КРАТКА ЕЛЕМЕНТАРНА

ГЕОМЕТРІЯ.

(Скратеніе отъ Елементарнѫ-тѫ Геометріѭ на
А. Давидова.)

Отъ

И. Н. ГЮЗЕЛЕВА.

Съ 177 чъртежа въ текстъ-тъ.

Намира ся за продань у Издателя и въ
Книжарницѫ-тѫ на Хр. Г. Дановъ и С$^{-ie}$,
въ
ПЛОВДИВЪ, РУСЧЮКЪ, ВЕЛЕСЪ.
1873.

Въ Прагѫ у книгопечатница Гинекъ Милиткы и Новакъ.

ПРЕДГОВОРЪ.

Настояща-та Кратка Геометрія е скратеніе отъ Елементарнѫ-тѫ Геометріѭ на Давидова. Разумѣва ся, чи бѣше по добрѣ да ся преведе на Българскій языкъ цѣла-та Геометрія на русскія професоръ, нъ по голѣма-та часть отъ главни-тѣ ни училища при сегащно-то си състояніе не може да отдѣли за изучваніе на тъзи наукѫ повече отъ еднѫ годинѫ; затова съкратихъ рѫководство-то на Давидова.

Нъ при скратеніе-то на Геометріѭ-тѫ азъ срѣщнахъ затрудненіе, кое-то е неизбѣжно при такъвъ родъ работѫ; теореми-тѣ въ Геометріѭ-тѫ сѫ тъй тѣсно свързани, що-то изоставяніе-то на коѭ-да-е отъ тѣхъ разваля точно-то доказателство на слѣдующи-тѣ. По тъзи причинѫ бѣхъ принуденъ да измѣнѭ способъ-тъ на доказателство-то на нѣкои теореми; инакъ тѣ щѣха да си останатъ недоказани и Геометрія-та щѣше да изгуби значеніе-то си въ педагогическо отношеніе. Съдържаніе-то на Геометріѭ-тѫ е съобразено съ съдържаніе-то на Физикѫ-тѫ, коя-то съмъ съставилъ; именно при изборъ-тъ на теореми-тѣ съмъ ся ржководилъ отъ тъзи мисьлъ, чи трѣба да ся предпочитатъ тѣзи теореми, безъ кои-то научно-то. преподаваніе на Физикж-тж е невъзможно.

Мислж, чи ще бжде полезно да ся съобразжтъ съ слѣдующи-тѣ двѣ забелѣжки тѣзи отъ учители-тѣ, кои-то би пріели книгж-тж ми за ржководство въ училища-та си. Пьрво, за да може да ся свьрши Геометрія-та удовлетворително за еднж годинж, трѣба да ся назначатъ отъ неж най малко три часа въ неделж-тж; второ, преди да ся начене преподаваніе-то на Геометріж-тж въ нѣкой классъ, ученици-тѣ трѣба да ся запознажтъ съ тъзи наука въ предидущія классъ практически, т. е. да ся даде понятіе на ученици-тѣ за фигури-ти и Геометрически-тѣ тѣла (също и да умѣжтъ да ги исписватъ на дъскж-тж и на книгж) и за измѣрваніе на лица-та и объеми-тѣ (напр. на колко е равно лице-то на трижгълникъ, параллелограммъ, кржгъ и пр.; сжщо — какъ да ся измѣри объемъ-тъ на цилиндръ, сферж и пр.)

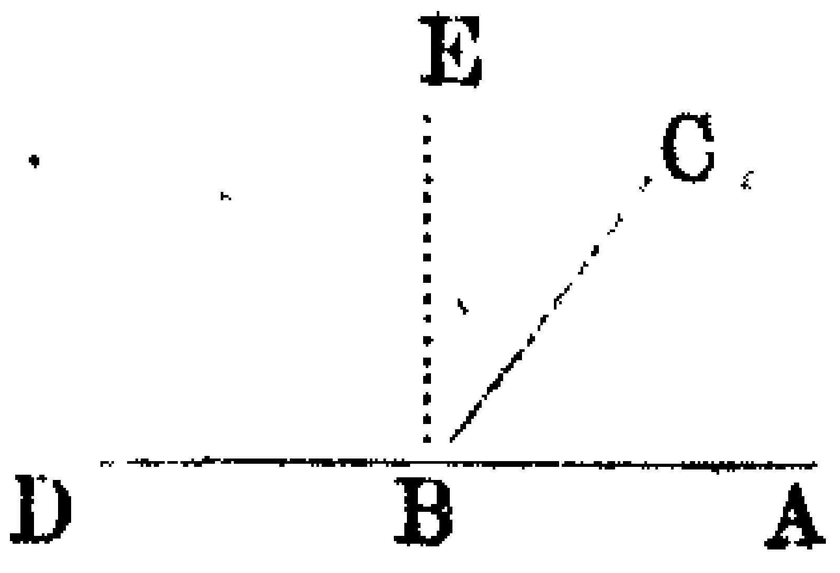
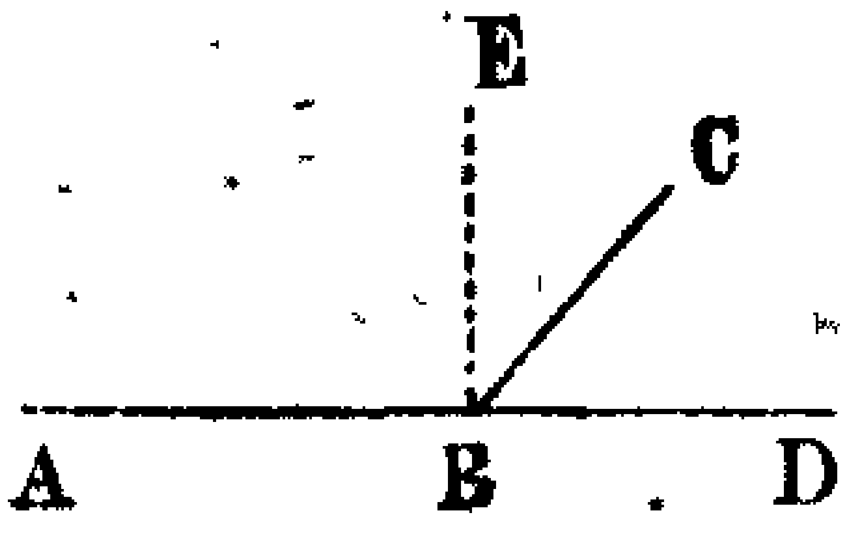
Ако настояще-то ми ржководство послужи за преподаваніе въ главни-тѣ ни училища, то това ще ми даде смѣлость да предпріема съставяніе на еднж краткж елементарнж Алгебрж; защо-то, спорѣдъ мнѣніе-то ми, ній нѣмами още на Българскій язикъ такова ржководство към тъзи наукж, кое-то да има цѣнж въ педагогическо отношеніе

И. Н. ГЮЗЕЛЕВЪ.

Габрово 1873.

ПОГРѢШКИ,

кои-то трѣба да ся исправятъ преди употребление-то на книгѫ-тѫ.

Стр.	рѣдъ	На мѣсто:	Чети:
2	19 (отгорѣ)	защо-то, тогава	защо-то тогава
3	7 (отдолу)	акссіоми	аксіоми
—	8 (отдолу)	истинни	истини
6	2 (отгорѣ)	защо-то, чьрта-та	защо-то чьрта-та
—	6 (отдолу)	защо-то, линіи-тѣ	защо-то линіи-тѣ
8	7 (отгорѣ)	защо-то, $\llcorner A,B,C, > \llcorner ABC$ чети:	защо-то $\llcorner A,B,C, < \llcorner ABC$
10	12 (отгорѣ)	$\llcorner ABC \llcorner \llcorner A,B,C,$	$\llcorner ABC < \llcorner A,B,C,$
11	(Чърт. 13.)		
11	14 (отгорѣ)	защо-то, тогава	защо-то тогава
14	13 (отгорѣ)	оркѫжность	окрѫжность
—	1 (отдолу)	пишиѭтъ	пишѫтъ
15	3 (отдолу)	т. е. $AC \llcorner AB + BC$	т. е. $AC < AB + BC$
17	3 (отгорѣ)	чи точка B,	чи точка B
—	4 (отгорѣ)	и на линіѭ AB и на линіѭ BC — чети:	и на линіѭ A,B, и на линіѭ B,C,
—	7 (отгорѣ)	трижгълникъ ABC	трижгълникъ A,B,C,
18	16 (отгорѣ)	$AB + B + C > A,B, + B,C,$ чети:	$AB + BC > A,B, + B,C,$
21	15 (отгорѣ)	щѣме	щѣше
22	11 (отдолу)	на A a	на A, a
—	6 (отдолу)	напр. E,	напр. въ E,
24	6 (отгорѣ)	Нека AB (Чърт. 38)	Нека AB (Чърт. 39)
29	10 (отгорѣ)	спутснати	спуснати
—	13 (отгорѣ)	двѣ линіи пресѣчени	двѣ линіи, пресѣчени
32	3 (отдолу)	тѣ LM и RQ)	тѣ LM и PQ)
—	2 (отдолу)	на трижгълници ABD	на трижгълници ABC
33	7 (отгорѣ)	и спущами M	и спущами

Стр.	рѣдъ	На мѣсто:	Чети:
34	12 (отгорѣ)	да ся замѣсти ABC	да ся замѣсти съ ABC
36	5 (отгорѣ)	ся наричать	ся нарича
—	8 (отгорѣ)	успорѣдниѫ другѫ-тѫ	другѫ-тѫ успорѣдниѫ
37	8 (отгорѣ)	Суѣщуположни-тѣ	Срѣщуположни-тѣ
—	13 (отгорѣ)	прекараме	прекарвами
39	17 (отгорѣ)	да построимъ на	да построимъ
41	11 (отдолу)	чи въ нѣкоѭ	чи нѣкоя
44	6 (отдолу)	и поголѣмо	и по малко
46	5 (отгорѣ)	защо-то, $\llcorner B = \llcorner D$,	защо-то $\llcorner B = \llcorner B$,
48	2 (отгорѣ)	тогава $\frac{AB}{A,B,} = \frac{BC}{B,G,}$	тогава $\frac{AB}{A,B,} = \frac{BC}{BG}$
—	13 (отгорѣ)	на части пропорціонални — чети:	на части, пропорціонални
49	1 (отдолу)	да съвпдать	да съвпадать
50	14 (отдолу)	$\frac{AB}{A,B} = \frac{BC}{B,C} = \frac{CD}{C,D}$	$\frac{AB}{A,B,} = \frac{BC}{B,C,} = \frac{CD}{C,D,}$
51	6 (отдолу)	въ окрѫжность-тѫ	съ окрѫжность-тѫ
56	11 (отдолу)	$\frac{AB}{xx} = \frac{AOB}{AOE}$	$\frac{AB}{Ax} = \frac{AOB}{AOE}$
57	1 (отгорѣ)	доказва	докарва
59	15 (отгорѣ)	центръ O	центръ Oe
—	9 (отдолу)	ѫгълъ ABD	ѫгълъ ABC
—	8 (отдолу)	на два ѫгъла ABC	на два ѫгъла ABD
61	7 (отдолу)	два правоѫгълни	два равни правоѫгълни
62	12 (отгорѣ)	съ даденѫ	въ даденѫ
64	2 (отгорѣ)	да е тъй	до е тъй
65	5 (отгорѣ)	FC е разлика-та	FG е разлика-та
66	10 (отдолу)	съ него	въ него
—	8 (отдолу)	страна-та,	страна-та
67	1 (отгорѣ)	правоѫгълникъ-тъ	правоѫгълници-тѣ
—	4 (отгорѣ)	Нека ABCD	Нека ABCD и AEFD
72	8 (отдолу)	на правоѫгълнія	на правоѫгълнія триѫгълникъ
73	10 (отдолу)	ABCD	ABCDE
75	1 (отгорѣ)	ADQB	APQB
—	8 (отдолу)	$ALMU + LCTM = APQB = BRSC$ чети:	$ALMU + LCTM = APQB + BRSC$
76	11 (отгорѣ)	$\frac{ABC}{A,B,C,} = \frac{AD \times BD}{A,C, \times B,D,}$ (1)	$\frac{ABC}{A,B,C,} = \frac{AC \times BD}{A,C, \times B,D,}$ (1)
—	12 (отгорѣ)	триѫгълнищи	триѫгълници
77	1 (отдолу)	уворъ	дворъ
79	1 (отгорѣ)	означимъ а	означимъ
—	7 (отдолу)	прави	първи

Стр.	рѣдъ	На мѣсто:	Чети:
80	15 (отдолу)	основж-тж	съ основж-тж
—	13 (отдолу)	ще бжде	ще бжде лице-то
81	13 (отгорѣ)	вписанъ съ кржгъ	вписанъ въ кржгъ
83	11 (отгорѣ)	чи $\triangle ACO = \triangle OCD$	чи $\triangle BCO = \triangle OCD$
86	7 (отгорѣ)	на половина O,D,	на половина Q,D,
88	16 (отгорѣ)	кгто	кьто
—	18 (отгорѣ)	$MG^2=OM^2-2OM\sqrt{AO^2-AG^2+AO^2-AG^2}$ — чети:	$MG^2=OM^2-2OM\sqrt{AO^2-AG^2}+AO^2-AG^2$
—	19 (отгорѣ)	на мѣсто: Слѣд. $AM^2=AG^2+OM^2-2OM\sqrt{AO^2-AG^2+AO^2=AG^2}$ — чети:	Слѣдъ. $AM^2=AG^2+OM^2-2OM\sqrt{AO^2-AG^2}+AO^2-AG^2$
92	14 (отдолу)	и k лице-то му	и K лице-то му
—	13 (отдолу)	чи $k=\pi k^2$	чи $K=\pi k^2$
101	5 (отгорѣ)	имами $60^2=\pi\times^2$	имами $60^2=\pi x^2$
—	4 (отдолу)	слѣд. $\pi=\frac{k}{\sqrt{\pi}}$	слѣд. $x=\frac{k}{\sqrt{\pi}}$
—	3 (отдолу)	кржга е $d+\frac{k}{\sqrt{\pi}}$	кржга е d, то $d+\frac{k}{\sqrt{\pi}}$
102	4 (отдолу)	ся върши	ся върти
103	17 (отгорѣ)	пространство-то	въ пространство-то
105	3 (отдолу)	си въобразими	да си въобразимъ
106	3 (отдолу)	Нека AO и AB	Нека AO и AC
107	2 (отгорѣ)	AOP и AOP	AOP
112	9 (отдолу)	са двугранніа	на двугранніа
113	17 (отгорѣ)	LMPQ на ADBF	LMPQ на DABF
113	12 (отдолу)	линіа TO нри налеганіе-то — чети:	линіа. TO при налаганіе-то
119	2 (отгорѣ)	но линіж	по линіи
120	4 (отгорѣ)	Многогранникъ ABCDE — чети:	Многогранникъ SABCDE
122	14 (отгорѣ)	ся отнаоѭтъ	ся отнасятъ
—	14 (отгорѣ)	страна	страни
123	5 (отгорѣ)	въ точкж F	въ точкж T
—	11 (отгорѣ)	повърхнна	повърхнина
124	10 (отдолу)	пресѣченж	на пресѣченж-тж
—	9 (отдолу)	състоти	състои
125	3 (отдолу)	(чьрт. 153)	(чьрт. 154)
126	1 (отгорѣ)	(чьрт. 154)	(чьрт. 153)
—	5 (отгорѣ)	(чьрт. 155)	(чьрт. 156)

Стр.	рѣдъ	На мѣсто:	Чети:
126	8 (отгорѣ)	(чърт. 156)	(чърт. 155) .
127	2 (отгорѣ)	имамь	иматъ
—	5 (отдолу)	ако $\frac{AG}{AN} < \frac{AE}{Ax}$, то мве — чети:	ако $\frac{AG}{AN} < \frac{AE}{AL}$, то вмѣ
—	3 (отдолу)	на токлози	на таквози
128	7 (отдолу)	да бѫде $\frac{AG}{AN} = \frac{AG}{Ax}$	да бѫде $\frac{AG}{AN} - \frac{AE}{AL}$
130	12 (отгорѣ)	раввнъ	равенъ
134	12 (отгорѣ)	призтѫ	призмѫ
—	9 (отдолу)	на околоврьстнія ѝ	на околоврьстнія
—	6 (отдолу)	V рѫбъ	рѫбъ
—	2 (отдолу)	Многожгълници SA и MC — чети:	Многожгълници SH и MC
135	6 (отгорѣ)	$SM - SA = AJ - SA$	$SM - SA = AF - SA$
—	8 (отгорѣ)	слѣд. $GB - FN$	слѣд. $GB = TN$
—	9 (отгорѣ)	или $GB - FB = TN - FB$ — чети:	или $GB - TB = TN - TB$
142	18 (отгорѣ)	крѫгъ-тъ	крѫгъ, кой-то
143	1 (отгорѣ)	C — дължина-та	l — дължина-та
—	14 (отдолу)	на конуси-тѣ	на конусъ-тъ
—	11 (отдолу)	равна	вѣрна
—	2 (отдолу)	на полокрѫгъ	на полукрѫгъ
144	13 (отгорѣ)	не сферѫ-тѫ	на сферѫ-тѫ
—	2 (отдолу)	чи $KC < KD$	чи $KC > KD$
145	18 (отгорѣ)	или $V^2 = R^2 - k^2$	или $r^2 = R^2 - k^2$
147	13 (отгорѣ)	схера	сфера
—	16 (отгорѣ)	отъ два жгълни	отъ два пълни
—	6 (отгорѣ)	abcdex	abcdef
145	9 (отдолу)	$r = \sqrt{R^2} - R$	$r = \sqrt{R^2 = R}$
147	10 (отдолу)	отъ лініѭ de, ако предложимъ — чети:	отъ лініѭ dc, ако предположимъ
—	4 (отдолу)	$2\pi.mb.ac$	$2\pi.mb.as$
—	2 (отдолу)	brna	bma
148	18 (отгорѣ)	$\llcorner Onx + \llcorner xub = d$	$\llcorner oux + \llcorner xub = d$
150	4 (отгорѣ)	височини-тѣ му	височина-та му
—	12 (отдолу)	на коя-то	на кои-то
151	10 (отдолу)	на крѫгъ CO	на крѫгъ-тъ CO.
152	17 (отгорѣ)	дължинѫ	дѫлбочинѫ
154	3 (отдолу)	$V\pi R^2H$	$V = \pi R^2H$
160	1 (отдолу)	Петрова Булаещва	Петрова Булашева

ВВЕДЕНІЕ.

Величинѫ наричать всичко, що може да става по голѣмо и по малко. Да земемъ на примѣръ кѫсъ желѣзо: той може да бѫде и по тежъкъ и по легкъ, слѣдователно тегло-то на желѣзо-то е величина; сѫщо желѣзо-то може да бѫде и по мегко и по кораво, слѣд. мегкость-та на желѣзо-то е величина; послѣ — мѣсто-то, кое-то заема този кѫсъ желѣзо, може да бѫде и по голѣмо, и по малко, слѣд. мѣсто-то на желѣзо-то е величина и пр.

Наука-та, коя-то расправя за величини-тѣ, ся нарича *Математикѫ*; *Геометрія-та* е само часть отъ Математикѫ-тѫ, защо-то не разглежда всички-тѣ величини: тя учи, какъ да ся измѣрва мѣсто-то, кое-то е заето отъ нѣкое тѣло.

Мѣсто-то, кое-то заема нѣкое тѣло, ся нарича *Геометрическо тѣло*. Геометрическо-то тѣло е заградено отъ сѣкѫ странѫ, слѣд. има предѣли (граници); предѣли-тѣ на тѣло-то ся наричать *Геометрически повьрхнини*. Повьрхнини-тѣ и тѣ имать предѣли; предѣли-тѣ на повьрхнини-тѣ ся наричать *Геометрически линіи*, а краища-та на линіи-тѣ ся наричать *Геометрически точки*.

За да узнаять, колко е голѣмо геометрическо-то тѣло, трѣба да го измѣрять по три посоки; на пр. за да узнаемъ, колко е голѣмо мѣсто-то, кое-то заема стая-та, трѣба, освѣнъ *дължинѫ-тѫ*, да измѣримъ *широчинѫ-тѫ* и *височинѫ-тѫ* на стаѭ-тѫ: ако знаемъ само едно отъ три-тѣ тѣзи нѣща, ній не ще можемъ напълно да разберемъ, колко е голѣма стая-та. Сѫщо-то може да ся каже и за сѣко Геометрическо тѣло. И тъй тѣла-та ся измѣрвать по три посоки: *по дължинѫ, широчинѫ* и *височинѫ* или *дебелинѫ*.

Повьрхнини-тѣ, като граници на тѣла-та, не могѫть да имать дебелинѫ; защо-то, тогава тѣ ще приличать на тѣла. Ето защо повьрхнини-тѣ ся измѣрвать само по двѣ посоки: по *дължинѫ* и *широчинѫ*. На пр. кога искать да узнаять голѣминѫ-тѫ на поле-то, измѣрватъ го само по дължинѫ и широчинѫ, безъ да разглеждать дебелинѫ-тѫ му.

Линіи-тѣ, като граници на повьрхнини-тѣ, не могѫть да имать широчинѫ; защо-то, тогава тѣ не ще бѫдѫть линіи, а повьрхнини. На пр. кога искать да узнаять, колко е далечъ отъ едно мѣсто до друго, измѣрвать само дължинѫ-тѫ на пѫть-тъ, безъ да обръщать вниманіе на широчинѫ-тѫ му.

Явно е послѣ това, чи краища-та на линіи-тѣ, т. е. Геометрически-тѣ точки нѣмать ни дължинѫ, ни широчинѫ, ни дебелинѫ. Не само краища-та на линіѭ-тѫ, нъ и сѣко мѣсто на неѭ може да ся счита за точкѫ, защо-то отдѣлно сѣко мѣсто на линіѭ-тѫ нѣма дължинѫ. И тъй на сѣкѫ линіѭ можемъ да си представимъ колко-то щѣмъ точки. Сѫщо и на сѣкѫ повьрхнинѫ и въ сѣко тѣло можемъ да си представимъ, колко-то щѣмъ точки. Нъ не трѣба да мислимъ, чи линіи-тѣ, повьрхнини-тѣ и тѣла-та сѫ съставени отъ точки, защо-то, не може да ся състави ни дължинѫ, ни широчинѫ, ни дебелинѫ отъ таквози нѣщо, кое-то само нѣма ни дължинѫ, ни широчинѫ, ни дебелинѫ.

Да си представимъ равно поле. За да додемъ отъ еднѫ неговѫ точкѫ до другѫ, нiй можемъ да изберемъ различни пѫтища. А тъй кѫто при вървежъ-тъ си нiй ся движимъ само по дължинѫ, и спорядъ това пѫть-тъ ни е геометрическа линiя; то между двѣ точки могѫть да минать много линiи. Между всички-тѣ тѣзи линiи сѣкога има една, коя-то е най кѫса; въ геометрiѭ-тѫ тя ся нарича *правѫ линiѭ*, а други-тѣ — *криви*. И тъй *права-та линiя е най кѫсо разстоянiе между двѣ точки.*

Както линiи-тѣ бивать прави и криви, тъй и повърхнини-тѣ ся дѣлѭть на *плоски* и *криви*. *Плоскѫ повърхнинѫ*, или просто *плоскость*, ся нарича тъзи, съ коѭ-то сѣка права линiя ся слива съ всички-тѣ си точки, кога е прекарана презъ двѣ какви да сѫ нейни точки. Сѣка повърхнина, коя-то не е съставена отъ плоскости, ся нарича *крива*.

Геометрiѭ-тѫ дѣлѭть на двѣ части — *Планиметрiѭ* и *Стереометрiѭ*. Първа-та часть разглежда линiи-тѣ и части-тѣ отъ плоскость-тѫ, кои-то сѫ заградени съ линiи. Стереометрiя-та расправя собственно за тѣла-та.

Всички-тѣ разсѫжденiя, кои-то ставать въ Геометрiѭ-тѫ, ся облѣгать на таквизъ истинни, кои-то сами по себѣ си сѫ очевидни. Тѣзи истинни ся наричать *акссiоми;* Ето нѣкои отъ тѣхъ: цѣло-то е по голѣмо отъ сѣкѫ своѭ часть; двѣ величини, кои-то отдѣлно сѫ равни на нѣкоѭ третѭ, равни сѫ и по между си, ако отъ двѣ равни величини отнемемъ равни части, то и останали-тѣ части ще бѫдѫть равни по между си; ако къмъ двѣ равни величини прибавимъ по равно, то и сумми-тѣ ще бѫдѫть равни и пр.

Всички-тѣ други истинни, кои-то ставать очевидни само послѣ нѣколко разсѫжденія, ся наричать *теореми*. Тѣзи разсѫжденія, кои-то явявать вѣрность-тѫ на теоремѫ-тѫ, ся наричать *доказателство*.

Теореми-тѣ по нѣкогашъ ся наричать *Лемми*. Тогава ги наричать лемми, кога-то тѣ нѣмать непосредственнѫ врьзкѫ съ предидущи-тѣ теореми; нъ сѫ ввождать за по лесно доказателство на слѣдующи-тѣ.

Iий срокъ

ЧАСТЬ I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

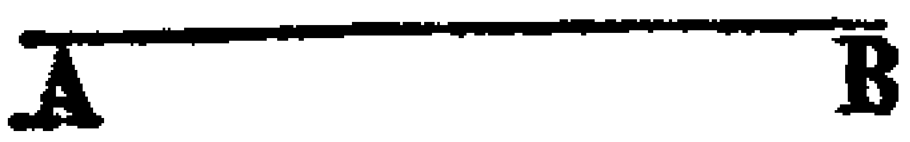
ПРАВИ ЛИНІИ И ѪГЪЛИ.

§. 1. Права-та линія е, какъ-то казахми, най кѫсо разстояніе между двѣ точки. Между двѣ точки има само едно най кѫсо разстояніе, съ други думи — *между двѣ точки може да ся прекара само еднѫ правѫ линіѫ.* Отъ това слѣдува:

1) *Къто знаемъ, гдѣ ся намирать двѣ кои да сѫ точки на правѫ-тѫ линіѫ; ще знаемъ, какъ е тя разположена, защо-то между извѣстни-тѣ намъ двѣ точки може да мине само една права.*

2) *Ако двѣ прави ся прѣсѣкѫть въ еднѫ точкѫ, тѣ вече нѣма да ся срѣщнать; защо-то, щомъ допустимъ, чи тѣ ся срѣщать ощи въ вторѫ нѣкоѫ точкѫ; ще излѣзи, чи между двѣ точки минувать двѣ различни прави, а това е невъзможно.*

Правѫ-тѫ линіѫ изобразявать съ чъртѫ, исписанѫ на книгѫ или на дъскѫ и ѫ означавать съ двѣ букви; тѣзи букви показвать точки-тѣ, между кои-то минува права-та.

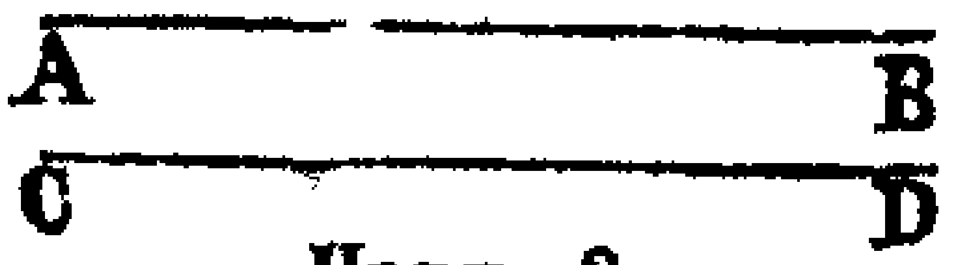


Чърт. 1.

Чърта та, коя-то изобразява правѫ линіѫ, ся нарича сѫщо правѫ линіѫ; на пр. права линія

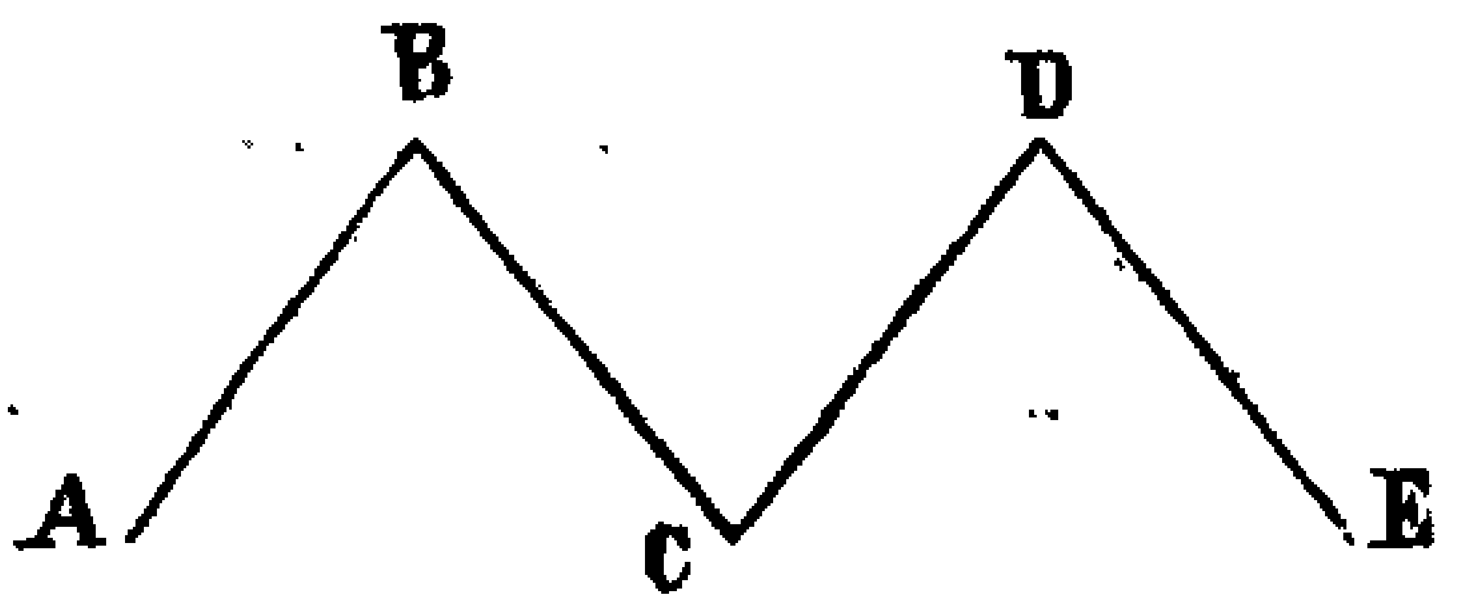
AB (чьрт. 1.). Нъ трѣба да помнимъ, чи чьрта и права линія не е все едно; защо-то, чьрта-та, колко-то и да бѫде тънка, тя все има широчинѫ и дебелинѫ, а линія-та има само дължинѫ. За да изобразѭть правѫ линіѭ на книгѫ, употрѣбявать дьрвенѫ или металлическѫ линійкѫ. Дюлгери-тѣ изобразявать правѫ линіѭ съ врьвъ, намазанѫ съ чьрвено мастило.

Да си представимъ двѣ прави AB и CD (чьрт. 2). Да кажемъ, чи точка C е наложена на точкѫ A и права-та C D отива по посокѫ-тѫ на линіѭ AB. Ако точка D падне на B, то казвать, чи линіи-тѣ сѫ равни. Ако точка D замине точкѫ B, то линіи-тѣ не сѫ равни и CD е по голѣма отъ AB.



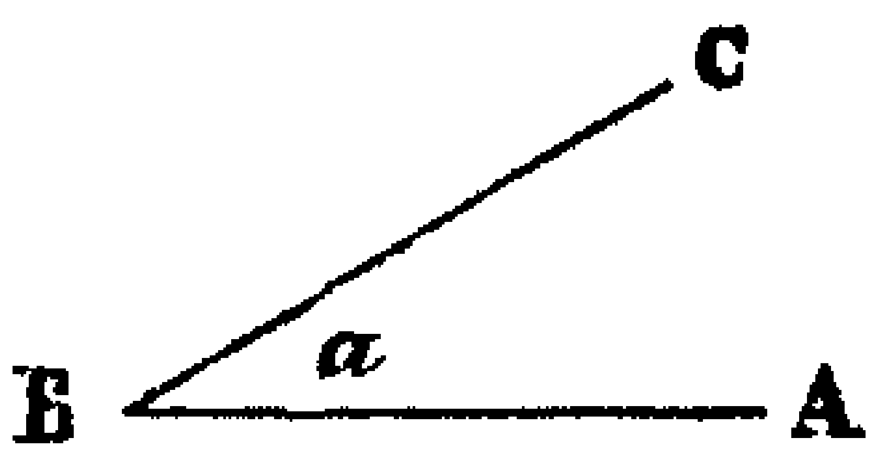
Чьрт. 2.

Линія ABCDE (чьрт. 3), коя-то е съставена отъ нѣколко прави AB, BC, CD, и DE, нарѣдени еднѫ подиръ другѫ не по правѫ посокѫ, ся нарича *чупенѫ*.



Чьрт. 3.

§. 2. Права-та линія може да бѫде расположена на плоскость-тѫ съ всички-тѣ си точки. Да си представимъ двѣ прави AB и BC (чьрт. 4), кои-то сѫ расположени на нѣкоѭ плоскость и ся пресичать въ точкѫ B. Тогава между тъхъ ще остане чясть отъ плоскость-тѫ; тъзи часть е неопредѣлена, защо-то, линіи-тѣ BC и BA могѫть да ся продължѫть, колко-то щѣмъ. *Неопредѣлена-та часть отъ плоскость-тѫ, заключенѫ между двѣ прави, кои-то излизать отъ еднѫ точкѫ, ся нарича ѫгълъ.* Точка B, отъ коя-то излизать прави-тѣ, ся нарича *върхъ* на ѫгълъ-тъ, а прави-тѣ BA и BC, кои-

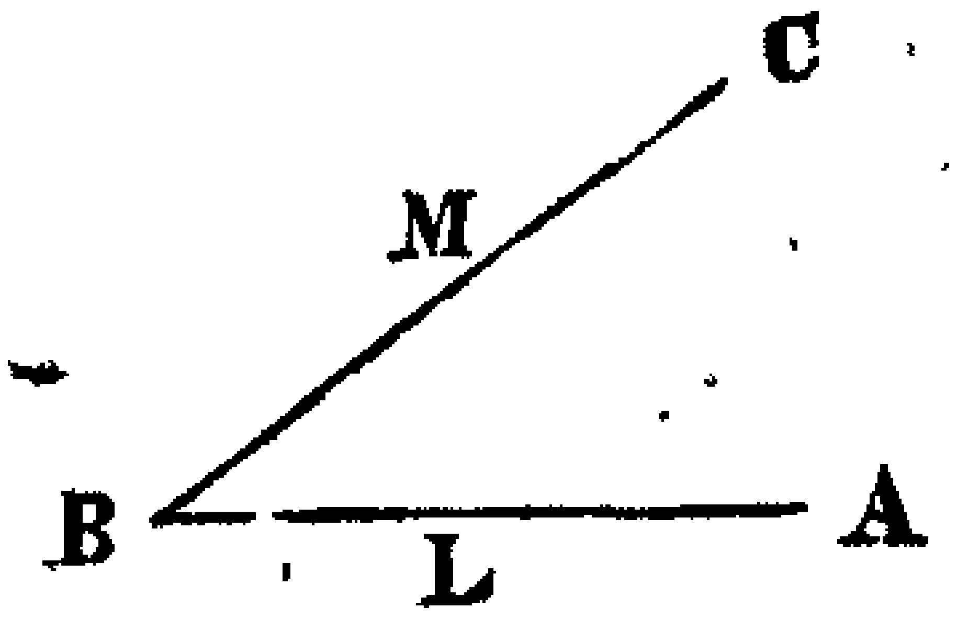


Чьрт. 4.

то съставять ѫгълъ-тъ — *негови страни.* Ѫгълъ-тъ ся означава съ три букви ABC тъй, що-то буква-та, коя-то е при върхъ-тъ, ся туря между други-тѣ двѣ букви.

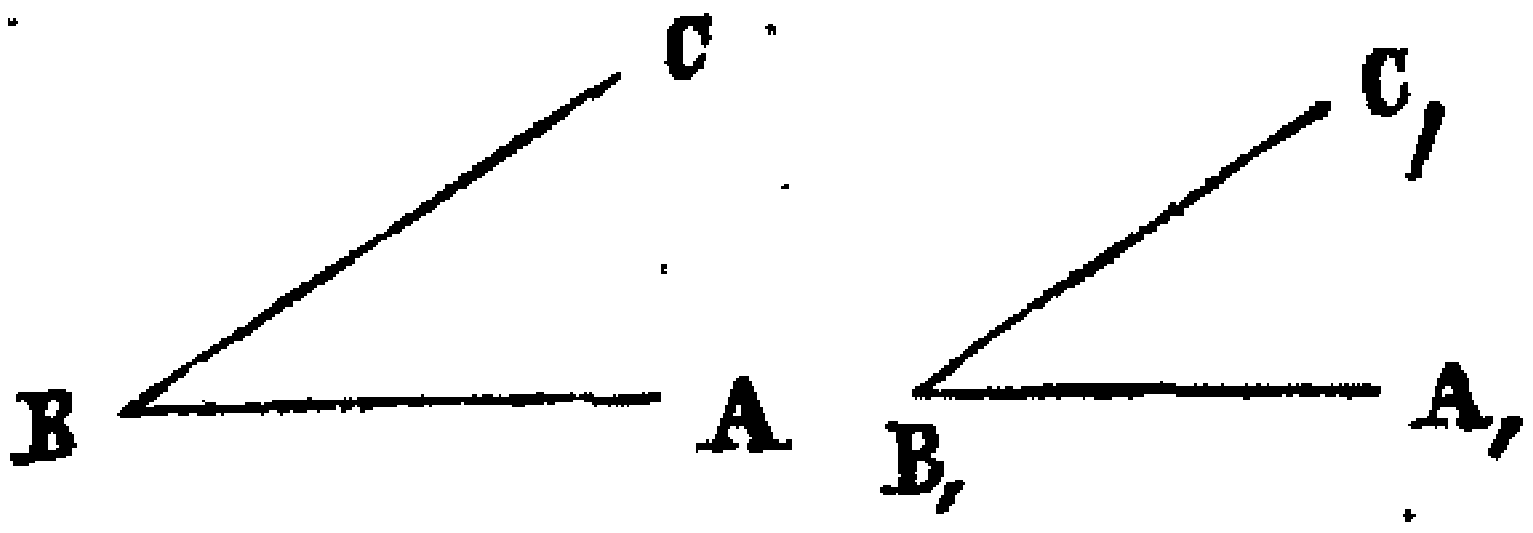
Ѫгълъ-тъ ся означава по нѣкогашъ и съ еднѫ буквѫ B, туренѫ при върхъ-тъ, или съ буквѫ *a*, коя-то е вѫтрѣ въ него.

Думѫ-тѫ ѫгълъ изобразявать на книгѫ съ знакъ ∠. Голѣмина-та на ѫгълъ-тъ не зависи отъ дължинѫ-тѫ на страни-тѣ му, а отъ това, колко сѫ тѣ наклонени една къмъ другѫ. Тъй на пр. ABC и LBM (чърт. 5) е все единъ ѫгълъ.



Чърт. 5.

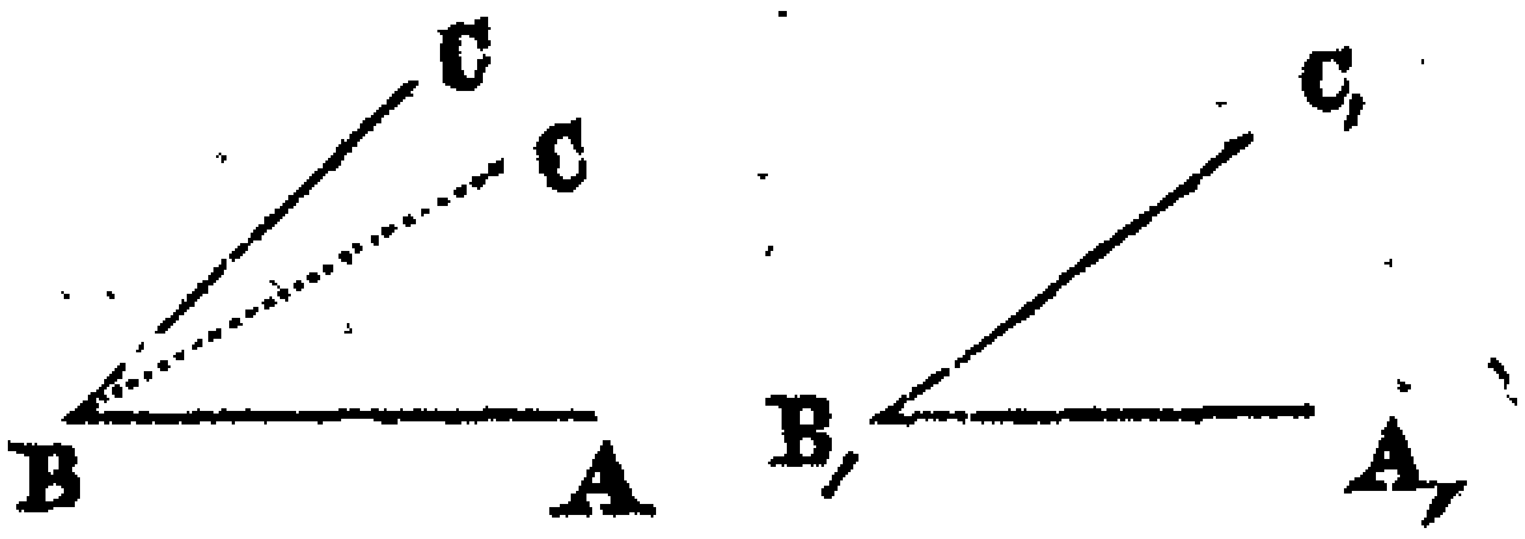
§. 3. Да си представимъ два ѫгъла ABC и $A_1 B_1 C_1$ (чърт. 6) и да наложимъ единъ-тъ на другія тъй, що то върхъ B да падне на B_1, и страна BC да ся слѣе съ странѫ $B_1 C_1$. Ако втора-та страна AB отиде по $A_1 B_1$, то за ѫгли-тѣ казвать, чи сѫ равни. Ако пъкъ страна AB падне вътрѣ въ ѫгълъ $A_1 B_1 C_1$, то ∠ABC е по малькъ отъ ∠$A_1 B_1 C_1$; най-послѣ, ако страна AB излѣзи вънъ отъ ∠$A_1 B_1 C_1$, то ∠ABC е по голѣмъ отъ ∠$A_1 B_1 C_1$.



Чърт. 6.

Забѣлѣжка. Кога искать да покажать, чи една величина е по голѣма отъ другѫ, употрѣбявать знакъ <, *обърнать съ отвърстіе-то си къмъ по-голѣмѫ-тѫ величинѫ.* На пр. 8>5 ще рѣче: 8 е по голѣмо отъ 5, сѫщо ∠ABC>∠$A_1 B_1 C_1$ ще рѣче: ѫгълъ ABC е по голѣмъ отъ ѫгълъ $A_1 B_1 C_1$ и пр.

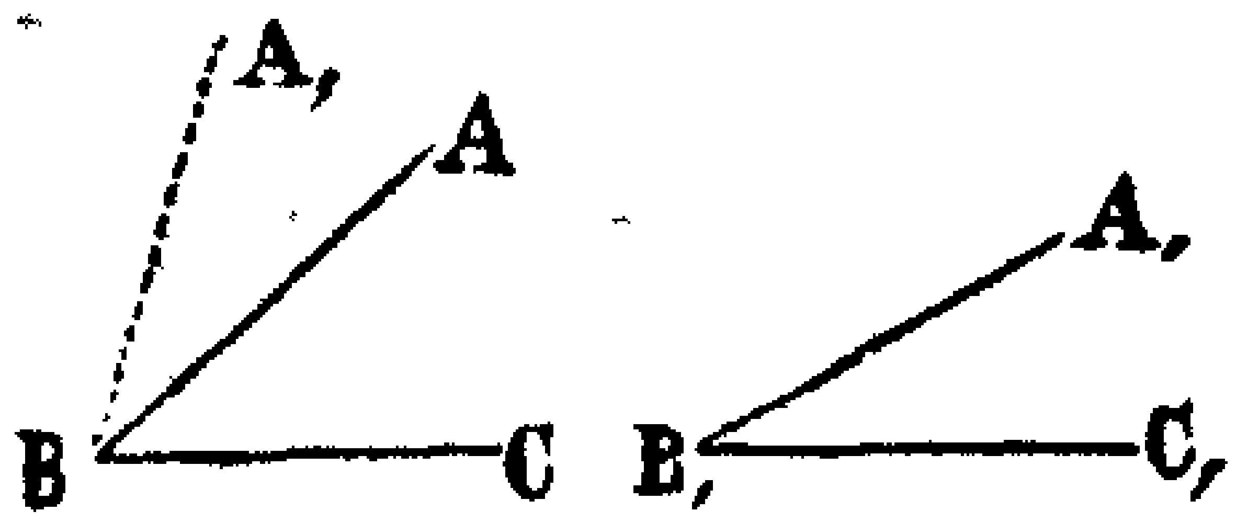
Нека ∠ABC>∠$A_1 B_1 C_1$ (чърт. 7). Да наложимъ ∠$A_1 B_1 C_1$ на ∠ABC тъй, що-то върхъ B_1 да падне на



Чьрт. 7.

