от миналия път)

Ортонорм. координ. система

$A(1,3,2)$

$B(0,1,1)$

$C(-2,0,1)$

$D(3,1,0)$

(а) Да се докаже, че $ABCD$ лежат в една равнина

(б) Да се докаже, че AC и BD (не) са успоредни

(а) $\langle \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \rangle = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= -3 - 3 + 2 - 3 + 1 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ са компланарни

$\Rightarrow A, B, C, D$ лежат в една равнина

(б) $\vec{AC}(-3, -3, -1)$ и $\vec{BD}(3, 0, -1)$ са колинеарни $\Leftrightarrow \vec{AC} \times \vec{BD} = \vec{0}$

$\vec{AC} \times \vec{BD} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & +3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (+3, -6, 9) \neq \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ не са колинеарни.

Прави в равнината

$y = ax + b$

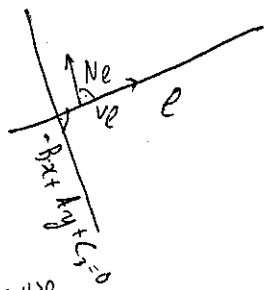
$\ell: Ax + By + C = 0, \ (A, B) \neq \vec{0}$

Нека $\ell: Ax + By + C = 0$. Тогава $n \parallel \ell$ има уравнение $n: Ax + By + C_1 = 0$

$n \perp \ell$ — $\parallel$ — $n: -Bx + Ay + C_2 = 0$

$N_\ell(A, B) \perp \ell$ - нормален

$\vec{v}_\ell(-B, A) \parallel \ell$

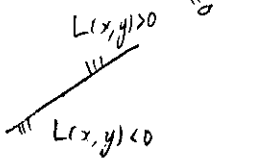


Всички общи уравнения на правата ℓ са от вида $\lambda(Ax + By + C) = 0, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Нека $L(x, y) = Ax + By + C$

$L(a_1, a_2) L(b_1, b_2) > 0 \Leftrightarrow$ точките лежат в една полуравнина

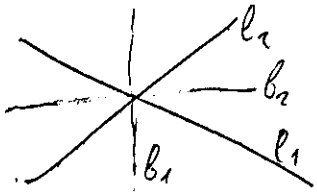
$L(a_1, a_2) L(b_1, b_2) < 0 \Leftrightarrow$ точките лежат в различни полуравнини.



Нормално уравнение: $\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$

Разстоянието от т. $M(m_1, m_2)$ до правата l е $d = \frac{|Am_1 + Bm_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

b_1, b_2 – ъглополовящи на l_1, l_2



$b_{1,2}: \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Зад. 1 $a: 3x + 4y + 2 = 0$

$b: 5x - 12y + 1 = 0$

$A(1, -2)$

$B(0, -1)$

(а) Да се намери l такава, че $l \parallel a$ и $l \ni A$.

(б) Да се намери m: $m \ni B$ и $m \perp b$

(в) Да се намери правата AB

(г) Пропуснато е поради

(д) Разстоянието от т. A до a = ?

Решение (а) $l \parallel a \Leftrightarrow l: 3x + 4y + C = 0$, $C \in \mathbb{R}$

$l \ni A \Leftrightarrow 3.1 + 4.2 + C = 0 \Rightarrow C = 5$,

т.е. $l = 3x + 4y + 5 = 0$.

(б) m, минаваща през B и $m \perp b$

$m \perp b \Leftrightarrow m: 12x + 5y + C = 0$ за $C \in \mathbb{R}$

$m \ni B \Rightarrow 12.0 + 5 + C = 0 \Rightarrow C = +5$ $\Rightarrow m_1: 12x + 5y + 5 = 0$

(в) $т.P \in AB \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y+2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 1 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$

д) $\frac{3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}}=0$ - норм. уравн. на a

$\sqrt{3^2+4^2} = 5$

$d(A,a)=\frac{|3-8+2|}{5}=\frac{3}{5}$

29.11.2018

Зад. 1 (продължение на зад. 1 от 22.11.2018)

$A(1, -2)$

$B(0, -1)$

$a: 3x + 4y + 2 = 0$

$b: 5x - 12y + 1 = 0$

Намерим сме $m: 12x + 5y + 5 = 0$ и $l: 3x + 4y + 5 = 0$.
Да се намерят:
(г) т. B' - ортогонално симетрична на B относно правата a

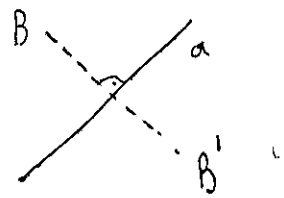
(е) ъглополовяща на правите a и b

(ж) ъгъл между a и b

(з) $t: \begin{cases} z B \text{ инцидентна с } B \\ z\, T = a \cap b \end{cases}$

(и) да се определи положението на т. A и B спрямо правата a.

Решение



(г)

1) Намираме $h: \begin{cases} \perp a \\ z B \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} h \perp a \Rightarrow h: -4x + 3y + C_2 = 0 \\ h \,z\, B \Rightarrow -4 \cdot 0 + 3(-1) + C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h: -4x + 3y + 3 = 0$$

2) Намираме $B_0 = a \cap h$

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 \\ -4x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$$

$25y + 17 = 0 \Rightarrow y = -\frac{17}{25} \Rightarrow 4x = \frac{24}{25} \Rightarrow B_0\left(\frac{6}{25}, -\frac{17}{25}\right)$

3) Търсим B': B_0 е среда на BB'.