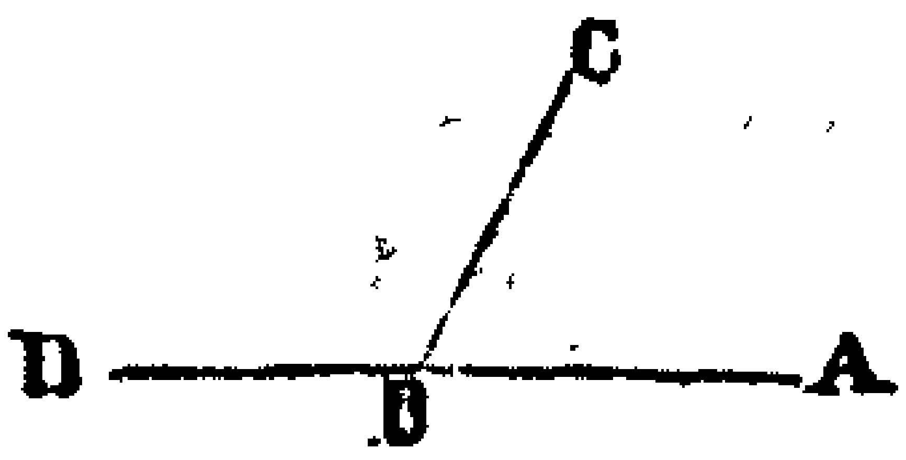
връхъ B и страна B, A, да иде по посокѫ BA. Тогава страна B, C, нѣма да падне на BC, защо-то, ѫгъли-тѣ не сѫ равни; тя сѫщо нѣма да падне и вънъ отъ ∠ ABC, защо-то, ∠ A, B, C, > ∠ ABC; слѣд. страна B, C, ще падне вѫтрѣ въ ѫгълъ ABC и ще иде по нѣкоѭ посокѫ BC,. Отъ това ще ся образува новъ ѫглъ CBC,, кой-то ся нарича *разликѫ* отъ два-та ѫгъла ABC и A, B, C,.

Да земемъ два ѫгъла ABC и A, B, C, (чьрт. 8) и да наложимъ единъ-тъ на другія тъй, що то B, да падне на B, B, C, да ся слѣе съ AB, а страна A. B, да не отива къмъ BC а къмъ срѣщуположнѫ посокѫ. Тогава B, A, ще земе нѣкоѭ посокѫ BA, и ще ся състави новъ ѫгълъ A, BC, кой-то ся нарича *сумма* отъ два-та първи ѫгъла ABC и A, B, C,.



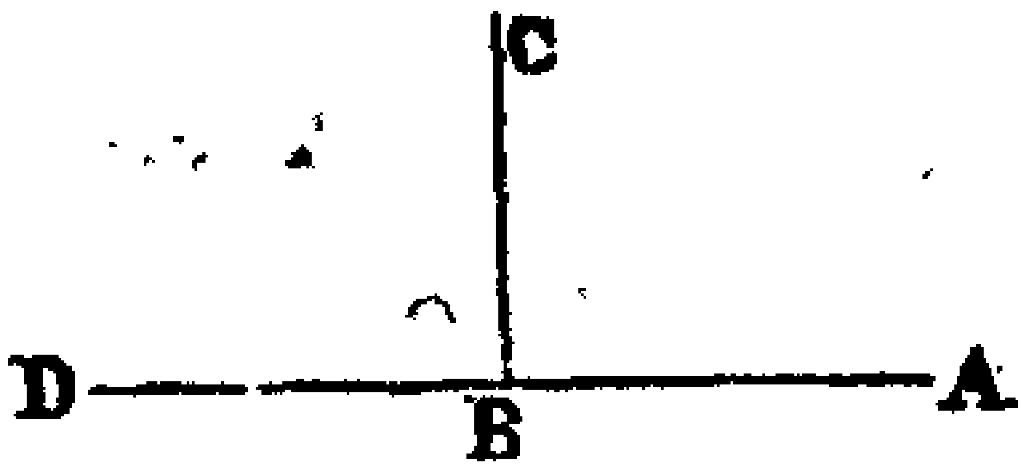
Чьрт. 8.

§. 4. Два ѫгъла ABC и DBC (чьрт. 9), които иматъ общъ върхъ B, еднѫ общѫ странѫ BC, а други-тѣ имъ двѣ страни BD и BA съставятъ правѫ линіѭ DA, ся наричатъ *смежни ѫгли.*



Чьрт. 9.

Кога два смежни ѫгъла ABC и DBC (чьрт. 10) сѫ равни, то сѣкій отъ тѣхъ ся нарича *правъ ѫгълъ.* И тъй *правія ѫгълъ е единъ отъ два-та равни смежни ѫгъла.* Линія-та BC (чьрт. 10), коя-то съставя съ линіѭ AD прави ѫгли, ся нарича



Чьрт. 10.

перпендикулярнѫ линіѭ или просто *перпендикуляръ*, а точка B, въ коя-то перпендикуляръ CB ся пресича съ линіѭ AD — *основѫ* на перпендикуляръ-тъ.

За да означать на книгѫ, чи линія BC е перпендикулярна къмъ AD, пишѭтъ $BC \perp AD$.

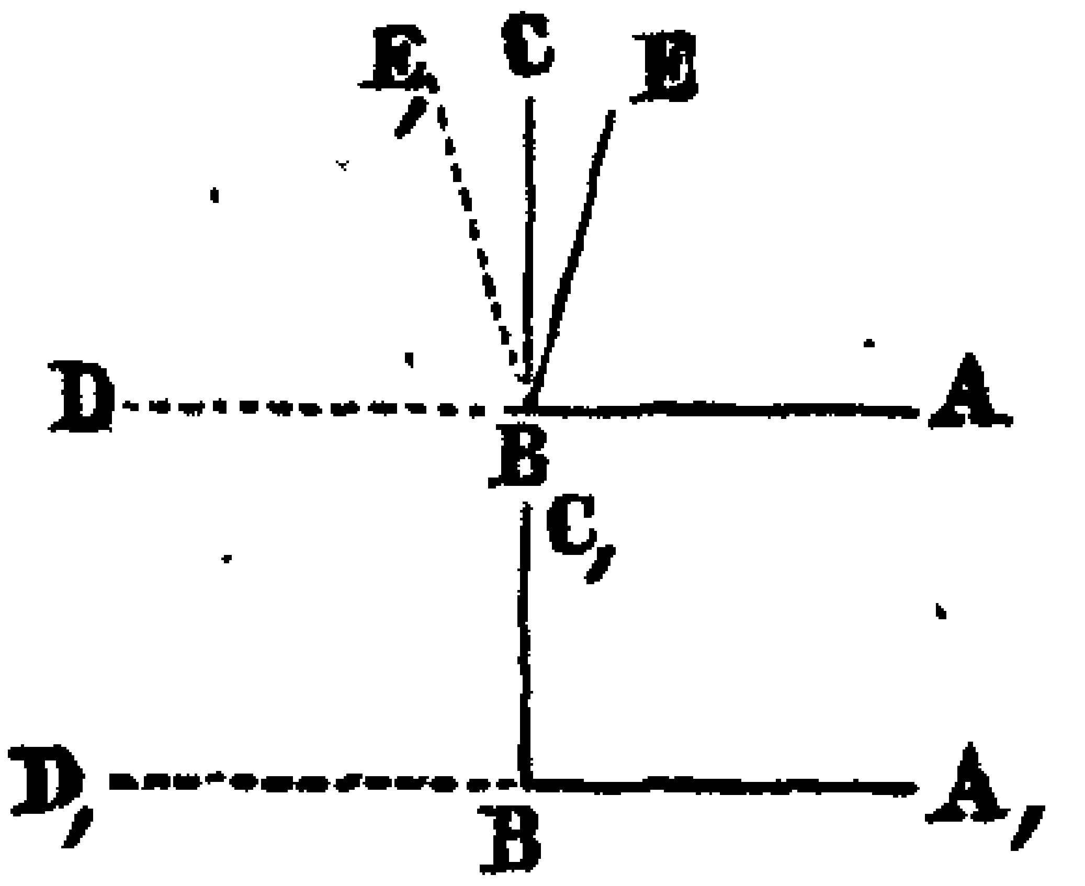
Сѣка линія, коя-то не е перпендикулярна къмъ другѫ нѣкоѭ линіѭ, ся нарича *наклоненѫ* къмъ неѭ.

Ако нѣкой ѫгълъ е по голѣмъ отъ правія, той ся нарича *тѫпъ*, а ако е по малъкъ отъ правія — *остъръ*.

§. 5. *Теорема. Всички-тѣ прави ѫгли сѫ равни по между си.*

Нека ABC и A, B, C, (чърт. 11) сѫ прави ѫгли; трѣба да докажимъ, чи тѣ сѫ равни по между си.

Доказателство. Намѣсто да доказвами, чи прави-тѣ ѫгли сѫ равни по между си, ній ще докажемъ, чи тѣ не могѫтъ да бѫдѫтъ различни по между си; това е все едно. Този способъ за доказваніе ся нарича *доказателство отъ противно-то;* той твърдѣ често ся употрѣбява въ Геометріѭ-тѫ.



Чърт. 11.

И тъй нека ABC и A, B, C, (чърт. 11) сѫ два прави ѫгла, не равни единъ на другій; тогава единъ-тъ отъ тѣхъ ще бѫде по голѣмъ отъ другія; да кажемъ, чи $\angle ABC > \angle A, B, C,$ (1). Като продължимъ странѫ AB и A, B, до точкѫ D и D,, и като си припомнимъ, чи правія ѫгълъ е единъ отъ два-та равни межни ѫгла (§. 4.), ще имами:

$$\angle ABC = \angle CBD \text{ и } \angle A, B, C, = \angle C, B, D,.$$

Като замѣстимъ въ неравенство (1) $\angle ABC$ съ равнія му $\angle CBD$ и $\angle A, B, C,$ съ равнія му $\angle C, B, D,$ ще получимъ $\angle CBD > \angle C, B, D,$ (2).

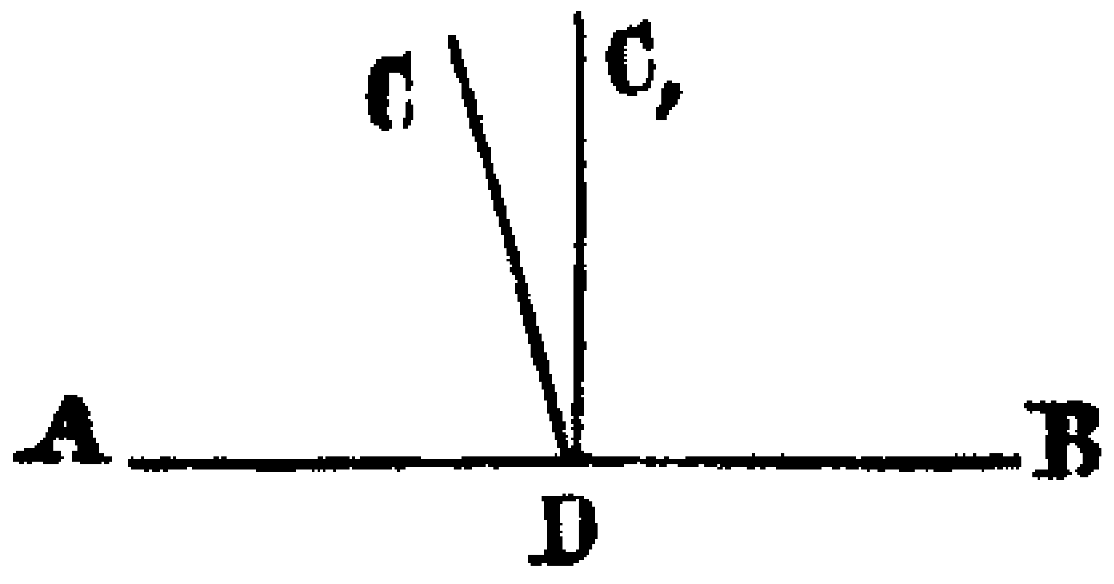
Ако наложимъ линіѭ A, D, на AD тъй, що-то точка B, да падне на B, то неравенство (1) показва, чи линія B, C, трѣба да падне вѫтрѣ въ ѫгълъ-тъ CBA по нѣкоѭ посокѫ BE, а неравенство (2) показва, чи сѫща-та линія трѣба да падне въ ѫгълъ CBD по другѫ посокѫ BE,.

И тъй предположеніе-то $\angle ABC > \angle A, B, C,$ докарва противоречіе, кое-то състои въ това, чи права-та линія все въ едно време трѣба да има двѣ различни посоки; отъ това заключавами, чи то е невѣрно. По сѫщія начинъ ся доказва и невѣрность-та на предположеніе $\angle ABC \angle \angle A, B, C,$. Нъ ако нѣкоя величина е нито по голѣма, нито по малка отъ другѫ, тѣ трѣба да бѫдѫть равни по между си; слѣд.

$$\angle ABC = \angle A, B, C,.$$

Правія ѫгълъ ся означава съ буквѫ d и съ него сѣкога сравняватъ други-тѣ ѫгли, за да узнаѭть голѣминѫ-тѫ имъ.

Отъ теоремѫ-тѫ, коя-то доказахми, слѣдува, чи *отъ сѣкѫ точкѫ, коя-то е на правѫ-тѫ, може да ся издигне само единъ перпендикуляръ;* защо-то, щомъ допустимъ, на пр. чи отъ точкѫ D на правѫ-тѫ AB (чърт. 12) могѫть да ся издигнать два перпендикуляра CD и C, D ще получимъ два прави ѫгла CDB и C, DB неравни по между си, кое-то е невѣрно.

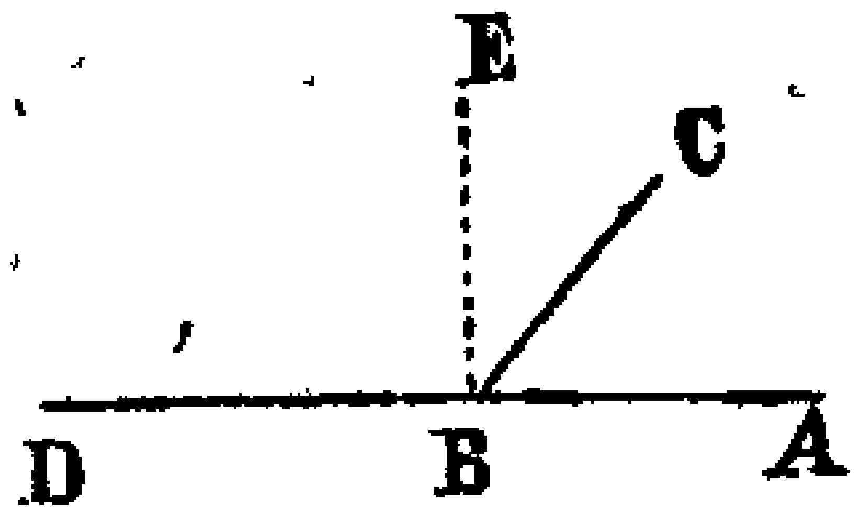


Чърт. 12.

§. 6. *Теорема. Сумма-та на два смежни ѫгъла е равна на два прави.*

Нека ABC и CBD (чърт. 13) сѫ смежни ѫгли; трѣба да докажемъ, чи

$$ABC + CBD = 2\ d.$$



Чрьт. 13.

Доказат. Кьто прекарами линіѭ BE, перпендикулярно кьмъ AB, ще имами:

$$ABE = d \text{ и } EBC + CBD = d.$$

Сьбирами тѣзи равенства — пьрвѫ-тѫ часть съ пьрвѫ-тѫ и вторѫ-тѫ съ вторѫ-тѫ — и получвами:

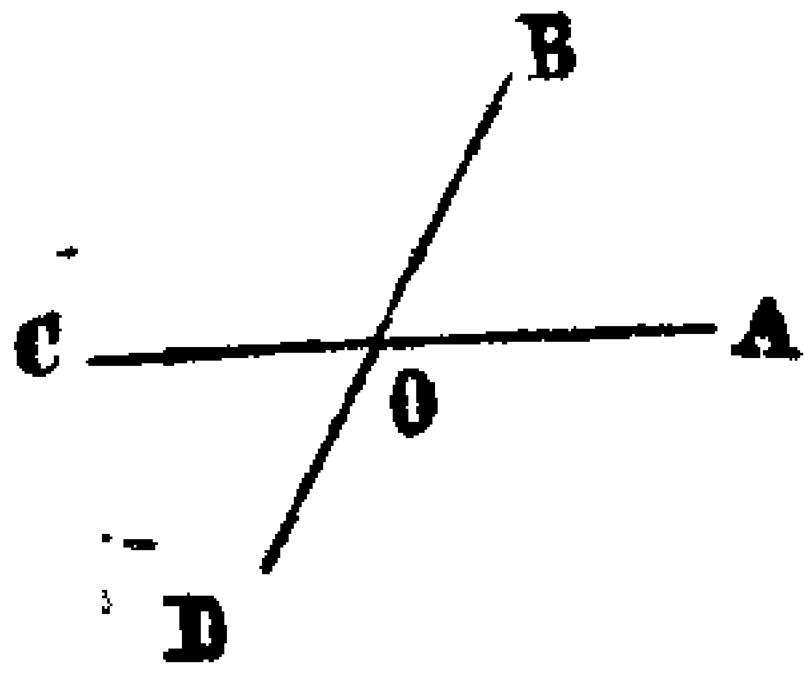
$$ABE + EBC + CBD = 2d.$$

$$\text{Нъ } ABE + EBC = ABC; \text{ слѣд.}$$

$$ABC + CBD = 2d.$$

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи *ако единъ-тъ отъ смежни-тѣ ѫгъли е остьръ, то другія е тѫпъ, и наопаки.* Наистинна, не могѫть и два-та ѫгъла да бѫдѫть остри, защо-то, тогава сумма-та имъ ще бѫде по малка отъ 2d;. сѫщо тѣ не могѫть да бѫдѫть и два-та тѫпи, защо-то, тогава пъкъ сумма-та имъ ще бѫде по-голѣма отъ 2d.

§. 7. Кога двѣ прави AC и DB (чьрт. 14) ся присѣкѫть, то около точкѫ-тѫ на пресичаніе-то имъ O ся образувать четери ѫгъла AOB, BOC, COD и DOA; два-та отъ тѣхъ AOB и COD ся наричать *срѣщуположни* или *вертикални;* сѫщо тъй ся наричать и други-тѣ два BOC и DOA. И тъй два ѫгъла сѫ вертикални, ако имать общь вьрхъ; една отъ страни-тѣ на единъ-тъ съставя правѫ линіѭ съ странѫ-тѫ на другія, сѫщо и други-тѣ двѣ страни съставять правѫ линіѭ.



Чрьт. 14.

§. 8. *Теорема. Вертикални-тѣ ѫгъли сѫ равни по между си.*

Нека AOB и COD (чьрт. 14) сѫ вертикални ѫгъли; трѣба да докажимъ, чи $\angle AOB = \angle COD$.

Доказ. Ѫгъли AOB и BOC сѫ смежни по между си, слѣд. AOB + BOC = 2d (§ 6); сѫщо ѫгъли BOC и COD сѫ смежни, слѣд. BOC + COD = 2d. Нъ двѣ величини отдѣлно равни на третѭ, равни сѫ по между си; за това имами право да напишемъ:

$$AOB + BOC = BOC + COD.$$

Равенство-то нѣма да ся измѣни, ако отъ двѣ-тѣ му части отнемемъ по равно; слѣд. като отнемемъ по BOC, ще получимъ:

$$AOB = COD.$$

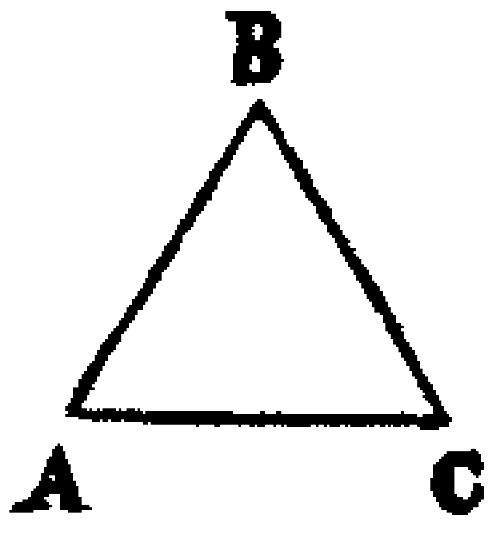
По сѫщія начинъ ся доказва, чи и други-тѣ вертикални ѫгъли BOC и AOD сѫ равни по между си.

ГЛАВА II.

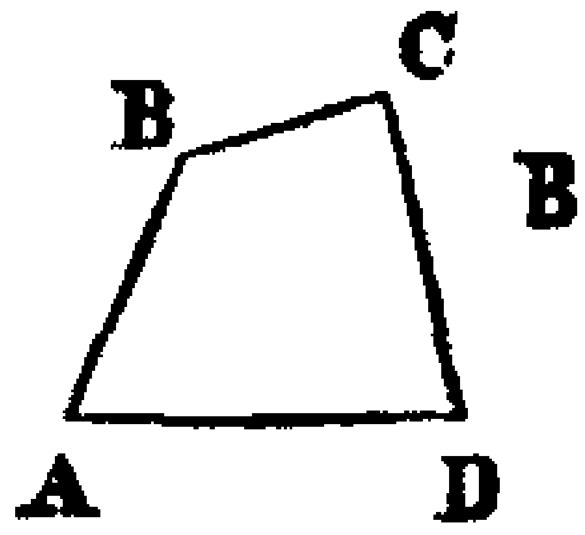
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ФИГУРИ.

§. 9. Часть отъ плоскость-тѫ, коя-то е заградена отъ всички страни, ся нарича *фигурѫ*. Кога фигура-та е заградена съ прави линіи, тя ся нарича *праволинейнѫ*, а кога е заградена съ еднѫ или нѣколко криви линіи — *криволинейнѫ*. Линіи-тѣ, кои-то заграждать фигурѫ-тѫ, ся наричать нейни *страни*, а сумма-та имъ — *периметръ*.

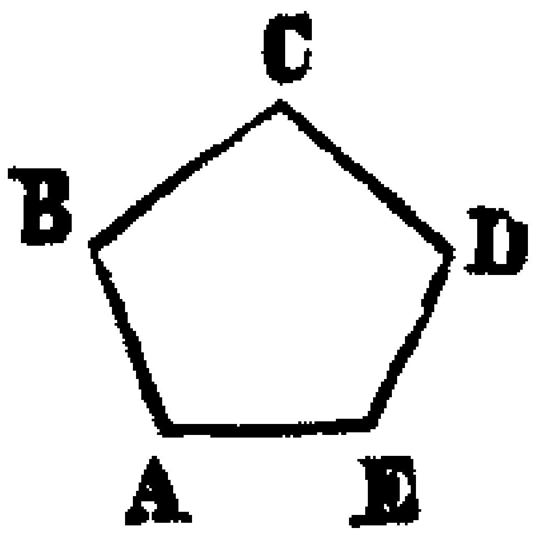
Праволинейна-та фигура ABC (Чьрт. 15), коя-то е заградена съ три страни, ся нарича *триѫгълникъ*;



Чьрт. 15.



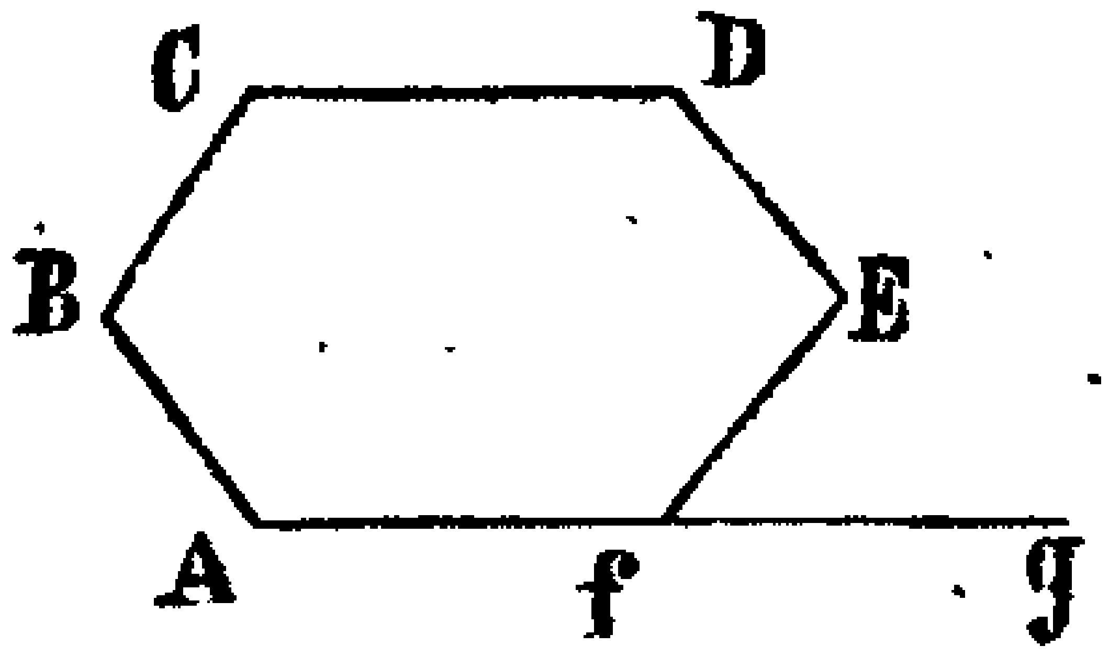
Чьрт. 16.



Чьрт. 17.

фигура ABCD (Чьрт. 16), коя-то е заградена съ четери страни — *четвероѫгълникъ*: фигура ABCDE (Чьрт. 17), коя-то е заградена съ петь страни — *петоѫгълникъ* и пр. Ако фигура-та е заградена съ повече отъ четери страни, то ѭ наричать съ общо име *многоѫгълникъ*.

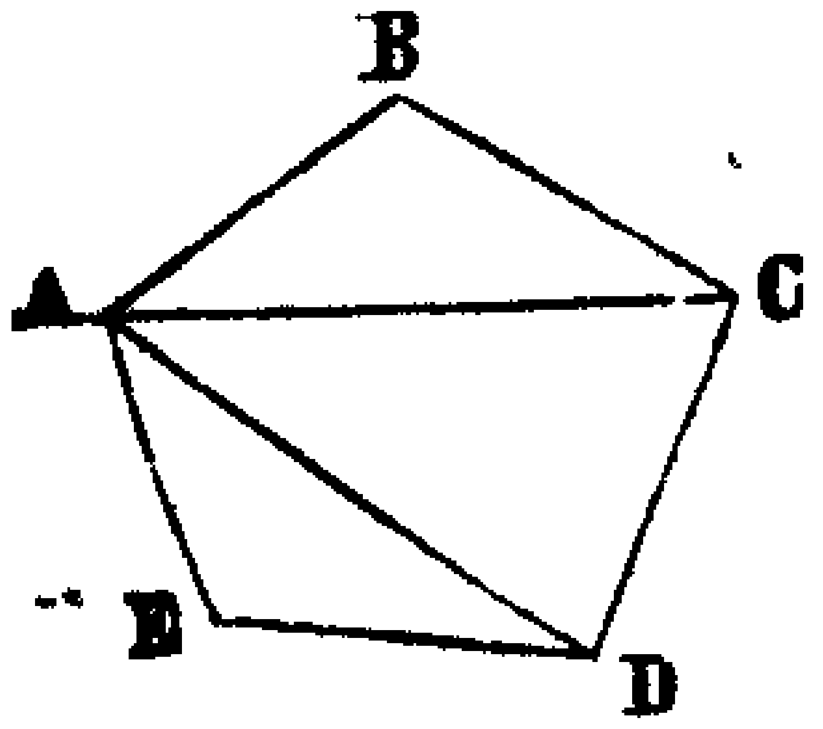
Ѫгълъ-тъ, кой-то е съставенъ отъ двѣ страни на многоѫгълникъ-тъ, кои-то сѫ еднѫ до другѫ, на пр. ѫгълъ ABC на многоѫгълникъ ABCDEF (чърт. 18), ся наричя *вѫтрѣшенъ*; а ѫгълъ-тъ, кой-то е съставенъ отъ еднѫ странѫ и отъ продълженіе на другѫ до неѭ, на пр. ѫгълъ Efg, ся нарича *вънешенъ*.



Чърт. 18.

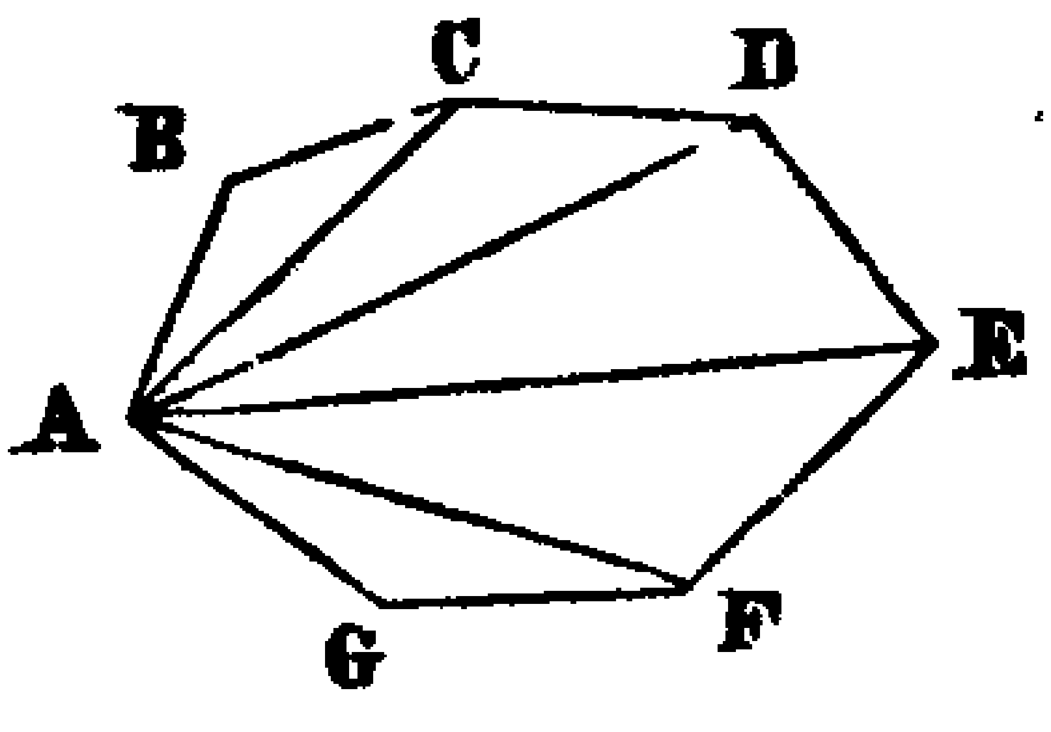
Явно е, чи въ сѣки многоѫгълникъ има толкова страни, колко-то и ѫгли.

§. 10. *Діагональ* на многоѫгълникъ-тъ ся нарича линія-та, коя-то съединява върхове-тѣ на два ѫгла, кои-то не сѫ единъ до другій; на пр. линія AC (чърт. 19) е діагональ. Явно е, чи въ триѫгълникъ-тъ не може да ся прекара діагональ; въ четвероѫгълникъ-тъ отъ единъ неговъ върхъ може да ся прекара само единъ діагональ, въ петоѫгълникъ-тъ — само два и пр.



Чърт. 19.

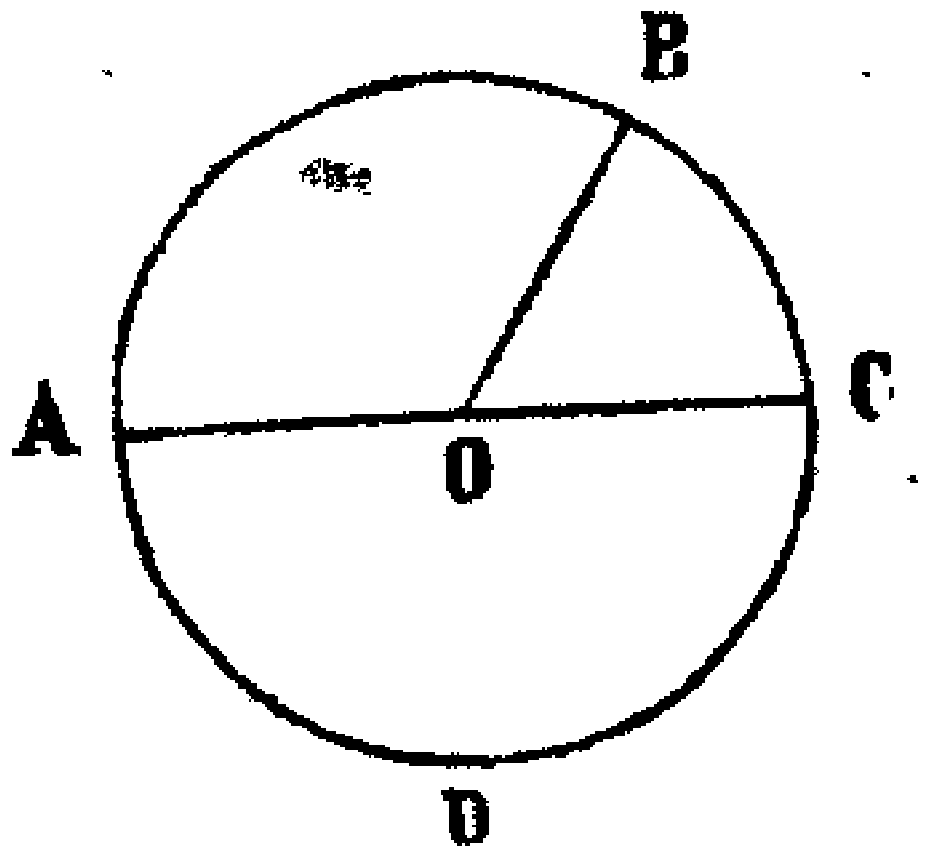
§. 11. Діагонали-тѣ, кои-то излизать отъ единъ върхъ A на многоѫгълникъ ABCDEFG (чърт. 20), раздѣлять многоѫгълникъ-тъ на триѫгълници. Сѣкій отъ тѣзи триѫгълници заема по еднѫ отъ страни-тѣ на многоѫгълникъ-тъ, освѣнъ два-та крайни ABC и AFG, кои-то заемать по двѣ страни. Отъ това слѣ-



Чърт. 20.

дува, чи *діагонали-тѣ, кои-то излизать отъ единъ върхъ на многоѫгълникъ-тъ, раздѣлять го на толкози триѫгълници, колко-то многоѫгълникъ-тъ има страни безъ двѣ.* Тъй на пр. пятоѫгълникъ-тъ ся раздѣля на 5—2=3 триѫгълника, шестоѫгълникъ-тъ — на 6—2=4 триѫгълника и пр.

§. 12. Крѫгъ-тъ е плоска фигура, заградена съ кривѫ линіѭ ABCD (чьрт. 21), на коя-то всички-тѣ точки сѫ на еднакво разстояніе отъ еднѫ вѫтрѣшнѫ точкѫ O, нарѣчена *центръ.* Крива-та линія ABCD, съ коя-то е заграденъ крѫгъ-тъ, ся нарича *оркѫжность.* Разстояніе-то отъ центръ-тъ до нѣкоѭ точкѫ B на окрѫжность-тѫ, или линія BO, ся нарича *радіусъ.* Сѣка часть отъ окрѫжность-тѫ, на пр. BC или AD, ся нарича *дѫгѫ.* Права-та AC, коя-то минува презъ центръ-тъ и съединява двѣ точки на окрѫжность-тѫ, ся нарича *діаметръ.*



Чьрт. 21.

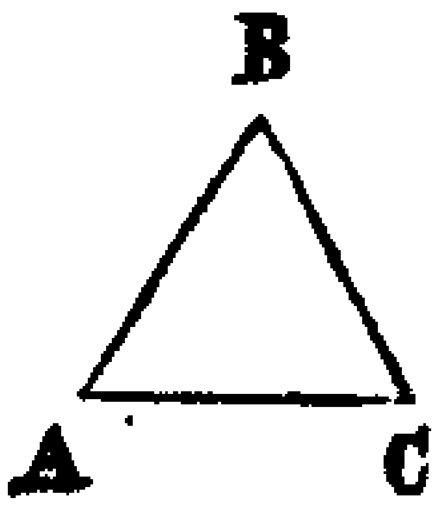
Діаметръ-тъ раздѣля крѫгъ-тъ на двѣ равни части. Наистинна, ако прегѫнемь чьртежъ-тъ по діаметръ AC, ще видимъ, чи всички-тѣ точки на горнѭ-тѫ часть ще покріѭть точки-тѣ на долнѭ-тѫ.

Двѣ окрѫжности, кои-то имать общъ центръ, ся наричать *концентрически.*

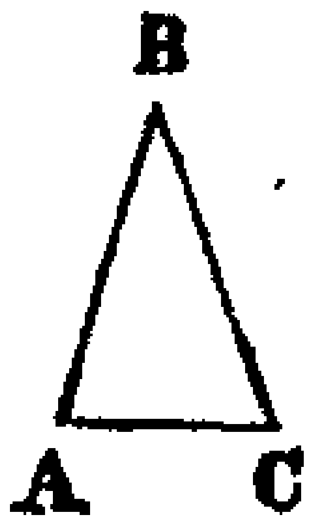
Окрѫжность-тѫ пишиѫть съ *перигель.*

РАВЕНСТВО НА ТРИѪГЪЛНИЦИ-ТѢ.

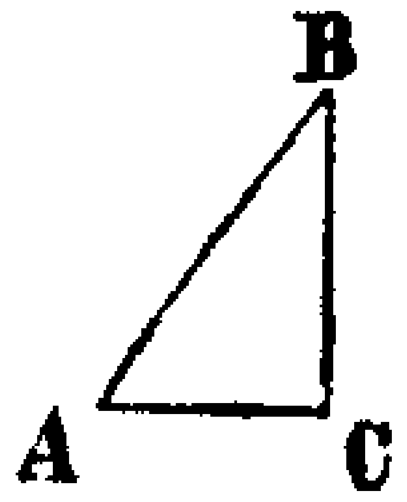
§. 13. Триѫгълникъ ABC (чърт. 22), на кой-то всички-тѣ страни сѫ равни, нарича ся *равностъриястъ*. Триѫгълникъ ABC (чърт. 23), на кой-то само двѣ-тѣ страни AB и BC сѫ равни, ся нарича *равнобедренъ*. Триѫгълникъ ABC (чърт. 24), кой-то има единъ правъ ѫгълъ ACB, ся нарича *правоѫгъленъ*. Страна AB, коя-то е срѣщу правія ѫгълъ, ся нарича *Гипотенузѫ*, а други-тѣ двѣ страни — *катети*.



Чърт. 22.

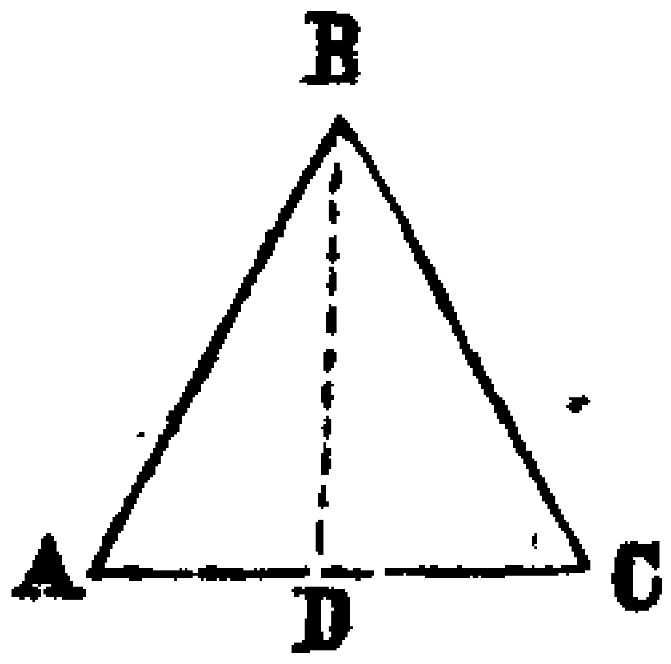


Чърт. 23.



Чърт. 24.

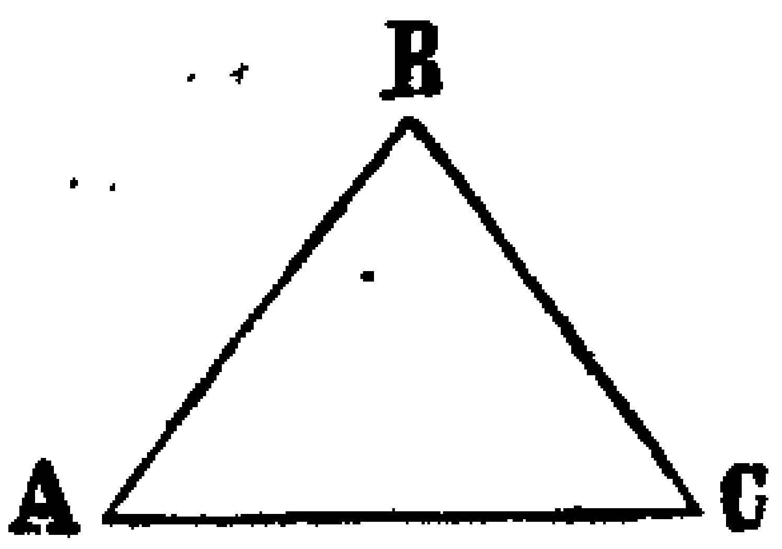
Страна-та, на коя-то е сложенъ триѫгълникъ-тъ, ся нарича *основѫ*, а върхъ-тъ на отсрѣщнія ѫгълъ — *върхъ* на триѫгълникъ-тъ. Въ равнобедренія триѫгълникъ за основѫ пріематъ неравнѫ-тѫ странѫ. Перпендикуляръ BD (чърт. 25), кой то е спуснатъ отъ върхъ B врьхъ основѫ AC, ся нарича *височинѫ* на триѫгълникъ-тъ. Дума-та триѫгълникъ изобразяватъ на книгѫ съ знакъ △.



Чърт. 25.

§. 14. *Теорема. Въ сѣкій триѫгълникъ една-та страна е по малка отъ суммѫ-тѫ на други-тѣ двѣ.*

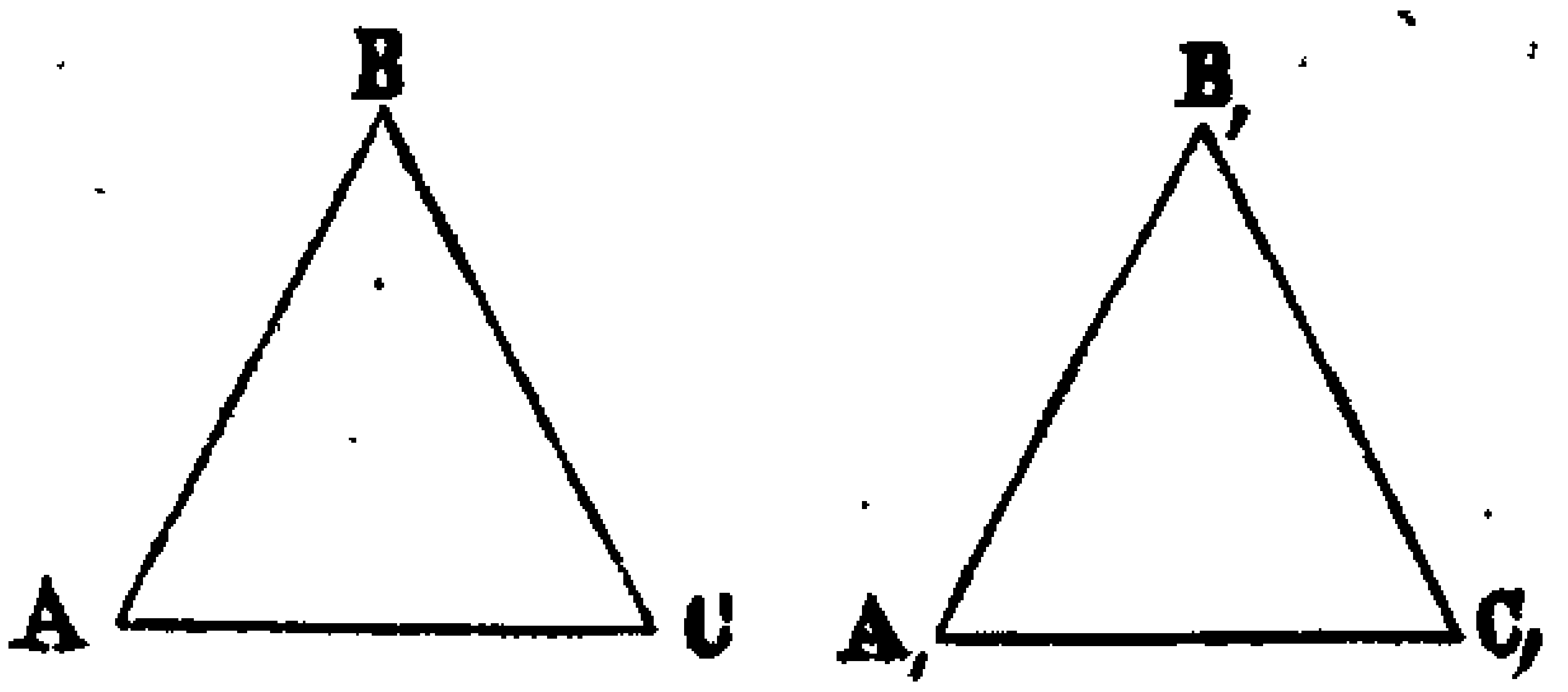
Доказ. Наистина, въ триѫгълникъ ABC (чърт. 26) страна AC, както правѫ линія, е най кѫсо разстояніе между двѣ точки A и C, слѣд. тя е по малка отъ чупенѫ линіѭ ABC, т. е. AC ∠ AB + BC.



Чърт. 26.

§. 15. *Теорема. Два триѫгълника сѫ равни, ако иматъ по двѣ страни и ѫгълъ-тъ между тѣхъ равни*

Нека въ триѫгълници-тѣ ABC и A, B, C, (чърт. 27)



Чърт. 27.