$B'(x', y')$

$$B_0\left(\frac{x'+0}{2}, \frac{y'+(-1)}{2}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x' = \frac{12}{25} \\ y' = 1 - \frac{34}{25} = -\frac{9}{25} \end{array} \right. , \text{т.е. } B'\left(\frac{12}{25}, \frac{-9}{25}\right)$$

е) Търсим ъглополовящите на a и b.
Нормални уравнения на a и b:

$$a: \pm\frac{3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0 \quad , \text{т.е. } a: \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} = 0$$

$$b: \pm\frac{5x-12y+1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = 0 \quad , \text{т.е. } b: \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{1}{13} = 0$$

Ъглополовящите на a и b имат уравнения

$$\frac{3x+4y+2}{5} \pm \frac{5x-12y+1}{13} = 0$$

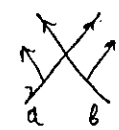
Нека l_1 и l_2 са тези ъглополовящи. Тогава

$$l_{1,2}: 39x + 52y + 26 \pm (25x - 60y + 5) = 0$$

$$l_1: 64x - 8y + 31 = 0$$

$$l_2: 14x + 112y + 21 = 0$$

ж) Търсим ъгълът между a и b



$$\left.\begin{array}{l} N_a(3,4) \\ N_b(5,-12) \end{array}\right\} \text{нормални вектори}$$

$$\cos\sphericalangle(N_a, N_b) = \frac{\langle N_a, N_b\rangle}{|N_a||N_b|} = \frac{15-48}{\sqrt{25}\sqrt{169}} = \frac{-33}{65} \Rightarrow \sphericalangle(N_a, N_b) = \arccos\left(\frac{-33}{65}\right)$$

3) Търсим пресечна $T = a \cap b$

$T: \begin{vmatrix} 3x + 4y + 2 = 0 \\ 5x - 12y + 1 = 0 \end{vmatrix} \cdot 3 \cdot 4 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x + 4y + 2 = 0 \\ 14x + 7 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{8} \Rightarrow T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$

$t: \begin{vmatrix} \in T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right) \\ \in B(0, -1) \end{vmatrix} \Rightarrow t: \begin{vmatrix} x + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \end{vmatrix} = 0$

$t: \begin{vmatrix} x + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \end{vmatrix} = -\frac{7}{8}x - \frac{1}{2}y - \frac{8}{16} = -\frac{7}{8}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$

Умножаваме горното уравнение по $(-4) \Rightarrow t: 7x + 4y + 4 = 0$

а) Означаваме $L_a(x, y) = 3x + 4y + 2$

Пресмятаме $L_a(A)$ и $L_B(B)$:

$L_a(A) = 3 \cdot 1 + 4(-2) + 2 = -3$

$\Rightarrow L_a(A) < 0$

$L_a(B) = 3 \cdot 0 + 4(-1) + 2 = -2$

$\Rightarrow L_a(B) < 0$

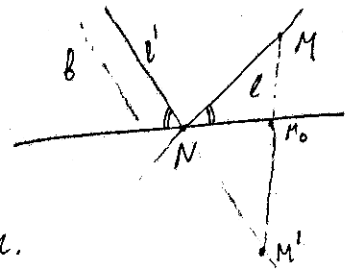
$\Rightarrow L_a(A) L_a(B) > 0$

Следователно т. A и B лежат в една и съща полуравнина относно a.

Зад. 2 $\ell \ni M(2,2)$

$a: x+y=0$

$\ell' \parallel b: x-3y-2=0$



Да се намерят правите, съдържащи позицията (ℓ) и отражения (ℓ') лъч.

Решение

I) Търсим M' ортогонално симетрична на M спрямо a.

1) Намираме $R: \begin{cases} \perp a \\ \ni M \end{cases}$

$R \perp a \Rightarrow -x+y+C=0$

$R \ni M \Rightarrow -2+2+C=0 \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow R: -x+y=0$

2) Намираме $M_0 = R \cap a$.

$M_0: \begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0,0)$

3) $M'(x', y')$

M_0 - среда на $MM' \Rightarrow M_0\left(\frac{2+x'}{2}, \frac{2+y'}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+x'}{2}=0 \\ \frac{2+y'}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow M'(-2,-2)$

II) Търсим $\ell': \begin{cases} \ni M' \\ \parallel b \end{cases}$

$\ell' \parallel b \Rightarrow \ell': x-3y+C_2=0$

$\ell' \ni M' \Rightarrow \begin{cases} -2-3(-2)+C_2=0 \\ -2+6+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow C_2=-4$, т.е. $\ell': x-3y-4=0$

III) Търсим $N = b' \cap a$

$N: \begin{cases} x-3y-4=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow N(1,-1)$

III) $\ell: \begin{vmatrix} \overrightarrow{zM} \\ \overrightarrow{zN} \end{vmatrix} \Rightarrow \ell: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ 1-2 & -1-2 \end{vmatrix} = 0$

$$\ell: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3x + y + 6 - 2 = -3x + y + 4 = 0$$

Зад. 3 Орт. коорд. система, $\triangle ABC$

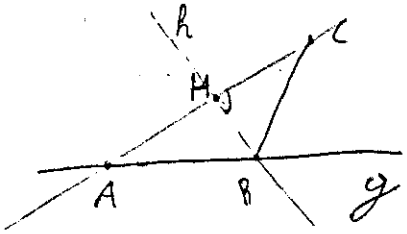
$C(-1,8)$

$H(-2,4)$

$g: x - 2y + 3 = 0$

Да се намерят коорд. на A, B: $A \in g$, $B \in g$, H е петата на височината през B.

Решение



H е петата на височината $\Rightarrow H \in AC$

$\Rightarrow$ правите $AC \equiv HC$.

$$HC: \begin{vmatrix} \overrightarrow{zH} \\ \overrightarrow{zC} \end{vmatrix} \Rightarrow HC: \begin{vmatrix} x+2 & y-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$4x + 8 - y + 4 = 4x - y + 12 \Rightarrow HC: 4x - y + 12 = 0.$

$$T.A: \begin{vmatrix} \overrightarrow{zHC} \\ \overrightarrow{zg} \end{vmatrix} \Rightarrow A = HC \cap g \Rightarrow A: \begin{vmatrix} 4x - y + 12 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{vmatrix} (-2)$$

$$\begin{vmatrix} 4x - y + 12 = 0 \\ -7x - 21 = 0 \quad /(-7) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y = 0 \\ x = -3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow A(-3,0)$

$R: \left| \begin{array}{l} \ni H \\ \perp AC \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} R \perp AC \Rightarrow R: x + 4y + c_0 = 0 \\ R \ni H \Rightarrow -2 + 4.4 + c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = -14 \end{array} \right\} \Rightarrow R: x + 4y - 14 = 0$

$B = R \cap g$

$B: \left| \begin{array}{l} x + 4y - 14 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}, \frac{17}{6}\right)$

Зад.4 $\triangle ABC$

$\left. \begin{array}{l} m_1: 4x + y - 5 = 0 \\ m_2: 2x + y - 1 = 0 \\ m_3: x - 2 = 0 \end{array} \right\}$ медиани в $\triangle ABC$

Да се намерят върховете му, ако се знае, че лицето му е 3.