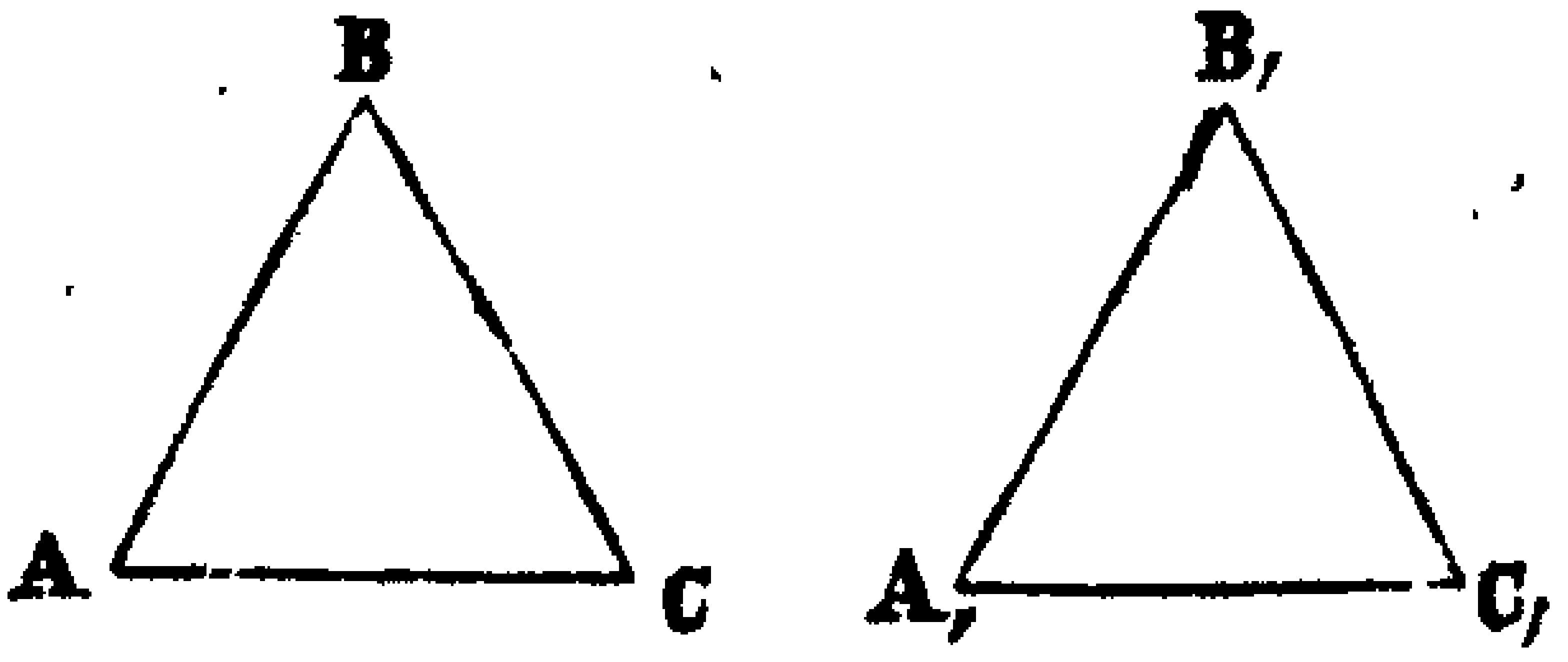
AB е равна на A, B,, $BC = B, C,$ и $\angle B = \angle B,$; трѣба да докажемъ, чи $\triangle ABC = \triangle A, B, C,$.

Доказ. Налагами странѫ A, B, на AB тъй, що-то точка A, да падне на A; тогава точка B, ще падне на B, защо-то линіи-тѣ сѫ равни. Тъй като $\angle B = \angle B,$, то страна B, C, ще иде по BC; крайна-та точка C, ще падне на C, защо-то, $BC = B, C,$.

Отъ това ся види, чи крайни-тѣ точки на линіи AC и A, C, съвпадать; слѣд. тѣзи линіи при наложеніе-то ся сливать. И тъй $\triangle A, B, C,$ съвсѣмъ покрива $\triangle ABC$, т. е. той му е равенъ.

§. 16. *Теорема. Два триѫгълника сѫ равни, ако иматъ по два ѫгъла и странѫ-тѫ между тѣхъ равни.*

Нека въ триѫгълници ABC и A, B, C, (чърт. 28)



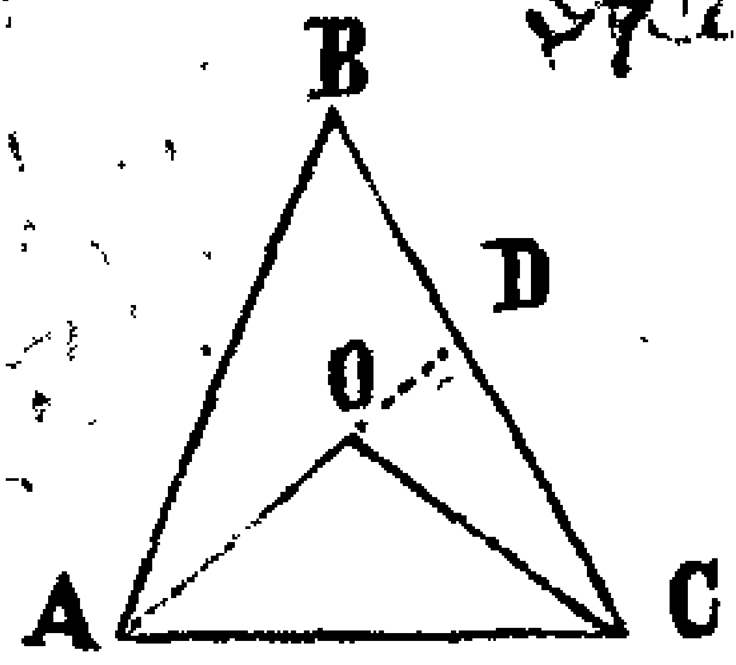
Чърт. 28.

$\angle A$ е равенъ на $\angle A,$, сѫщо $\angle C = \angle C,$ и $AC = A, C,$; трѣба да докажемъ, чи $\triangle ABC = \triangle A, B, C,$.

Доказ. Налагами странѫ AC на A, C, тъй, що-то A да падне на A,; тогава точка C ще падне на C, Тъй къто ∠A=∠A,, то AB ще иде по A, B,, по сжщж-тж причинж BC ще отиде по B, C,.

Отъ това ся види, чи точка B, трѣба да ся намѣри и на линіж AB и на линіж BC. Нъ тя може да лѣжи на двѣ-тѣ линіи само тогава, кога-то падне на B,, гдѣ-то тѣ ся пресичать; и тъй △ABC покрива съвсѣмъ трижгълникъ ABC, слѣд. той му е равенъ.

§. 17. *Лемма. Ако вжтрѣ въ трижгълникъ* ABC (чърт. 29.) *прекарами чупенж линіж* AOC, *то:* AB + BC > AO + OC.



Чърт. 29.

Доказ. Продължавами линіж AO догдѣ ся пресѣче съ BC въ нѣкоіж точкж D; отъ трижгълникъ ABD ще имами (§. 14). AB + BD > AD

сжщо отъ трижглникъ ODC имами: OD + DC > OC.

Сумма-та отъ първи-тѣ части на тѣзи неравенства ще бжде по голѣма отъ суммж-тж на втори тѣ, слѣд.

AB + BD + OD + DC > AD + OC.

Нъ AD = AO + OD, слѣд.

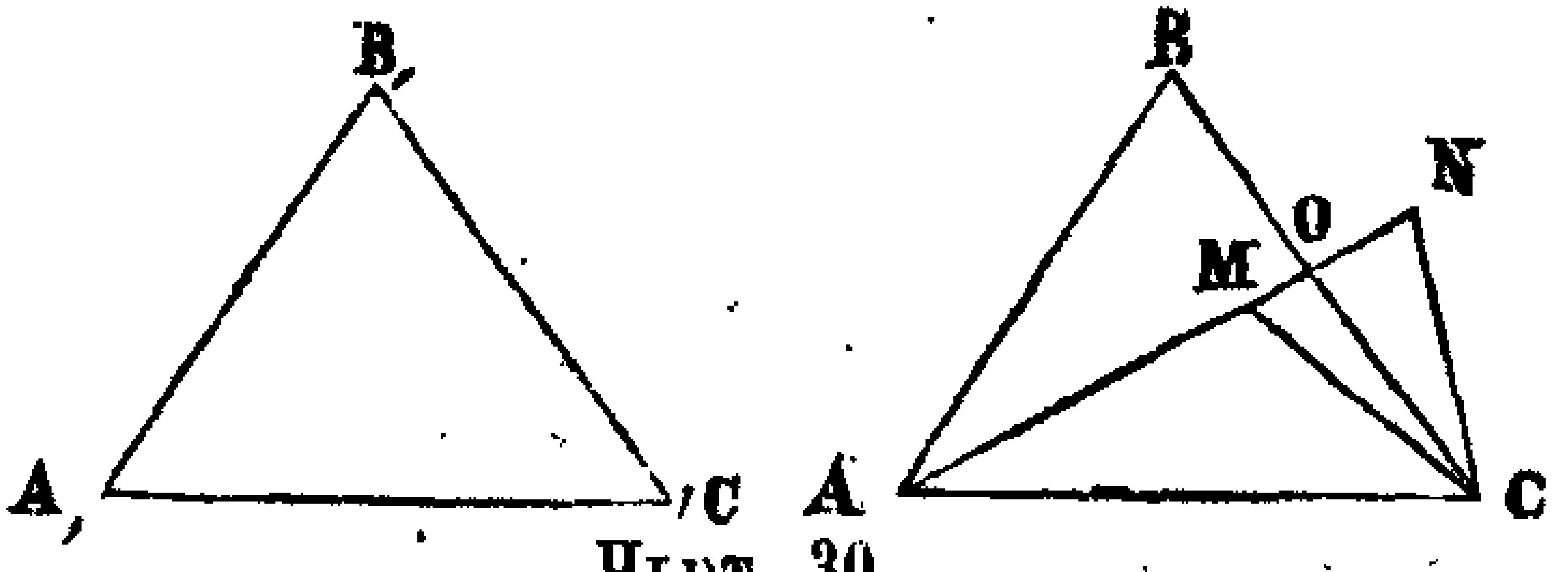
AB + BD + OD + DC > AO + OD + OC.

Къто отхвърлимъ отъ двѣ-тѣ части по OD, ще получимъ:

AB + BD + DC > AO + OC или AB + BC > AO + OC.

§. 18. *Теорема. Два трижгълника сж равни, ако три-тѣ страни на единъ-тъ сж равни на три-тѣ страни на другія.*

Нека въ трижгълници ABC и A, B, C, (чърт. 30)



Чърт. 30.

AB = A,B, BC=B,C, и AC=A,C,; трѣба да докажемъ чи △ABC = △A,B,C,.

Доказ. Тъй като $AB = A,B,$ и $BC = B,C,$, то, като съберемъ тѣзи равенства, получвами:

$$AB + BC = A,B, + B,C, \quad (1).$$

Налагами $\triangle A,B,C,$ на $\triangle ABC$ тъй, щото страна $A,C,$ да покріе страна AC; това е възможно, защо $AC = A,C,$. Тогава върхъ $B,$ може да падне: 1° вѫтрѣ въ триѫгълникъ ABC; 2° на еднѫ отъ странитѣ му: 3° вънъ отъ този триѫгълникъ и 4° най послѣ на върхъ B. Ще разгледами, кой отъ тѣзи случаи е възможенъ.

1° Нека допустимъ, чи върхъ $B,$ пада въ нѣкоѭ точкѫ M, коя-то е въ $\triangle ABC$. Тогава $\triangle AMC$ ще бѫде равенъ на $\triangle A,B,C,$, т. е. AM ще бѫде равна на $A,B,$ и $MC = B,C,$. Нъ споредъ §. 17

$$AB + BC > AM + MC \text{ или}$$
$$AB + B + C > A,B, + B,C,.$$

А това противорѣчи на рав. (1), слѣд. първія случай е невъзможенъ.

2° Нека допустимъ, чи върхъ $B,$ пада въ нѣкоѭ точкѫ O на странѫ BC. Тогава $\triangle AOC$ ще е равенъ на $\triangle A,B,C,$, т. е. $OC = B,C,$ или все едно $OC = BC$, защо-то $BC = B,C,$. Нъ равенство $OC = BC$ е невѣрно, защо-то OC е само часть отъ BC, слѣд. и 2ій случай е невъзможенъ.

3° Нека допустимъ, чи върхъ $B,$ пада въ нѣкоѭ точкѫ N, вънъ отъ $\triangle ABC$. Тогава $\triangle ANC$ ще е равенъ на $\triangle A,B,C,$, т. е. $AN = A,B,$ и $NC = B,C,$. Отъ $\triangle AOB$ имами:

$$AB < AO + OB$$

Сѫщо отъ триѫгълникъ ONC имами:

$$NC < OC + ON$$

Като съберемъ тѣзи двѣ неравенства ще получимъ

$$AB + NC < AO + OB + OC + ON$$

Сумма-та $OB + OC$ е равна на цѣлѫ линіѭ BC

сжщо $AO + ON$ е равна на цѣлж линіж AN, слѣд. $AB + NC < BC + AN$. Нъ NC = B, C, а B, C, = BC; тъй щото $NC = BC$; сжщо AN = A, B, а A, B, = AB, слѣд. $AN = AB$.

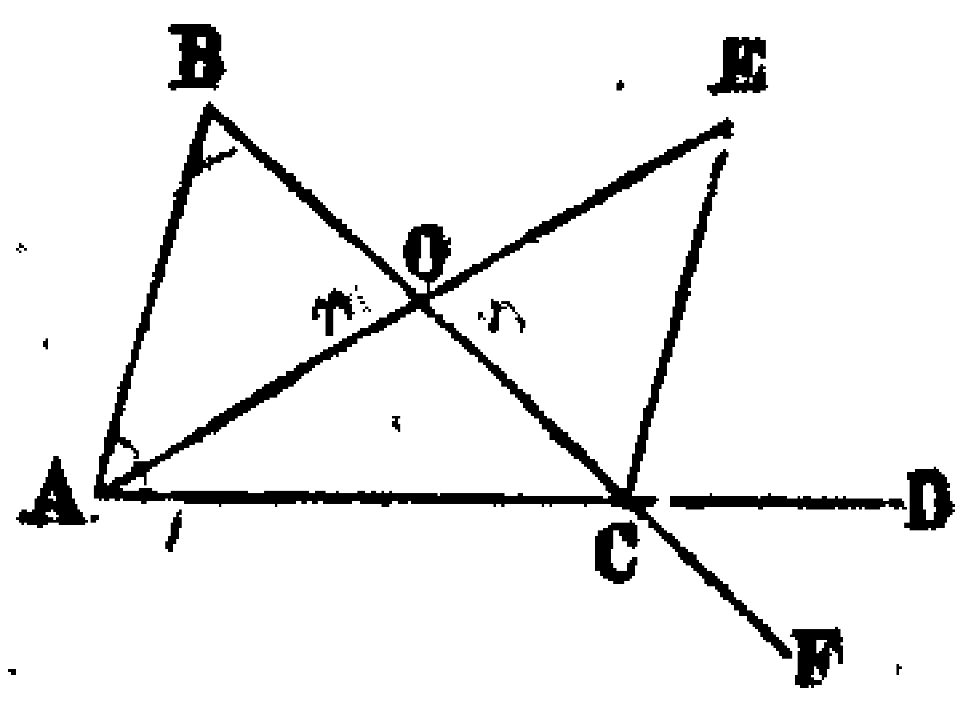
Както замѣстимъ въ горне-то неравенство NC и, AN съ равни-тѣ имъ BC и AB, ще получимъ:

$$AB + BC < BC + AB.$$

А това последне неравенство е невѣрно, слѣд. и 3ій случаи е невъзможенъ.

И тъй остава да ся пріеме само 4ій случай, т. е., чи върхъ B, ще падне на B. Тогава линія A, B, ще ся слѣе съ AB, сжщо B, C, съ BC, т. е. △A, B, C, ще покріе △ABC, и за това тѣзи трижгълници сж равни.

§. 19. *Теорема. Въ сѣкій трижгълникъ вънішнія жгълъ е по голѣмъ отъ вжтрѣшнія, кой-то не е смѣженъ съ него.*

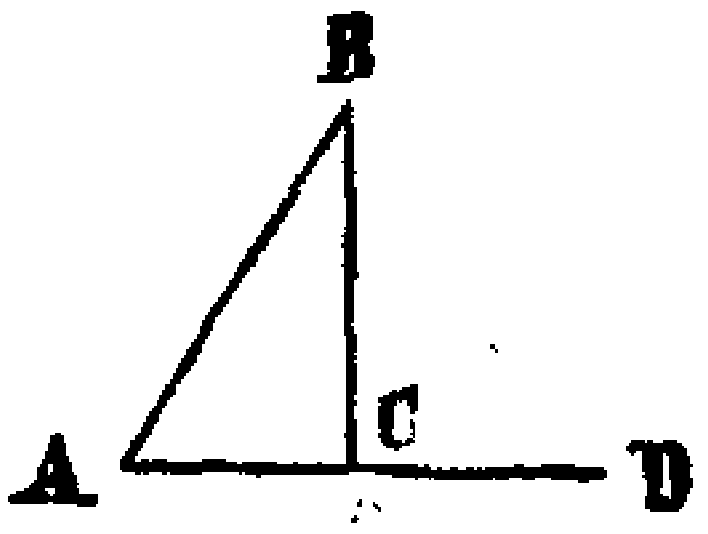


Чьрт. 31.

Тъй на пр. въ △ABC (чьрт. 31) ∠BCD е по голѣмъ отъ ∠ABC и отъ ∠BAC.

Доказ. Раздѣлями BC въ точкж O на двѣ равни части, съединявами A съ O и продължавами линіж AO до точкж E тъй, щото AO да бжде равна на OE, послѣ съединявами E и C съ правж линіж EC. Трижгълници ABO и OEC сж равни, защо-то $\angle BOA = \angle EOC$ (както вертикални). $AO = OE$ и $BO = OC$, т. е. тѣзи трижгълници иматъ по двѣ страни и жгълъ-тъ между тѣхъ равни (§. 15). Отъ равенство-то на трижгълници-тѣ излиза $\angle B = \angle OCE$; нъ ∠OCE е по малъкъ отъ ∠BCD, слѣд. и равнія му B ще бжде по малъкъ отъ ∠BCD.

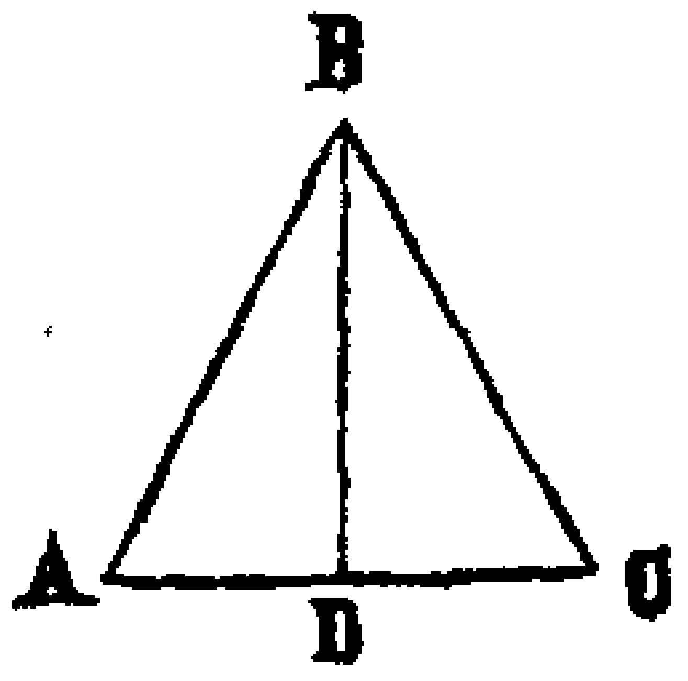
Послѣ, ако намѣсто AC продължимъ странѫ BC, то, какъ-то и по напредъ ще докажимъ, чи външнія ѫгълъ ACF е по голѣмъ отъ вѫтрѣшнія BAC; нъ ѫгли-тѣ BCD и ACF сѫ равни, кьто вертикални (§. 8), слѣд. $\angle BCD$ е по голѣмъ отъ $\angle BAC$.



Чьрт. 32.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи *въ правоѫгълнія триѫгълникъ, ѫгли-тѣ при гипотенузѫ-тѫ сѫ остри.* Наистина отъ чьрт. 32 ся види, чи $\angle A$ е по малъкъ отъ правія BCD, кьто вѫтрѣшенъ несмеженъ съ него; слѣд. $\angle A$ е остьръ. Сѫщо-то трѣба де ся забѣлежи и за ѫгълъ B.

§. 20. *Теорема. Въ равнобедренія триѫгълникъ ѫгли-тѣ при основѫ-тѫ сѫ равни.*

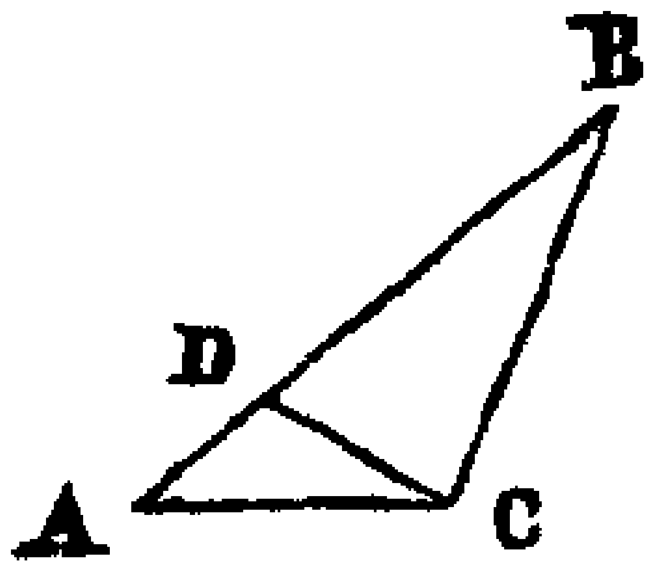


Чьрт. 33.

Нека триѫгълникъ ABC (чьрт. 33) е равнобедренъ, т. е. $AB = BC$; трѣба да докажемъ, чи $\angle A = \angle C$.

Доказ. Раздѣлями основѫ AC въ точкѫ D на двѣ равни части и съединявами D съ B; отъ това ся получавать два триѫгълника ABD и BDC, кои-то сѫ равни (§. 18), защо-то страни-тѣ имъ сѫ равни, именно: $AB = BC$, BD е обща страна за два-та триѫгълника и $AD = DC$. Отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници излиза $\angle A = \angle C$.

§. 21. *Въ сѣкій триѫгълникъ срѣщу по голѣмѫ-тѫ странѫ лѣжи по голѣмъ ѫгълъ.*

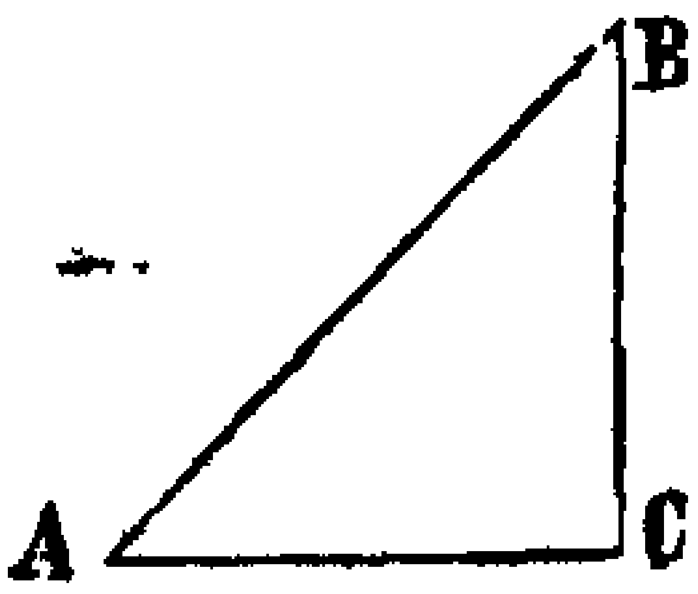


Чьрт. 34.

Нека въ триѫгълникъ ABC (чьрт. 34) страна AB е по голѣма отъ BC; трѣба да докажемъ, чи $\angle ACB$ е по голѣмъ отъ $\angle BAC$.

Доказ. Отмѣрвами на по голѣмѫ-тѫ странѫ AB часть BD, равна на BC, и съединявами точкѫ D съ C. Въ равнобедреннія триѫгълникъ BDC ѫгълъ BDC е равенъ на ѫгълъ BCD (§. 20); нъ ѫгълъ BDC е по голѣмъ отъ ѫгълъ DAC, защо-то е външенъ ѫгълъ на $\triangle ADC$; слѣд. и ѫгълъ BCD е по голѣмъ отъ $\angle DAC$. Явно е послѣ това, чи ѫгълъ ACB ще бѫде още по голѣмъ отъ $\angle DAC$.

Обратна Теорема. Въ сѣкій триѫгълникъ срѣщу по голѣмія ѫгълъ лѣжи по голѣма страна.



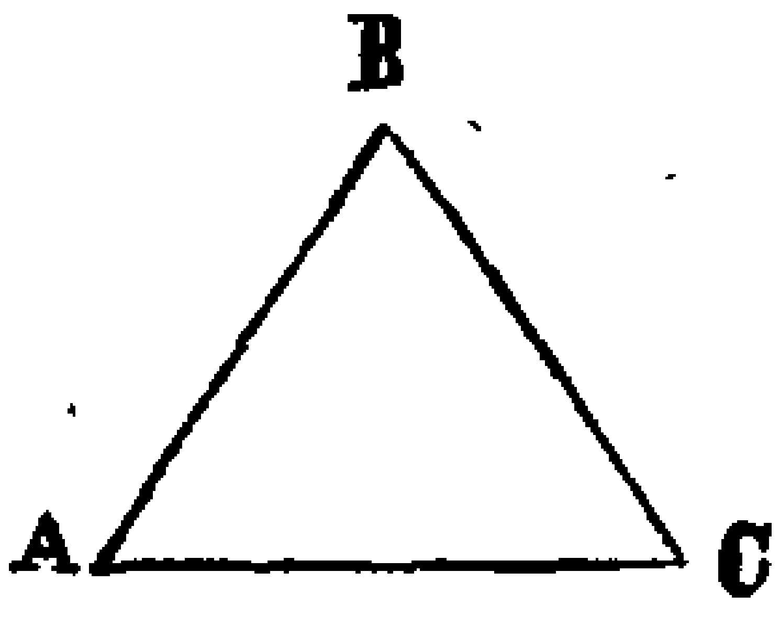
Чьрт. 35.

Нека въ триѫгълникъ ABC (чьрт. 35) $\angle ACB$ е по голѣмъ отъ $\angle BAC$; трѣба да докажемъ, чи $AB>BC$.

Доказ. Явно е, чи AB не може да бѫде равна на BC, защо-то тогава $\triangle ABC$ щѣше да бѫде равнобедренъ и $\angle BAC$ щѣше да бѫде равенъ на ѫгълъ ACB (§. 20), а ній знаемъ, чи $\angle BAC<\angle ACB$.

Сѫщо AB не може да бѫде по малка отъ BC, защо-то тогава ще излѣзи $\angle BAC>\angle ACB$ (§. 21), кое-то пакъ е невѣрно. Отъ това слѣдува, чи AB е по голѣма отъ BC.

§. 22. *Теорема. Триѫгълникъ-тъ е равнобедренъ, ако има два равни ѫгъла.*



Чьрт. 36.

Нека въ триѫгълникъ ABC, (чьрт. 36) ѫгълъ A е равенъ на ѫгълъ C; трѣба да докажемъ, чи $AB = BC$, т. е. чи триѫгълникъ-тъ е ровнобедренъ.

Доказ. Ако допустимъ, чи страни AB и BC сѫ не равни, то и ѫгли-тѣ A и C щѣхѫ да бѫдѫть не равни, кое-то е невѣрно; слѣд. страни-тѣ AB и BC треба да бѫдѫть равни, т. е. триѫгълникъ-тъ трѣба да бѫде равнобедренъ.

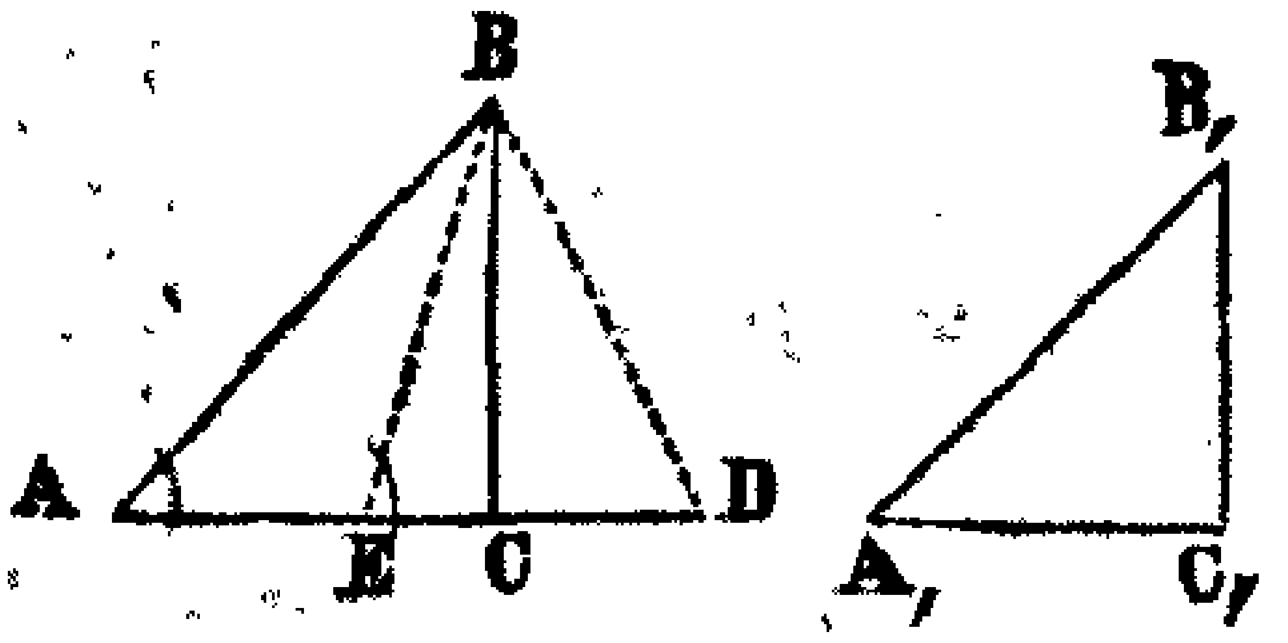
§. 23. Тъй като всички-тѣ правоѫгълни триѫгълници иматъ по еднинъ равенъ жгълъ (правія), то два правожгълни трижгълника сж равни:

1) *Кога-то катети-тѣ на единъ-тъ сж равни на катети-тѣ на другія,* защо-то въ този случай трижгълници-тѣ ще иматъ по двѣ страни и жгълъ-тъ между тѣхъ (правія) равни (§. 15.)

2) *Кога-то иматъ по единъ катетъ и острія жгълъ до него равни,* защо-то въ този случай трижгълници-тѣ ще иматъ по два жгъла и странж-тж между тѣхъ равни (§. 16).

§. 24. *Теорема. Ако гипотенуза-та и острія жгълъ на единъ правожгъленъ трижгълникъ сж равни на гипотенузж-тж и острія жгълъ на другій, то трижгълници-тѣ сж равни.*

Нека въ правожгълни-тѣ трижгълници ABC и A,B,C, (чърт. 37) AB е равна на A, B, и ∠A = ∠A,; трѣба да докажемъ, чи △ABC = △A, B, C,.

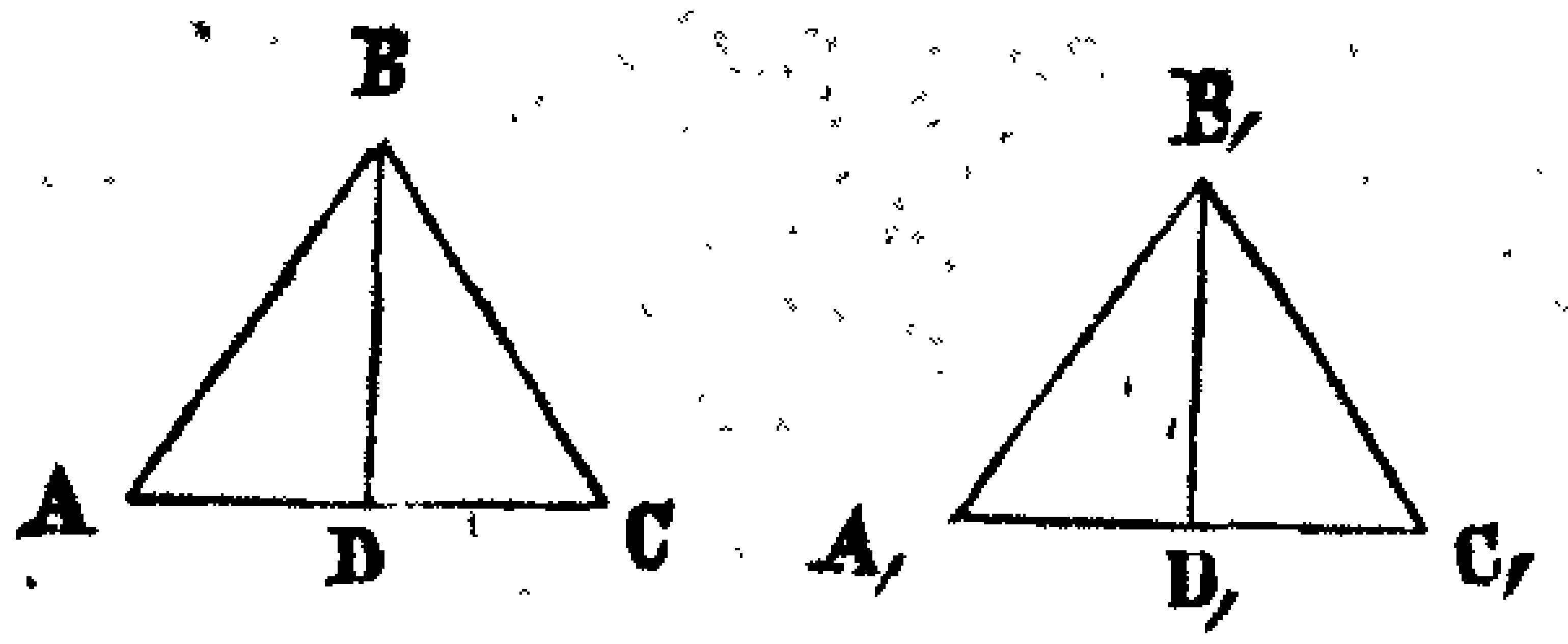


Чърт. 37.

Доказ. Налагами △A,B,C, на △ABC тъй, щото A, да падне на A а линія A, B, да иде по AB; тогава точка B, ще падне на B. Въ сжщо-то време линія A, C, трѣба да иде по AC, защо ∠A = ∠A,. Колко-то за точкж C, тя не може да падне между A и C. Наистинна, ако допустимъ, чи точка C пада между A и C, на пр. E, то △A, B, C, ще земе положеніе ABE и ∠AEB трѣба да бжде правъ; нъ отъ △EBC излиза, чи ∠AEB, като вънешенъ, е по голѣмъ отъ вътрѣшнія ∠BCE, т. е. излиза, чи прави-тѣ жгъли не сж равни по между си, кое-то е не възможно (§. 5). Точка C, сжщо не може да падне по нататъкъ отъ номора

C. Наистина, ако допустимъ, чи тя пада по нататъкъ, на пр. въ D, то △A, B, C, ще земе положеніе ABD и ∠BDA трѣба да бжде правъ; нъ въ △BDC ∠BCA, като вънешенъ, е по голѣмъ отъ вжтрѣшнія ∠BDC, т. е. пакъ излиза, чи прави-тѣ жгъли не сж равни по между си. И тъй точка C, трѣба да падне въ C; тогава B, C, ще иде по BC и △A, B, C, ще покріе △ABC.

Отъ тъзи теоремж слѣдува, чи *височини-тѣ* BD и B, D, (чьрт. 38) *на два равни трижгълника* ABC *и*



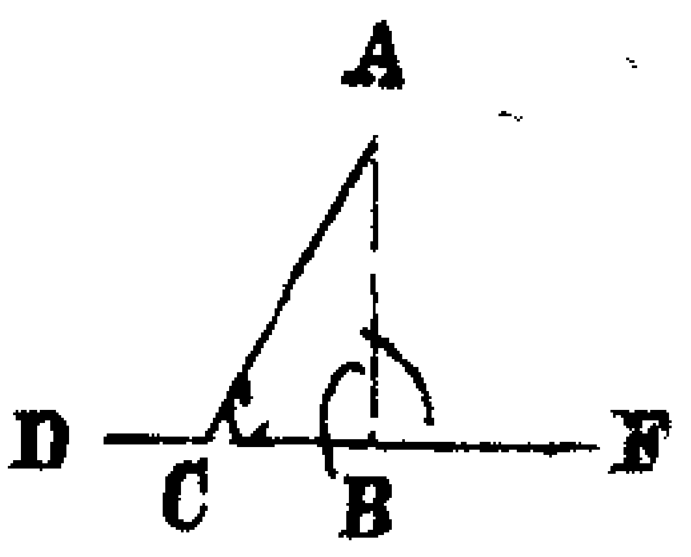
Чьрт 38.

A, B, C, *сж равни*, защо-то правожгълни-тѣ трижгълници ABD и A, B, D,, въ кои-то ∠A = ∠A, и гипотенуза DB = B, D, спорѣдъ доказанж тж теоремж, сж равни.

II-ий срокъ

СВОЙСТВА НА ПЕРПЕНДИКУЛЯРЪ~~-ТЪ~~ И НА НАКЛОНЕНИ-ТѢ.

§. 25. *Отъ нѣкоьж точкж на плоскость-тж може да ся спусти само единъ перпендикуляръ врьхъ правж-тж.*



Чьрт. 39.

Нека отъ точкж A (чьрт. 39) е спуснтать перпендикуляръ AB врьхъ правж-тж DF; трѣба да докажемъ, чи сѣка друга права AC, прекарана презъ точкж A, не може да бжде перпендикулярна къмъ DF.

Доказ. Тъй като ∠ABF е правъ

то $\angle ACB$, като вѫтрѣшенъ, е по малъкъ отъ него, т. е. остъръ; слѣд. AC не е перпендикулярна, а наклонена.

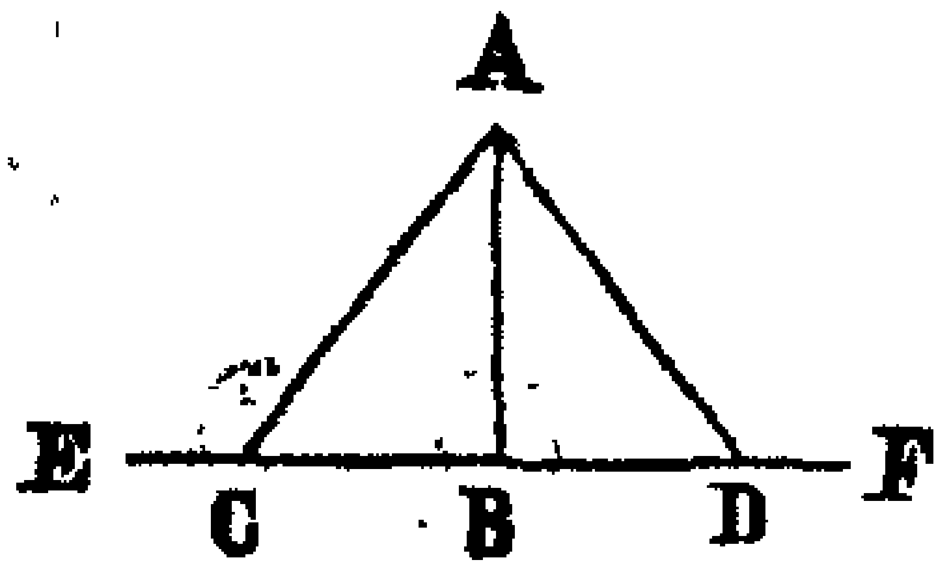
§. 26. *Теорема. Перпендикуляръ-тъ е по кѫсъ отъ сѣкѫ наклоненѫ.* 9

Нека AB (чърт. 38) е перпендикуляръ, спустнать отъ точкѫ A, а права-та AC е каква да е наклонена; трѣба да докажемъ, чи $AC > AB$.

Доказ. Въ правоѫгълнія триѫгълникъ ACB, спорѣдъ слѣдствіе-то отъ §. 19, ѫгълъ C е по малъкъ отъ ѫгълъ B, слѣд. $AC > AB$ (§. 21).

Тъй като перпендикуляръ-тъ е най кѫсо разстояніе отъ точкѫ-тѫ до правѫ-тѫ, то разстояніе-то отъ точкѫ-тѫ до правѫ-тѫ ся измѣрва съ перпендикуляръ, спустнать отъ точкѫ-тѫ врьхъ правѫ-тѫ.

§. 27. *Теорема. Равни-тѣ наклонени сѫ равноотдалечени отъ перпендикуляръ-тъ.*



Чърт. 40.

Нека AB (чърт. 40) е перпендикуляръ, спустнать отъ точкѫ A врьхъ правѫ EF, а AC и AD сѫ двѣ равни наклонени; трѣба да докажемъ, чи $CB = BD$.

Доказ. Тъй като $AC = AD$, то $\triangle ACD$ е равнобедренъ, слѣд. $\angle ACB = \angle ADB$ (§. 20). Послѣ правоѫгълни-тѣ триѫгълници ACB и ADB сѫ равни, защо-то гипотенузи-тѣ имъ AC и AD сѫ равни, сѫщо и остри-тѣ ѫгли ACB и ADB сѫ равни (§. 24). Отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува, чи $CB = BD$.

Обратна Теорема. Наклонени-тѣ сѫ равни, ако сѫ равно отдалечени отъ перпендикуляръ-тъ.

Нека $BC = BD$ (чърт. 40), трѣба да докажемъ, чи $AC = AD$.

Доказ. Тъй като правоѫгълни-тѣ триѫгълници

ABC и ABD иматъ общъ катетъ AB, и други-тѣ имъ катети CB и BD сѫ равни, то тѣзи триѫгълници сѫ равни (§. 23); слѣд. $AC = AD$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАЧИ.

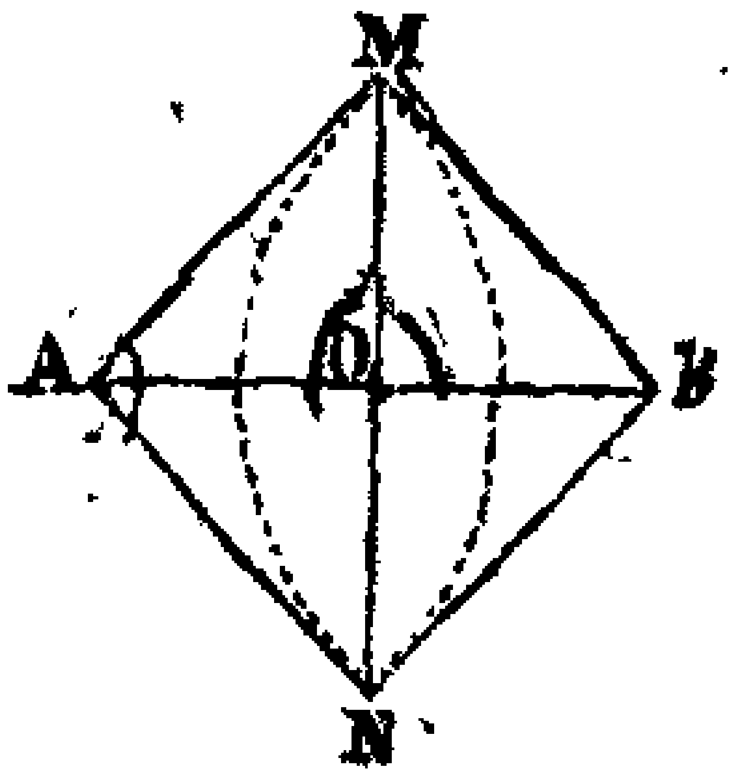
1. Да начьртимъ правѫ, равна на суммѫ-тѫ отъ нѣколко линіи.

Рѣшеніе. На произволно зетѫ правѫ отмѣрвами съ перигель еднѫ слѣдъ другѫ всички-тѣ дадени линіи.

2. Да начьртимъ правѫ, равна на разликѫ-тѫ отъ двѣ линіи AB и MN.

Рѣшеніе. На по голѣмѫ-тѫ линіѭ AB отмѣрвами съ перигель по малкѫ-тѫ MN; останала-та часть отъ по голѣмѫ-тѫ линіѭ ще бѫде разлика-та, коя-то търсимъ.

3. Да презполовимъ линіѭ AB.



Чьрт. 41.

Рѣшеніе. Нека AB (чьрт. 41) е права-та, коя-то искамы да презполовимъ. Отъ точки A и B съ перигель описвами дѫги съ равни радіуси; точки-тѣ M и N, гдѣ-то ся пресичатъ тѣзи дѫги, съединявами съ правѫ MN, коя-то ще презполови AB въ точкѫ O. Наистина,

$$\triangle AMN = \triangle MBN,$$

защо-то иматъ всички-тѣ си страни равни; отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува, чи

$$\angle AMN = \angle BMN;$$

послѣ $\triangle AOM = \triangle MOB$, защо-то $AM = MB$, $OM = OM$ и ѫгъли-тѣ между тѣзи страни, именно $\angle AMO$ и $\angle OMB$ сѫ равни. Отъ това слѣдува $AO = OB$.

4. Отъ срѣдѫ-тѫ на линіѭ AB (чьрт. 41) да издигнемъ перпендикуляръ.

Рѣшеніе. Тъзи задача ся рѣшава какъ то и задача 3, защо-то MN е перпендикулярна къмъ срѣдѫ-тѫ на линіѭ AB.

5. При точкѫ A на правѫ-тѫ AB да построимъ ѫгълъ равенъ на дадеція ѫгълъ LOM.

Рѣшеніе. Отъ точкѫ O описвами съ произволенъ радіусъ дѫгѫ, коя-то ще пресѣче страни-тѣ на ѫгълъ-тъ съ точки L и M; отъ точкѫ A описвами съ сѫщія радіусъ дѫгѫ, коя-то ще пресѣче AB въ точкѫ C; най послѣ отъ точкѫ C съ радіусъ LM описвами дѫгѫ, коя-то ще пресѣче първѫ-тѫ дѫгѫ въ точкѫ D. Като съединимъ D съ A, ще получимъ ѫгълъ DAC, кой-то е равенъ на ѫгълъ LOM, защо-то триѫгълници LOM и DAC сѫ равни (§. 18).

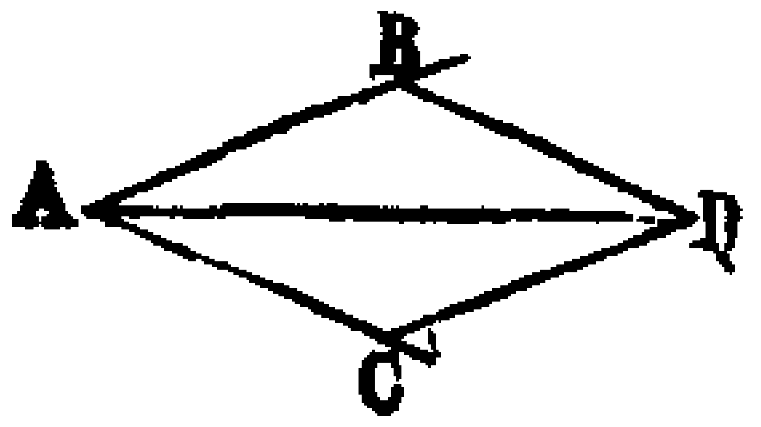
6. Да съставимъ ѫгълъ, равенъ на суммѫ-тѫ отъ нѣколко ѫгъла.

Рѣшеніе. Като прекарами произволнѫ линіѭ AB, ще съставимъ при нѣкоѭ нейнѫ точкѫ A ѫгълъ CAB, кой-то да бѫде равенъ на първія отъ дадени-тѣ ѫгли; при сѫщѫ-тѫ точкѫ A строимъ на линіѭ AC ѫгълъ, равенъ на вторія отъ дадени тѣ ѫгли и пр.

7. Отъ точкѫ M да спустимъ перпендикуляръ къмъ правѫ-тѫ AB.

Рѣшеніе. Отъ точкѫ M описвами окрѫжность, коя-то да пресѣче правѫ-тѫ AB въ точки P и Q; от точки P и Q описвами дѫги съ равни радіуси; линіята, коя-то съединява точкѫ-тѫ, гдѣ-то ся пресичат тѣзи дѫги, съ точкѫ M, ще бѫде перпендикуляр къмъ AB.

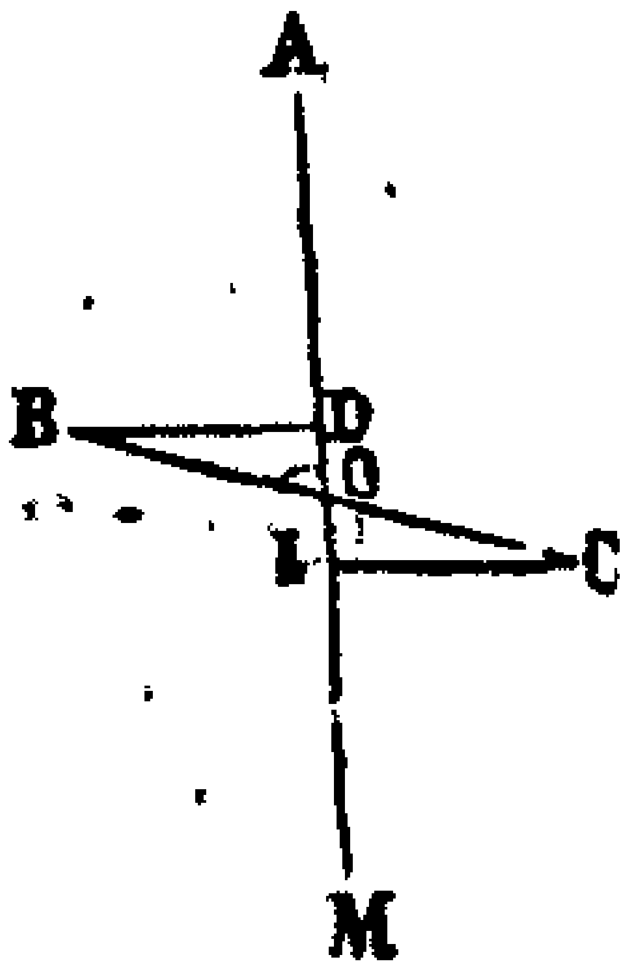
8. Да презполовимъ ѫгълъ BAC.



Чърт. 42.

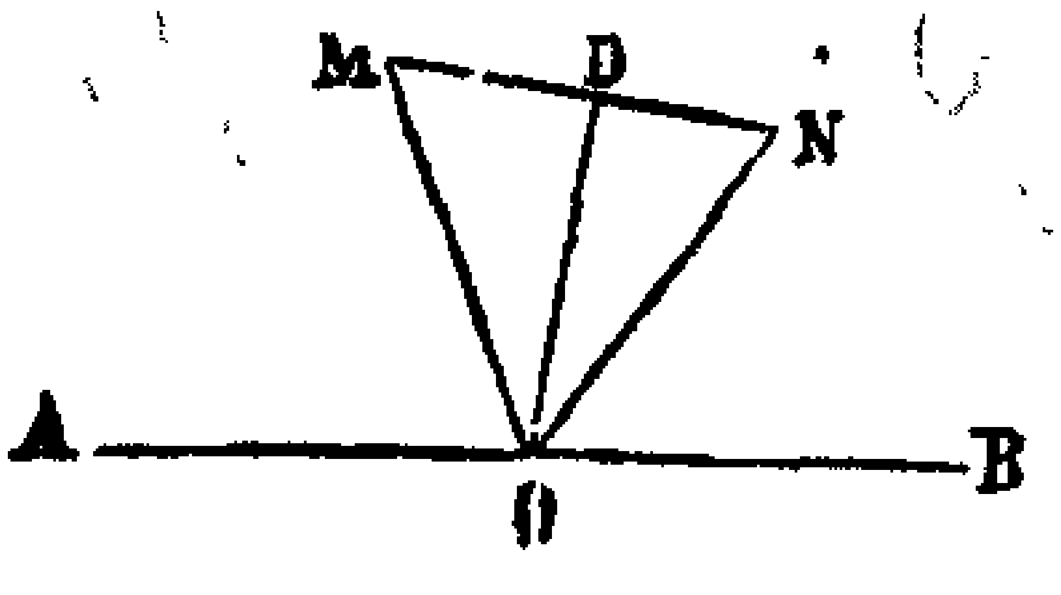
Рѣшеніе. Нека ВАС (чърт. 42) е ѫгълъ-тъ, кой-то исками да презполовимъ. Отъ върхъ А съ произволенъ радіусъ описвами дѫгѫ, коя-то ще пресѣче страни АВ и АС въ точки В и С; отъ точки В и С описвами съ равни радіуси дѫги, кои-то ще ся пресѣкѫтъ съ точкѫ D; точкѫ D съединявами съ А; линія AD ще презполови ѫгълъ ВАС. Това слѣдува отъ равенство-то на триѫгълници ABD и ACD, кои то иматъ три-тѣ си страни равни.

9. Да прекарами презъ точкѫ А правѫ, коя-то да минува между точки В и С на равно разстояніе отъ тѣхъ.



Чърт. 43.

Рѣшеніе. Нека А, В и С (чърт. 43) сѫ дадени-тѣ точки. Съединявами точки В и С съ правѫ ВС; презъ срѣдѫ-тѫ О на линіѭ ВС и презъ точкѫ А прекарвами линіѭ АМ, коя-то ще бѫде на равно разстояніе отъ точки В и С. Наистина, като спустимъ перпендикуляри BD и CE врьхъ правѫ АМ, ще получимъ два правоѫгълни триѫгълници BOD и COE, кои-то сѫ равни, защо-то гипотенузи-тѣ имъ ВО и ОС сѫ равни и остри-тѣ имъ ѫгъли BOD и COE сѫ равни (като вертикални). Отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува BD = EC.



Чърт. 44.

10. На правѫ-тѫ АВ да намѣримъ точкѫ, коя-то да е на равно разстояніе отъ двѣ дадени точки M и N.

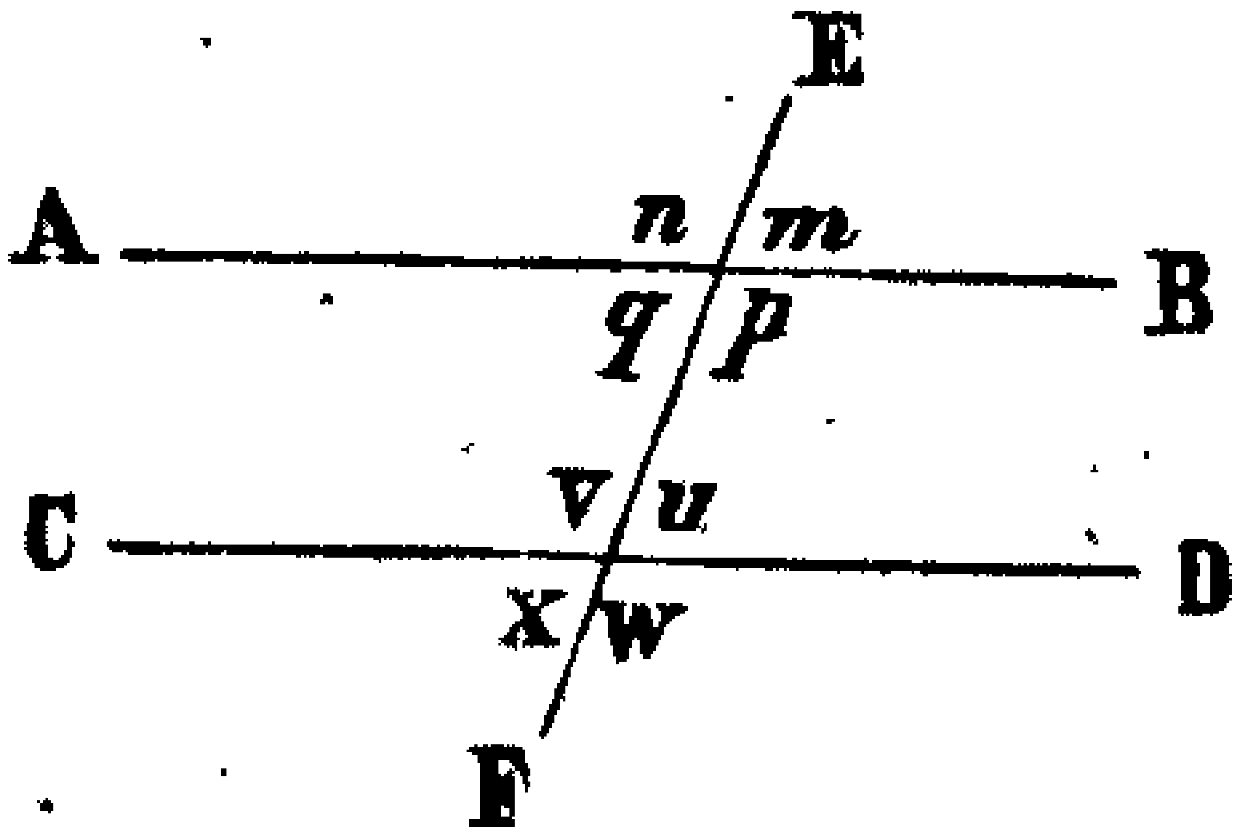
Рѣшеніе, Нека AB (чърт. 44) е тъзи линія, а

M и N дадени-тѣ точки. Съединявами M и N и отъ срѣдѫ-тѫ на линіѭ MN издигами перпендикуляръ, кой-то ще пресѣче линіѭ AB въ точкѫ O; тъзи точка ще бѫде на еднакво разстояніе отъ M и N. Наистина, линій-тѣ ON и OM сѫ равни, защо-то сѫ наклонени, равно отдалечени отъ перпендикуляръ OD.

ГЛАВА III.

УСПОРѢДНИ ЛИНІИ.

§. 28. Двѣ линіи AB и CD (чьрт. 45), кои-то лѣжѫть на еднѫ плоскость, и кои-то не ся пресичать, колко и да ги продължавами къмъ еднѫ и къмъ другѫ странѫ, ся наричать *успорѣдни.* Ако пресѣчемъ успорѣдни-тѣ линіи съ третѭ линіѭ EF, коя-то ся нарича *прѣсѣчкѫ*, то ще ся образувать 8 ѫгъла m, n, p, q, v, u, x, w, отъ кои-то m, n, x, w, ся наричатъ *вънишни*, а u, v, p, q, — *вѫтрѣшни* ѫгъли. Сѣки два ѫгъла, кои-то лѣжѫть отъ еднѫ странѫ на пресѣчкѫ-тѫ, на пр. m и w или v и q, ся наричать *едностърнясти;* а сѣки два вънишни или вѫтрѣшни ѫгъла, кои-то лѣжѫть отъ еднѫ-тѫ и другѫ-тѫ странѫ на пресѣчкѫ-тѫ, на пр. p и v, или n и w, ся наричать *крьстосани.*

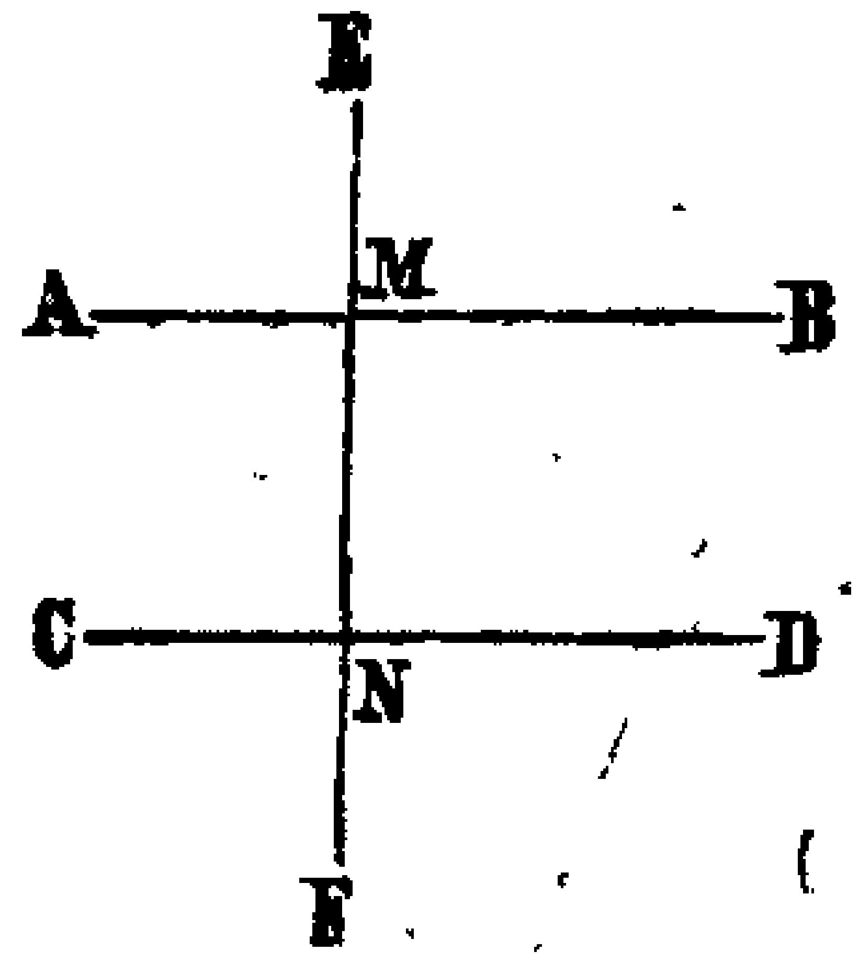


Чьрт. 45.

Два едностърнясти ѫгъла, отъ кои то единъ-тъ е вѫтрѣшенъ, а другія вънишенъ, на пр. p и w, или v и n, ся наричать *соотвѣтствени.*

За да покажать на книгѫ чи двѣ линіи сѫ успорѣдни, употрѣбляватъ знакъ ||. На пр. AB || CD ще рече: линіи-тѣ AB и CD сѫ успорѣдни по между си.

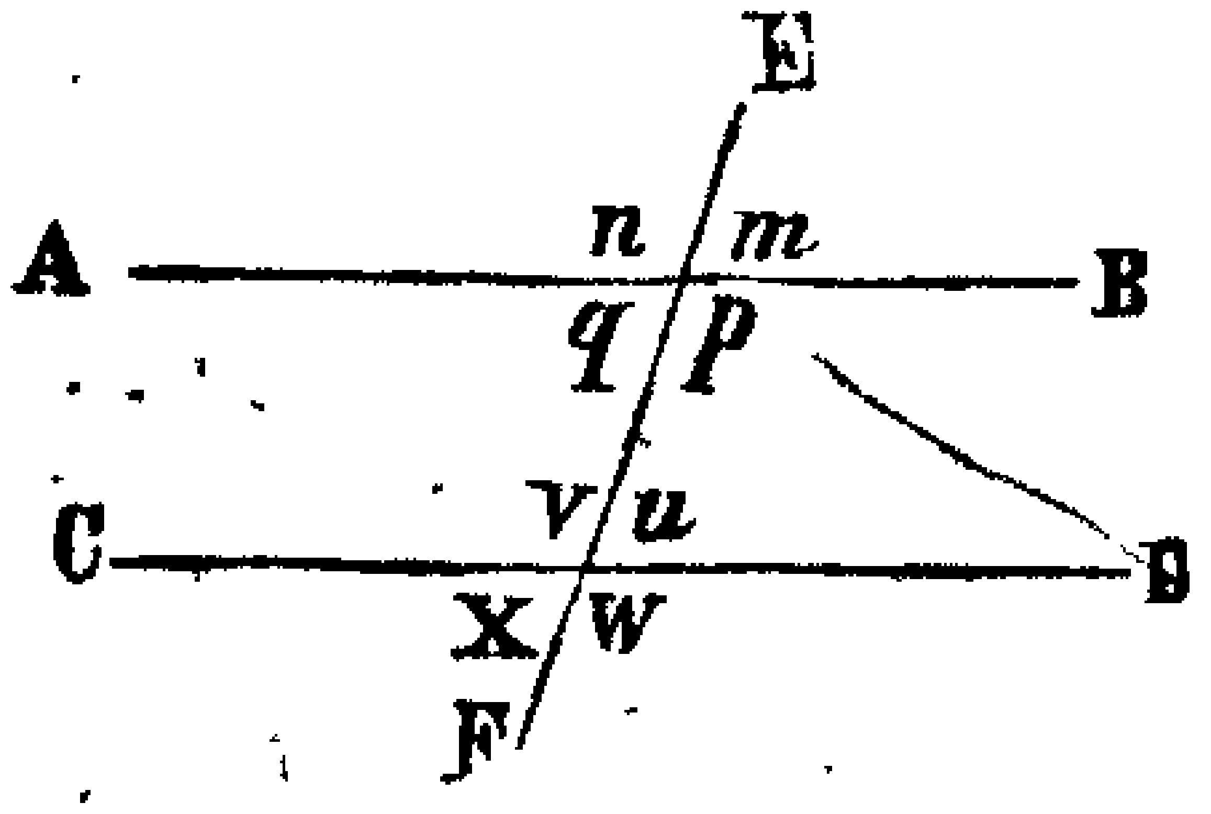
§. 29. *Теорема. Двѣ линіи сѫ успорѣдни по между си, ако сѫ перпендикулярни къмъ третьѫ.*



Чьрт. 46.

Нека линіи AB и CD (чьрт. 46) сѫ перпендикулярни къмъ линіѭ EF, трѣба да докажемъ, чи тѣ сѫ успорѣдни по между си. *Доказ.* Ако допустимъ, чи тѣзи линіи ся пресичать въ нѣкоѭ точкѫ, ще излѣзи, чи отъ тъзи точкѫ сѫ спутснати два перпендикуляра къмъ линіѭ EF, а това противорѣчи на §. 25.

§. 30. *Теорема. Двѣ линіи пресѣчени отъ третьѫ, сѫ успорѣдни по между си, ако вѫтрѣшни-тѣ крьстосани ѫгли сѫ равни.*



Чьрт. 47.

Нека $q = u$ (чьрт. 47); трѣба да докажемъ, чи

AB || CD.

Доказ. Ако допустимъ чи линіи-тѣ AB и CD ся пресичать на пр. отъ дѣсно на пресѣчкѫ EF, то ще ся образува триѫгълникъ, въ кои-то ∠q ще бѫде външенъ ѫгълъ, а u вѫтрѣшенъ; нъ $q = u$, т. е. външнія ѫгълъ на триѫгълникъ-тъ е равенъ на вѫтрѣшнія несмеженъ съ него, а това е противно на §. 19, слѣд. линіи-тѣ AB и CD не могѫтъ да ся пресѣкѫтъ.

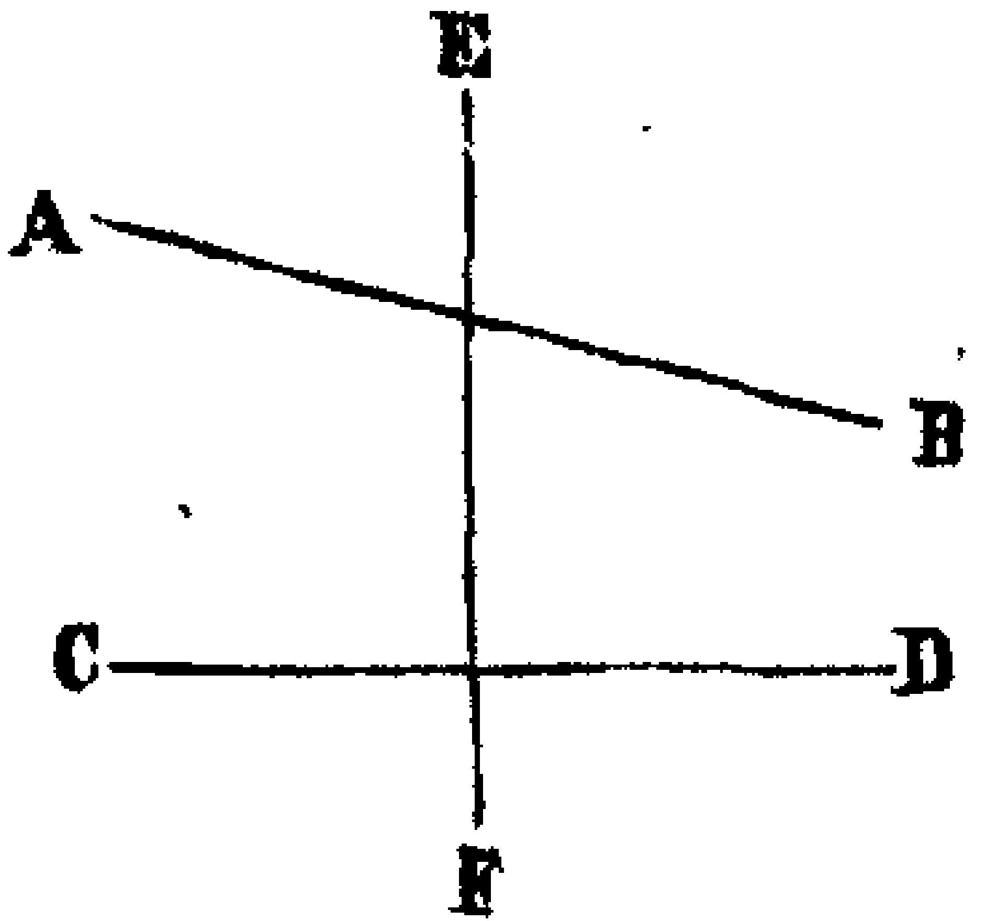
Отъ тъзи теоремѫ слѣдува:

1) Линіи-тѣ AB и CD сѫ успорѣдни, ако външни-тѣ крьстосани ѫгли, на пр. m и x сѫ равни, защо-то отъ равенство $m = x$, като замѣстимъ m съ вертикалнія му q и x съ вертикалнія му u, ще получимъ $q = u$, а кога $q = u$, линіи-тѣ сѫ успорѣдни.

2) Линіи-тѣ AB и CD сѫ успорѣдни, ако съответствени-тѣ ѫгъли, на пр. m и u сѫ равни; защо-то отъ равенство $m = u$, като замѣстимъ m съ вертикалнія му q, ще получимъ $q = u$, а тогава линіи-тѣ сѫ успорѣдни.

3) Линіи-тѣ AB и CD сѫ успорѣдни, ако сумма-та отъ двѣ-та вѫтрѣшни едностърнясти ѫгъла, на пр. p и u е равна съ два прави, защо-то отъ равенство $p + u = 2d$ и $p + q = 2d$ (ѫгъли-тѣ, p и q сѫ смежни), слѣдува $p + q = p + u$ или $q = u$.

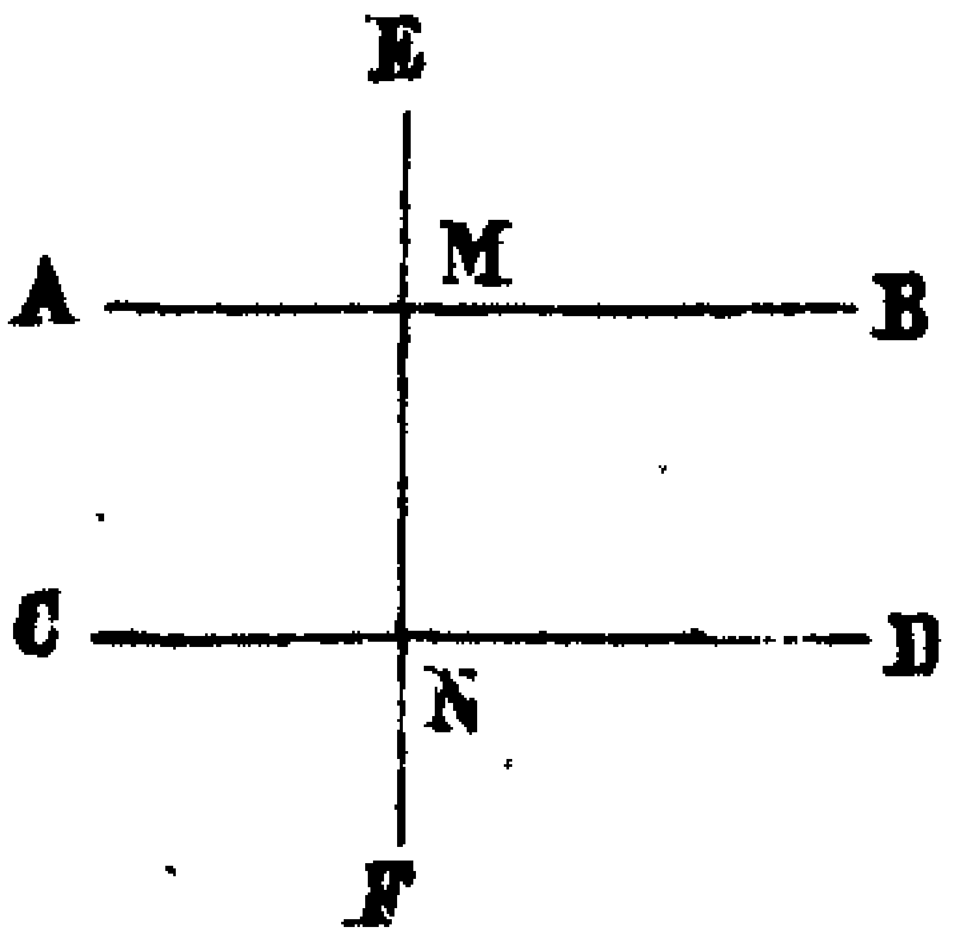
§. 31. *Аксіома. Двѣ линіи* AB *и* CD (чърт. 48), *отъ кои-то една-та, на пр.* CD *е перпендикулярна къмъ пресѣчкѫ* EF, *а друга-та съставя съ неѭ остьръ или тѫпъ ѫгълъ, при продълженіе-то имъ ся пресичать, т. е. не сѫ успорѣдни.*



Чърт. 48.

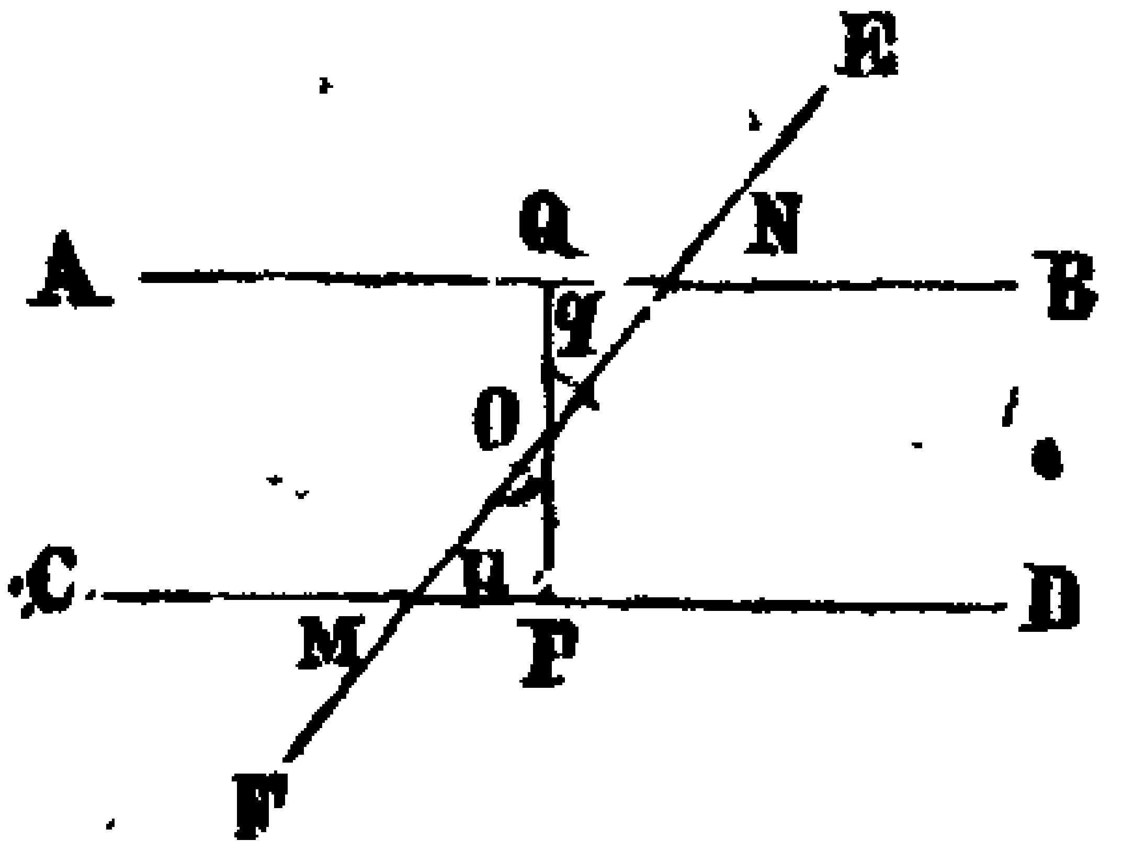
Отъ тъзи аксіомѫ слѣдува, чи *права-та, коя-то е перпендикулярна къмъ еднѫ от успорѣдни-тѣ, ще бѫде перпендикулярна и къмъ другѫ-тѫ.*

Наистина, нека AB и CD (чърт. 49) сѫ двѣ успорѣдни и нека права-та EF е перпендикулярна къмъ CD. Ако допустимъ, ч права-та EF не е перпендикулярна къмъ AB, тя ще съставя съ неѭ остьръ или тѫпъ ѫгъл и тогава линіи-тѣ AB и CD, спорѣдъ казанѫ-тѫ аксіомѫ, трѣб да ся пресичать, кое-то е невъзможно, защо-то тѣ сѫ успорѣдни; слѣд. линіяEF трѣба д бѫде перпендикулярна и къмъ AB



Чърт. 49.

§. 32. *Теорема. Ако двѣ линіи сѫ успорѣдни, то вѫтрѣшни-тѣ крьстосани ѫгли сѫ равни.*



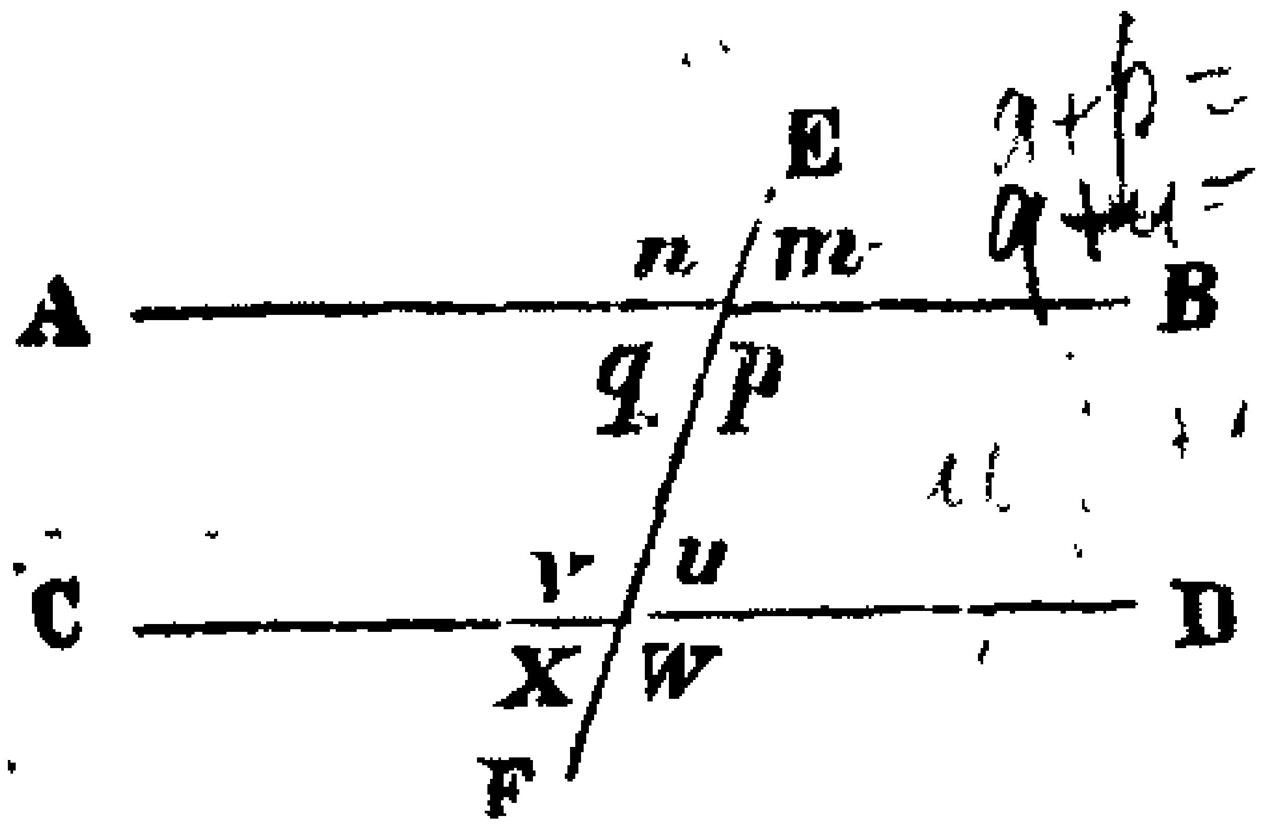
Чьрт. 50.

Нека линіи AB и CD (чьрт. 50) сѫ двѣ успорѣдни, пресѣчени отъ третѭ линіѭ EF; трѣба да докажемъ чи q = u.

Доказ. Нека O е срѣдата на линіѭ MN. Отъ точкѫ O спущами перпендикуляръ къмъ CD и го продължавами, догдѣ ся пресѣче съ линіѭ AB въ нѣкоѭ точкѫ Q. Линія PQ ще бѫде перпендикулярна и къмъ AB (§. 31); слѣд. трижгълници OQN и OPM сѫ правоѫгълни. Тѣзи трижгълници сѫ равни, защо-то гипотенузи-тѣ имъ OM и ON сѫ равни и остри-тѣ ѫгли MOP QON сѫ равни (къто вертикални). Отъ равенство-то на трижгълници MOP и QON слѣдува $\angle q = \angle u$.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува:

q+p=2d, то
q+u=2d,



Чьрт. 51.

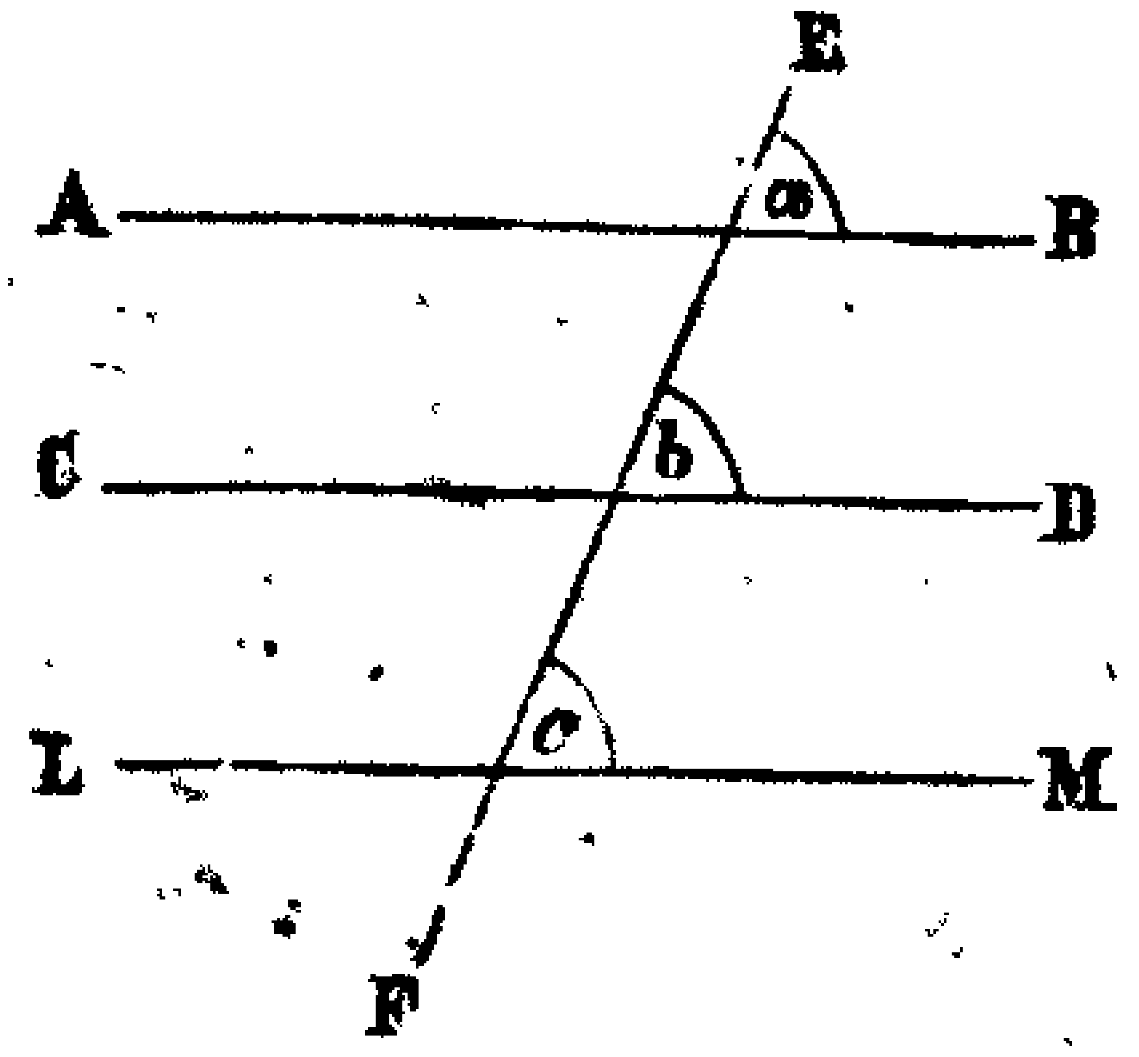
1) Ако линіи AB и CD (чьрт. 51) сѫ успорѣдни, то външни-тѣ крьстосани ѫгли, на пр; m и x, сѫ равни; защо-то отъ равенство q = u, къто замѣстимъ q съ вертикалнія му m, и u съ вертикалнія му x, ще получимъ m = x.

2) *Ако линіи-тѣ* AB *и* CD *сѫ успорѣдни, то свотвѣтственни-тѣ ѫгли, на пр.* m *и* u, *сѫ равни;* защо-то отъ равенство q = u, къто замѣстимъ $\angle q$ съ вертикалнія му $\angle m$ ще получимъ m = u.

3) *Ако линіи-тѣ* AB *и* CD *сѫ успорѣдни, то сумма-та ото два-та едностърнясти вѫтрѣшни ѫгла,*

на пр. p *и* u *е равна на два прави*; защо-то $q + p = 2d$, а $q = u$, слѣд. $u + p = 2d$.

§. 33. *Теорема. Двѣ линіи, отъ кои-то сѣка отдѣлно е успорѣдна на третѭ, успорѣдни сѫ и по между си.*

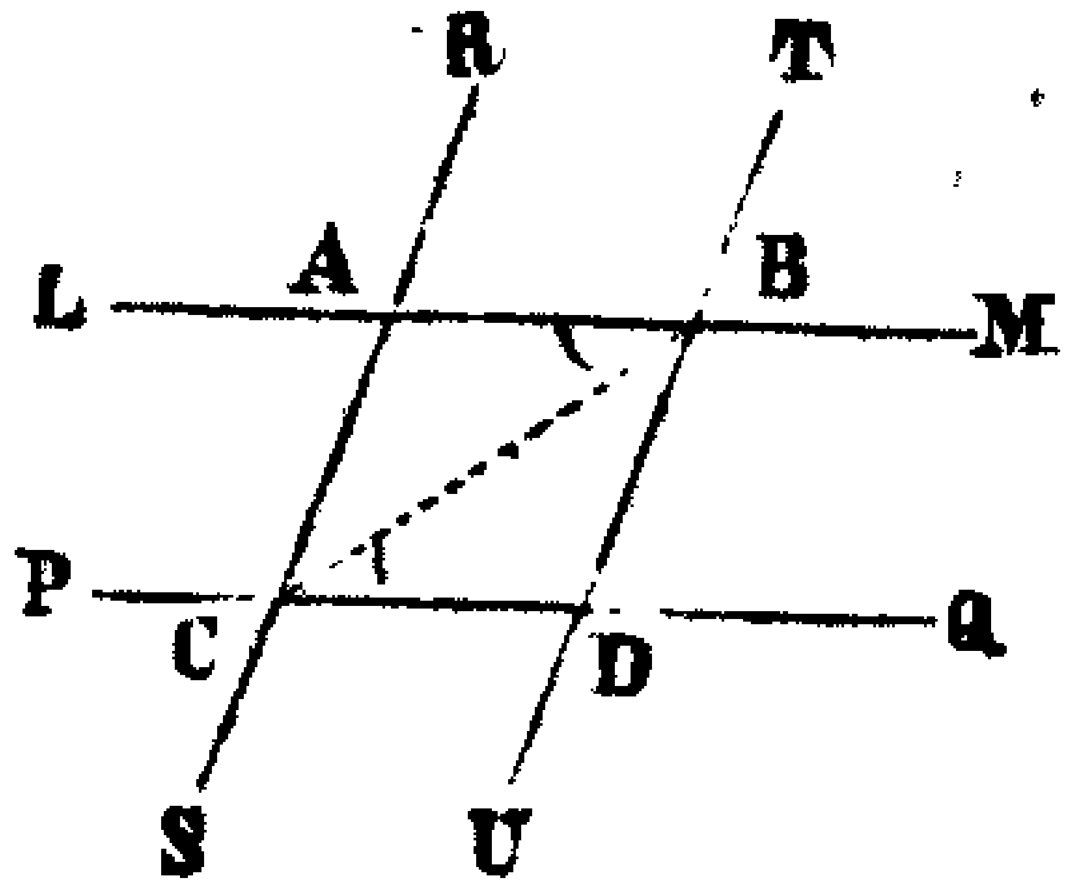


Чьрт. 52.

Нека AB || CD и LM || CD (чьрт. 52), трѣба да докажемъ, AB || LM.

Доказ. Ако AB || CD, то $\angle a = \angle b$ къто съотвѣтственни, (§. 32, слѣдствіе 2); сѫщо, ако LM || CD, то $\angle c = \angle b$, пакъ къто съотвѣтственни. Нъ двѣ величини, отдѣлно равни на третѭ, равни сѫ и по между си, слѣд. $\angle a = \angle c$. Послѣдне-то равенство показва, чи линія AB е успорѣдна на LM (§. 30 слѣдствіе 2).

§. 34. *Теорема. Отсѣчки-тѣ на двѣ успорѣдни между други двѣ успорѣдни сѫ равни.*



Чьрт. 53.

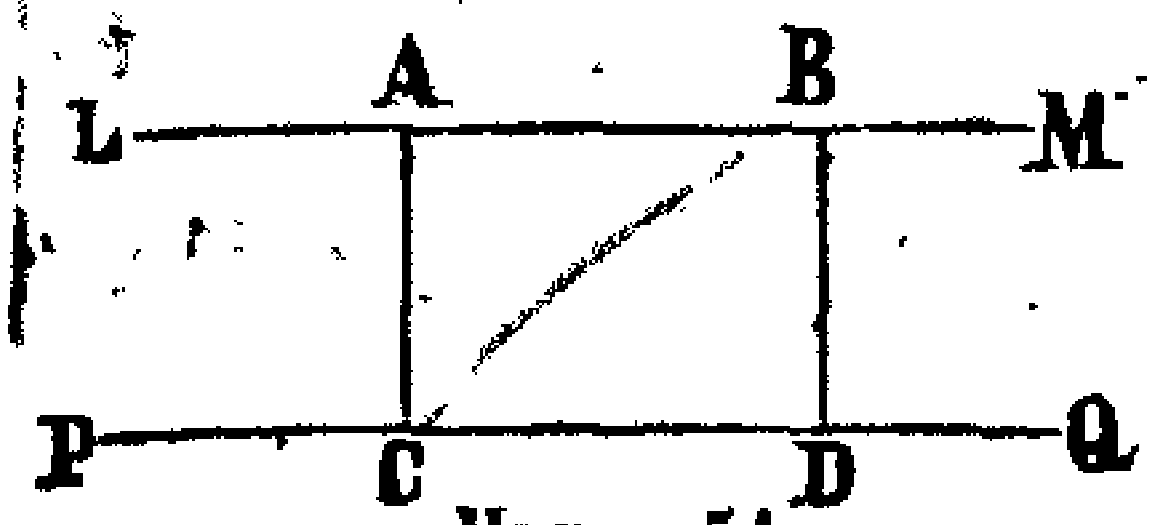
Нека LM || PQ и RS || TU (чьрт. 53); трѣба да докажемъ, чи AB = CD и AC = DB.

Доказ. Съединявами точкѫ B съ C; триѫгълници ABC и DBC сѫ равни (§. 16), защо-то BC е обща страна, $\angle BCD \angle ABC$ (къто кръстосани отъ успорѣдни-тѣ LM и RQ), сѫщо $\angle DBC = \angle ACB$ (пакъ къто кръстосани). Отъ равенство-то на триѫгълници ABD и DBC слѣдува AB = DC и AC = BD.

1872.