Решение Нека ~~[illegible]~~ върховете на $\triangle ABC$ имат координати $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$.

Нека M е медицентър $\Rightarrow M: \left| \begin{array}{l} \ni m_2 \\ \ni m_3 \end{array} \right. \Rightarrow M(2, -3)$

От $3\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ получаваме системата

$\left| \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 = 6 \Rightarrow \\ a_2 + b_2 + c_2 = -9 \Rightarrow \end{array} \right.$ (1) $\begin{array}{l} a_1 = 6 - b_1 - c_1 \\ a_2 = -9 - b_2 - c_2 \end{array}$

$C \ni m_3 \Rightarrow c_1 - 2 = 0 \Rightarrow c_1 = 2$

$B \ni m_2 \Rightarrow 2b_1 + b_2 - 1 = 0 \Rightarrow b_2 = 1 - 2b_1$

$A \ni m_1 \Rightarrow 4a_1 + a_2 - 5 = 0 \Rightarrow 4(6 - b_1 - \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{c_1}) + (-9 - \underset{\overset{\shortparallel}{1 - 2b_1}}{b_2} - c_2) - 5 = 0$

$4(4 - b_1) + (2b_1 - c_2 - 10) - 5 = 0$

$\Rightarrow c_2 = -2b_1 + 1$

И така, имаме:

$a_1 = 6 - b_1 - c_1 = 4 - b_1$

$a_2 = -9 - \underset{1-2b_1}{\underset{\parallel}{b_2}} - \underset{1-2b_1}{\underset{\parallel}{c_2}} = 4b_1 - 11$

$b_1 = ?$

$b_2 = 1 - 2b_1$

$c_1 = 2$

$c_2 = b_2 = 1 - 2b_1$

Ще използваме, че $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = 3$ ← ако разгл. A, B и C като точки в пространството, компланарни с Oxy.

Ако $A(a_1, a_2, 0)$
$B(b_1, b_2, 0)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$ има координати
$C(c_1, c_2, 0)$

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 - b_2 & c_2 - b_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_1 - b_1 & c_1 - b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & c_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 & c_2 - b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = |(a_1 - b_1)\overbrace{(c_2 - b_2)}^{0} - (c_1 - b_1)(a_2 - b_2)| =$

$= |(c_1 - b_1)(a_2 - b_2)| = |(2 - b_1)(6b_1 - 12)| = 6(2 - b_1)^2 =$
$= +6b_1^2 - 24b_1 + 24$

По условие $|6b_1^2 - 24b_1 + 24| = 3 \Leftrightarrow 6b_1 - 24b_1 + 21 = 0 \; / 3$

$2b_1 - 8b_1 + 7 = 0$

$\Rightarrow b_1 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 56}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Нека например $b_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow A\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -3 + 2\sqrt{2}\right)$; $B\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -3 - \sqrt{2}\right)$; $C(2, -3 - \sqrt{2})$

Зад. 5 (зад 13 / стр. 98 от сборника на доц. Александров) Дадени са правите $l: x + 3y + 5 = 0$

$m: x + 4y + 3 = 0$

и точката $A(-1, -1)$. Да се намери такава права p, че точката A да е среда на отсечката, чиито краища са пресечните точки на p с l и m.

Зад. 6 (зад. 14) Две от медианите на един триъгълник лежат върху правите $m: x - 3 = 0$ и $n: 2x + y - 6 = 0$, а точката $A(1,2)$ е връх на този триъгълник. Да се намерят координатите на върховете и уравненията на страните на триъгълника

Зад. 7 (зад. 15 / стр. 98) Точката $M(-1,2)$ е пресечната точка на диагоналите на успоредника $ABCD$. Точките $P(-2,1)$; $Q(0,-1)$; $R(-6,0)$, $S(-3,5)$ лежат съответно върху правите AB, BC, CD, DA. Да се намерят уравненията на страните от успоредника.

06.12.2018

Зад. 1 т. $A_1, \dots, A_6$

$B_1, \dots, B_6$

B_1 - среда на A_1A_2

B_2 - среда на A_2A_3

$\vdots$

B_6 - среда на A_6A_1

Да се докаже, че медицентровете на $\Delta B_1B_3B_5$ и $\Delta B_2B_4B_6$ съвпадат

Решение $\vec{OM_1} = \frac{1}{3}(\vec{OB_1} + \vec{OB_3} + \vec{OB_5})$

медицентор на $\Delta B_1B_3B_5$

произволна точка

B_1 - среда на $A_1A_2 \Rightarrow \vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2})$

Аналогично за $B_2, \dots, B_6$.

$\Rightarrow \vec{OM_1} = \frac{1}{6}((\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) + (\vec{OA_3} + \vec{OA_4}) + (\vec{OA_5} + \vec{OA_6})) = \frac{1}{6}((OA_6 + OA_1) + (OA_2 + OA_3) + (OA_4 + OA_5))$

$= \vec{OM_2}$

медицентор на $\Delta B_2B_4B_6$

$\Rightarrow M_1 \equiv M_2$.

Зад. 2 $\alpha_1 = (a \times b) \times a$

$\alpha_2 = b$

Да се провери дали α_1 и α_2 са колинеарни

Решение $\alpha_1 = b\langle a,a\rangle - a\langle b,a\rangle$

$\alpha_1 \times \alpha_2 = (\langle a,a\rangle b - \langle b,a\rangle a) \times b = \langle a,a\rangle \underbrace{(b \times b)}_{\vec{0}} - \langle b,a\rangle (a \times b) = \langle b,a\rangle (b \times a)$

$\Rightarrow \alpha_1 \times \alpha_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \langle a,b\rangle = 0$ или $a \times b = \vec{0}$, т.е. ако a и b са колинеарни или перпендикулярни, то α_1 и α_2 са компланарни.