[illegible]

§. 35. *Теорема. Разстоянія-та между двѣ успорѣдни линіи сѫ на вредъ еднакви.*

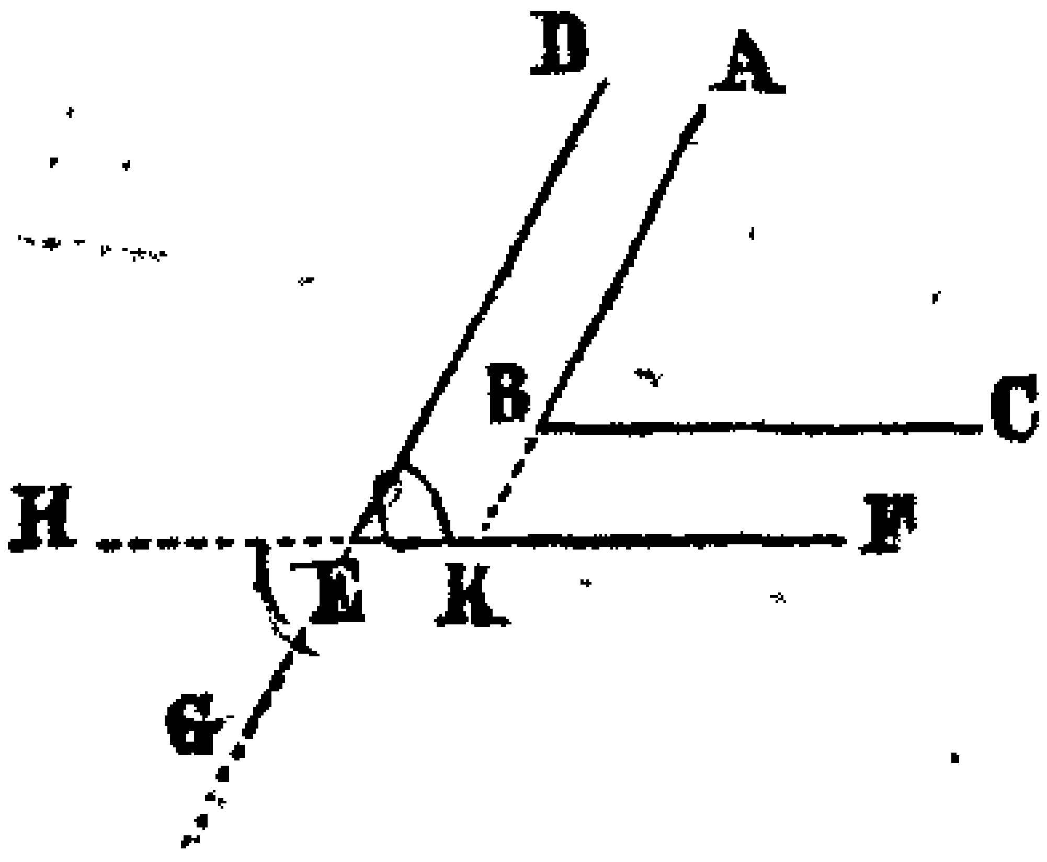


Чърт. 54.

Нека LM и PQ (чърт. 54) сѫ двѣ успорѣдни линіи; земами на LM двѣ произволни точки A и B и спущами отъ тѣхъ перпендикуляри AC и BD къмъ линіѭ PQ; трѣба да докажемъ, чи $AC = BD$.

Доказ. Тъй като AC и BD сѫ перпендикуляри къмъ PQ, то тѣ сѫ успорѣдни по между си (§. 29); а отсѣчки-тѣ на двѣ успорѣдни между други двѣ успорѣдни сѫ равни (§. 34); слѣд. $AC = BD$.

§. 36. *Теорема. Два жгъла сѫ равни, ако страни-тѣ имъ сѫ успорѣдни и ако тѣ сѫ обърнати къмъ еднѫ странѫ или къмъ срѣщуположни страни.*



Чърт. 55.

Нека $AB \parallel DE$ и $CB \parallel EF$ (чърт. 55); трѣба да докажемъ, чи $\angle ABC = \angle DEF$.

Доказ. Продължавами AB до гдѣ ся пресѣче съ EF въ точкѫ K; тогава

$$\angle ABC = \angle AKF \text{ и}$$
$$\angle AKF = \angle DEF,$$

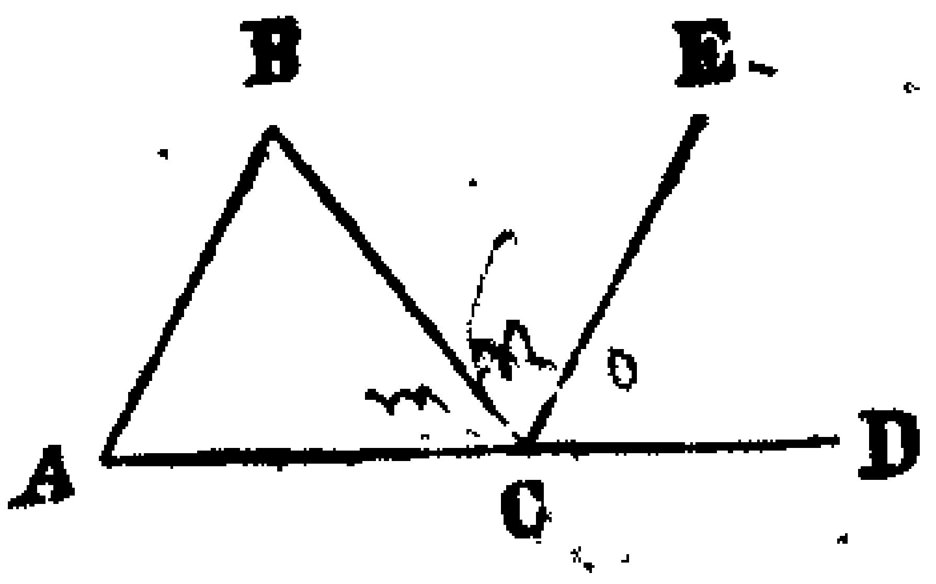
като съотвѣтственни (§. 32 слѣдствіе 2), слѣд. $\angle ABC = \angle DEF$.

Като продължимъ страни DE и EF, ще видимъ, чи $\angle ABC = \angle HEG$; т. е. жгъли-тѣ сѫ също равни, ако страни-тѣ имъ сѫ успорѣдни и ако тѣ сѫ обърнати къмъ срѣщуположни страни.

§. 37. *Теорема. Въ сѣки трижгълникъ сумма-та на жгъли-тѣ му е равна на два прави.*

Кънд Софий

1892 [illegible]



Чьрт. 56.

Нека ABC (чьрт. 56) нѣкой трижглникъ; трѣба докажемъ, чи

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 2$

Доказ. Продължавами стр нѫ AC и презъ точкѫ C пр карвами линіѭ CE, успорѣд на AB. Ѫгли-тѣ ACB и BCD сѫ смежни, слѣ $\angle ACB + BCD = 2d$; кьто замѣстимъ ѫгълъ BCD суммѫ BCE + ECD, ще имами:

$$\angle ACB + BCE + ECD = 2d$$

Нъ $\angle$ BCE може да ся замѣсти ABC, защо-тѣзи два ѫгъла сѫ вѫтрѣшни крьстосани и слѣд. рав (§. 32); сѫщо и ѫгълъ ECD може да ся замѣсти BAC, защо-то и тѣзи два ѫгъла сѫ равни, кьто с отвѣтственни (§. 32, слѣд. 2). Слѣд. отъ горне-равенство ще имами $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 2$

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува:

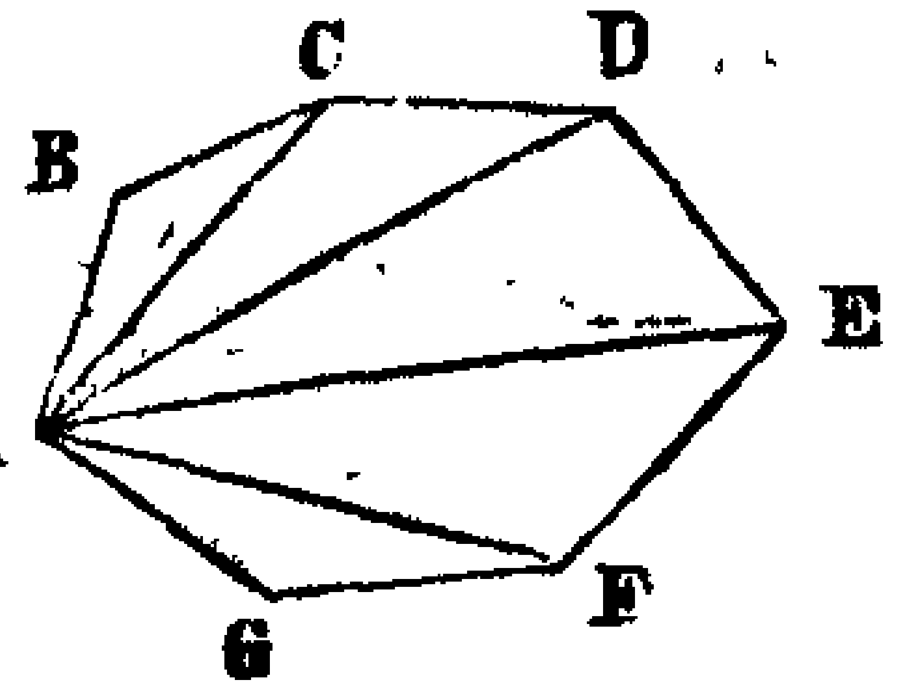
1) *Външнія ѫгълъ на сѣкій триѫгълникъ е раве на суммѫ-тѫ отъ два вѫтрѣшни, съ него несмежн* защо-то както тъзи сумма заедно съ третія ѫгъ прави 2 d, тъй сѫщо и външнія ѫгълъ заедно третія прави 2 d.

2) *Ако два ѫгъла отъ единъ триѫгълникъ сѫ равн на два ѫгъла отъ другій, то и трети-тѣ имъ ѫгъ сѫ равни,* защо-то трети-тѣ ѫгли допълнять до равн т. е. до 2d.

3) *Въ триѫгълникъ-тъ не може да има пове отъ единъ правъ или тѫпъ ѫгълъ.*

4) *Сумма-та на остри-тѣ ѫгли, въ правоѫгълн триѫгълникъ е равна на единъ правъ.*

§. 38. *Теорема. Сумма-та на ѫгли-тѣ въ сѣк многоѫгълникъ е равна на два прави, повторени толко пѫти, колко-то многоѫгълникъ-тъ има страни безъ дв*

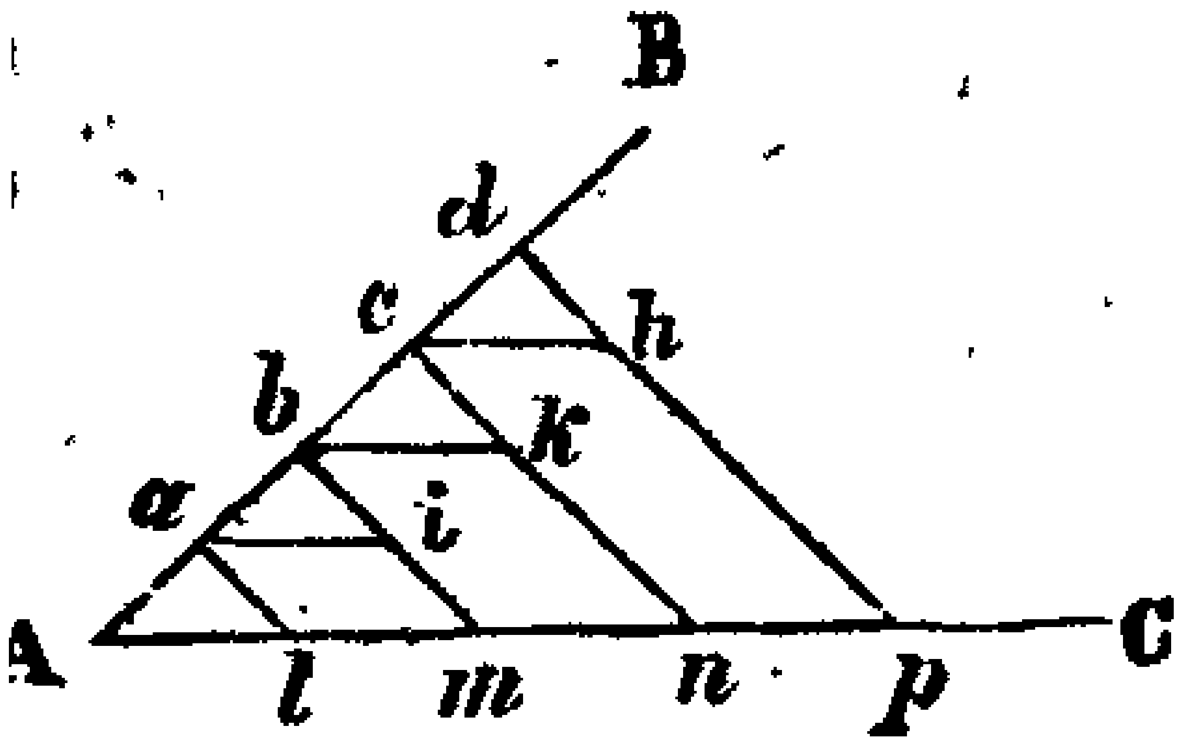


Чърт. 57.

Нека многожгълникъ ABCDEFG (чърт. 57) има n страни; трѣба да докажемъ, чи сумма-та на жгъли-тѣ му е равна на 2d (n — 2).

Доказ. Тъй къто діагонали-тѣ, кои-то излизать отъ върхъ-ь на нѣкой жгълъ А, раздѣлять многожгълникъ-тъ а n — 2 трижгълника (§. 11), а сумма-та на жгъли-тѣ ъ сѣкій трижгълникъ, спорѣдъ §. 37, е равна на 2d, о сумма-та на жгъли-тѣ на многожгълникъ-тъ е равна а 2d (n — 2). n = числото на страните.

§. 39. *Теорема. Ако на еднж-тж странж на гълъ-тъ отмѣримъ нѣколко равни части и презъ точки-ѣ на дѣленіе-то прекарами успорѣдни линіи, то и тъ другж-тж странж ще ся отсѣкжть равни части.*



Чърт. 58.

Нека на странж AB (чърт. 58) сж отмѣрени равни части:

Aa = ab = bc = cd,

и сж прекарани успорѣдни линіи:

al || bm || cn || dp,

трѣба да докажемъ

Al = lm = mn = np.

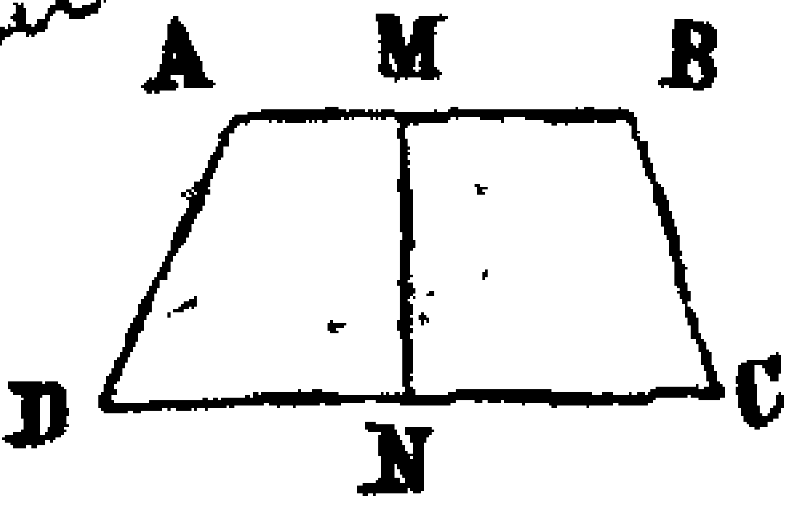
Доказ. Прекарвами линіи ai, bk, ch, успорѣдни а AC; тогава въ трижгълници Aal, abi, bck, cdh мами Aa = ab = bc = cd, и освѣнъ това жгъли-тѣ, ои-то сж до тѣзи линіи, къто съотвѣтственни сж авни (§. 32, слѣд. 2); слѣд. тѣзи трижгълници сж авни по между си (§. 16) и за това Al = ai = bk = ch. ъ ai е равна на lm, сжщо bk = mn, и ch = np (§. 4); слѣд. Al = lm = mn = np.

Finis II

ПАРАЛЛЕЛОГРАММИ И ТРАПЕЦIИ.

§. 40. Четвероѫгълникъ ABCD (чърт. 59), в кой-то двѣ-тѣ страни AB и CD сѫ успорѣдни, други-тѣ двѣ, AD и BC, не успорѣдни, ся наричатъ *трапецiи*. Разстоянiе-то между двѣ-тѣ успорѣдни страни, т. е. перпендикуляръ MN, кой-то е спустнат отъ еднѫ-тѫ къмъ успорядн другѫ-тѫ странѫ, ся нарича *височинѫ* на трапецiѫ-тѫ.

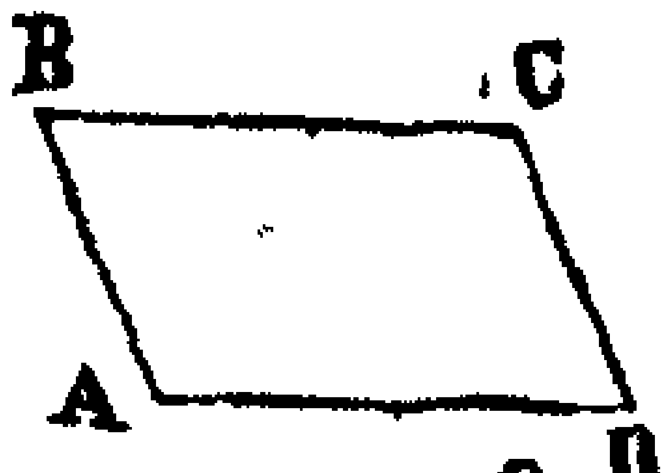
Че се [illegible] 19 = 1891 [illegible]



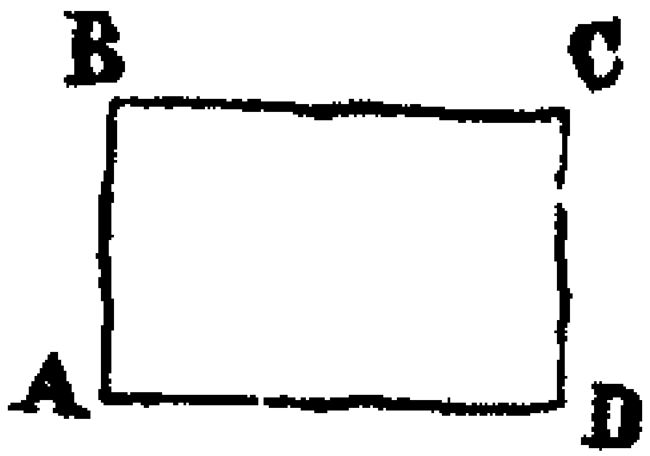
Чърт. 59.

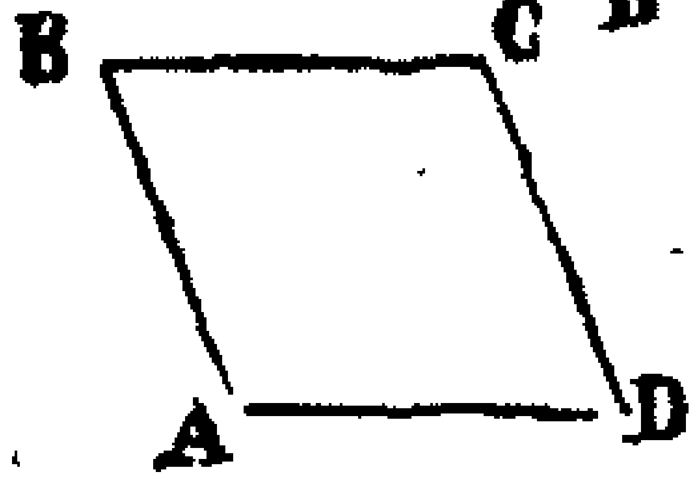
Четвероѫгълникъ ABCD (чърт. 60), въ кой-т срѣщуположни-тѣ страни сѫ успорѣдни, ся нарич *параллелограммъ*. Една отъ страни-тѣ н параллелограмъ-тъ, н пр. AD, ся нарича *основѫ* а перпендикуляръ-тъ, кой-то е спустнатъ отъ нѣкоѭ точкѫ на срѣщуположнѫ-тѫ странѫ врьх основѫ-тѫ, ся нарич *височинѫ* на параллелограммъ-тъ.

Чърт. 60.

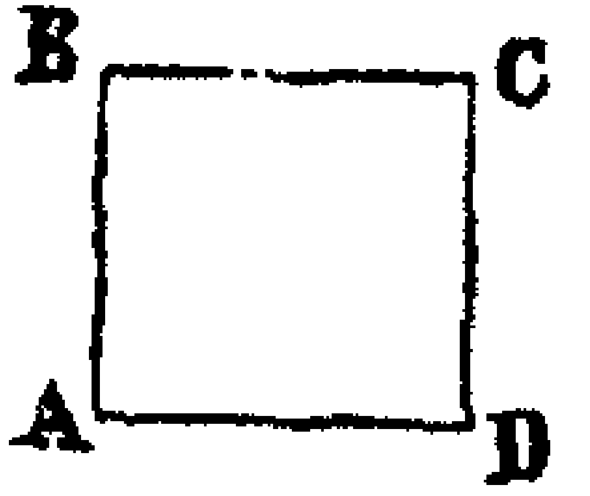


Чърт. 61.





Чърт. 62.



Чърт. 63.

Параллелограммъ ABCD (чърт. 61), въ кой-то всички-тѣ ѫгли сѫ прави, ся нарича *правоѫгълникъ*. Едн отъ страни-тѣ на правоѫгълникъ-тъ, на пр. AD, с нарича *основа*, а друга-та AB — неговѫ височинѫ защо-то е перпендикулярна къмъ основѫ-тѫ.

Явно е, чи правоѫгълници-тѣ, кои-то иматъ еднакви основи и височини, сѫ равни по между си, защо-то таквизи правоѫгълници при налаганiе-то си съвпадатъ.

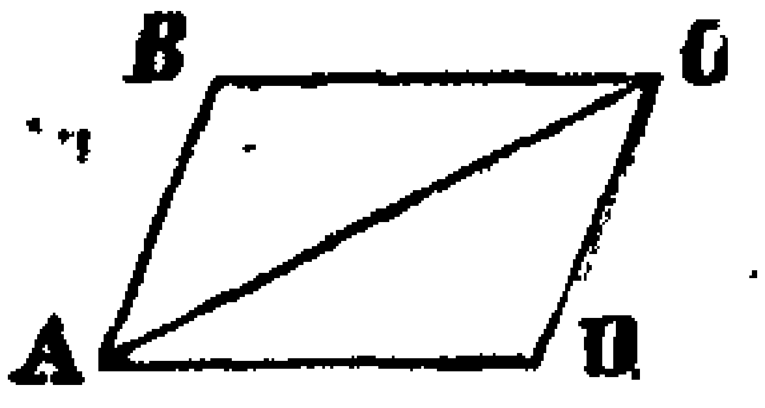
Параллелограммъ-тъ ABCD (чърт. 62), въ кой-т всички-тѣ страни сѫ равни, ся нарича *ромбъ*.

Правожгълникъ ABCD (чьрт. 63), въ кой-то сички-тѣ страни сж равни, ся нарича *квадратъ*.

Въ сѣкій параллелограммъ сумма-та отъ жгъли-тѣ, кои-то сж до еднж неговж странж, на пр. A и D (чьрт. 60), спорѣдъ §. 32, слѣд. 3, е равна на два прави, а срѣщуположни-тѣ жгъли, на пр. A и C сж равни по между си, защо-то страни-тѣ имъ сж успорѣдни (§. 36).

Суѣщуположни-тѣ страни на параллелограммъ-тъ спорѣдъ §. 34, сж равни по между си.

§. 41. *Сѣкій параллелограммъ ся раздѣля отъ діагональ-тъ си на два равни трижгълника.*



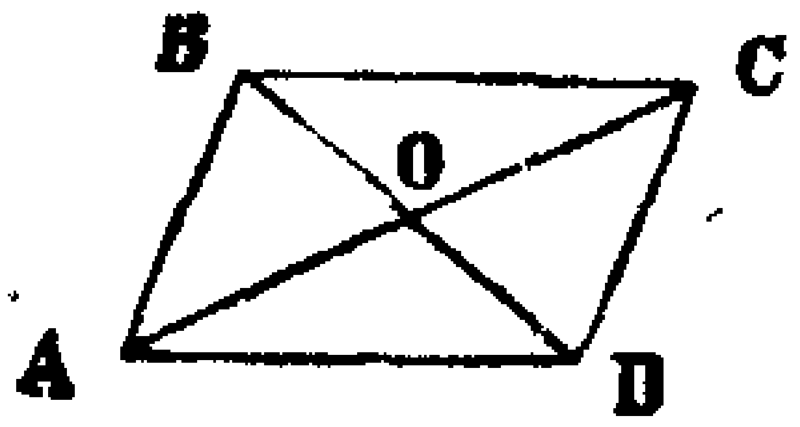
Чьрт. 64.

Въ параллелограммъ ABCD (чьрт. 64) прекарами діагоналъ AC; трѣба да докажемъ, чи трижгълници ABC и ADC сж равни.

Доказ. Трижгълници ABC и ADC иматъ общж странж AC, и освѣнъ това, спорѣдъ §. 40, $AB = CD$ и $BC = AD$, слѣд. тѣзи трижгълници сж равни (§. 18).

Теорема-та е вѣрна и за правожгълникъ-тъ, ромбъ-тъ и квадратъ-тъ, защо-то и тѣ сж параллелограмми.

§. 42. *Теорема. Діагонали-тѣ на параллелограммъ-тъ ся презполяватъ взаимно.*



Чьрт. 65.

Нека ABCD (чьрт. 65) е параллелограммъ съ діагонали AC и BD; трѣба да докажемъ, чи $AO = OC$ и $BO = OD$.

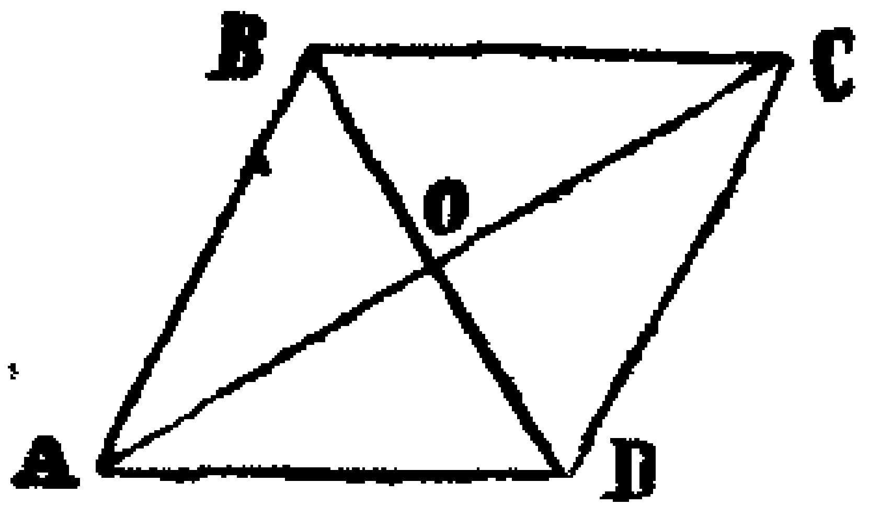
Доказ. Въ трижгълници BOC и AOD, $BC = AD$ (§. 40), а отъ успорѣдность-тж на страни-тѣ имами:

$$\angle OBC = \angle ADO \text{ и } \angle BCO = \angle OAD;$$

слѣд. тѣзи трижгълници сж равни (§. 16); за това $AO = OC$ и $BO = OD$.

Теорема-та е вѣрна и за правожгълникъ-тъ, ромбъ-тъ и квадрадъ-тъ, защо-то и тѣ сѫ паралл лограмми.

§. 43. *Теорема. Діагонали-тѣ на ромбъ-тъ с взаимно перпендикулярни и презполовяватъ жгъли-тѣ м*



Чьрт. 66.

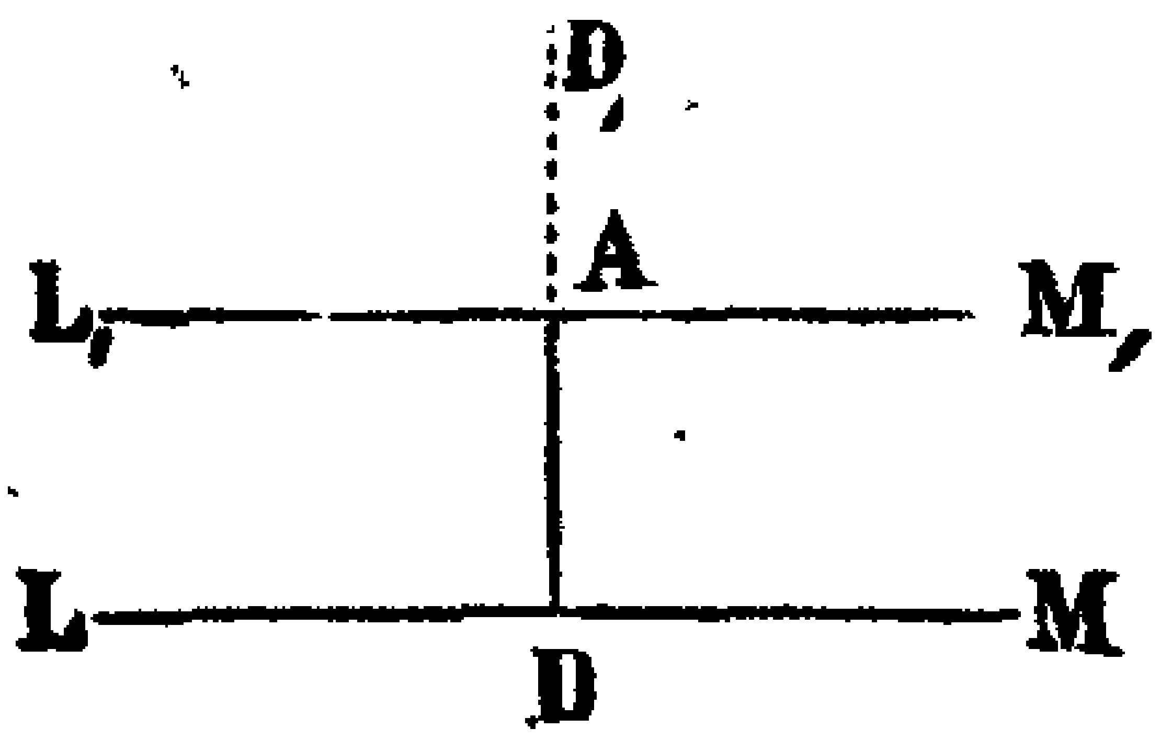
Нека ABCD (чьрт. 66) ромбъ съ діагонали AC и BD трѣба да докажемъ, чи AC⊥B и ∠ABO = ∠CBO.

Доказ. Трижгълници AB и CBO иматъ общѫ странѫ B освѣнъ това AB = BC, като стран на ромбъ-тъ и AO = OC (§. 42); слѣд. тѣзи трижгълниц сѫ равни (§. 18). Отъ равенство-то на трижгълници тѣ имами ∠AOB = ∠BOC, т. е. линія BD е пер пендикулярна къмъ AC; освѣнъ това ∠ABO = ∠CBO

Теорема-та е вѣрна и за квадратъ-тъ, защо-то той е ромбъ съ прави жгъли.

ЗАДАЧИ.

11. Презъ точкѫ A да прекарами линіѭ, успорѣднѫ на даденѫ-тѫ правѫ LM.



Чьрт. 67.

Рѣшеніе. Нека A (чьрт. 67) е тъзи точка, и LM дадена-та права. Отъ точкѫ A спущами перпендикуляръ AD, продължавами този перпендикуляръ тъй, що-то AD да бѫде равна на AD, и отъ срѣдѫ-тѫ на линіѭ DD_1, издигами перпендикуляръ $L_1 M_1$. Линія $L_1 M_1$ ще бѫде успорядна на LM, защо-то и двѣ-тѣ сѫ перпендикулярни къмъ пресѣчкѫ-тѫ.

12. На колко е равна сумма-та на ѫгъли-тѣ въ петнадесятоѫгълникъ-тъ ?

Рѣшеніе. На 26 прави:

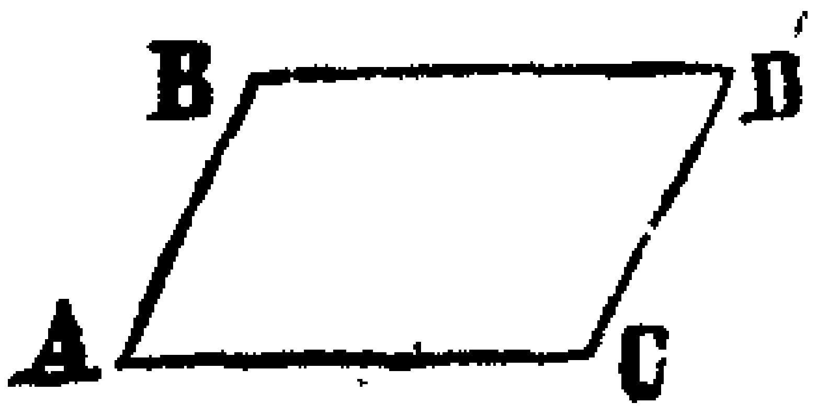
13. Колко страни има многоѫгълникъ-тъ, ако сумма-та на ѫгъли-тѣ му е 30 d?

Рѣшеніе. Тъй кьто $30d = 2d\ (N - 2)$, то ако раздѣлимъ 30 d съ 2 d ще получимъ число-то на страни-тѣ безъ двѣ; слѣд. $\frac{30\ d}{2\ d} = 15$ ще бѫде число-то на страни-тѣ на многоѫгълникъ-тъ безъ двѣ; отъ това излиза, чи многоѫгълникъ-тъ е съ 17 страни.

14. Да раздѣлимъ линіѭ AB на n равни части.

Рѣшеніе. Прекарвами презъ A произволнѫ линіѭ AC и отмѣрвами на нѣѭ съ помощь-тѫ на перигель-тъ n равни, нъ произволни части; съединявами послѣднѭ-тѫ точкѫ C съ B и презъ всички-тѣ точки на дѣленіе-то прекарвами линіи, успорѣдни на CB.

15. Да построимъ на параллелограммъ по двѣ дадени страни и ѫгълъ-тъ между тѣхъ.



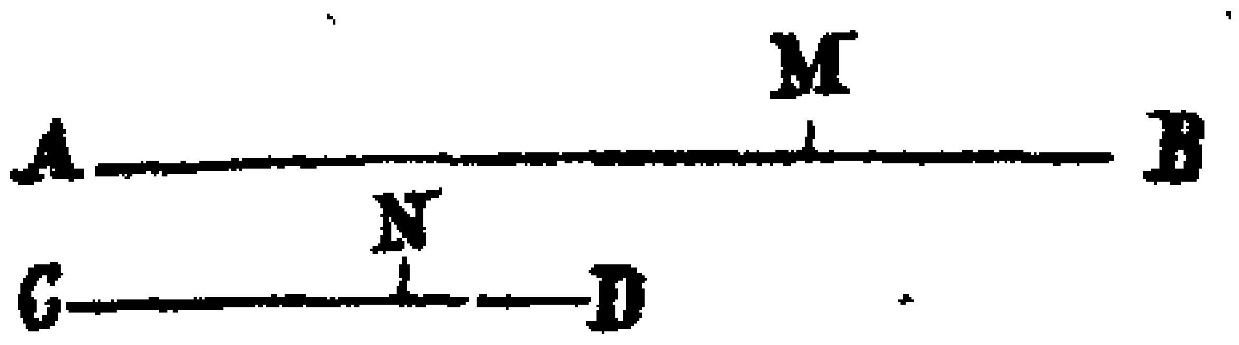
Чьрт. 68.

Рѣшеніе. Нека ABC (чьрт. 68) е даденія ѫгълъ: на страни-тѣ отмѣрвами дадени-тѣ страни на параллелограмъ-тъ и отъ крайнѫ-тѫ точкѫ C на странѫ AC прекарвами линіѭ CD, равна и успорѣдна на AB, послѣ съединявами B съ D.

ГЛАВА IV.

ПРОПОРЦІОНАЛНИ ЛИНІИ.

§. 44. *Общѫ мѣркѫ* на двѣ линіи ся нарича таквази линія, коя-то влиза въ тѣхъ цѣло число пѫти.



Чрт. 69.

Задача. Да намѣримъ общѫ-тѫ мѣркѫ на линіи AB и CD (чрт. 69).

Рѣшеніе. За да намѣрѭть общѫ-тѫ мѣркѫ постѫпвать тъй:

По-малкѫ-тѫ линіѭ CD отмѣрвать на по голѣмѫ-тѫ; нека CD влиза два пѫти отъ A до M и остава остатъкъ MB; тогава:

$$AB = 2CD + MB \ (1).$$

Остатъкъ MB отмѣрвать на CD, нека MB влиза два пѫти отъ C до N съ остатъкъ ND; тогава:

$$CD = 2MB + ND \ (2).$$

Остатъкъ ND отмѣрвать на остатъкъ MB; нека ND влиза равно два пѫти въ MB; тогава:

$$MB = 2ND.$$

Въ равенство (2) замѣстями MB съ равно-то му 2 ND тогава:

$$CD = 4ND + ND, \text{ или } CD = 5ND.$$

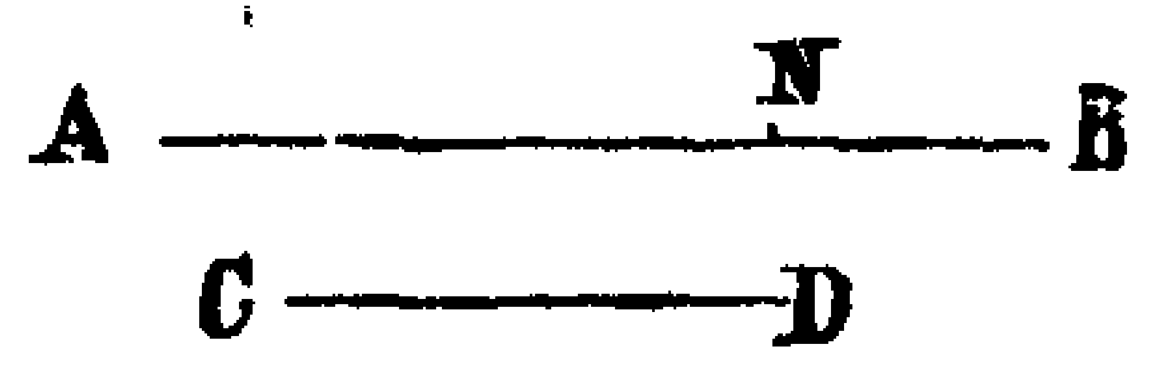
Въ равенство (1) замѣстями CD и MB съ равни-тѣ имъ 5ND и 2ND; тогава:

$$AB = 2.5ND + 2ND = 10ND + 2ND = 12ND.$$

И тъй: $AB = 12ND$ и $CD = 5ND$; т. е. линія ND влиза цѣло число 12 пѫти въ AB и цѣло число 5 пѫти въ CD, слѣд. тя е обще тѣхнѫ мѣрка.

При рѣшеніе-то на тъзи задачѫ може да ся случи, щото ни единъ отъ слѣдующи-тѣ остатъци да не влѣзи цѣло число пѫти въ предидущія. Въ този случай линіи-тѣ нѣмать общѫ мѣркѫ, т. е. не може да ся намѣри третя линія, коя-то да влиза цѣло число пѫти въ тѣхъ. Кога линіи-тѣ имать общѫ мѣркѫ, тѣ ся наричать *свизмѣрими*, а кога нѣмать — *несвизмѣрими*.

§. 45. *Отношеніе* на двѣ линіи ся нарича число-то, кое-то показва, колко пѫти една-та е по длъга или по кжса отъ другж-тж. Тъй като съ дѣленіе ся намира, колко пжти една величина е по голѣма отъ другж, то отношеніе-то между линіи-тѣ AB и CD изобразяватъ тъй $\frac{AB}{CD}$. За да намѣрыжтъ отношеніе-то на двѣ линіи AB и CD (чърт. 70), трѣба да знаыжтъ колко пжти обща-та мѣрка влиза въ еднж-тж и другж-тж. Нека на пр. обща-та мѣрка влиза въ AB 10 пжти, а въ CD 5 пжти; тогава отношеніе-то на линіи AB и CD ще бжде $\frac{10}{5}=2$. Число-то 2 показва, чи линія AB е два пжти по дълга отъ CD. Ако изобщо обща-та мѣрка влиза въ AB m пжти, а въ CD n пжти, то отношеніе-то на линіи-тѣ ще бжде $\frac{m}{n}$, т. е. $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$.



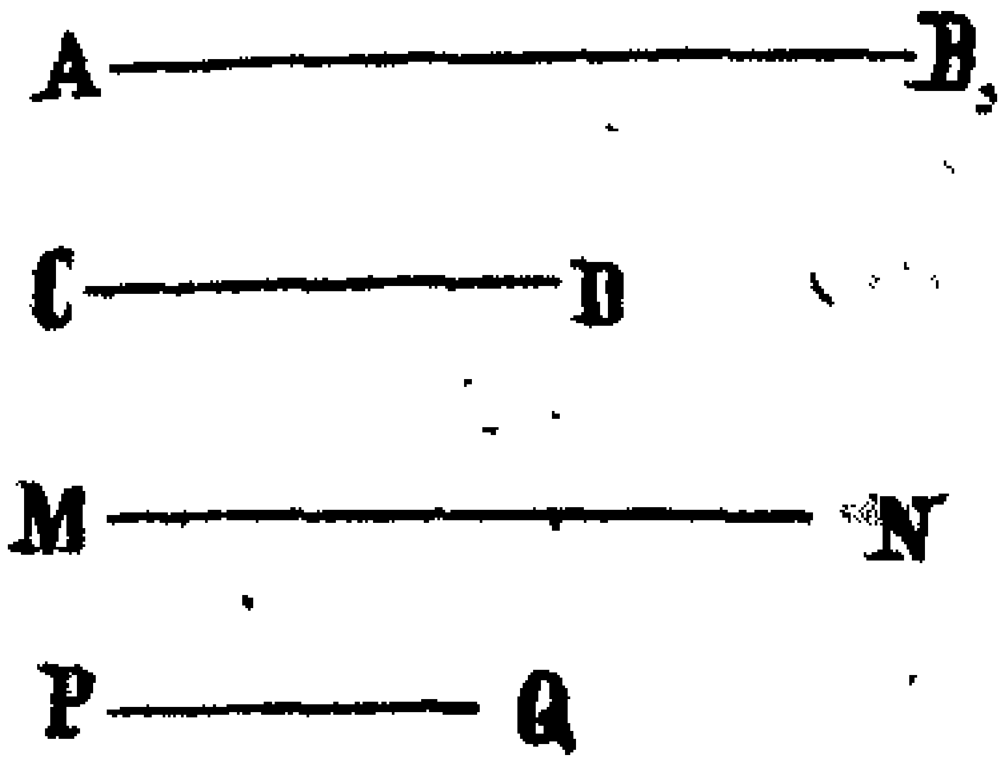
Чьрт. 70.

Ако линіи-тѣ сж несъизмѣрими, то отношеніе-то имъ не може да ся намѣри точно, а приблизително. Нека на пр. AB и CD сж несъизмѣрими. Да кажемъ, чи въ нѣкоыж третя линія влиза въ CD равно 10 пжти. Сжща-та третя линія не може да влѣзе въ AB цѣло число пжти, защо-то линіи-тѣ сж несъизмѣрими. Нека тъзи третя линія влиза въ AB 15 пжти и остава нѣкой остатъкъ NB, по малъкъ отъ неыж; тогава $\frac{15}{10}$ може да ся счита за отношеніе между линіи-тѣ; нъ то нѣма да бжде точно, а приблизително, защо-то истинско-то отношеніе е по голѣмо отъ $\frac{15}{10}$. Наистина, истинско-то отношеніе не е $\frac{15}{10}$, а $\frac{15+ND}{10}$; разумѣва ся, чи второ-то число е по голѣмо, защо-то числителъ-тъ му е по голѣмъ.

ПРОПОРЦІОНАЛНИ ЛИНІИ.

§. 46. Ако отношеніе-то на двѣ линіи е равно на отношеніе-то на други двѣ, то тѣзи четѣри линіи ся наричать *пропорціонални.* Тъй на пр. ако AB е толкози пѫти по голѣма отъ CD (чьрт. 71), колко-то MN е по-голѣма отъ PQ, то ще имами:

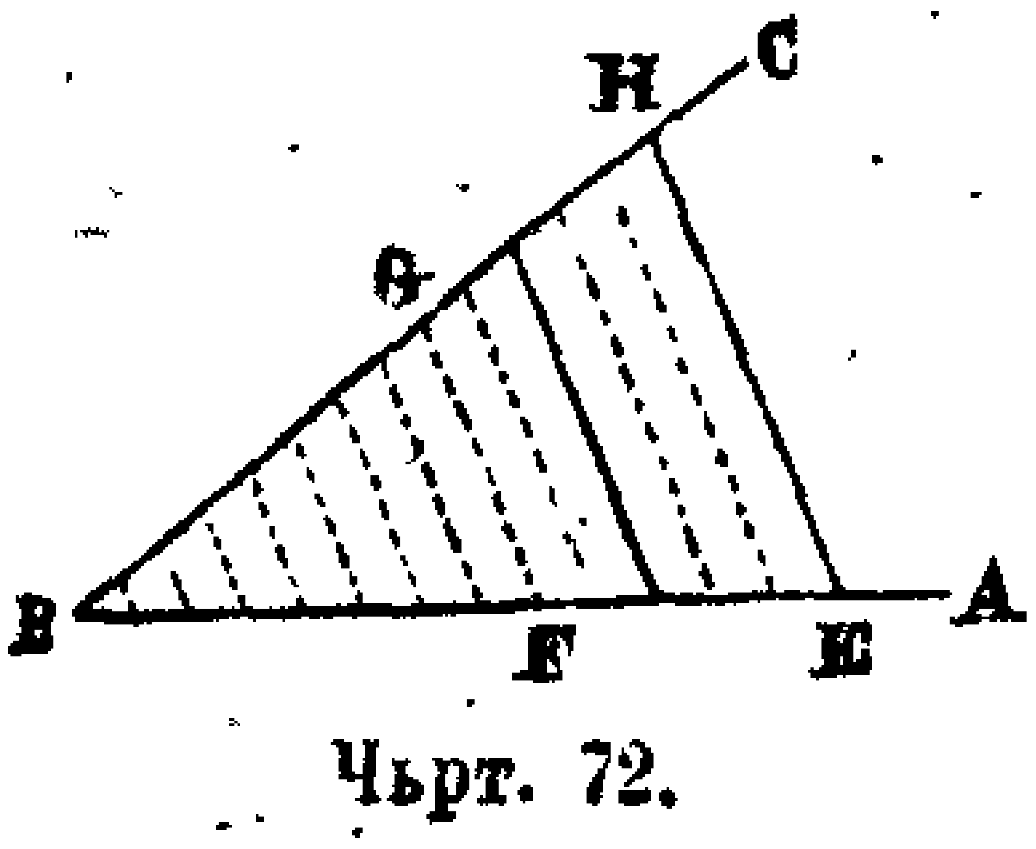
$$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{PQ}.$$



Чьрт. 71.