Зад. 3 $M(3,3)$, $N(-1,5)$ } среди на две от страните в ΔABC

$m: x - 3y + 6 = 0$

$n: \begin{cases} \ni N \\ \perp m \end{cases}$ или $n: \begin{cases} \ni M \\ \perp m \end{cases}$ ← да се провери кое е вярно

Да се намерят уравнения за правите AB, BC и CA

Решение

$M \in m$, тъй като $3 - 3.3 + 6 = 0$

$N \notin m$, тъй като $-1 - 3.5 + 6 = 10 \neq 0$

$\Rightarrow n \ni N$

$n \perp m \Rightarrow n: 3x + y + C = 0$

$N \in n \Rightarrow -3 + 5 - C = 0 \Rightarrow C = -2 \Rightarrow n: 3x + y - 2 = 0$

т. N - среда на AC $\Rightarrow N\left(\frac{a_1 + a_3}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$

-1 $\quad$ 5

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = -2 \\ b_1 + b_3 = 10 \end{cases}$ (1)

т. M - среда на BC $\Rightarrow M\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_3 = 6 \\ b_2 + b_3 = 6 \end{cases}$ (2)

$O = m \cap n$

$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$ (*)

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow O(0,2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}(3,1) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}(9,3)$

$3 - a_1$ $\quad$ $3 - b_1$

$\Rightarrow a_1 = -6, b_1 = 0 \Rightarrow A(-6,0)$ (3)

От (1) и (3) $\Rightarrow$ $a_3 = 4$ (4)
$b_3 = 10$

От (2) и (4) $\Rightarrow$ $a_2 = 2$
$b_2 = -4$

$\Rightarrow$ A(-6, 0)
B(2, -4)
C(4, 10)

$\vec{AB}$ (8, -4)
$\Rightarrow$ $\vec{BC}$ (2, 14)
$\vec{CA}$ (-10, -10)

$\Rightarrow$ $AB: \vec{OA} + \lambda\vec{AB}$
$BC: \vec{OB} + \lambda\vec{BC}$
$CA: \vec{OC} + \lambda\vec{CA}$

Права и равнина в пространството

хиперравнини:
В 3-мерно пространство:
$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$
В 4-мерно:
$\pi: Ax + By + Cz + Dw + E = 0$

свойствата на хиперравнините са предимно аналогични

$N_\pi(A, B, C) \perp \pi$

$v(v_1, v_2, v_3) \parallel \pi \Leftrightarrow Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$

$\pi_1 \parallel \pi \Leftrightarrow \pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$

$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$

Нормално уравнение на равнина:

$$\pi : \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Разстояние от т. $M(m_1, m_2, m_3)$ до π е $\dfrac{|F(m_1, m_2, m_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\pi : \begin{vmatrix} z\,A(a_1, a_2, a_3) \\ z\,B(b_1, b_2, b_3) \\ z\,C(c_1, c_2, c_3) \end{vmatrix} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - a_1 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - a_1 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}$$

Права в пространството:

$$m : \begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{vmatrix}$$

$$g : \begin{vmatrix} z\,A(a_1, a_2, a_3) \\ \parallel v(v_1, v_2, v_3) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow g : \begin{vmatrix} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g : \begin{vmatrix} z\,A(a_1, a_2, a_3) \\ z\,B(b_1, b_2, b_3) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow g : \begin{vmatrix} z\,A \\ \parallel \overrightarrow{AB} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow g: \begin{vmatrix} x = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + \lambda(b_3 - a_3) \end{vmatrix}$

13.12.2018

Зад. 1 $A(3,1,4)$
$B(2,1,3)$
$C(1,2,-1)$
$D(0,-3,2)$

$\beta: x+y-z+1=0$

(а) Да се намери равн. α, минаваща през A, B и C

(б) Права $h: \begin{vmatrix} \ni D \\ \perp \alpha \end{vmatrix}$

(в) [redacted] т. D' - орт. сим. на D спрямо α

(г) Да се намери равн. $\gamma: \begin{vmatrix} \ni D \\ \parallel \beta \end{vmatrix}$

д) $\vec{v}$, компланарен с α и β

(е) Да се намери параметрично уравнение на пресечницата на α и β

(ж) светлинен лъч през т. D, който след отразяването си от α пресича β под прав ъгъл

(з) $\pi_1: \begin{vmatrix} \ni A \\ \perp m \end{vmatrix}$ (пресечницата на α и β)

(и) $\pi_2: \begin{vmatrix} \ni e' \text{ (отразеният в (ж) лъч)} \\ \parallel m \end{vmatrix}$

(й) $\pi_3: \begin{vmatrix} \ni e' \\ \perp \alpha \end{vmatrix}$

Решение (а) $\alpha: \begin{vmatrix} \ni A \\ \ni B \\ \ni C \end{vmatrix} \Leftrightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$=$

$2y-2-z+4-5y+5+x-3=$

$= x-3y-z+4$

$\Rightarrow \alpha: x-3y-z+4=0$

(б) $R: \begin{cases} \supset D \\ \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow R: \begin{cases} \supset D \\ \parallel N_\alpha \end{cases}$

↑ нормален вектор на α

$\Rightarrow R: \left.\begin{array}{l} x = 0 + \lambda.1 \\ y = -3 + \lambda.(-3) \\ z = 2 + \lambda.(-1) \end{array}\right\}$ коорд. на N_α , $\lambda \in \mathbb{R}$

коорд на D

(в) $P_0 = \alpha \cap R \Rightarrow P_0: \begin{cases} x - 3y - z + 4 = 0 \\ x = 0 + \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda + 9 + 9\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0$

$11\lambda + 11 = 0$

$\lambda = -1$

$\Rightarrow D_0(-1, 0, 3)$

$D'(x', y', z')$

D_0 е среда на $DD' \Rightarrow D_0\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'-3}{2}, \frac{z'+2}{2}\right)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x' = -2 \\ y' - 3 = 0 \\ z' + 2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow D'(-2, 3, 4)$