Ако въ това равенство на двѣ-тѣ отношенія линіи-тѣ AB, CD, MN и PQ замѣстимъ съ числа, кои-то показвать дължини-тѣ имъ, то равенство-то ще бѫде Геометрическа пропорція; за това то има сѫщи-тѣ свойства, какъ-то и сѣка геометрическа пропорція. Тъй на пр. може да ся напише $AB.PQ = CD.MN$, т. е. произведеніе-то отъ срѣдни-тѣ членови е равно на произведеніе-то отъ крайни-тѣ.

§. 47. *Теорема. Двѣ успорѣдни линіи, кои-то срѣщать страни-тѣ на ѫгълъ-тъ, отсичать отъ тѣхъ части пропорціонални.*



Чьрт. 72.

Нека линіи FG и EH (чьрт. 72) пресичать страни-тѣ на ѫгълъ ABC; трѣба да докажемъ, чи части-тѣ BH, BG, BE и BF сѫ пропорціонални, т. е.

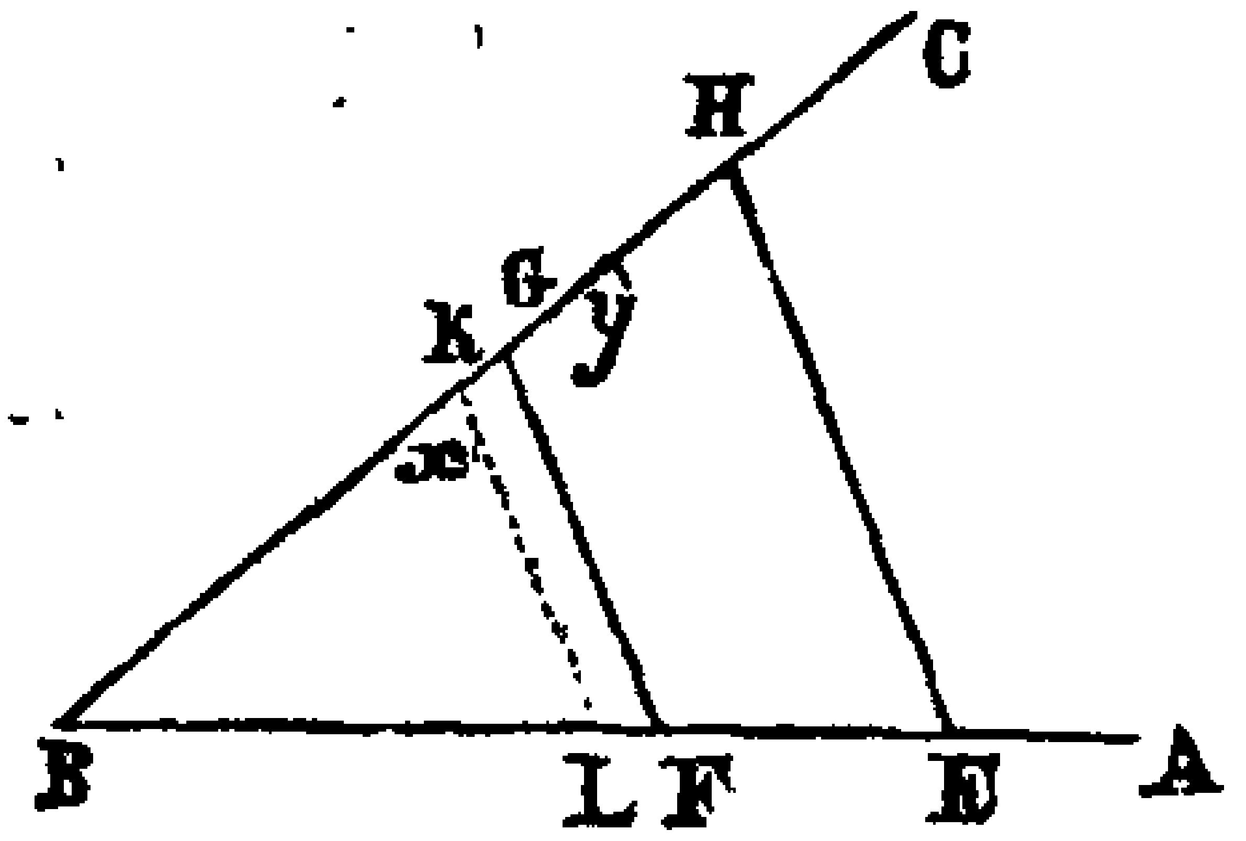
$$\frac{BH}{BG}=\frac{BE}{BF}.$$

Доказ. Тукъ могѫть да бѫдѫть два случая:

1ій *Случай.* Линіи-тѣ BE и BF могѫть да бѫдѫть съизмѣрими. Да кажемъ, чи тѣ сѫ съизмѣрими и нека обща-та мѣрка влиза m пѫти въ BE и n пѫти въ BF; тогава отношеніе-то между линіи-тѣ BE и BF ще бѫде равно на $\frac{m}{n}$, т. е. $\frac{BE}{BF}=\frac{m}{n}$. Ако наистина раздѣлимъ линіѭ BE на m равни части и презъ точки-тѣ на дѣленіе-то прекарами линіи, успорѣдни на правѫ-тѫ HE, то, спорѣдъ §. 39, линіи-тѣ BH и BG ще ся раздѣлять сѫщо на m и n равни части, т. е. и тѣ ще бѫдѫть съизмѣрими, тъй щото $\frac{BH}{BG}=\frac{m}{n}$. Кьто сравнимъ това равенство съ горне-то, получвами:

$$\frac{BH}{BG}=\frac{BE}{BF}.$$

2ій *Случай.* Линіи-тѣ BE и BF (чьрт. 73) могѫть да бѫдѫть несъизмѣрими. Въ този случай може да ся докаже, чи отношеніе $\frac{BE}{BF}$ не може да бѫде ни по голѣмо, ни по малко отъ отношеніе $\frac{BH}{BG}$. Наистина, ако на пр. допустимъ, чи $\frac{BE}{BF}>\frac{BH}{BG}$; то вмѣсто линіѭ BG може да ся земе друга по малка Bx, коя-то да направи вторѫ-тѫ дробь равнѫ на правѫ-тѫ т. е.



Чьрт. 73.

$$\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{Bx}. \quad (1).$$

Ако сега раздѣлимъ линіѭ BH на таквизи равни части, щото сѣка отъ тѣхъ да бѫде по малка отъ Gx, то макаръ една отъ точки-тѣ на дѣленіе-то ще падне между G и x: нека тъзи точка да бѫде K. Тогава отъ B до K ще имами цѣло число отъ равни-тѣ части.

кои-то ся намиратъ въ линіѭ BH, т. е. линія BH и BK ще бѫдѫтъ съизмѣрими. За това като прекарами линіѭ KL, успорѣднѫ на HE, ще имами:

$$\frac{BE}{BL}=\frac{BH}{BK}.$$

Ако първо-то отношеніе на тъзи пропорціѭ раздѣлимъ съ първо-то отношеніе на пропорціѭ (1) и второ-то съ второ-то, то:

$$\frac{BE}{BL}:\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BK}:\frac{BH}{Bx}, \text{ или } \frac{BE.BF}{BL.BE}=\frac{BH.Bx}{BH.BK}.$$

Най послѣ като съкратимъ на BE и BH, ще получимъ

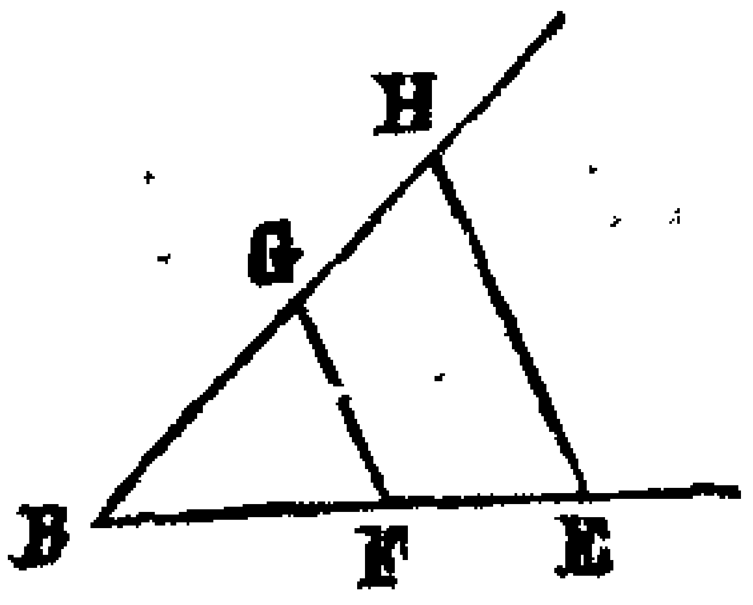
$$\frac{BF}{BL}=\frac{Bx}{BK}$$

Нъ отношенія $\frac{BF}{BL}$ и $\frac{Bx}{BK}$ не могѫтъ да бѫдѫтъ равни, защо-то отъ чъртежъ-тъ ся вижда, чи първо-то е не правилна дробь, т. е. по голѣмо отъ единицѫ, а второ-то правилна, т. е. по малко отъ единицѫ. И тъй равенство $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{Bx}$ е невѣрно; нъ то произлѣзи отъ прѣдположеніе $\frac{BE}{BF}>\frac{BH}{BG}$, слѣд. и това прѣдположеніе е невѣрно, т. е. отношеніе $\frac{BE}{BF}$ не може да бѫде по голѣмо отъ $\frac{BH}{BG}$.

По сѫщія начинъ ще ся докаже, чи отношеніе $\frac{BE}{BF}$ не може да бѫде и по голѣмо отъ $\frac{BH}{BG}$; стига намѣсто BG да земемъ по голѣмѫ линіѭ By и да повторимъ сѫщи-тѣ разсѫжденія.

Нъ ако една величина не е ни по голѣма, ни по малка отъ другѫ, то тѣ сѫ равни, слѣд.

$$\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}.$$



Чърт. 74.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи успорѣдни-тѣ линіи EH и FG (чърт. 74), разсичать страни-тѣ на ѫгълъ-тъ на пропорціонални части, защото отъ пропорціѭ $\frac{BE}{BF} = \frac{BH}{BG}$ имами

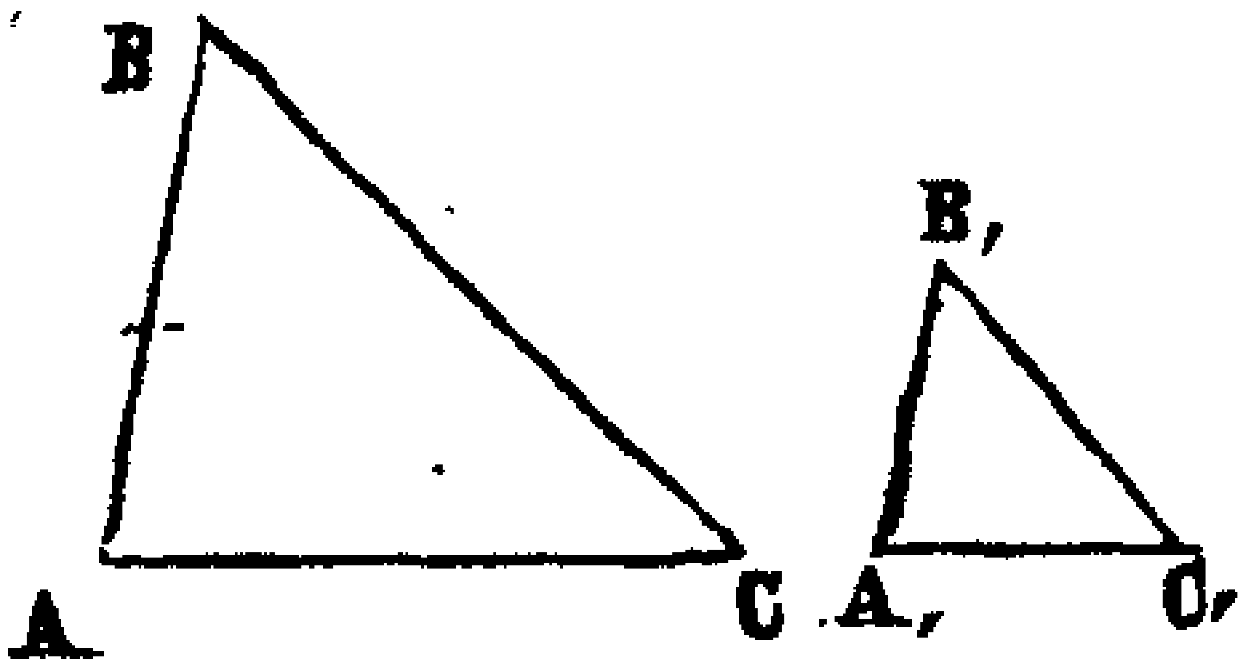
$$\frac{BE - BF}{BF} = \frac{BH - BG}{BG} \text{ или}$$

$$\frac{EF}{BF} = \frac{HG}{BG}.$$

ГЛАВА V.

ПОДОБНИ ТРИЖГЪЛНИЦИ.

§. 48. Два трижгълника ABC и A, B, C, (чърт. 75), на кои-то ѫгли-тѣ сѫ равни, на пр. ∠A=∠A,, ∠B=∠B,, ∠C=∠C,, ся наричать *подобни*. Страни-тѣ на подобни-тѣ трижгълници, кои-то сѫ срѣщу равни-тѣ ѫгли, ся наричать сходни, на пр. страна AC е сходна съ A, C,, защото и двѣ-тѣ сѫ срѣщу равни ѫгли B и B,.



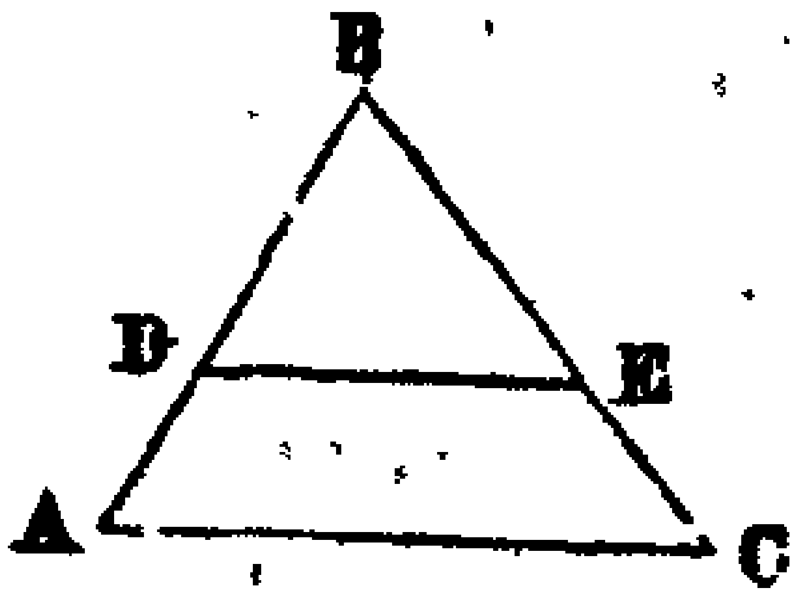
Чърт. 75.

и страни пропорционали

За да покажать на книгѫ, чи △ABC е подобенъ на △A, B, C, пишѭть: △ABC ∾ △A, B, C,; това ще рѣче △ABC е подобенъ на трижгълникъ A, B, C,.

Отъ опрѣдѣленіе-то на подобни-тѣ трижгълници слѣдува:

1. Два трижгълника сѫ подобни, ако имать по два равни ѫгла, защо-то тогава и трити-тѣ имъ ѫгли ще бѫдѫть равни (§. 37, слѣд. 2).

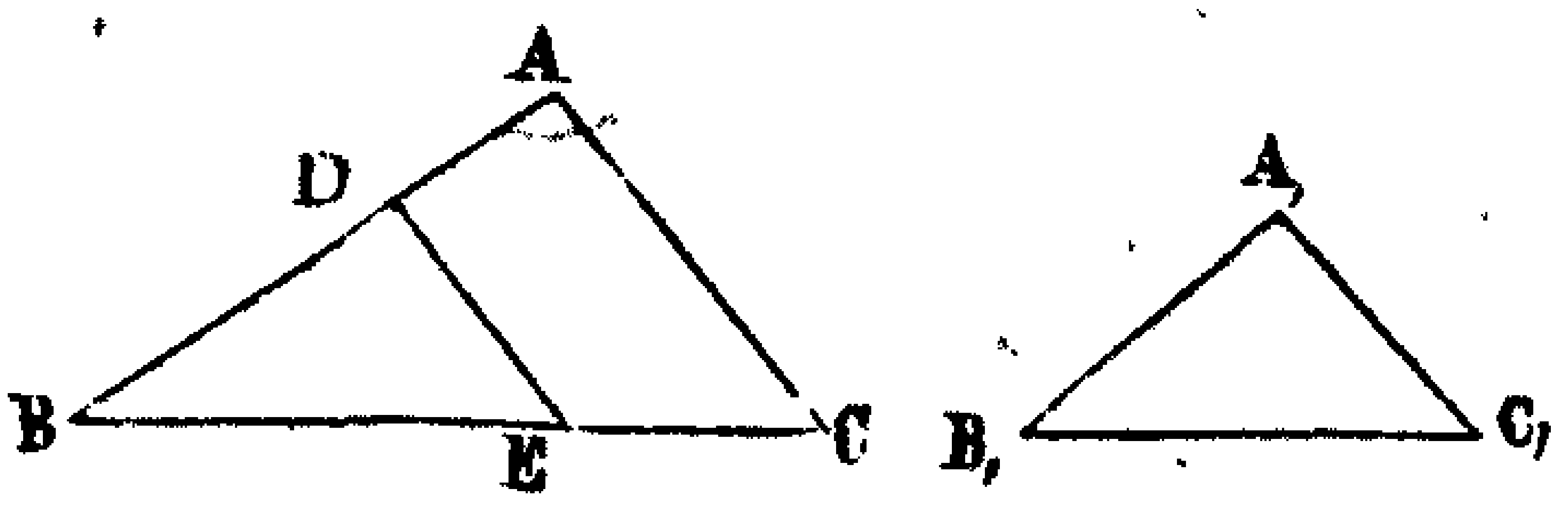


Чърт. 76.

2. Ако въ трижгълникъ ABC (чърт. 76) прекарами линіж DE, успорѣдна на AC, то отсѣченія $\triangle DBE$ и цѣлія ABC ще бждатъ подобни; защо-то, $\angle B = \angle D$, $\angle D = \angle A$, кжто съотвѣтственни и $\angle E = \angle C$, по сжщж-тж причинж.

§. 49. *Теорема. Въ подобни-тѣ трижгълници сходни-тѣ страни сж пропорціонални.*

Нека въ трижгълници ABC и A, B, C, (чърт. 77)



Чърт. 77.

$\angle A$ е равенъ на $\angle A_{,}$, $\angle B = \angle B_{,}$ и $\angle C = \angle C_{,}$; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{AB}{A_{,}B_{,}} = \frac{BC}{B_{,}C_{,}} = \frac{AC}{A_{,}C}.$$

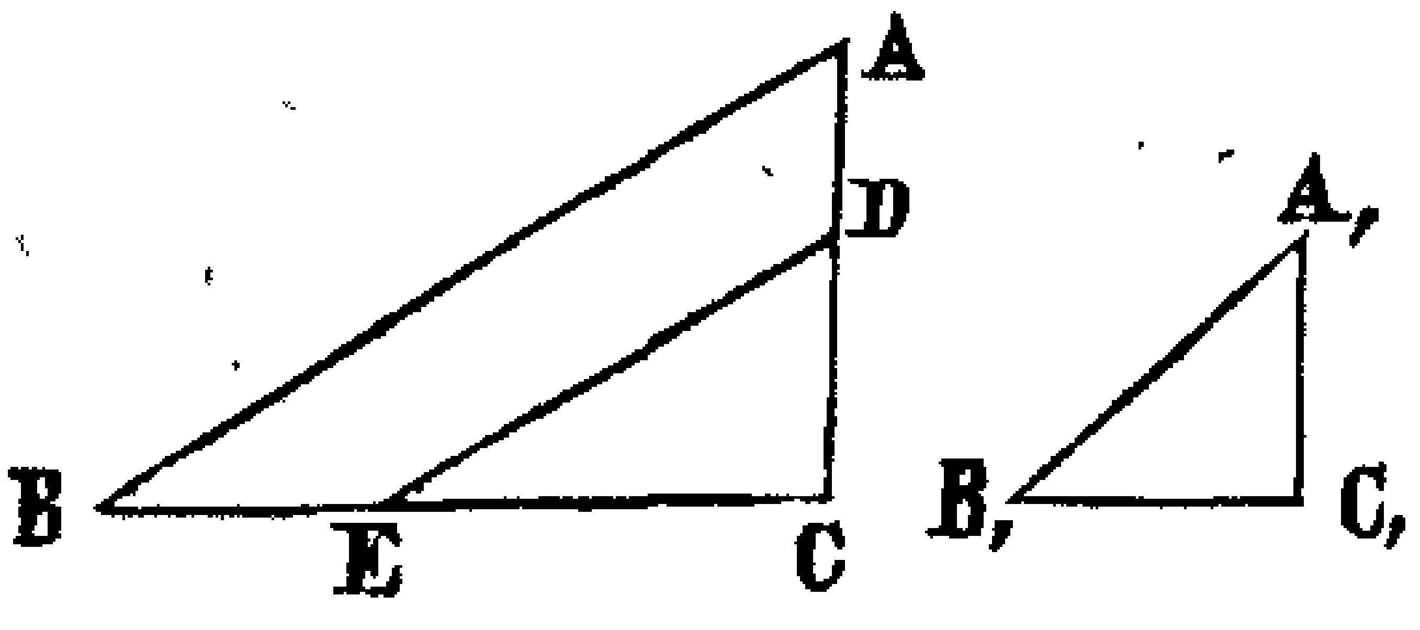
Доказ. На странж AB отмѣрвами линіж BD, равна на A, B, и на странж BC — линія BE, равна на B, C,; съединявами точки D и E съ правж DE. Трижгълникъ BDE е равенъ на трижгълникъ A, B, C,, защо-то тѣ иматъ по двѣ страни равни и освѣнъ това $\angle B = \angle B_{,}$ (§. 15). Отъ равенство-то на тѣзи трижгълници имами: $\angle D = \angle A_{,}$; нъ $\angle A_{,} = \angle A$, слѣд. $\angle D = \angle A$. Тъй кжто съотвѣтственни-тѣ жгъли D и A сж равни, то линіи-тѣ DE и AC сж успорѣдни (§. 30, слѣд. 2), а отъ успорѣдность-тж на линіи-тѣ слѣдува (§. 47):

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}.$$

Ако въ това равенство замѣстимъ линіи BD и BE съ равни тѣ имъ $A_{,}B_{,}$ и $B_{,}C_{,}$, то ще получимъ:

$$\frac{AB}{A_{,}B_{,}} = \frac{BC}{B_{,}C_{,}} \quad (1)$$

По сѫщія начинъ ся доказва пропорціоналностьта на страни-тѣ, кои-то заключвать равни-тѣ ѫгъли C и $C_{,}$. За това отмѣрвами на BC (чърт. 78) линіѭ CE, равна на $B_{,}C_{,}$ и на AC — линіѭ DC, равна на $A_{,}C_{,}$. Тогава разсѫждами сѫщо тъй, както и по напредъ и получвами:



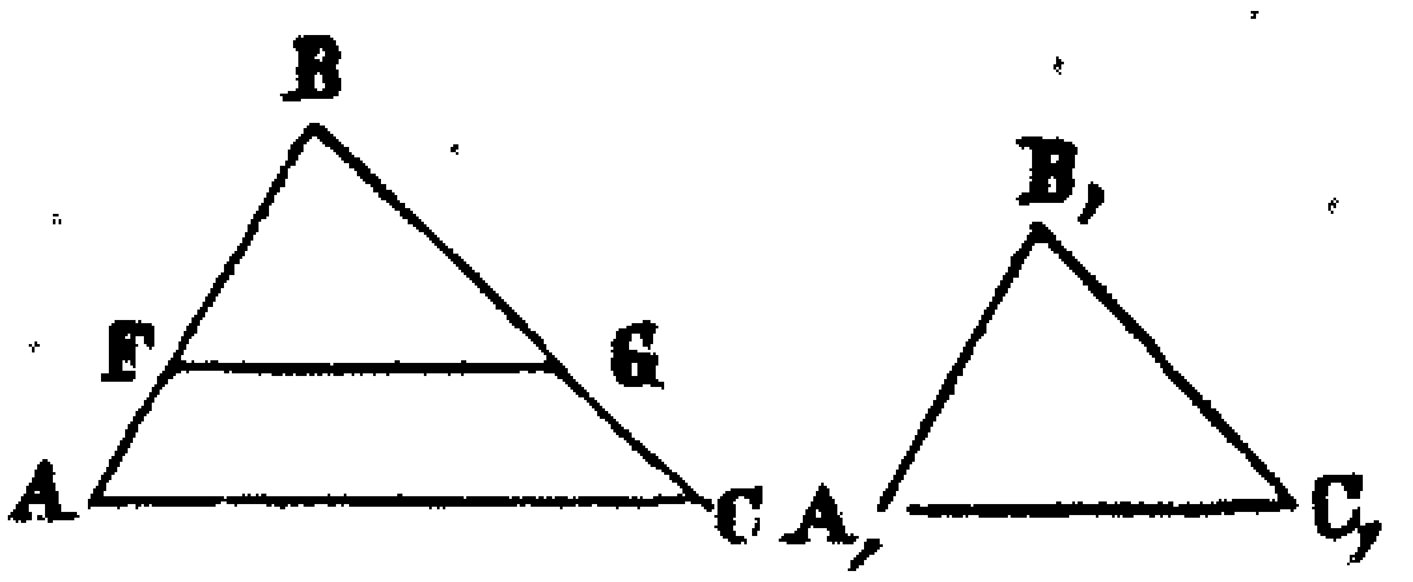
Чърт. 78.

$$\frac{BC}{B_{,}C_{,}} = \frac{AC}{A_{,}C_{,}}.$$

Къто съединимъ тъзи пропорціѭ съ (1), ще получимъ:

$$\frac{AB}{A_{,}B_{,}} = \frac{BC}{B_{,}C_{,}} = \frac{AC}{A_{,}C_{,}}.$$

§. 50. *Теорема. Триѫгълници-тѣ сѫ подобни, ако страни-тѣ имъ сѫ пропорціонални.*



Чърт 79.

Нека въ триѫгълници ABC и $A_{,}B_{,}C_{,}$ (чърт. 79) $\frac{AB}{A_{,}B_{,}} = \frac{BC}{B_{,}C_{,}} = \frac{AC}{A_{,}C_{,}}$; трѣба да докажемъ, чи $\angle A = \angle A_{,}$, $\angle B = \angle B_{,}$ и $\angle C = \angle C_{,}$.

Доказ. Отмѣрвами на AB часть FB, равна на $A_{,}B_{,}$ и прекарвами линіѭ FG, успорѣдна на AC. Триѫгълници ABC и FBG сѫ подобни (§. 48, слѣд. 2) и за това (§. 49) $\frac{AB}{FB} = \frac{BC}{BG} = \frac{AC}{FG}$. Въ първѫ-тѫ отъ тѣзи пропорціи $\frac{AB}{FB} = \frac{BC}{BG}$ замѣстями, FB съ равно

то му A, B,, тогава $\frac{AB}{A,B,} = \frac{BC}{B,G,}$; нъ ній имами сжщ

$\frac{AB}{A,B,} = \frac{BC}{B,C,}$; слѣд. $\frac{BC}{BG} = \frac{BC}{B,C,}$. Тъй като числители

тѣ на тѣзи двѣ дроби сж равни, то и знаменатели-т

трѣба да бждать равни, слѣд. BG = B, C,. По сжщ

начинъ ще докажемъ, чи A, C, = FG. И тъй трижгъл

ници A, B, C, и FBG имать три-тѣ си страни равни

слѣд. тѣ сж равни (§. 18.); за това ∠ A, = ∠ F,

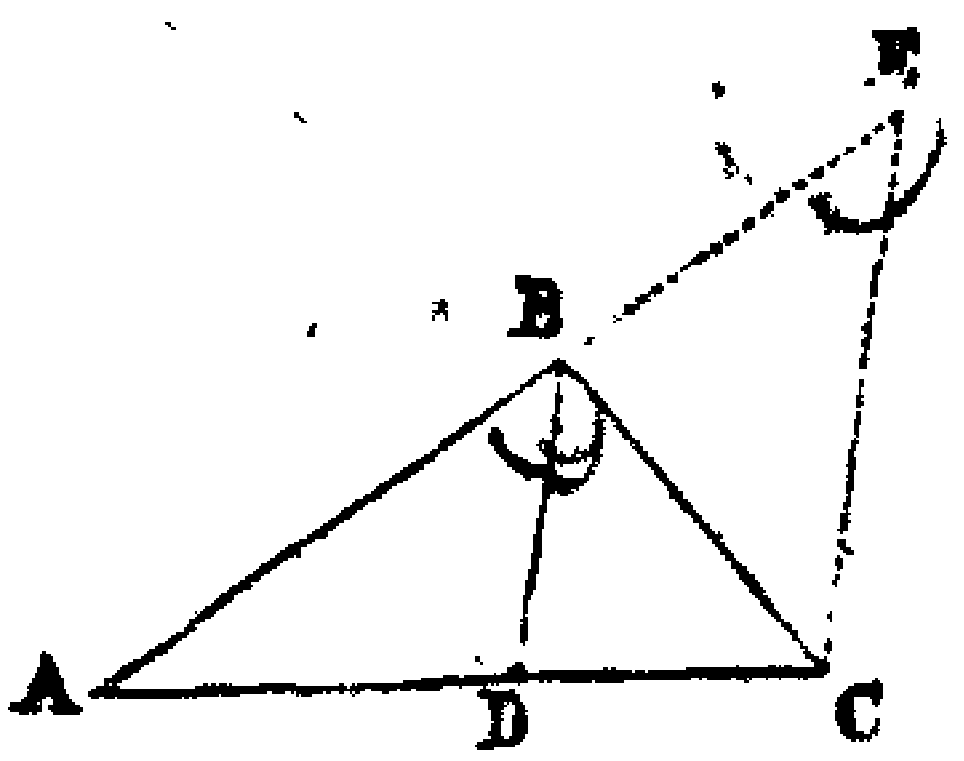
∠ F = ∠ A; слѣд. ∠ A, = ∠ A; тъй сжщо ∠ B, = ∠

и ∠ C, = ∠ C.

§. 51. *Теорема. Линія-та, коя-то презполовяв жгълъ-тъ на трижгълникъ-тъ, раздѣля срѣщуположнж тж странж на части пропорціонални, на други-т двѣ страни.*

Нека въ △ ABC (чърт. 80 линія BD презполовява жгъл ABC; трѣба да докажемъ, ч

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}.$$



Чърт. 80.

Доказ. Презъ точкж C пре карвами линіж, успорѣдна н BDи продължавами AB, догд ся пресѣче съ неіж въ точкж E. Отъ успорѣдность-т на линіи BD и EC слѣдува: ∠ ABD = ∠ BEC (§. 3 слѣд 2), сжщо ∠ DBC = ∠ BCE, (§. 32); нъ

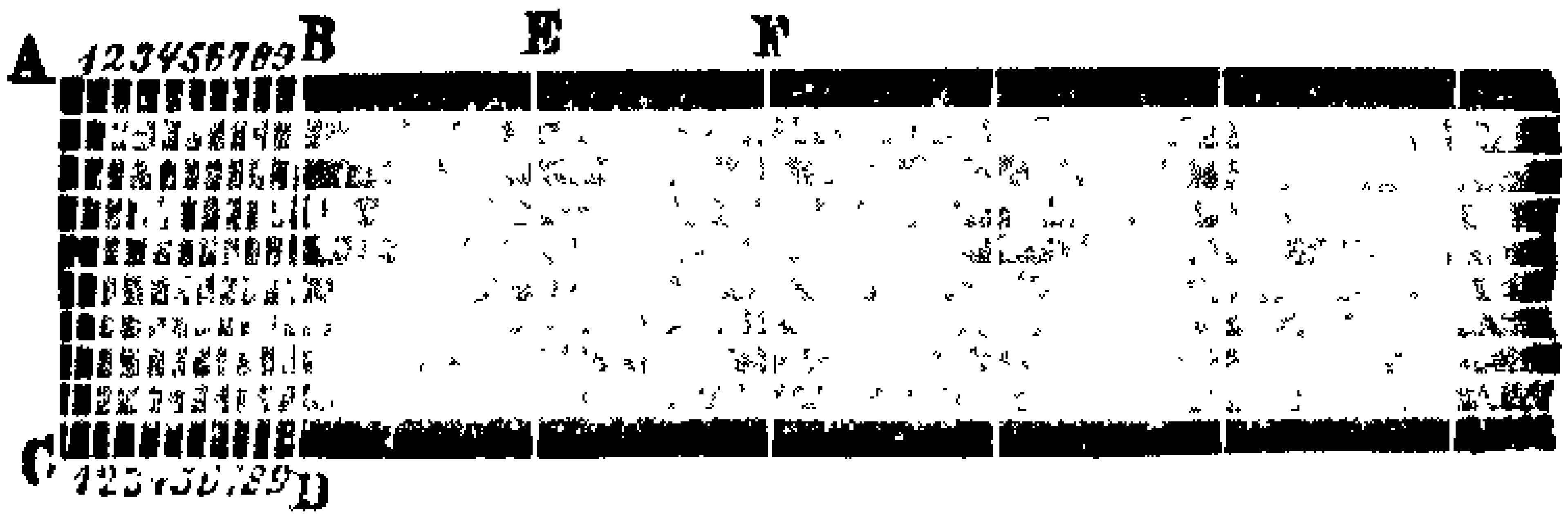
$$\angle ABD = \angle DBC$$

слѣд. ∠ BEC = ∠ BCE, или, съ други думи △ BE е равнобедренъ, т. е. BC = BE. Освѣнъ това, тъй кък страни-тѣ на ∠ EAC ся пресичать отъ успорѣдн линіи, то (§. 47)

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC}.$$

Като замѣстимъ линіѭ BE съ равнѫ-тѫ и BC, ще получимъ $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$.

Отъ свойство-то на подобни-тѣ триѫгълници ся ползувать при направѫ-тѫ на *масщабъ-тъ*, кой-то служи за по точно измѣрваніе на дължини-тѣ. Той състои отъ линійкѫ раздѣленѫ на нѣколко равни части AB, BE, EF и проч. (чърт, 81), кои-то сѫ главна-та единица на масщабъ-тъ.



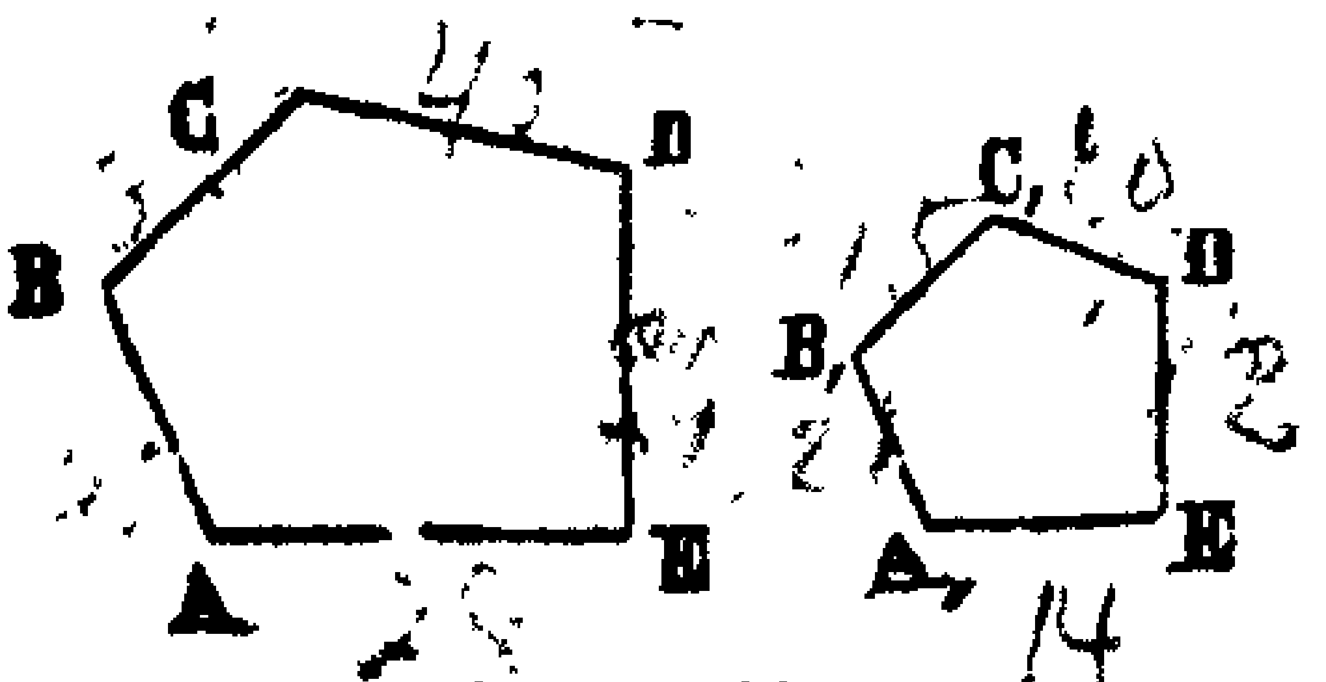
Чърт. 81.

Линія AC е раздѣлена на 10 равни части и презъ точки-тѣ на дѣленіе-то сѫ прекарани линіи, успорѣдни на AF. Линіѭ AB раздѣлять сѫщо на 10 равни части; съединявать C съ 1 и презъ точки-тѣ на дѣленіе-то прекарвать линіи успорѣдни на C 1; тогава сѣка отъ части-тѣ между двѣ таквизи успорѣдни, напр. между 43 и 54 ще бѫде равна на $\frac{I}{10}$ отъ единицѫ-тѫ на масщабъ-тъ; а части-тѣ между B9 и BD ще бѫдѫть различно голѣми; най-горня та ще бѫде $\frac{1}{10}$ отъ 9D или $\frac{1}{100}$ отъ главнѫ-тѫ единицѫ, слѣдующа-та ще бѫде равна на $\frac{2}{100}$ отъ главнѫ-тѫ единицѫ и пр.

За да измѣрѭть съ масщабъ-тъ нѣкоѭ линіѭ, налагать ѭ по дължинѫ-тѫ на масщабъ-тъ тъй, щото краища-та ѝ да съвпдать съ двѣ отъ точки-тѣ на дѣленіе-то. Нека напр. единъ-тъ край на линія M съвпада съ N, а другія съ M. Тогава отъ N до влизать три единици отъ масщабъ-тъ. Послѣ отъ до p $\frac{5}{10}$ и най послѣ отъ p до Q $\frac{4}{100}$; слѣд. дължина-т на линіж MN ще бжде 3,54.

ПОДОБНИ МНОГОЖГЪЛНИЦИ.

§. 52. Два многожгълника съ еднакво число стран ся наричать *подобни*, ако жгли-тѣ имъ сж нарѣд равни и страни-тѣ нарѣдъ пропорціонални. Ако на



Чърт. 82

пр. въ пятожгълниц ABCDE и A, B, C, D, (чърт. 82) $\angle A = \angle$ $\angle B = \angle B,$ и пр. и

$$\frac{AB}{A,B} = \frac{BC}{B,C} = \frac{CD}{C,D}$$

и пр. то пятожгълници ѣт сж подобни; пропорціонални-тѣ страни, напр, A и A, B, ся наричать *сходни*.

[illegible] на [illegible]

§. 53. *Теорема. Периметри-тѣ на подобни-т многожгълници ся отнасять, като сходни-тѣ им страни.*

Нека многожгълници ABCDE и A, B, C, D, (чърт. 82) сж подобни; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A,B, + B,C, + C,D, + D,E, + E,A,} = \frac{AB}{A,B,}$$

Доказ. Тъй като многожгълници-тѣ сж подобни то страни-тѣ имъ сж пропорціонални, слѣд.

$$\frac{AB}{A,B,} = \frac{BC}{B,C,} = \frac{CD}{C,D,} = \frac{DE}{D,E,} = \frac{EA}{E,A,}$$

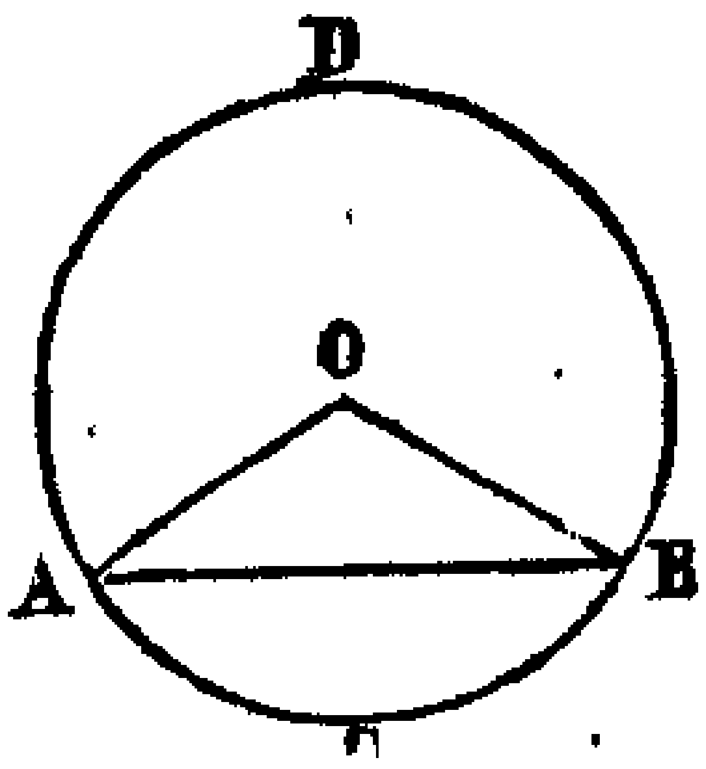
Нъ ако имами нѣколко равни отношенія, то сумма ı отъ предидущи-тѣ членове ся отнася къмъ суммѫ-тѫ ъ послѣдующи-тѣ, какъ-то единъ отъ предидущи-тѣ ьмъ своя послѣдующій, слѣд.

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_,B_,+B_,C_,+C_,D_,+D_,E_,+E_,A_,}=\frac{AB}{A_,B_,}.$$

ГЛАВА VI.

ИЗМѢРВАНІЕ НА ѪГЪЛИ-ТѢ СЪ ДѪГИ.

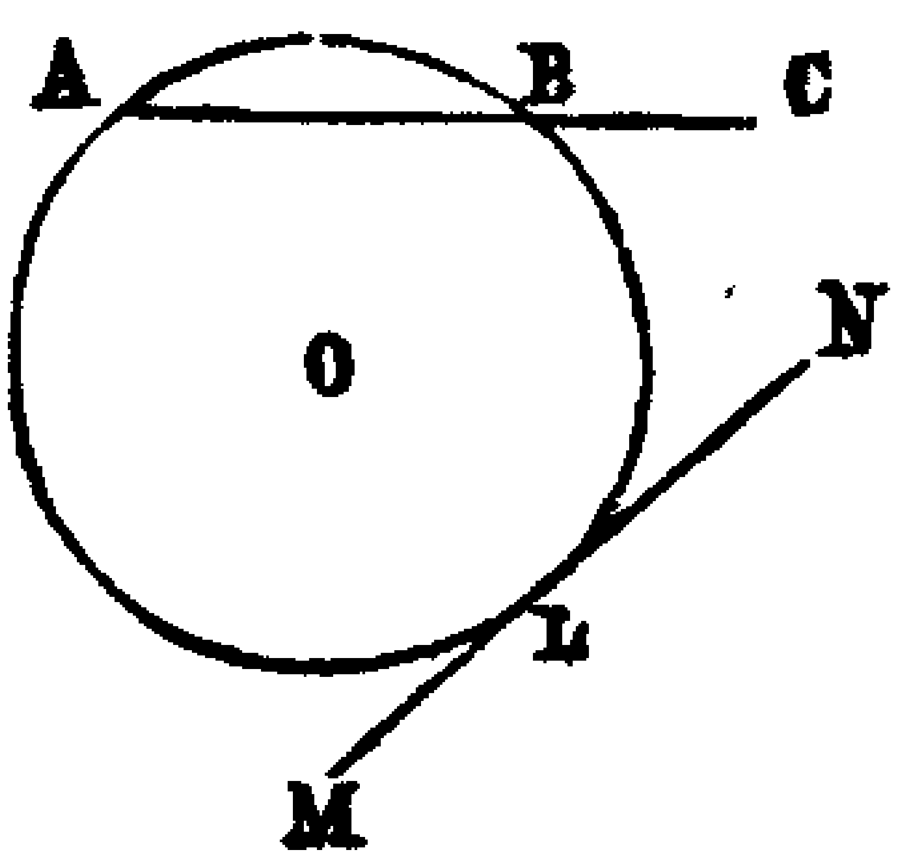
§. 54. Сѣка часть ACB (чърт. 83) отъ окрѫжность-тѫ на крѫгъ-тъ ся нарича *дѫгѫ* (§. 12), а линія AB, коя-то съединява краища-та на дѫгѫ-тѫ и не минува презъ центръ-тъ, — *хордѫ*.