(г) $\gamma: \begin{cases} \supset D \\ \parallel \beta \end{cases}$

$\gamma \parallel \beta \Rightarrow \gamma: x + y - z + D_1 = 0$

$\gamma \supset D \Rightarrow 0 - 2 - (-3) + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = -1$ $\Big\} \Rightarrow \gamma: x + y - z - 1 = 0$

(д) Пропуснати задачи

(e) $m = \alpha \cap \beta \Rightarrow m: \begin{cases} x - 3y - z + 4 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Neka $x = \mu \Rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = z - \mu - 1 \\ z = \mu + 4 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow z = \mu + 4 - 3z + 3\mu + 3$

$\Rightarrow z = \mu + \frac{7}{4}$

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}$

$m: \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \mu + \frac{7}{4} \end{cases}$

(g) Od (e) i $v \parallel m \Rightarrow v(k, 0, k)$, $k \in \mathbb{R}$

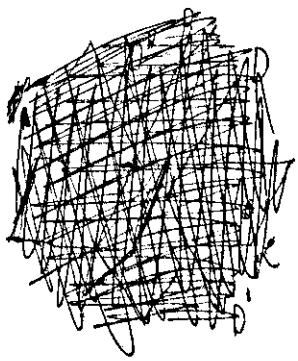
Alternativno, $\alpha: x - 3y - z + 4 = 0$

$\beta: x + y - z + 1 = 0$

$v(v_1, v_2, v_3): \begin{cases} v \parallel \alpha \\ v \parallel \beta \end{cases} \Leftrightarrow v: \begin{cases} v \perp N_\alpha \\ v \perp N_\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - 3v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 = 0 \end{cases}$

$v_3 = k \Rightarrow \begin{cases} v_1 - 3v_2 - k = 0 \\ v_1 + v_2 - k = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow v(k, 0, k)$



(zc) D' – ortogonalno simetrična

$\Rightarrow D' \in e'$; $e' \perp \beta$ i $e' \ni D'$

$\Rightarrow e': \begin{cases} e' \parallel N_\beta \\ e' \ni D' \end{cases} \Rightarrow e': \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

$N = e' \cap \alpha \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - z + 4 = 0 \\ x = -2 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$

$\Rightarrow -2 + 3\lambda - 3(3 + \lambda) - (4 - \lambda) + 4 = 0$

$-11 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -11$

$\Rightarrow N(9, 14, -7)$

$e: \begin{cases} \| D \\ \| N \end{cases} \Rightarrow e: \begin{cases} x = 0 + K \cdot 9 \\ y = -3 + K \cdot 17 \\ z = 2 + K(-9) \end{cases}$

3) $\pi_1: \begin{cases} \| A \\ \perp m \end{cases} \Rightarrow \pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$N_\pi (A, B, C)$,

$N_\pi \| m$ и $m \| v_m \Rightarrow N_\pi (A, B, C) = \lambda v_m (K, 0, K)$

$\Rightarrow A = C$ и $B = 0$

$\| \quad \| \quad K \neq 0$

$\Rightarrow \pi: K(x + z) + D = 0$

$\pi_1 \| A \Rightarrow D = -7K \Rightarrow \pi_1: x + z - 7 = 0$

4) $\pi_2: \begin{cases} \| e' \\ \| m \end{cases}$

$e': \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$

При $\lambda = 1$ получаваме $L_1 (-1, 4, 3)$

$e \| e' \Rightarrow v_{e'} (1, 1, 1)$ и $v_m \| m \Rightarrow v_m (1, 0, 1) \Rightarrow \pi_2: \begin{cases} \| L_1 \\ \| v_{e'} \\ \| v_m \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-4 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x-1-y+4-z+3 \cancel{\quad} -y+4=0$$

$$x-2y-z+10=0$$

ii) $\pi_3: \begin{vmatrix} \supset e' \\ \perp \alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \pi_3: \begin{vmatrix} \supset L_1 \\ \parallel V_{e'} \\ \parallel N_\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \pi_3: \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

20.12.2018

Зад. 1 β: $\begin{cases} \ni A(1,1,1) \\ \parallel d: x-y-z-1=0 \end{cases}$

Решение

$\beta \parallel d \Rightarrow \beta: x-y-z+D=0$

$\beta \ni A \Rightarrow 1-1-1+D=0 \Rightarrow D=1$

$\Rightarrow \beta: x-y-z+1=0$

Зад. 2 ОКС $K=Oxyz$

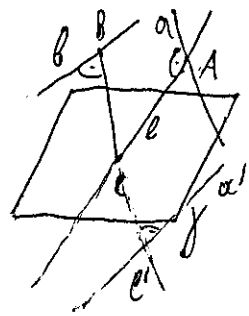
α: $\begin{cases} x=-1-2p \\ y=2-3p \\ z=2p \end{cases}$

β: $\begin{cases} x=6-2q \\ y=-9 \\ z=6+q \end{cases}$

$3x+2y-z-1=0$

ℓ пресича α под прав ъгъл в т. A, отразява се от γ в т. C и отражения лъч ℓ' пресича β под прав ъгъл в т. B

Да се намерят уравненията на ℓ, ℓ' и лицето на $\triangle ABC$.



Решение Нека α' е орт. симетрична на α отн. γ.