Чърт. 83

Сѣка хорда AB стѣга двѣ неравни дѫги ACB и ADB, кои-то заедно съставять окрѫжность-тѫ. Явно е, чи сѣка хорда е помалка отъ діаметръ-ъ, защо-то, кѣто съединимъ краища-та на хордѫ AB ъ центръ-тъ, отъ △AOB ще имами AB < AO + OB §. 14), а AO + OB е равна на діаметръ-тъ, защо-то, акъ-то и діаметръ-тъ, е сумма отъ два радіуса.

Линія ABC (чърт. 84), коя-то срѣща окрѫжность-тѫ въ двѣ точки A и B, ся нарича *пресѣчкѫ*, а линія MN, коя-то има въ окрѫжность-тѫ само еднѫ общѫ точкѫ L, ся нарича *касателнѫ*. Обща-та точка L ся нарича *точкѫ на касаніе-то*.

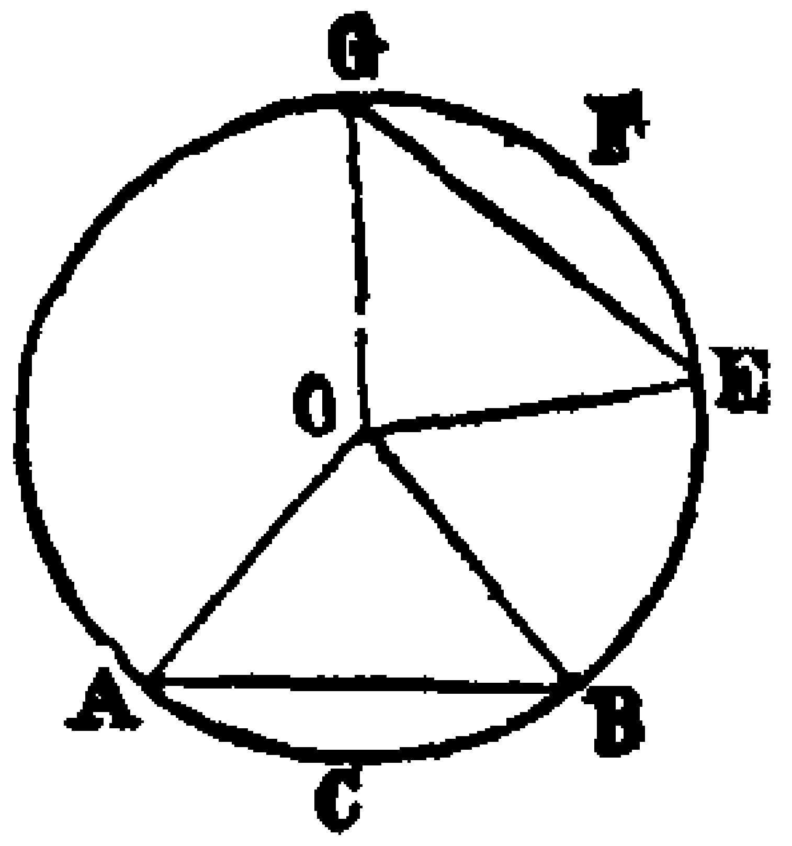


Чърв. 84.

Часть отъ крѫгъ-тъ AOBC

(чьрт. 83), коя-то е заградена съ дѫгѫ и два радіус ся нарича *секторъ*, а часть ABC, коя-то е заграде съ дѫгѫ и хордѫ — *сегментъ*.

§. 55. *Теорема. Равни-тѣ дѫги ся стѣгать от равни хорди.*



Чьрт. 85.

Нека дѫга ACB = на дѫ GFE (чьрт. 85), трѣба да док жемъ, чи хорда AB е равна хордѫ GE.

Доказ. Съединявами точ A,B, G и E съ центръ-тъ и нал гами секторъ GOE на секто AOB тъй, щото радіусъ OG съвпадне съ радіусъ OA и точ G съ точкѫ A; тогава дѫга GE ще покріе дѫгѫ A защо-то всички-тѣ точки на двѣ-тѣ дѫги сѫ на рав разстоянія отъ центръ-тъ. Тъй като дѫги-тѣ сѫ равн то точка E ще съвпадне съ точкѫ B и хордѫ GE хордѫ AB.

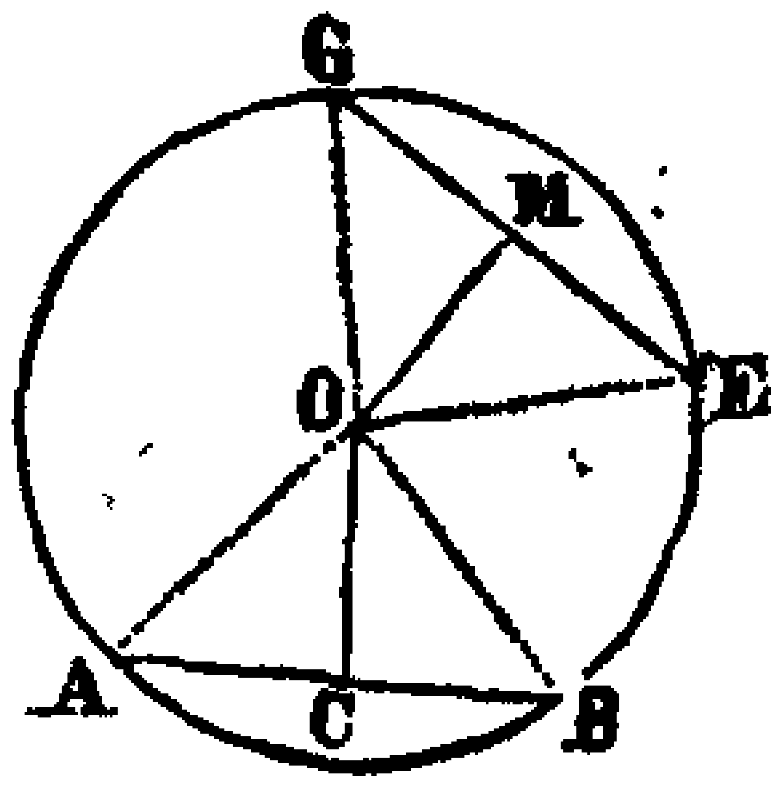
Обратна Теорема. Равни-тѣ хорди стѣгать р вни дѫги.

Нека хорда AB = на хордѫ GE (чьрт. 85), трѣ да докажемъ, чи дѫга ACB е равна на дѫгѫ GF

Доказ. Налагами сегментъ GFE на сегментъ AB тъй, щото хорда GE да съвпадне съ равнѫ-тѫ си A точка G ще падне на A и точка E на B. Дѫга GF трѣба да покріе дѫгѫ ACB, защо-то всички-тѣ точк както на еднѫ-тѫ, тъй и на другѫ-тѫ хордѫ, сѫ равно разстояніе отъ центръ-тъ.

§. 56. *Теорема. Равни-тѣ хорди сѫ равно отд лечени отъ центръ-тъ.*

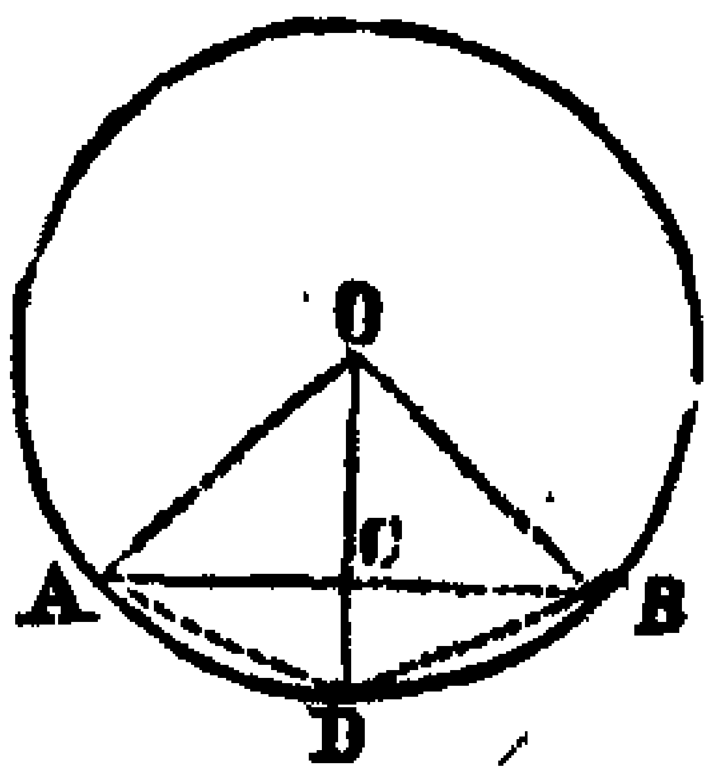
Нека $AB = GE$ (чьрт. 86) и OM е перпендик ляръ къмъ GE, а $OC \perp AB$; трѣба да докажемъ, ч $OC = OM$.



Чърт. 86.

Доказ. Съединявами A, B, G и E съ центръ O; трижгълници AOB и GOE сж равни, защо-то AB = GE, OG = OA, като радіуси и OE = OB по сжщж-тж причинж (§. 18). Отъ равенство-то на трижгълници-тѣ слѣдува, чи височини-тѣ имъ OC и OM сж равни (§. 24).

§. 57. *Теорема. Радіусъ-тъ, кой-то е перпендикуляренъ къмъ хордж-тж, презполовява хордж-тж и стѣгнатж-тж отъ нея джгж.*



Чърт. 87.

Нека радіусъ OD (чърт. 87) е перпендикуляренъ къмъ хордж AB; трѣба да докажемъ, чи

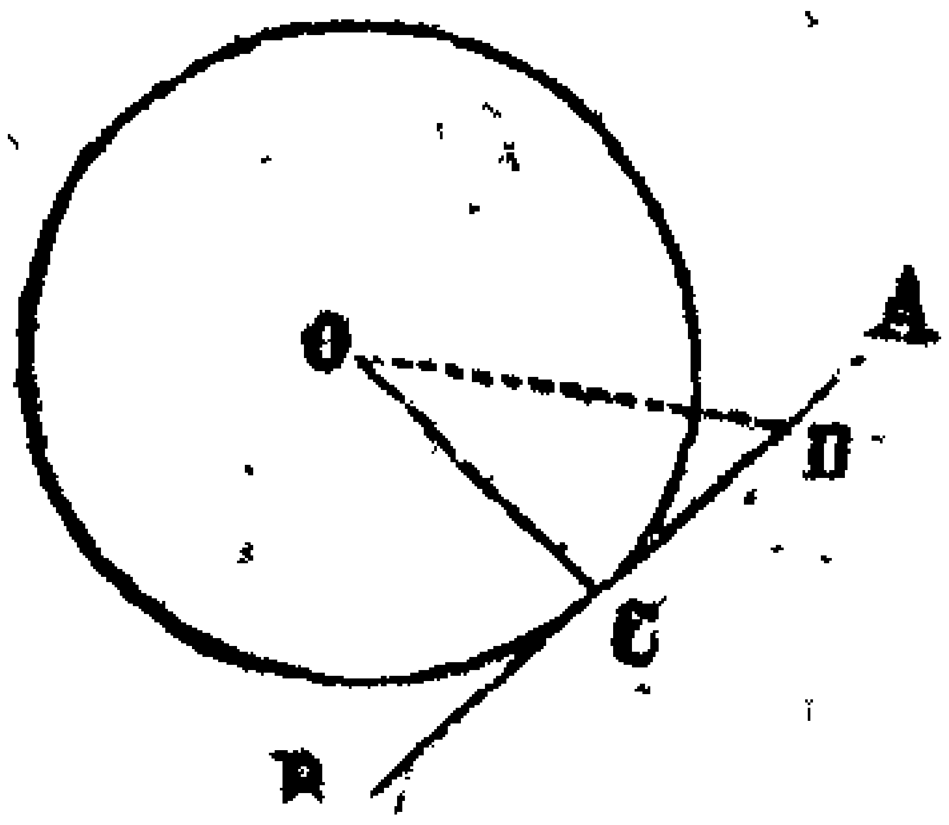
AC = CB

и джга AD е равна на джгж DB.

Доказ. Съединявами точки A и B съ точки O и D. Трижгълникъ AOB е равнобедренъ, защо то O = OB (като радіуси); отъ това слѣдува, чи ∠OAC = ∠OBC (§. 20).

Послѣ, правожгълни-тѣ трижгълници AOC и OCB ж равни, защо-то, гипотенузи-тѣ имъ AO и OB сж явни, сжщо и остри-тѣ жгъли OAC и OBC сж равни §. 24); отъ равенство-то на тѣзи трижгълници слѣува AC = CB. Най послѣ, правожгълни-тѣ трижгъл-нци ACD и DCB сж равни, защо-то катетъ AC = CB катетъ CD е общъ (§. 23); отъ равенство-то на ѣзи трижгълници слѣдува, чи хорда AD е равна на ордж DB; нъ равни-тѣ хорди стѣгать равни джги §. 55), слѣд. джга AD = на джгж DB.

§. 58. *Теорема. Касателна-та е перпендикулярна къмъ радіусъ-тъ, кой-то е прекаранъ къмъ точкж-тж на касаніе-то.*



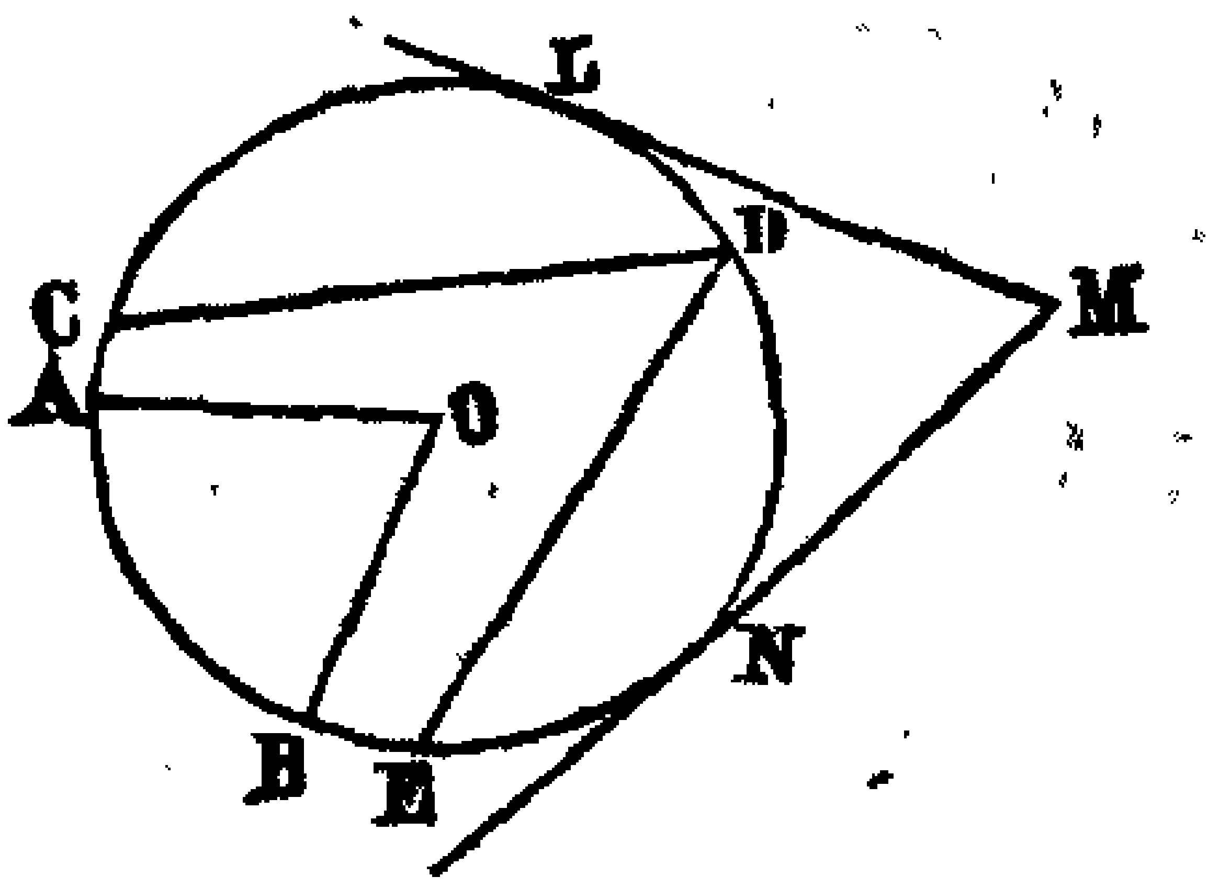
Чърт. 88.

Нека права-та АВ (чърт. 88) е касателна къмъ кржгъ-тъ въ точкж С; трѣба да докажемъ, чи радiусъ ОС е перпендикуляренъ къмъ АВ.

Доказ. Сѣка точка на касателнж-тж, освѣнъ точка-та на касанiе-то С, е вънъ отъ окржжность-тж; слѣд. точка С е най близо до центръ О; за това линiж ОС е по късж отъ сѣкж другж линiж OD коя-то съединява центръ-тъ съ некож точкж D на касателнж-тж; а най кжсо-то разстоянiе отъ точкж-тж до правж-тж е перпендикуляръ (§. 26), слѣд. $OC \perp AB$.

Тъй като радiусъ-тъ е перпендикуляренъ къмъ касателнж-тж въ точкж-тж на касанiе-то, а около точкж-тж на касанiе-то една твърдѣ малка часть отъ окржжность-тж безъ голѣмж погрѣшкж може да ся счита за правж линiж, то може да ся каже, чи радiусъ-то е перпендикуляренъ къмъ окржжность-тж.

§. 59. Жгълъ АОВ (чърт. 89), на кой-то врьхъ-тъ ся намира въ центръ-тъ на кржгъ-тъ, ся нарича *централенъ жгълъ*; жгълъ CDE, на кой-то врьхъ-тъ ся намира на окржжность-тж, а страни-тѣ му сж пресѣчки, ся нарича вписанъ; жгълъ LMN, на кой-то страни-тѣ

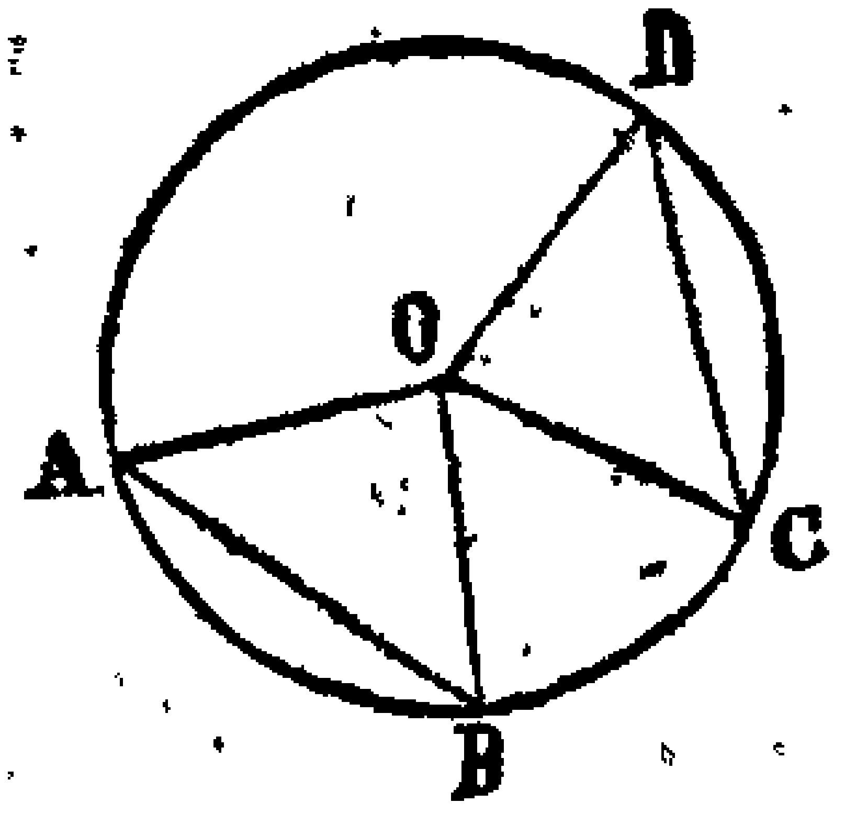


Чърт. 89.

и [illegible] сж касателни къмъ окржжность-тж ~~ся~~ е нарича *описанъ жгълъ*. [illegible]

§. 60. *Теорема. На равни-тѣ централни жгли отговарятъ равни джги.*

Нека (чърт. 90) ∠AOB е равенъ на ∠COD; трѣба да докажемъ, чи джга AB= на джгж DC.



Чьрт. 90.

Доказ. Прекарвами хорди AB и CD; тогава ще ся образувать два равни трижгълника AOB и COD (§. 15). Наистина, AO=OD и OB=OC, къто радіуси: освѣнъ това ∠AOB=∠COD. Отъ равенство-то на трижгълници-тѣ слѣдува равенство-то на хорди AB и CD; нъ ако хорди-тѣ сж равни, то джга AB= на джгж CD (§. 55).

Обратна теорема. На равни джги отговарять равни централни жгли.

Нека (чьрт. 90) джга AB= на джгж CD; трѣба да докажемъ чи, ∠AOB=∠COD.

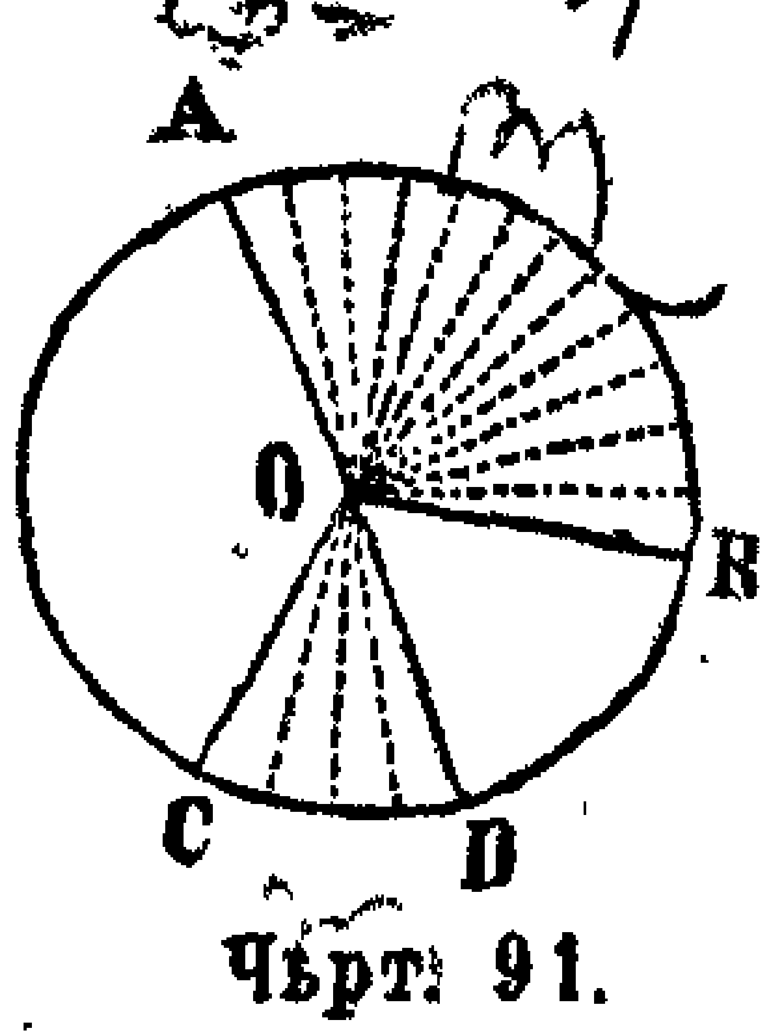
Доказ. Тъй къто джги-тѣ сж равни, то и хорди AB и CD сж равни (§. 55); слѣд. трижгълници AOB и COD, кои-то иматъ три-тѣ си страни равни, сж равни (§. 18); затова ∠AOB=∠COD.

§. 61. *Теорема. Централни-тѣ жгли сж отнасять по между си, както джги-тѣ между страни-тѣ имъ.*

Нека AOB и COD (чьрт. 91) сж два централни жгъла; треба да докажемъ, чи

$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$

$$\frac{AOB}{COD}=\frac{\text{джга } AB}{\text{джга } CD}.$$



Чьрт. 91.

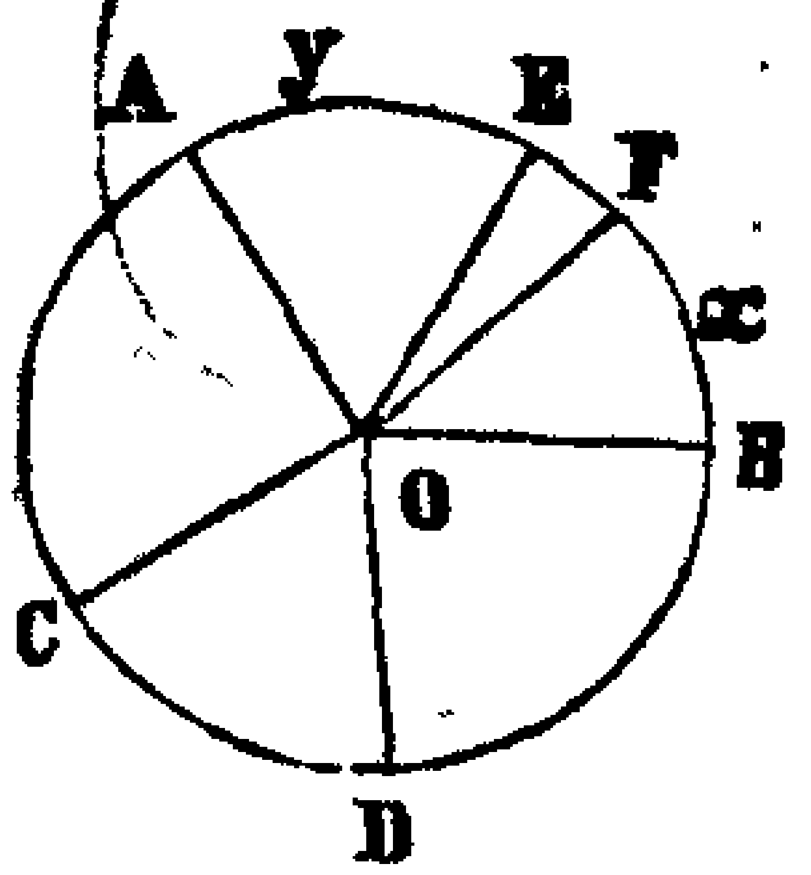
Доказ. Тукъ могжтъ да бждять два случая.

1ій Случай — кога-то джги AB и CD сж съизмѣрими. Нека обща-та мѣрка влиза m пжти въ AB и n пжти въ CD; тогава $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$. Прекарвами радіуси презъ всички-тѣ точки на дѣленіе-то на джги AB и CD; тогава жгли AOB и COD ще ся раздѣлжть

— първія на m, а вторія на n равни жгъла (§. 60). Единъ отъ тѣзи равни жгъли може да ся счита за общж мѣркж между жгли-тѣ AOB и COD; тъй щото $\frac{AOB}{COD}=\frac{m}{n}$; слѣд. $\frac{AOB}{COD}=\frac{AB}{CD}$.

2iй Случай — кога-то джги AB и CD (чърт. 92) сж несъизмѣрими. Отмѣрвами на джгж AB часть AE, равнж на CD и съединявами точкж E съ центръ O; тогава

$$\angle AOE = \angle COD \text{ (§. 60).}$$



Чърт. 92.

Ще докажемъ, чи отношеніе $\frac{AB}{AE}$ не може де бжде ни по голѣмо ни по малко отъ отношеніе $\frac{AOB}{AOE}$.

Нека допустимъ, чи $\frac{AB}{AE}>\frac{AOB}{AOE}$. Вмѣсто AE земами таквази по голѣмж джгж Ax, щото да бжде $\frac{AB}{xx}=\frac{AOB}{AOE}$ (1) Раздѣлявами джгж AB на таквизи равни части, щото сѣка отъ тѣхъ да бжде по малка отъ Ex; тогава макаръ една отъ точки-тѣ на дѣленіе-то ще падне между E и x; нека тъзи точка бжде F. Джги-тѣ AB и AF ще бждать съизмѣрими; затова, като съединимъ F съ O, споредъ доказано-то въ първія случай ще имами $\frac{AB}{AF}=\frac{AOB}{AOF}$.

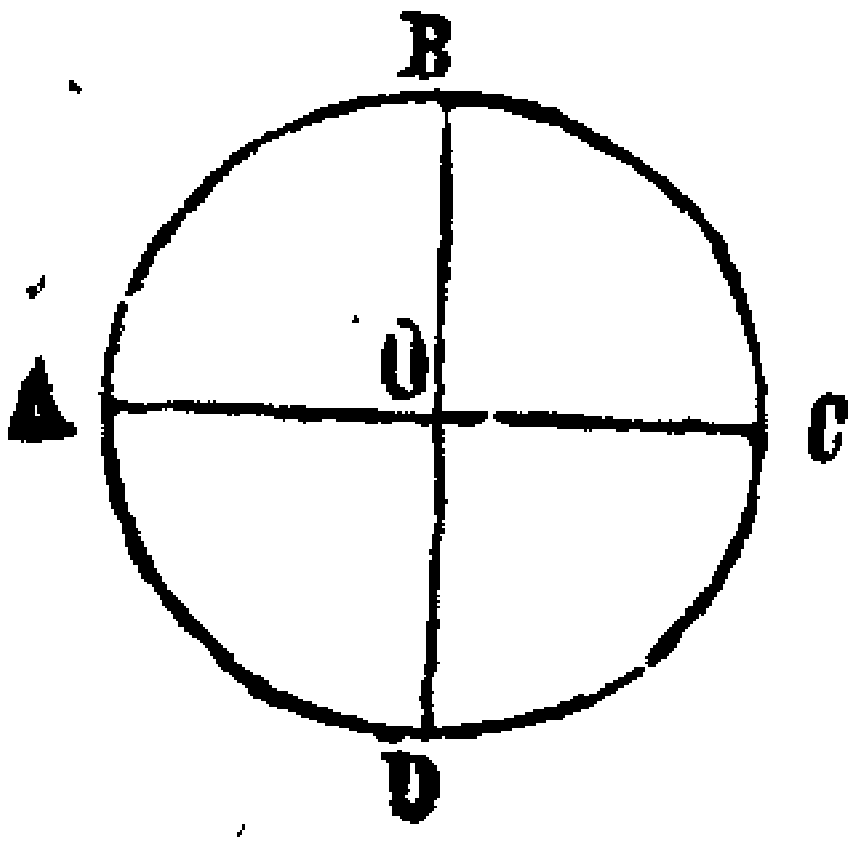
Ако раздѣлимъ тъзи пропорціж съ (1) и съкратимъ равни-тѣ членове, то ще получимъ: $\frac{Ax}{AF}=\frac{AOE}{AOF}$.

Нъ тъзи пропорціж е невѣрна, защо-то отношеніе $\frac{Ax}{AF}$ е по голѣмо, а отношеніе $\frac{AOE}{AOF}$ по малко отъ единицѫ. И тъй допустнато-то $\frac{AB}{AE}>\frac{AOB}{AOE}$ доказва противорѣчіе; слѣд. то е невѣрно.

По сѫщія начинъ може да ся докаже, чи ще бѫде невѣрно, ако допустимъ $\frac{AB}{AE}<\frac{AOB}{AOE}$, — стига само намѣсто AE да земемъ по малкѫ дѫгѫ Aу и да повторимъ сѫщи-тѣ разсѫжденія. Слѣд. какъ-то при съизмѣримость-тѫ, тъй и при несъизмѣримость-тѫ на дѫги-тѣ ще имами: $\frac{AOB}{AOE}=\frac{AB}{AE}$.

§. 62. Да си представимъ два централни ѫгъла. Отъ теоремѫ 61 слѣдува, чи ако дѫга-та на единъ-тъ е 5 пѫти по голѣма отъ дѫга-та на другія; то и първія ѫгълъ ще бѫде 5 пѫти по голѣмъ отъ вторія и пр.; затова централчи-тѣ ѫгъли могѫть да ся измѣрвать съ дѫги-тѣ си.

За измѣрваніе на ѫгъли-тѣ съ дѫги-тѣ имъ сѣкѫ окрѫжность раздѣлять на 360 равни части, нарѣчени *градуси;* сѣкій градусъ дѣлѭть на 60 равни части, нарѣчени минути; сѣкѫ минутѫ — на 60 равни части, нарѣчени *секунди*. Градуси-тѣ означавять съ знакъ °, минути-тѣ съ знакъ ′, а секунди-тѣ съ знакъ ″, напр. 48 градуса, 34 минути и 12 секунди пишѭть тъй: 48° 34′ 12″.

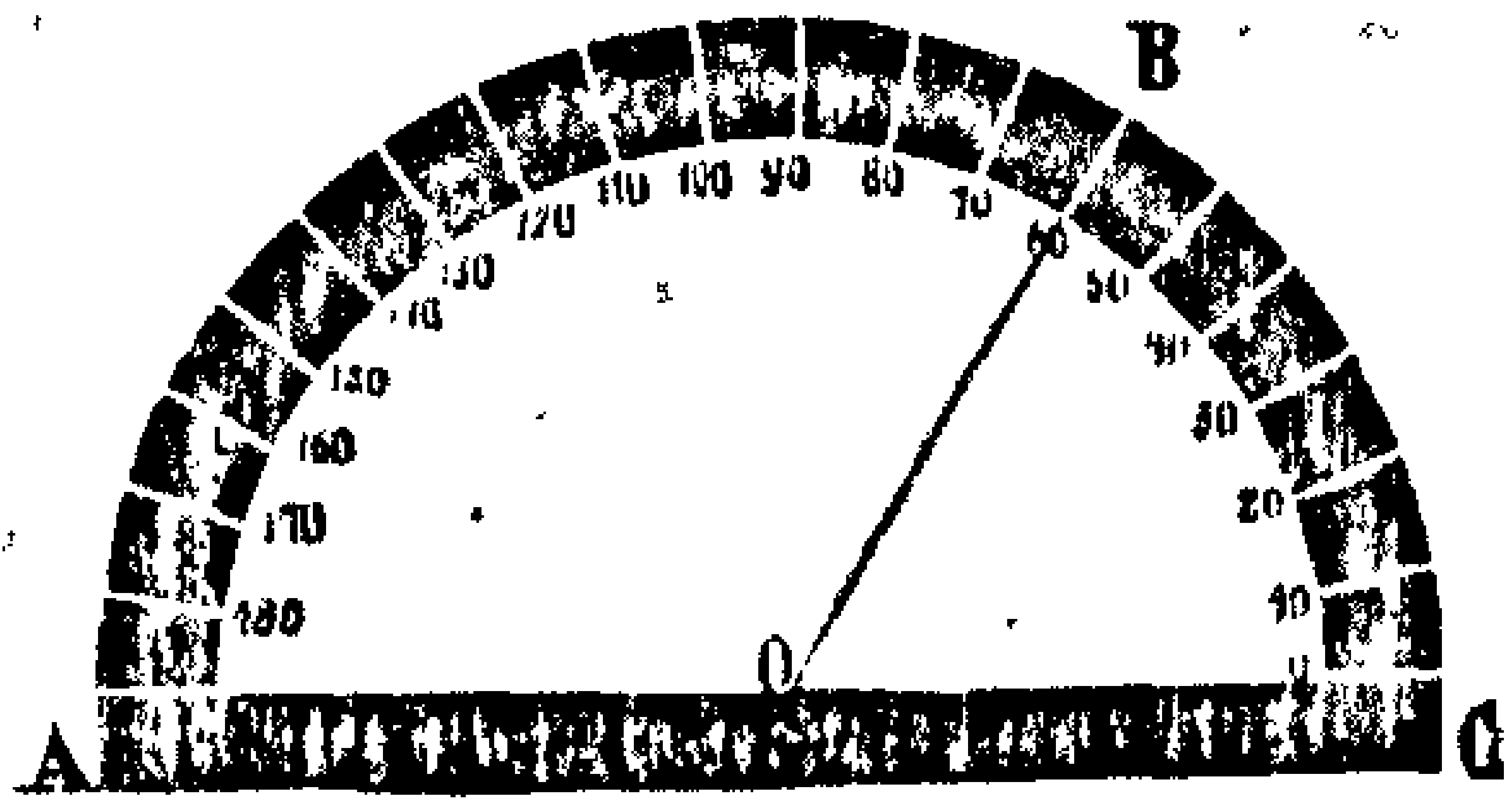


Чьрт. 93.

Ако въ окрѫжность ABCD (чьрт. 93) прекарами два взаимно перпендикулярни діаметра AC и DB, то около центръ O ще станать четери прави ѫгъла. Тъй къто прави-тѣ ѫгъли сѫ равни помежду си, то и дѫги-тѣ AB, BC, CD и DA ще бѫдѫть равни помежду си; отъ това слѣдува, чи сѣка отъ тѣхъ, напр. AB, е четвърта часть отъ цѣлж-тж окржжность, а тъй като цѣла-та окржжность съдържа 360°, то четвърта-та ѝ часть ще съдърже 90°; слѣд. сѣкій правъ жгълъ съдържа 90°

Явно е, чи ако жгълъ-тъ съдържа само 45°, той ще бжде два пжти по малъкъ отъ правія, ако съдържа 30°, той ще бжде три пжти по малъкъ отъ прáвія и пр. Отъ това ся види, чи по число-то на градуси-тѣ въ джгж-тж ній можемъ да сждимъ за голѣминж-тж на жгълъ-тъ.

За измѣрваніе на жгли-тѣ, кои-то сж исписани на книгж, употребявать урѣдь, нарѣченъ *транспортиръ*. Той състои отъ мѣдянъ полукржгъ ABC (чърт. 94), раздѣленъ на градуси. За да измѣржть нѣкой

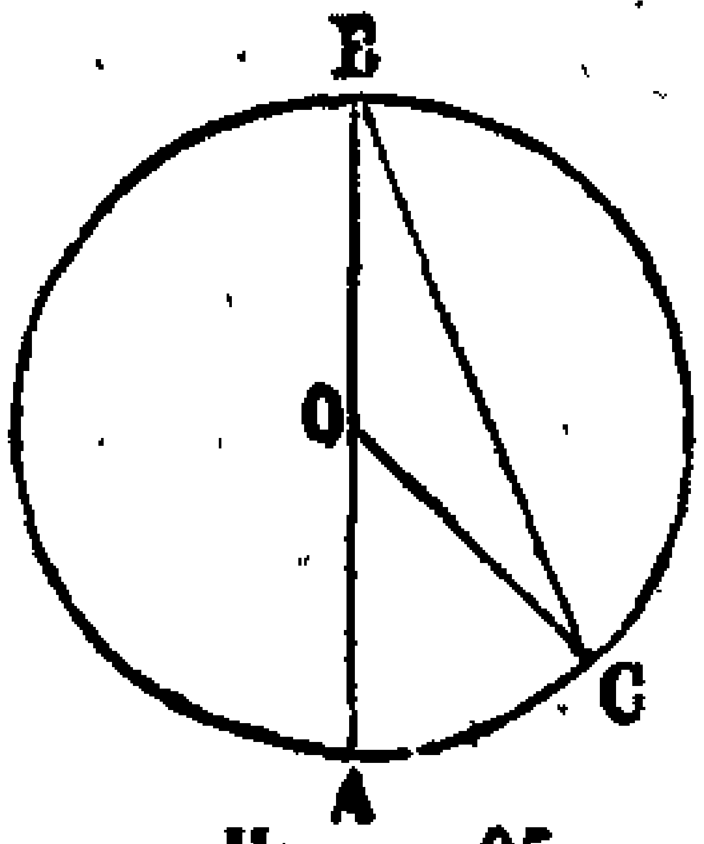


Чърт. 94.

жгълъ COB, налагать на него транспортиръ-тъ тъй, щото центръ O да съвпадне съ върхъ-тъ на жгълъ-тъ и діаметръ-тъ на транспортиръ-тъ — съ еднж отъ страни-тѣ на жгълъ-тъ, напр. съ CO; тогава глѣдать съ кое дѣленіе съвпада друга-та страна OB. На чъртежъ-тъ страна OB съвпада съ дѣленіе 60, слѣд. $\angle COB$ е равенъ на 60°.

§. 63. *Теорема. Сѣкій вписанъ жгълъ е равенъ на половинж-тж отъ централнія, кой-то ся опира на сжщж-тж джгж.*

При доказателство-то на тъзи теоремж ся срѣщать три случая: 1) Центръ-тъ на кржгъ-тъ може да бжде на еднж отъ страни-тѣ на вписанiя жгълъ; 2. вжтрѣ въ жгълъ-тъ и 3) вжнъ отъ жгълъ-тъ.



Чърт. 95.

1ій случай. Нека центръ O (чърт. 95) ся намира на странж AB; трѣба да докажемъ, чи

$$\angle ABC = \angle \frac{AOC}{2}.$$

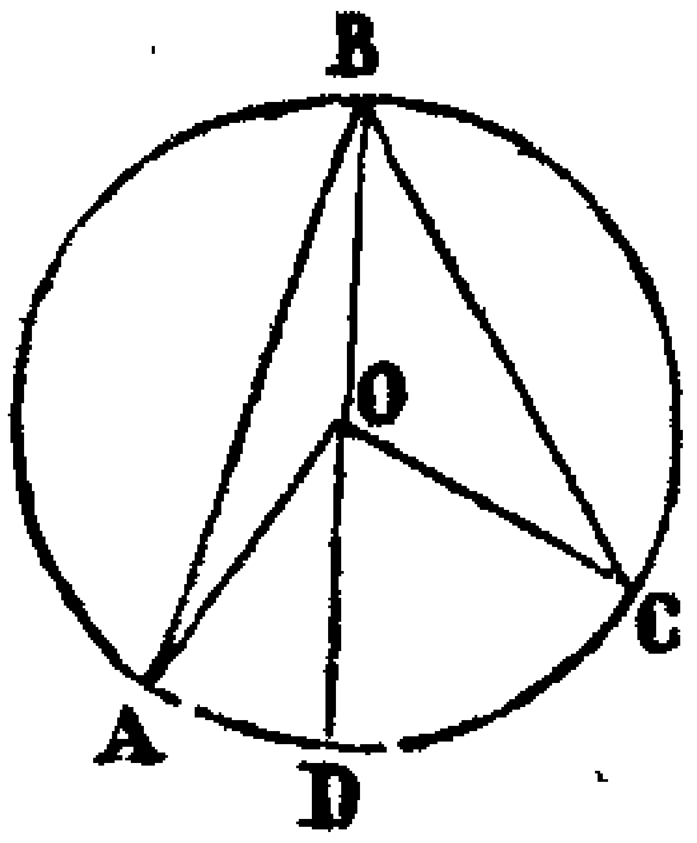
Доказ. Отъ трижгълникъ OBC имами:

$$AOC = OBC + OCB$$

(§. 37., слѣд. 1); нъ тъй като въ трижгълникъ OBC страни OC и OB сж равни, като радiуси, то

$$\angle OCB = \angle OBC$$

(§. 20) слѣд. $AOC = 2OBC$ или $ABC = \frac{AOC}{2}$.



Чърт. 96.

2ій случай. Нека центръ O (чърт. 96) вжтрѣ въ жгълъ ABC; трѣба да докажемъ, чи

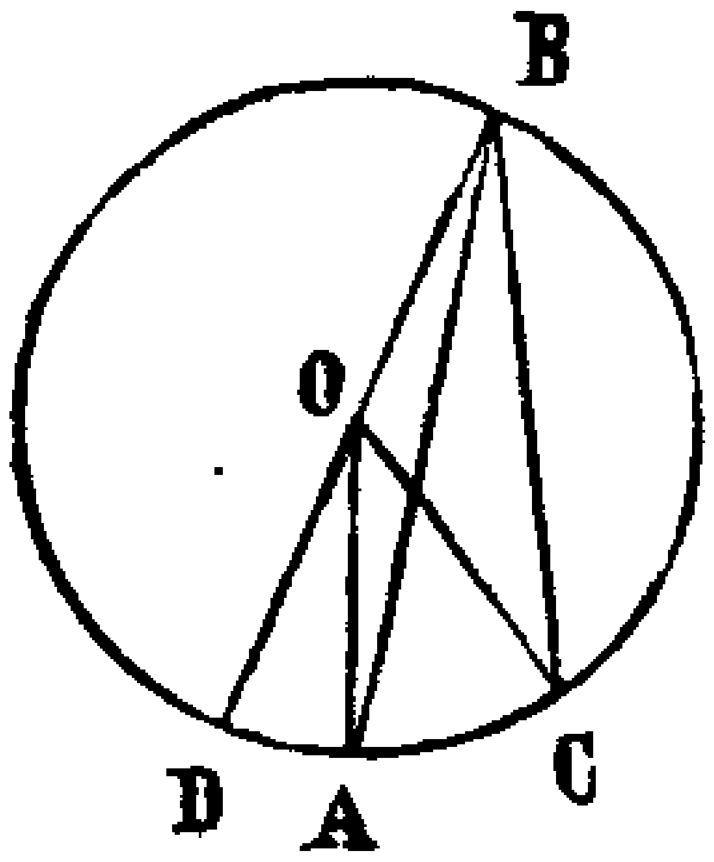
$$ABC = \frac{AOC}{2}.$$

Доказ. Прекарвами дiаметръ BD. Тогава вписанiя жгълъ ABD ще ся раздѣли на два жгъла ABC и DBC, за кои-то теорема-те е справедлива, защо-то центръ O ся намира на общж-тж имъ странж BD; слѣд. $ABD = \frac{AOD}{2}$ и $DBC = \frac{DOC}{2}$; като съберемъ тѣзи двѣ равенства, ще получимъ:

$$ABD + DBC = \frac{AOD + DOC}{2}, \text{ или } ABC = \frac{AOC}{2}.$$

3ій случай. Нека центръ O (чърт. 97) е вънъ отъ жгълъ ABC; трѣба да докажемъ, чи $ABC = \frac{AOC}{2}$.

Доказ. Прекарвами діаметръ BD; тогава теорема-та ще бѫде справедлива за ѫгъли DBC и DBA, защо-то центръ O е на общѫ-тѫ имъ странѫ BD; слѣд. $DBC=\frac{DOC}{2}$ и $DBA=\frac{DOA}{2}$.



Чьрт. 97.