Търсим: $A_1 \in \alpha$ при $p=1 \Rightarrow A_1(-3,-1,2)$

$A_2 \in \alpha$ при $p=0 \Rightarrow A_2(-1,2,0)$

Търсим h_1: $\begin{cases} \perp \gamma \\ \ni A_1 \end{cases}$ и h_2: $\begin{cases} \perp \gamma \\ \ni A_2 \end{cases} \Rightarrow h_1$: $\begin{cases} \parallel N_\gamma \\ \ni A_1 \end{cases}$

h_2: $\begin{cases} \parallel N_\gamma \\ \ni A_2 \end{cases}$

$N_\gamma(3,2,-1) \Rightarrow$ h_1: $\begin{cases} x=-3+\lambda_1 3 \\ y=-1+\lambda_1 2 \\ z=2+\lambda_1(-1) \end{cases}$ и h_2: $\begin{cases} x=-1+3\lambda_2 \\ y=2+2\lambda_2 \\ z=0+(-1)\lambda_2 \end{cases}$

$A_1' = \gamma \cap R_1 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ -3 + 3\lambda_1 = x \\ -1 + 2\lambda_1 = y \\ z - \lambda_1 = z \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 1$ и $A_1'(0,1,1)$

$A_2' = \gamma \cap R_2 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ -3 + 3\lambda_2 = x \\ -1 + 2\lambda_2 = y \\ z - \lambda_2 = z \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = 0$ и $A_2' = A_2(-1,2,0)$

$\Rightarrow A_2'' = A_2$ (A_2'' е орт. симетрична на A_2 отн. γ)

A_1' е среда на A_1A_1''. Ако $A_1''(x'', y'', z'') \Rightarrow$

$\Rightarrow 2OA_1' = OA_1 + OA_1'' \Rightarrow OA_1'' = 2OA_1' - OA_1 \Rightarrow A_1''(3, 3, 0)$
$x'' \quad y'' \quad z''$

Правата a': $\begin{cases} 2A_1'' \\ 2A_2'' \end{cases} \Rightarrow a' : OA_1'' + \lambda_3 A_1''A_2''$

$\Leftrightarrow a' : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda_3 \\ y = 3 - \lambda_3 \\ z = 0 \end{cases}$

$\measuredangle(e,a) = \frac{\pi}{2} = \measuredangle(e', a')$

$e' : \begin{cases} \perp a' \\ \perp b \end{cases} \Rightarrow e'$ е ок на правите a' и b

Нека т. F е произвална нефиксирана точка от правата b. $F(6-2q, -9, 6+q)$

Нека т. S е произвална нефиксирана точка от a'.
$\Rightarrow S(3-4\lambda_3, 3-\lambda_3, 0)$
$\vec{FS}(-3-4\lambda_3+2q, 12-\lambda_3, -6-q)$

Искаме $\vec{FS} \perp b$ и $\vec{FS} \perp a'$. Това означава $\vec{FS} \perp \vec{v}_b$ и $\vec{FS} \perp \vec{v}_a$.
$\vec{v}_b = (-2,0,1)$, $\vec{v}_a = (-4,-1,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \vec{FS}, \vec{v}_a \rangle = 0 \\ \langle \vec{FS}, \vec{v}_b \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3-4\lambda_3+2q)\cdot(-2) + (12-\lambda_3)\cdot 0 + (-6-q)\cdot 1 = 0 \\ (-3-4\lambda_3+2q)\cdot(-4) + (12-\lambda_3)(-1) + (-6-q)\cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6+8\lambda_3-4q-6-q=0 \\ 12+16\lambda_3+8q-12+\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{6}+8\lambda_3-5q-\cancel{6}=0 \\ 17\lambda_3+8q=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{5}{8}q \Rightarrow \frac{17\cdot 5}{8}q = -8q$$

$\Rightarrow q=0$ и $\lambda_3=0$

$\Rightarrow F(6,-9,6)$ и $S(3,3,0)$ и $\vec{FS}(-3,12,-6)$

$$\Rightarrow l_1: \begin{cases} x = 6-3\lambda_4 \\ y = -9+12\lambda_4 \\ z = 6-6\lambda_4 \end{cases}$$ и $B \equiv F(6,-9,6)$ и $A' \equiv S(3,3,0)$

$\uparrow$ орт. сим. на A

$$h: \begin{cases} \perp \gamma \\ \supset A' \end{cases} \Rightarrow h \begin{cases} \parallel N_\gamma (3,2,-1) \\ \supset A'(3,3,0) \end{cases}$$

Намираме $A_0 = h \cap \gamma$:

$$\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ x = 3+3\lambda_5 \\ y = 3+2\lambda_5 \\ z = 0-\lambda_5 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow A_0(0,1,1)$$

$\Rightarrow \vec{OA} = 2\vec{OA_0} - \vec{OA'} \Rightarrow A(-3,-1,2)$

Намираме $C = \gamma \cap l' \Rightarrow C: \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ x = 6-3\lambda_4 \\ y = -9+12\lambda_4 \\ z = 6-6\lambda_4 \end{cases} \Rightarrow (\cancel{18}-9\lambda_4)+(-\cancel{18}+24\lambda_4) - (6-6\lambda_4) - 1 = 0$

$\Rightarrow 7+21\lambda_4 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow C(5,-5,4)$

$$\ell: \begin{vmatrix} \perp A \\ \perp C \end{vmatrix} \Rightarrow \ell: \begin{vmatrix} \parallel \vec{AC} \\ \perp A \end{vmatrix} \Rightarrow \ell: \begin{vmatrix} x = -3 + 8\lambda_6 \\ y = -1 - 4\lambda_6 \\ z = 2 + 2\lambda_6 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} AB(9,-8,4) \\ AC(8,-4,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \times AC \left(\begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \parallel \\ 14 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \parallel \\ 28 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{|AB \times AC|}{2} = \frac{\sqrt{14^2 + 28^2}}{2} = \frac{14\sqrt{5}}{2} = 7\sqrt{5}$$

Зад 3

$$g: \begin{vmatrix} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{vmatrix}$$

$$h: \begin{vmatrix} x = -1 \\ y = -1 - 5\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{vmatrix}$$

Да се намери трансверзала t на g и h, за която:

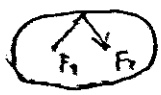
(а) t с $A(1,1,1)$

(б) t с $\alpha: 2x + y - 3z + 6 = 0$

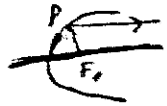
(в) $t \parallel a: \begin{vmatrix} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - 4z + 1 = 0 \end{vmatrix}$

Оптични свойства на конични сечения

Елипса: $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ($P \in k$; F_1, F_2 – фокуси)



Парабола: $d(P, d) = |PF|$ (F – фокус; d – директриса)



Хипербола: $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$

10.01.2019 Канонизация на крива

Алгоритъм

$c: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

I. Намираме на собствените вектори на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

характеристичното уравнение на A: a_{12}''

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ни дава две собствени стойности и системите

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_{12}\alpha_2 + (a_{22}-\lambda_2)\beta_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{cases}$$

ни дават собствените вектори $v_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $v_2(\alpha_2, \beta_2)$

В равнина $v_2(-\beta_1, \alpha_1)$

II. Правим трансформацията $[v_1 | v_2]^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}^{-1}$, т.е.

$T_1: \begin{cases} x = \alpha_1 x' - \beta_1 y' \\ y = \beta_1 x' + \alpha_1 y' \end{cases}$,

III. Получаваме уравнение от вида

$$\ell: \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{13}x' + a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

IV. Правим транслацията $T_2: \begin{cases} x' = x'' + a \\ y' = y'' + b \end{cases}$, намираме a и b, които да анихилират линейните членове и

получаваме $\ell: \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a''_{13}x'' + a''_{23}y'' + a''_{33} = 0$

Ако $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, то $a''_{13} = 0$ и $a''_{23} = 0$

Ако $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, то $\begin{cases} a''_{13} = 0 \\ a''_{33} = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a''_{23} = 0 \\ a''_{33} = 0 \end{cases}$

Зад. 1 Да се канонизира $c: 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 34x + 38y + 65 = 0$

Решение Намираме собствени вектори:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

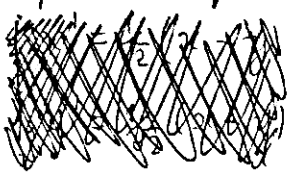
$$(5-\lambda)^2 - 4^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 9 \text{ и } \lambda_2 = 1$$

$$\begin{cases} (5-9)\alpha_1 - 4\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Правим трансформацията



$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

$$\Rightarrow C: 9x'^2 + y'^2 - \frac{34}{\sqrt{2}}(x'+y') + \frac{38}{\sqrt{2}}(-x'+y') + 65 = 0$$

$$C: 9x'^2 + y'^2 - \frac{72}{\sqrt{2}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y' + 65 = 0$$

Правим транслацията

$$\begin{cases} x' = x'' + a \\ y' = y'' + b \end{cases}$$

$$C: 9(x''+a)^2 + (y''+b)^2 - \frac{72}{\sqrt{2}}(x''+a) + \frac{4}{\sqrt{2}}(y''+b) + 65 = 0$$

$$9x''^2 + y''^2 + \left(18a + \frac{72}{\sqrt{2}}\right)x'' + \left(2b + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)y'' + \left(9a^2 + b^2 - \frac{72}{\sqrt{2}}a + \frac{4}{\sqrt{2}}b + 65\right) = 0$$

$$18a = -\frac{72}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$2b = -\frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow C: 9x''^2 + y''^2 - 9 = 0 \Rightarrow C: \left(\frac{x''}{1}\right)^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ с е елипса

Канонични уравнения:

Елипса	Хипербола	Парабола
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
Ако $a^2>b^2$ $F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$ Ако $a^2<b^2$ $F_{1,2}(0,\pm\sqrt{b^2-a^2})$	$F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$	$F(\frac{p}{2},0)$

Зад.2 $4x^2-4xy+y^2+2x-16y-8=0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$4-5\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \Rightarrow$ имаме парабола

$\lambda_2=5$

$$\begin{cases} 4\alpha_1-2\beta_1=0 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1=2\alpha_1 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2=1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ и } \beta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Прилагаме ротацията

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y') \end{cases}$$

$\Rightarrow$ C: $5y'^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)-16\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)-8=0$

$$C: 5y'^2-\frac{30}{\sqrt{5}}x'-\frac{20}{\sqrt{5}}y'-8=0$$

Прилагаме

$$\begin{cases} x'=x''+a \\ y'=y''+b \end{cases}$$

$c: 5(y''+b)^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}(x''+a) - \frac{20}{\sqrt{5}}(y''+b) - 8 = 0$

$c: 5y''^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x'' + (10b - \frac{20}{\sqrt{5}})y'' + 5b^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}a - \frac{20}{\sqrt{5}}b - 8 = 0$

$10b = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$5b^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}a - \frac{20}{\sqrt{5}}b - 8 = 0$

$5\frac{4}{5} - \frac{40}{5} - 8 = \frac{30}{\sqrt{5}}a \Rightarrow a = -\frac{12}{30}\sqrt{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow c: 5y''^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x'' = 0 \Rightarrow c: y''^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x'' = 0$

$\Rightarrow c$ е парабола с параметър $p = \frac{3}{\sqrt{5}}$

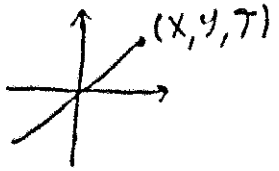
фокусът на c е $F(\frac{3}{2\sqrt{5}}, 0)$ спрямо канонична к.с.

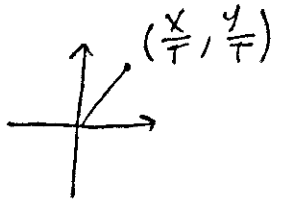
$\begin{cases} x' = \frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3-4}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ y' = 0 + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{2 \cdot 2}{5} = -\frac{9}{10} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5})$ спрямо оригиналната к.с.

17.01.2019 Хомогенни координати





От (x,y) в $K=Oxy$ получаваме хомогенни коорд $(\lambda x, \lambda y, \lambda)$, $\lambda \neq 0$ (в частност, $(x,y,1)$).

С проективни коорд. проектираме цялото пространство в равнината като пуснем права през точката и центъра на коорд. система и вземем проекциите.

Точки от вида $(X,Y,0)$ са безкрайни точки.

$w: t=0$ – безкрайна права

Ако от афинни коорд. на точка в равнината искаме да отидем в ~~[illegible]~~ хомогенни координати, то взимаме 1 като трета координата.

Зад.1 Да намерим безкрайната точка на правата $g: x+y-1=0$.

Решение:

Преобразуваме в хомогенни координати: $\frac{X}{T}+\frac{Y}{T}-1=0$

$\Rightarrow X+Y-T=0$

Безкрайната точка U на правата е пресечната ѝ точка с безкрайната ~~[illegible]~~ права:

$$U: \left| \begin{array}{l} x+y-t=0 \\ t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=-y, \text{ т.е. } U(-y,y,0).$$ В частност,

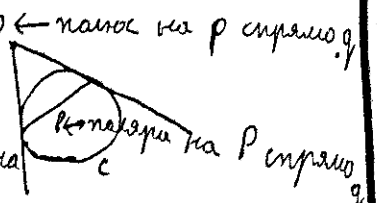
$U(-1,1,0)$.

Зад.2 Търсим правата $l: \left| \begin{array}{l} \parallel g: x+y-t=0 \\ 2\ A(1,2,1) \end{array} \right.$

Решение: $l: \left| \begin{array}{l} 2\ A \\ 2\ U(-1,1,0) \end{array} \right. \Rightarrow l: \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow l: x+y-3t=0$

q - крива от втора степен

π: функция, която съпоставя на точка нейната поляра спрямо q и обратно



Ако $P \in \pi(Q)$, то $Q \in \pi(P)$

Полярата на точка от кривата q е допирателната на q в тази точка.

$$c: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

За да намерим полярата на т. M, първо намираме частните производни

$$F_i(M) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}t$$

Полярата на M е $F_1(M)x + F_2(M)y + F_3(M)t = 0$

Ако $g: Ax + By + Ct = 0$, то намираме полюса на g спрямо q от системата за т. $G(x, y, z)$

$$\begin{cases} F_1(G) = k.A \\ F_2(G) = k.B \\ F_3(G) = k.C \end{cases}$$

Зад. 3 $c: 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 10xt - 70yt + 125t^2 = 0$

$g: 3x - 4y + 5t = 0$

Търсим полярите на пресечните на c и g точки

Решение: Намираме $u = c \cap g$:

$$t = \frac{4y - 3x}{5} \Rightarrow 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8xy + 6x^2 - 56y^2 + 42xy + 80y^2 - 120xy + 45x^2 = 0$$

$$60x^2 - 110xy + 40y^2 = 0 \;/\; 10y^2$$

$$z = \frac{x}{y} \Rightarrow \quad 6z^2 - 11z + 4 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{12} \begin{matrix} \nearrow 4/3 \\ \searrow 1/2 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 = \frac{1}{2}y_1 \\ t_1 = \frac{4y_1 - 3x_1}{5} = \frac{1}{2}y_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_1\left(\frac{1}{2}y_1, y_1, \frac{1}{2}y_1\right) \qquad \left.\begin{matrix} x_2 = \frac{4}{3}y_2 \\ t_2 = \frac{4y_2 - 4y_2}{5} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_2\left(\frac{4}{3}y_2, y_2, 0\right)$$

Намираме полупроизводните на c:

$F_1(M) = 9x - 12y - 5t$

$F_2(M) = 16y - 35t - 12x$

$F_3(M) = -5x - 35y + 125t$

$u_1(1,2,1)$

$u_2(4,3,0)$

Решаваме системата

$$\begin{cases} F_1(u_1) = KA \\ F_2(u_1) = KB \\ F_3(u_1) = KC \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 9 - 24 - 5 = KA \\ -12 + 32 - 35 = KB \\ -5 - 70 + 125 = KC \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -20/K \\ B = -15/K \\ C = 50/K \end{array}$$

$\Rightarrow \pi(u_1): -4x - 3y + 10t = 0$

За $\pi(u_2)$ намираме

$A = 36 - 36 = 0$

$B = 48 - 48 = 0$

$C = -20 - 105 = -125$, т.е.

$\pi(u_2): t = 0$ е безкрайната права

$\Rightarrow \pi(u_i)$ е поляра на пресечна точка на c и g, $i = 1,2$,

Зад. 4 $c: 2xy - 6xt + 4yt - t^2 = 0$

$m: 2y - 5t = 0$

Торсим $\pi(m)$

Решение:

$F_1(M) = y - 3t$

$F_2(M) = x + 2t$

$F_3(M) = -3x + 2y - t$

Решаваме за $M(x,y,z)$

$$\begin{cases} F_1(M) = K.0 & (1) \\ F_2(M) = K.2 & (2) \\ F_3(M) = K.(-5) & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow y = 3t$

$(2) \Rightarrow x + 2t = 2K \Rightarrow x = 2(K - t)$

$(3) \Rightarrow -3.2(K-t) + 2.(3t) - t = -5K$

$-6K + 6t + 6t - t = -5K$

$11t = K \Rightarrow t = \frac{K}{11}$

$\Rightarrow y = \frac{3K}{11}$

$\Rightarrow x = 2(K - \frac{K}{11}) = \frac{20}{11}K$

$\Rightarrow M(\frac{20}{11}K, \frac{3K}{11}, \frac{K}{11})$. В частност, $M(20, 3, 1)$

Зад. 5 $c: x^2 + 3xy - 2y^2 - 6xt + 4yt = 0$

$M(1,2,1)$

$g: x + t = 0$

~~[illegible]~~ $N \in g$ е спрегната с M отн. c.

Да се намерят коорд. на N.

Решение: $N(x,y,z)$

$F_1(N) = x + \frac{1}{2}y - 3t$

$F_2(N) = \frac{1}{2}x - 2y + 2t$

$F_3(N) = -3x + 2y$

Намираме полярата на M:

$F_1(M) = 1$

$F_2(M) = -\frac{1}{2}$

$F_3(M) = 1$

$\Rightarrow \pi(M): 2x - y + 2t = 0$

$N = g \cap \pi(M)$

$\Rightarrow N: \begin{cases} x + t = 0 \\ 2x - y + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ x = t \end{matrix}$

$\Rightarrow N(-t, 0, t)$. В частност, $N(-1,0,1)$.

Зад. 6 $c: 3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5xt + 2yt - 6t^2 = 0$

Да се намерят:

(а) Безкрайната точка на c

(б) Асимптотите на c

(в) Центъра на c

(г) Диаметърът, минаващ през $P(1,0,0)$