Къто извадимъ отъ пьрво-то равенство второ-то, ще получимъ

$$DBC-DBA=\frac{DOC-DOA}{2}, \text{ или } ABC=\frac{AOC}{2}.$$

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи вписанія ѫгълъ ся измѣрва съ половинѫ-тѫ отъ дѫгѫ-тѫ, коя-то е между страни-тѣ му.

ЗАДАЧИ.

16. Да намѣримъ най кѫсо-то разстояніе отъ точкѫ-тѫ до окрѫжность-тѫ.

Рѣшеніе. Часть отъ правѫ-тѫ, коя-то съединява даденѫ-тѫ точкѫ съ центръ-тъ, е най кѫсо разстояніе отъ точкѫ-тѫ до окрѫжность-тѫ.

17. Да намѣримъ най кѫсо-то разстояніе между двѣ окрѫжности.

Рѣшеніе. Часть отъ линіѭ-тѫ, коя-то съединява два-та центра, е най кѫсо-то разстояніе.

18. На окрѫжность-тѫ да отмѣримъ дѫгѫ, коя-то да бѫде два, три и проч. пѫти по голѣма отъ даденѫ-тѫ дѫгѫ.

Рѣшеніе. Хордѫ-тѫ на даденѫ-тѫ дѫгѫ отмѣрваме по окрѫжность-тѫ два, три и проч. пѫти; тогава ще ся получи дѫга, два, три и пр. пѫти по голѣма, защо-то равни-тѣ хорди стѣгать равни дѫги.

19. Презъ точкѫ А, коя-то е вѫтрѣ съ крѫгъ-тъ, да прекарами хордѫ, коя-то да ся прозполовява въ точкѫ А.

Рѣшеніе. Точка А съединявами съ центръ О и продължавами линіѭ АО по срѣщуположнѫ посокѫ толкози, колко-то е отъ А до О; тогава точка А ще бѫде срѣда-та на тъзи линіѭ. Презъ точкѫ А прекарвами хордѫ, перпендикуларна къмъ линіѭ АО; тъзи хорда ще ся презполовява въ точка А.

20. Да раздѣлимъ даденѫ-тѫ дѫгѫ на 2, 4, 8 . . . . равни части.

Рѣшеніе. Стѣгами дѫгѫ-тѫ съ хордѫ и отъ центрътъ спущами перпендикуляръ къмъ хордѫ-тѫ. Къто продължимъ този перпендикуляръ задъ хордѫ-тѫ, ще разсѣчемъ даденѫ-тѫ дѫгѫ на двѣ равни части. По сѫщія начинъ може и половина-та на дѫгѫ-тѫ да ся разсѣче на двѣ равни части и проч.

21. Да опишемъ съ даденъ радіусъ окрѫжность, коя-то да минува презъ двѣ дадени точки М и N.

Рѣшеніе. Съединявами точкѫ М съ N и отъ срѣдѫ-тѫ на линіѭ MN издигами перпендикуляръ. Послѣ отъ точкѫ М съ даденія радіусъ списваме дѫгѫ; нека тъзи дѫга пресѣче перпендикуляръ-тъ въ точкѫ О; тогава точкѫ О ще бѫде центръ на окрѫжность-тѫ, коя-то ще мине презъ точки М и N, ако ѭ опишемъ съ даденія радіусъ. Наистина, къто съединимъ М и N съ О получвами два правоѫгълни триѫгъника (защо-то катети-тѣ имъ сѫ равни). Отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува $MO=ON$, т. е. ако окрѫжность-тѫ мине презъ точкѫ М, тя ще мине и презъ точкѫ N. Въпросъ-тъ е възможенъ, ако даденія радіусъ не е по малъкъ $\frac{MN}{2}$.

22. Да намѣримъ центръ-тъ на окрѫжность-тѫ.

Рѣшеніе. На окржжность-тж земами три произволни точки А, В и С; съединявами А съ В и В съ С; отъ срѣди-тѣ на хорди АВ и ВС издигами перпендикуляри; точка-та, гдѣ-то ся пресѣкжть тѣзи перпендикуляри, ще бжде центръ на кржгъ-тъ. Наистина, центръ-тъ на окржжность-тж трѣба да ся намира какъ-то на единъ-тъ, тъй и на другія перпендикуляръ; нъ той може да ся намира на двѣ-тѣ тѣзи линіи въ сжщо-то време само въ точкж-тж на пресичаніе-то имъ.

23. Да опишемъ съ даденъ радіусъ окржжность, кая-то да бжде касателна къмъ права АВ съ дадень точкж М.

Рѣшеніе. Отъ точкж М на правж-тж АВ издигами перпендикуляръ и отмѣрвами на него линіж МО, равно на даденія радіусъ; точка О ще бжде центръ на окржжность-тж, коя-то търсимъ.

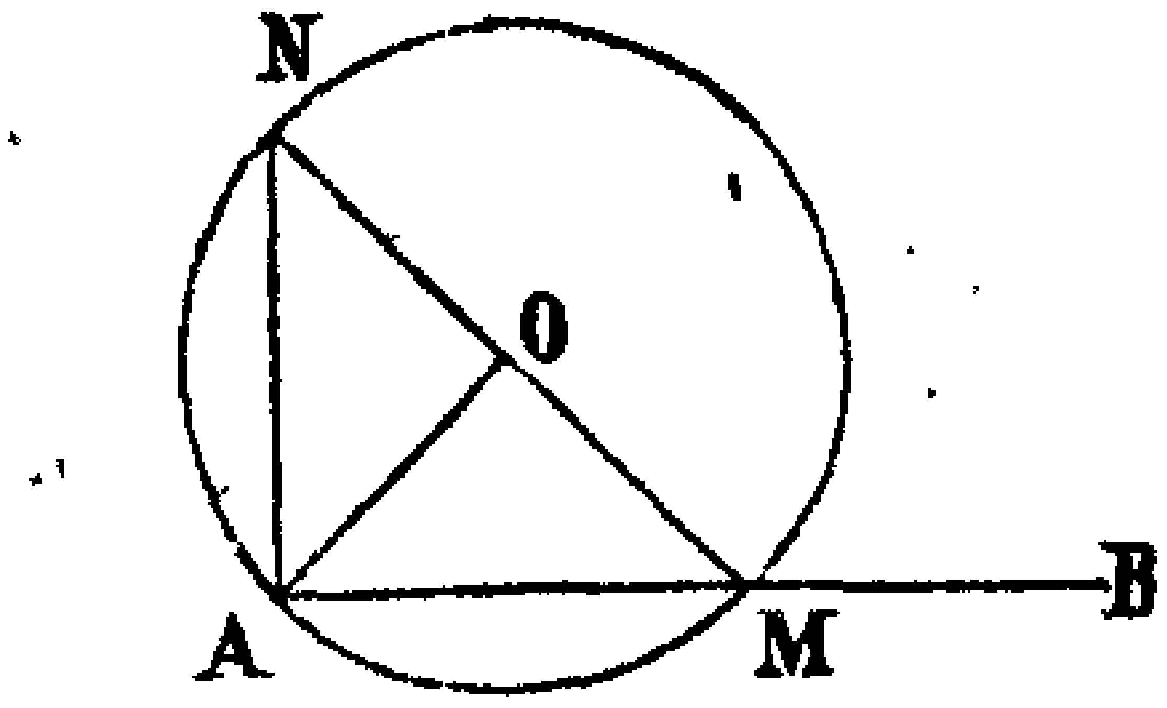
24. Да опишемъ окржжность, коя-то да преминува презъ точкж N и да бжде касателна къмъ правж-тж АВ съ даденж нейнж точкж М.

Рѣшеніе. Отъ точкж М на правж-тж АВ издигами перпендикуляръ; послѣ отъ срѣдж-тж на линіж MN издигами перпендикуляръ. Точка-та, гдѣ-то ся пресичать тѣзи перпендикуляри, ще бжде центръ на окржжность-тж, коя-то търсимъ.

25. Да опишемъ съ радіусъ r окржжность, центръ-тъ на коя-то да ся намира на правж-тж MN, и коя-то да ся касае къмъ правж-тж АВ.

Рѣшеніе. Прекарвами линіж, успорѣднж на АВ, на разстояніе r отъ нея. Тъзи линія ще пресѣче правж-тж MN въ таквази точка, коя-то ще бжде центръ на окржжность-тж, коя-то търсимъ.

26. Да издигнемъ перпендикуляръ къмъ края на линіж АВ, коя-то не може да ся продължи.



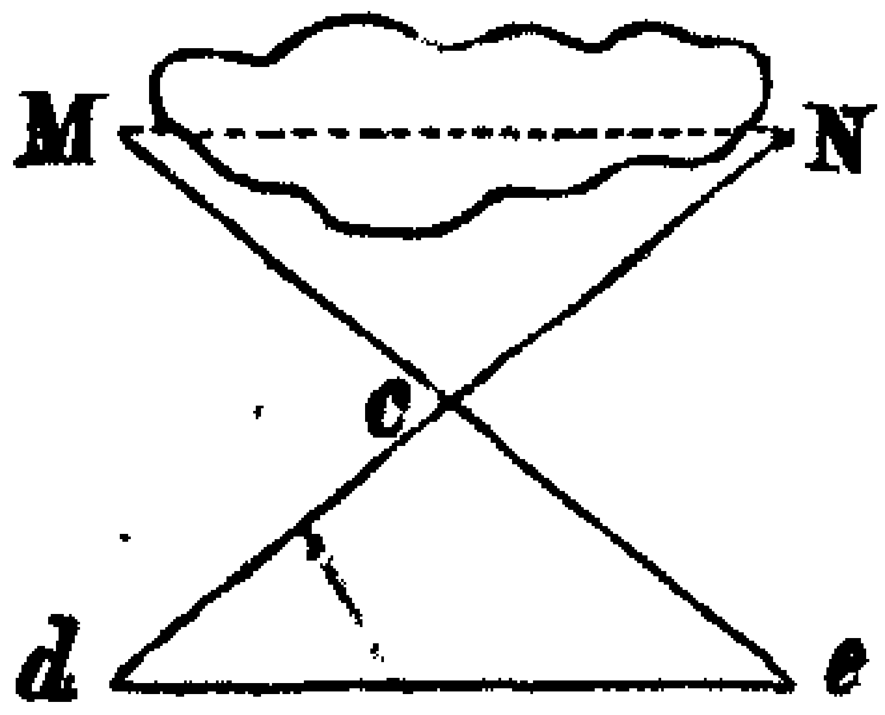
Чрьт. 98.

Рѣшеніе. Земами произволнѫ точкѫ O (чьрт. 98) и съ радіусъ, равенъ на OA, описваме окрѫжность. Нека тъзи окрѫжность пресича правѫ-тѫ AB въ точкѫ M: прекарвами діаметръ MN и точкѫ N съединявами съ A; линія AM ще бѫде перпендикуляръ къмѣ AB. Наистина, вписанія ѫгълъ NAM ся измѣрва съ половинѫ-тѫ отъ полукрѫжность MN, т. е. съ четвьртинѫ часть отъ цѣлѫ-тѫ окрѫжность, слѣд. той е правъ или, все едно, линіѭ AN е перпендикулярна къмъ AB.

27. Да прекарами презъ даденѫ точкѫ A касателнѫ къмъ крѫгъ-тъ.

Рѣшеніе. Точка A съединяваме съ центръ O и като презполовимъ линіѭ AO въ точкѫ O', описвами съ радіусъ OO' окрѫжность. Нека тъзи окрѫжность пресича пьрвѫ-тѫ въ точкѫ M и N; съединявами тѣзи точки съ A и получвами линіи AM и AN, кои-то ще бѫдѫть касателни къмъ окрѫжность-тѫ, защо-то сѫ перпендикулярни къмъ радіуси-тѣ въ точки-тѣ на касанія-та (перпендикулярность-та имъ ся доказва както и въ задачѫ 26).

28. Да намѣримъ разстояніе-то между двѣ точки, кои-то сѫ отдѣлени по между си съ нѣкое препятствіе, на пр. блато.

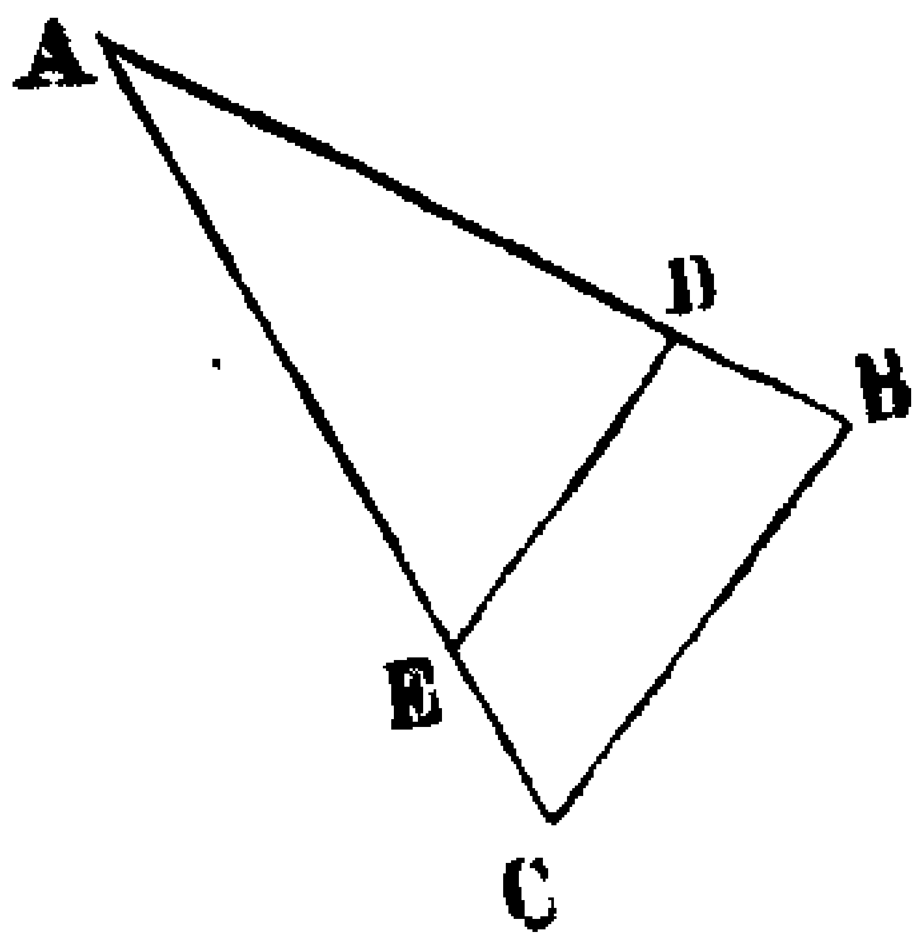


Чьрт. 99.

Рѣшеніе. Нека тѣзи точки бѫдѫть M и N (чьрт. 99). Избирами третѭ точкѫ c, отъ коя-то могѫть да ся измѣрѭть разстоянія Mc и Nc; послѣ продъл-

жавами линіѭ cN до d тъй, щото да бѫде cN=c
сѫщо и линія Mc да е тъй, щото да бѫде Mc=ce
Като измѣримъ разстояніе de, ще рѣшимъ задачѫ-тѫ
защо-то de=MN. Наистина, въ △ци MNc и cd
имами: ∠McN=dce (като вертикални), послѣ dc=c
и ec=MC; слѣд. триѫгълници-тѣ сѫ равни (§. 15)
Отъ равенство-то на тѣзи △ци излиза MN=de.

29. Да опрѣдѣлимъ разстояніе-то между двѣ точки A и B, отъ кои-то точка A е непрестѫпна.



Чьрт. 100.

Рѣшеніе. Нека AB (чьрт. 10
е разстояніе-то, кое-то тѫрсимъ
Прекарвами произволнѫ линіѭ B
и си въображявами линіѭ AC
избирами произволнѫ точкѫ D н
линіѭ AB и презъ точкѫ D пре
карвами линіѭ DE, успорѣдна н
BC. Отъ подобни тѣ триѫгълни
ци ABC и ADE имами:

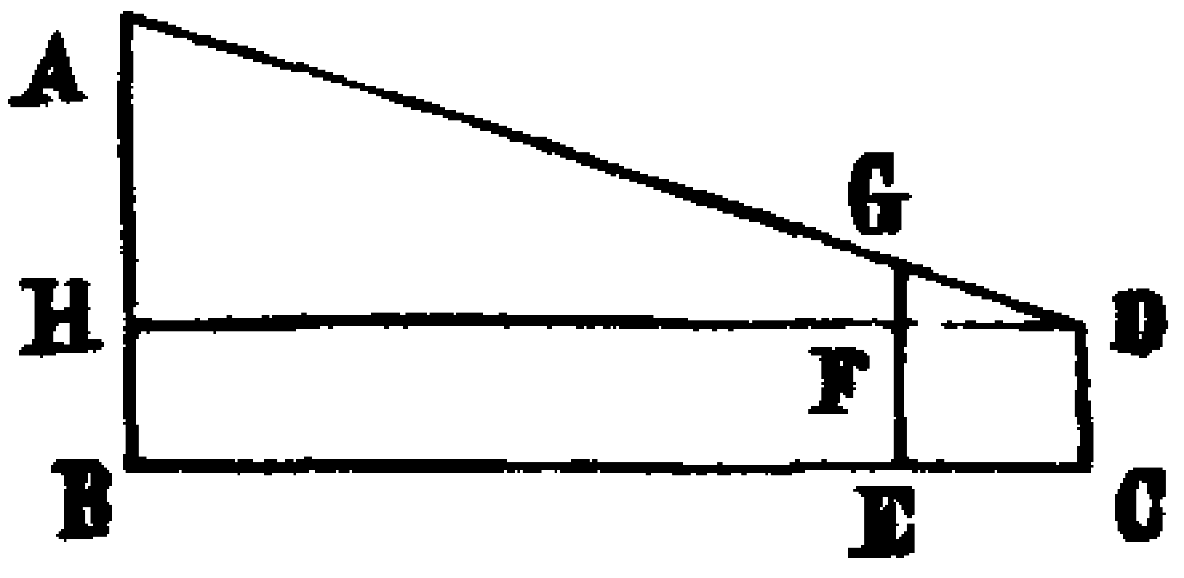
$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE} \text{ или } \frac{AB-AD}{AB}=\frac{BC-DE}{BC}, \text{ т. е. } \frac{BD}{AB}=\frac{BC-DE}{BC}$$

Като опрѣдѣлимъ отъ послѣдно-то равенств
неизвѣстнѫ-тѫ величинѫ AB, ще получимъ:

$$AB=\frac{BD\,BC}{BC-DE}.$$

Въ вторѫ-тѫ часть влизать таквизи величини
кои-то непосрѣдственно могѫтъ да ся измѣрѭтъ.

30. Да измѣримъ височинѫ-тѫ на пристѫпні
предмѣтъ.



Чьрт. 101.

Рѣшеніе. Нека AB (чьрт
101) е предметъ-тъ висо
чина-та, на кой-то трѣб
да ся измѣри. Въ точкѫ
и C забивами два кол
върхове-тѣ на кои-то D

G да ся сливать съ върхъ А, кога глѣдаме отъ D къмъ А. Като си въобразимъ линіи DH и BC, отъ подобни-тѣ трижгълници AHD и GFD ще имами:

$$\frac{AH}{FG}=\frac{DH}{FD}\text{ или, }AH=\frac{FG\text{x}DH}{FD}.$$

Въ това равенство FCe е разлика-та между височини-тѣ на два-та кола DH=BCe разстояніе-то отъ колъ DC до предметъ-тъ; FD е разстояніе-то между два-та кола. И тъй всички-тѣ тѣзи величини могжть ся измѣри; затова величина AH ще бжде извѣстна: Като прибавимъ къмъ AH величинж HB, или все едно височинж-тж на колъ DC, ще опредѣлимъ височинж-тж на предметъ-тъ.

Тъзи задача може да ся рѣши още и по слѣдующія начинъ: Забивать колъ вертикално и измѣрвать дължинж-тж на сѣнкж-тж му и дължинж-тж на сѣнкж-тж отъ предметъ AB. Тъй като зари-тѣ на слънце-то могжть да ся считать за успорѣдни, то тѣ, заедно съ височинж-тж на предмѣтъ-тъ и сѣнкж-тж му, сжщо и съ височинж-тж на колъ-тъ и сѣнкж-тж му, образувать два подобни правожгълни трижгълника. Отъ подобіе-то на трижгълници-тѣ слѣдува, чи височина-та на предметъ-тъ ся относя къмъ височинж-тж на колъ-тъ, както сѣнка-та на първія къмъ сѣнкж-тж на вторія. Отъ тъзи пропорціж ся опредѣлява височина-та на предметъ-тъ.

31. Да измѣримъ височинж-тж на непристжпнія предметъ.

Рѣшеніе. Ако предметъ-тъ е непристжпенъ, то трѣба да опредѣлимъ най-напредъ разстояніе BC (чърт. 101) по способъ-тъ, кой-то е изложенъ въ задачж 29. Послѣ това вече може да ся постжпва спорѣдъ задачж 30.

Забелѣжка. За да прекарать правж линіж на лице-то на земѭ-тѫ, употрѣбявать нѣколко прави прѫта, забити единъ слѣдъ други вертикално въ земіѭ-тѫ. Тѣзи прѫтове ся порѣждать тъй, що-то пьрвія да закрива други-тѣ, кога поглѣднемъ отъ него кьмъ тѣхъ.

Забелѣжка. За да означимъ окрѫжность на земно-то лице, можемъ да земемъ дълго вѫже, на двата края, на кое-то сѫ вързани два кола. Ако забіемъ единъ-тъ колъ въ земѭ-тѫ, послѣ обтѣгнемъ вѫже-то и притиснемъ остріе-то на другія колъ къмъ земѭ-тѫ, то, при вьртеніе-то около пьрвія колъ, остріе-то на вторія ще отбѣлежи по лице-то на земѭ-тѫ кривѫ лініѭ, коя-то ще бѫде окрѫжность.

IVий е [illegible] IV клас

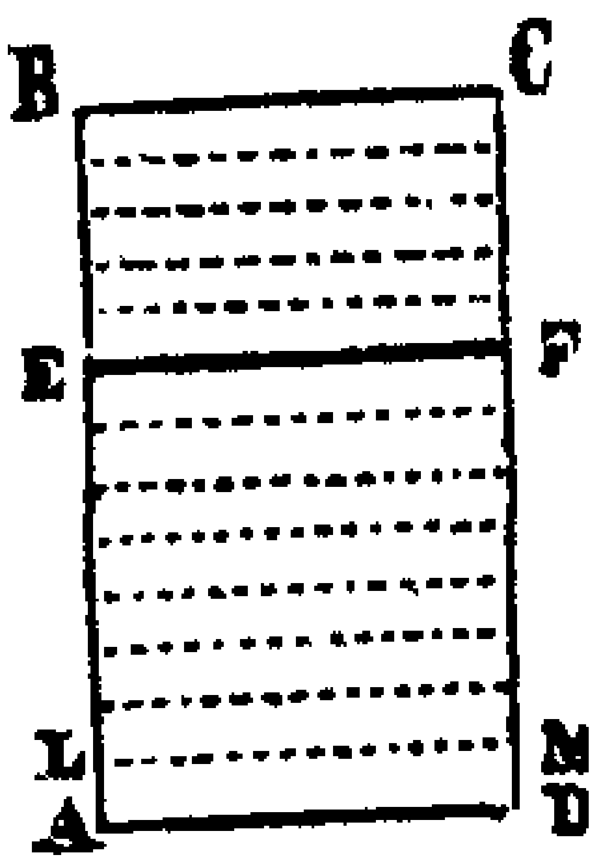
ГЛАВА VII.

ИЗМѢРВАНІЕ НА ЛИЦА-ТА НА ПРАВОЛИНЕЙНИ-ТѢ ФИГУРИ.

§. 64. Часть отъ плоскость-тѫ, коя-то заема нѣкоя фигура, ся нарича *лице* на тъзи фигурѫ. Да *измѣримъ* лице-то на фигурѫ-тѫ ще рѣче да узнаемъ, колко пѫти влиза съ него лице-то на другѫ фигурѫ, коя-то ся пріема за единицѫ. За единицѫ лице ся пріема лице-то на квадратъ тъ, страна-та, на кой-то е нѣкоя линейна единица, напр. аршинъ, метръ и пр.; това лице на квадратъ-тъ ся нарича изобщо *квадратнѫ единицѫ*. Кога страна-та на квадратъ-тъ е единъ метръ, той ся нарича *квадратенъ метръ*, кога е аршинъ — *квадратенъ аршинъ* и пр.

Двѣ фигури, кои то имать еднакви лица ся наричать равномѣрни.

§. 65. *Теорема. Лица-та на правоѫгълникъ-тѣ ои-то иматъ еднакви основи, ся отнасятъ по между и, къто височини-тѣ.*



Чърт. 102.

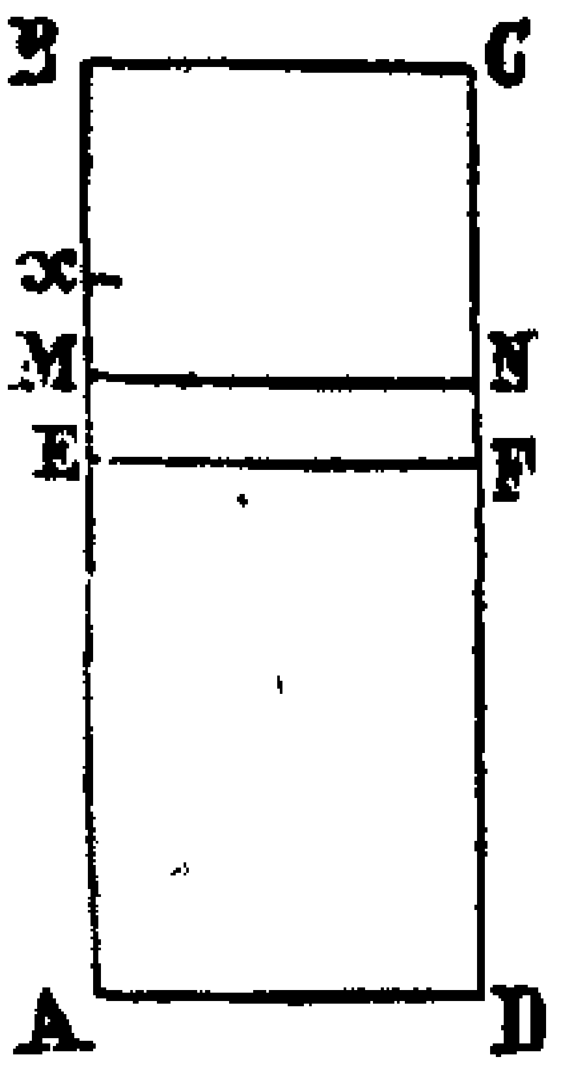
Нека ABCD (чърт. 102) ся два правоѫгълника, кои-то иматъ общѫ основѫ AD; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}.$$

Доказ. Трѣба да разглѣдами два случая.

1iй Случай. Нека височини-тѣ AB и AE сѫ съизмѣрими; ако обща-та мѣрка AL влиза въ AB m пѫти, а въ AE n пѫти, то $\frac{AB}{AE}=\frac{m}{n}$(1). Прекарвами презъ всички-тѣ точки на дѣленіе-то линіи, успорѣдни на основѫ AD, тогава правоѫгълникъ ABCD ще ся раздѣли на m, а правоѫгълникъ AEFD на n равни правоѫгълника (§. 40) слѣд. $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{m}{n}$. Къто сравнимъ това равенство съ (1), ще получимъ:

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}.$$



Чърт. 103.

2iй Случай. Нека височини-тѣ AB и AE сѫ несъизмѣрими. Въ този случай ще докажемъ, чи отношеніе $\frac{ABCD}{AEFD}$ не може да бѫде ни по голѣмо, ни по малко отъ отношеніе $\frac{AB}{AE}$. На-истина, ако допустимъ, чи $\frac{ABCD}{AEFD}<\frac{AB}{AE}$, то вмѣсто AE (чърт. 103) може да ся земе таквази линія Ax, щото да бѫде;

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{Ax}, (1).$$

Раздѣляме линіѭ AB на таквози число равни час щото сѣка отъ тѣхъ да бѫде по малкѫ отъ Ex; гава макаръ една отъ точки-тѣ на дѣленіе-то падне между E и x; нека тъзи точка е M. К прекарами линія MN, успорѣдна на AD, ще по чимъ два правоѫгълника ABCD и AMND, на кои-височини-тѣ сѫ съизмѣрими, слѣд.

$$\frac{ABCD}{AMND}=\frac{AB}{AM}.$$

Като раздѣлимъ тъзи пропорція съ (1) и к скратимъ равни-тѣ части, ще получимъ:

$$\frac{AEFD}{AMND}=\frac{Ax}{AM}.$$

Нъ тъзи пропорція е невѣрна, защо-то

$$\frac{AEFD}{AMND}<1, \text{а} \frac{Ax}{AM}>1.$$

Отъ това слѣдува, чи равенство $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{Ax}$ или, в едно, неравенство $\frac{ABCD}{AEFD}<\frac{AB}{AE}$ докарва противор чіе; по тъзи причина то е невѣрно.

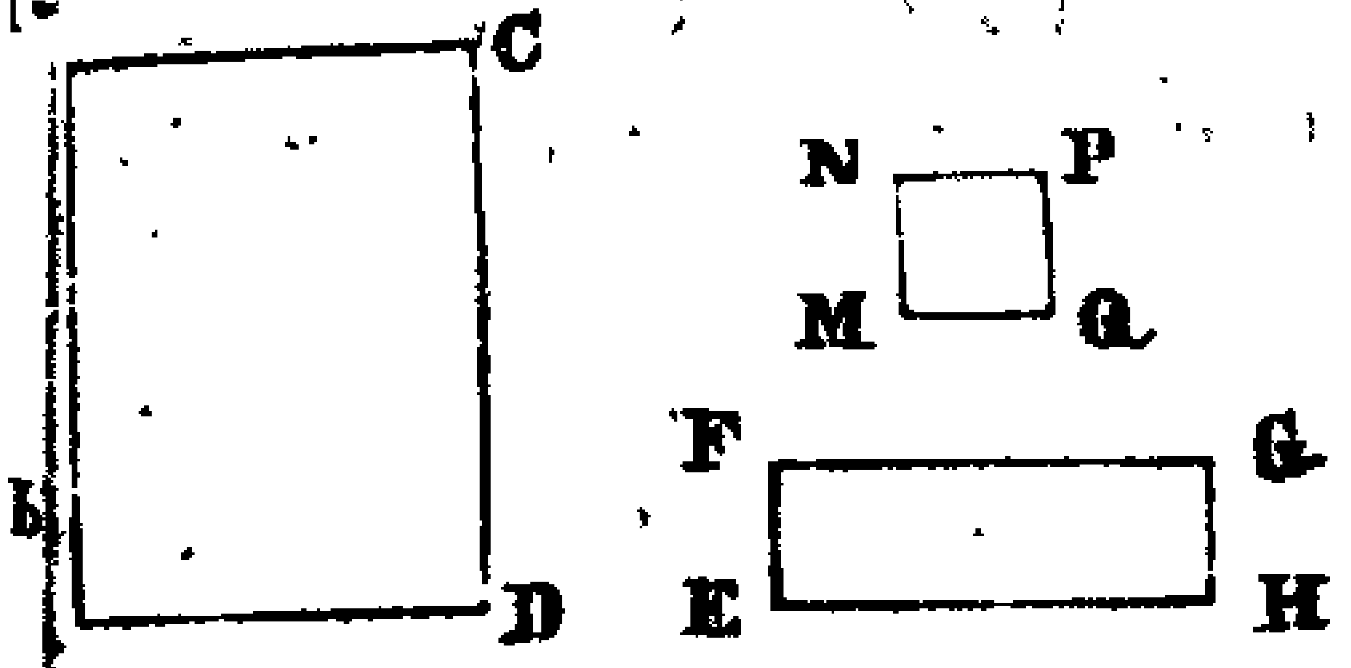
По сѫщія начинъ може да ся докаже, чи $\frac{ABC}{AEF}$ не може да бѫде и по голѣмо отъ $\frac{AB}{AE}$; затова тр ба вмѣсто AE да земемъ по малкѫ величинѫ и повторимъ сѫщи-тѣ разсѫжденія.

И тъй и при съизмѣримость-тѫ и при несъи мѣримость-тѫ на линіи-тѣ имами:

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}.$$

Тъй като сѣка отъ страни-тѣ на правоѫгълник може да ся счита за основѫ, а перпендикулярна-къмъ неѭ за височинѫ, то отъ доказанѫ-тѫ тео- мѫ слѣдува: *лица-та на правоѫгълници-тѣ, кои-то ать еднакви височини ся отнасять по между си основи-тѣ.*

§. 66. *Теорема. Лице-то на правоѫгълникъ-тъ е авно на произведеніе-то отъ основѫ-тѫ и височинѫ- ѫ му.*



Чьрт. 104.

Нека ABCD (чьрт. 104) е правоѫгълникъ, а MNPQ — квадратъ, на кой-то страна-та е равна на нѣкоѭ линейнѫ единицѫ; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{ABCD}{MNPQ}=AB\times AD.$$

Доказ. Земами новъ правоѫгълникъ EFGH, на ой-то основѫ-тѫ EH е равна на основѫ AD, а висо- ина-та EF е равна на височинѫ MN на квадратъ- ъ; тогава спорѣдъ §. 65, ще имами:

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{AB}{FF} \text{ и } \frac{EFGH}{MNPQ}=\frac{EH}{MQ},$$

Кѫто умножимъ тѣзи двѣ равенства (пьрвѫ-тѫ асть съ пьрвѫ-тѫ и вторѫ-тѫ съ вторѫ-тѫ) ще по- учимъ:

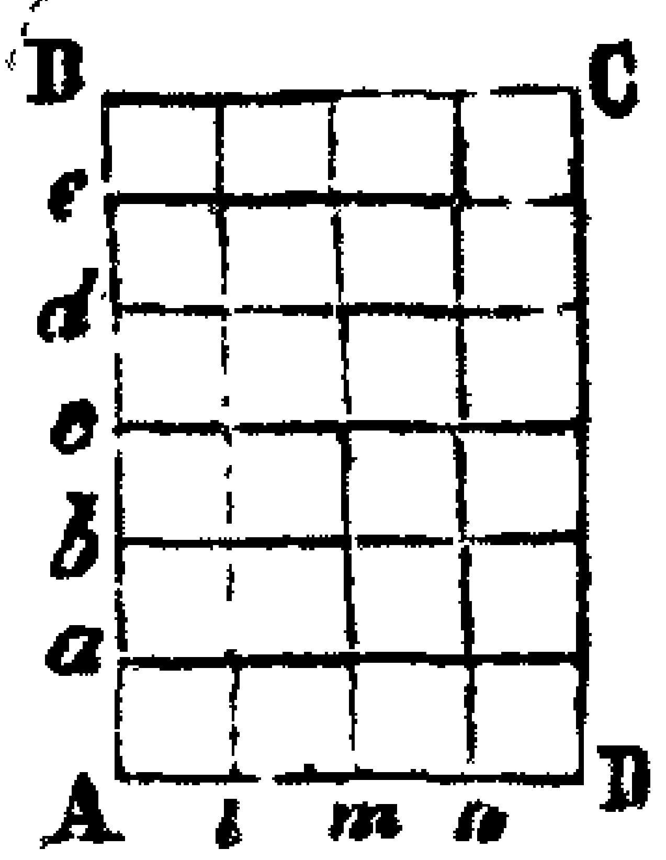
$$\frac{ABCD\times EFGH}{EFGH\times MNPQ}=\frac{AB\times EH}{EF\times MQ} \text{ или } \frac{ABCD}{MNPQ}=\frac{AB\times EH}{EF\times MQ}.$$

Нъ EH е равна на AD, EF=MN=1, сѫщо Q=1, слѣд. $\frac{ABCD}{MNPQ}=AB\times AD.$

Тъй кѫто при измѣрваніе-то на лица-та, лице- о на квадратъ-тъ ся пріема за единицѫ, то MNPQ=1 затова послѣдне-то равенство ще бѫде:

$$ABCD=AB\times AD.$$

Това значи, чи лице-то на правоѫгълникъ-т съдържа толкова квадратни единици, колко-то линей ни единици съдържа произвѣденіе-то отъ основѫ-т и височинѫ-тѫ.



Чърт. 105.

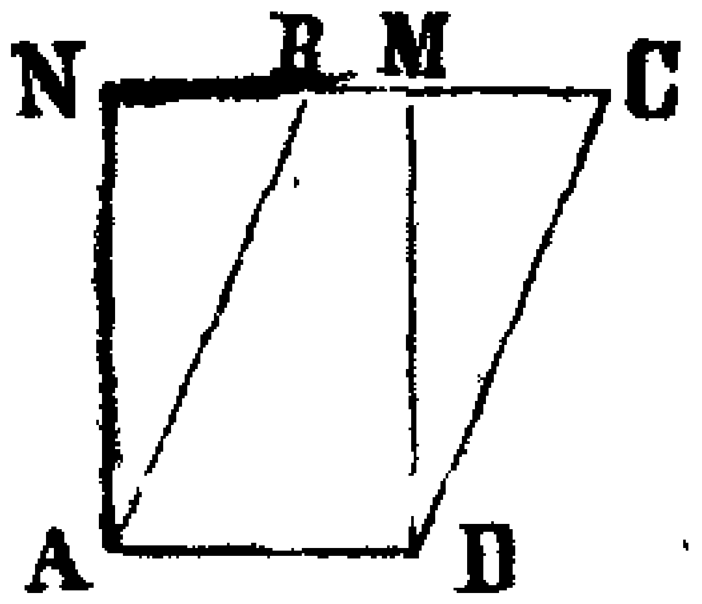
Нека на пр. височина-та н правоѫгълникъ ABCD (чърт. 10 съдържа 6 метра, кои-то сѫ изобразени съ части Aa, ab, bc, c de и eB, а основа-та му 4 метр изобразени съ части Al, lm, m и nD; тогава лице-то на правоѫгълникъ ABCD ще бѫде равн на 6×4=24 квадратни метр

Наистина, къто прекарами презъ a, b, c, d и линіи, успорѣдни на AD, а презъ l, m, n линіи, успо рѣдни на AB, ще раздѣлимъ правоѫгълникъ ABC на 24 равни квадрата, отъ кои-то сѣкіи е квадратен метръ.

Явно е, чи ако страна-та на нѣкой квадрат съдържа a метра, то къто считами еднѫ-тѫ стран за основѫ, а другѫ-тѫ за височинѫ, лице-то на квадратъ-тъ ще бѫде равно на $a \times a = a^2$ квадратни ме тра. И тъй втора-та стъпень отъ сѣко количеств представлява квадратъ; по тъзи причинѫ, тя ся на рича квадратъ отъ това количество.

Отъ казано-то слѣдува, чи ако отношеніе-то н двѣ линейни единици е m, то отношеніе-то на сѫщи тѣ квадратни единици ще бѫде m^2. Наистина, числ m показва колко пѫти по малка-та единица влиза в по галѣмѫ-тѫ, нъ ако построимъ квадратъ на п малкѫ-тѫ и на по галѣмѫ-тѫ единици, то първія щ влѣзе въ вторѫ m^2 пѫти; слѣд. m^2 е отношеніе-т между квадратни-тѣ единици. На пр. отношеніе-т на метръ-тъ и дециметръ-тъ е 10; слѣд. отношеніе то на квадратнія метръ къмъ квадратнія дециметръ е $10^2=100$.

§. 67. *Теорема. Лице-то на сѣкій параллелограммъ е равно на произвѣденіе-то отъ основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ.*



Чрът. 106.

Нека ABCD (чърт. 106) е параллелограммъ, на кой-то основа-та е AD, а височина-та MD, перпендикулярна къмъ неѭ; трѣба да докажемъ, чи

$$ABCD=AD\times MD.$$

Доказ. Ако отъ точкѫ A издигнемъ перпендикуляръ и продължимъ странѫ BC, до гдѣ-то тя ся пресѣче съ него въ нѣкоѭ точкѫ N, то ще получимъ правоѫгълникъ ANMD, кой-то има съ параллелограммъ-тъ общѫ основѫ AD и общѫ височинѫ MD. Спорѣдъ §. 66. $ANMD=AD\times MD$. Нъ триѫгълници ANB и DMC сѫ равни (§. 15), защо-то $AN=MD$ и $AB=DC$ (като срѣщуположни страни на параллелограмми-тѣ). Освѣнъ това $\angle NAB=\angle MDC$ (§. 36). И тъй

$$\triangle ANB=\triangle DMC, \text{ още } ABMD=ABMD.$$

Като съберемъ тѣзи равенства, ще получимъ:

$$\triangle ANB+ABMD=\triangle DMC+ABMD \text{ или}$$
$$ANMD=ABCD.$$

Нъ $ANMD=AD\times MD$; слѣд. и $ABCD=AD\times MD$.

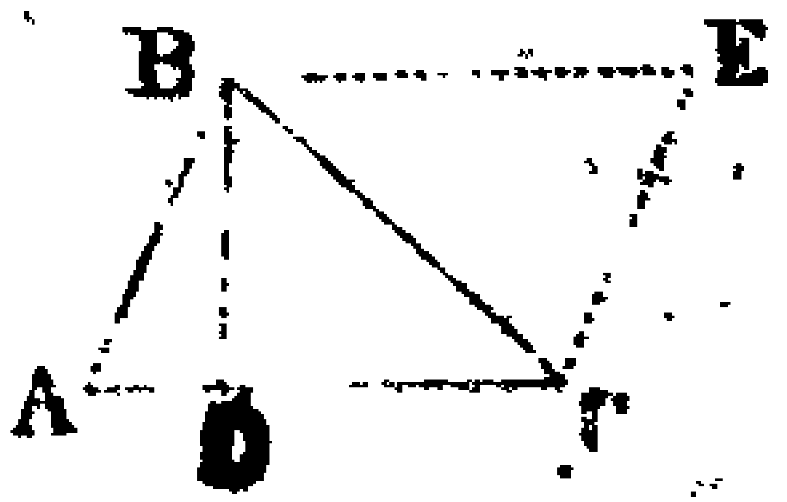
Отъ тъзи теоремѫ слѣдува:

1. Лица-та на два параллелограмма ся отнасятъ, като произвѣденія отъ основи-тѣ и височини-тѣ имъ.

2. Лица-та на два параллелограмма, кои-то иматъ еднакви основи, сѫ отнасятъ като височини-тѣ имъ и наопаки.

3. Два параллелограмма съ еднакви основи и височини сѫ равномѣрни.

§. 68. *Теорема. Лице-то на сѣкій триѫгълникъ е* *равно на половинѫ произвѣденіе отъ основѫ тѫ и височинѫ-тѫ му.*



Чьрт. 107.

Нека ABC (чьрт. 107) е какъвъ да е триѫгълникъ съ основѫ AC и височинѫ BD; трѣба да докажемъ, чи $ABC = \frac{AC \times BD}{2}$.

Доказ. Ако презъ C прекарами линіѭ, успорѣднѫ на AB и презъ B линіѭ успорѣднѫ на AC, то ще ся образува параллелограммъ ABEC, кой-то ще има сѫщѫ-тѫ основѫ AC и сѫщѫ-тѫ височинѫ BD. Лице-то на този параллелограммъ (спорѣдъ §. 67), ще бѫде

$$ABEC = AC \times BD.$$

Нъ триѫгълникъ ABC е половина отъ параллелограммъ ABEC (§. 41), слѣд. лице-то на този триѫгълникъ ще бѫде равно на половинѫ-тѫ отъ произвѣденіе-то $AC \times BD$, т. е. $ABC = \frac{AC \times BD}{2}$.

Омъ тъзи теоремѫ слѣдува:

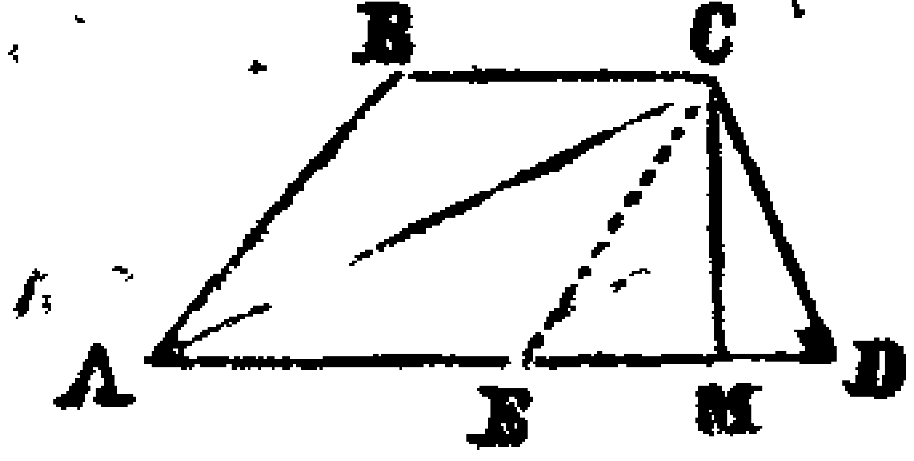
1. Лица-та на два триѫгълника ся отнасять както произвѣденія-та отъ основи-тѣ и височини-тѣ имъ;

2. Лица-та на два триѫгълника, кои-то иматъ еднакви основи, ся отнасять както височини-тѣ имъ и наопакъ;

3. Два триѫгълника, кои-то иматъ еднакви основи и височини, сѫ равномѣрни;

4. Лице-то на правоѫгълнія е равно на половинѫ произвѣденіе отъ катети-тѣ му.

§. 69. *Теорема. Лице-то на трапеціѭ-тѫ е равно на полусуммѫ-тѫ отъ успорѣдни-тѣ страни, умноженѫ съ височинѫ-тѫ.*



Чьрт. 108.

Нека ABCD (чьрт. 108) е трапеція и CM височина-та ѝ;

рѣба да докажемъ, чи $ABCD=\frac{AD+BC}{2}$. CM.

Доказ. Презъ точкѫ C прекарвами линіѭ CE, порѣдна на AB; тогава ще ся образува паралле- ограммъ ABCE, кой-то ще има сѫщѫ-тѫ височинѫ M; слѣд.

$$ABCE=AE\times CM.$$

Освѣнъ това лице-то на триѫгълникъ ECD ще де:

$$ECD=\frac{ED\times MC}{2}.$$

Къто съберемъ тѣзи двѣ равенства, ще полу- имъ:

$$ABCE+ECD=AE\times CM+\frac{ED\times CM}{2}.$$

Нъ първа-та часть на това равенство съставя рапеціѭ ABCD; слѣд.

$$BCD=AE\times CM+\frac{ED\times MC}{2}=\frac{2AE\times CM+ED\times CM}{2}.$$

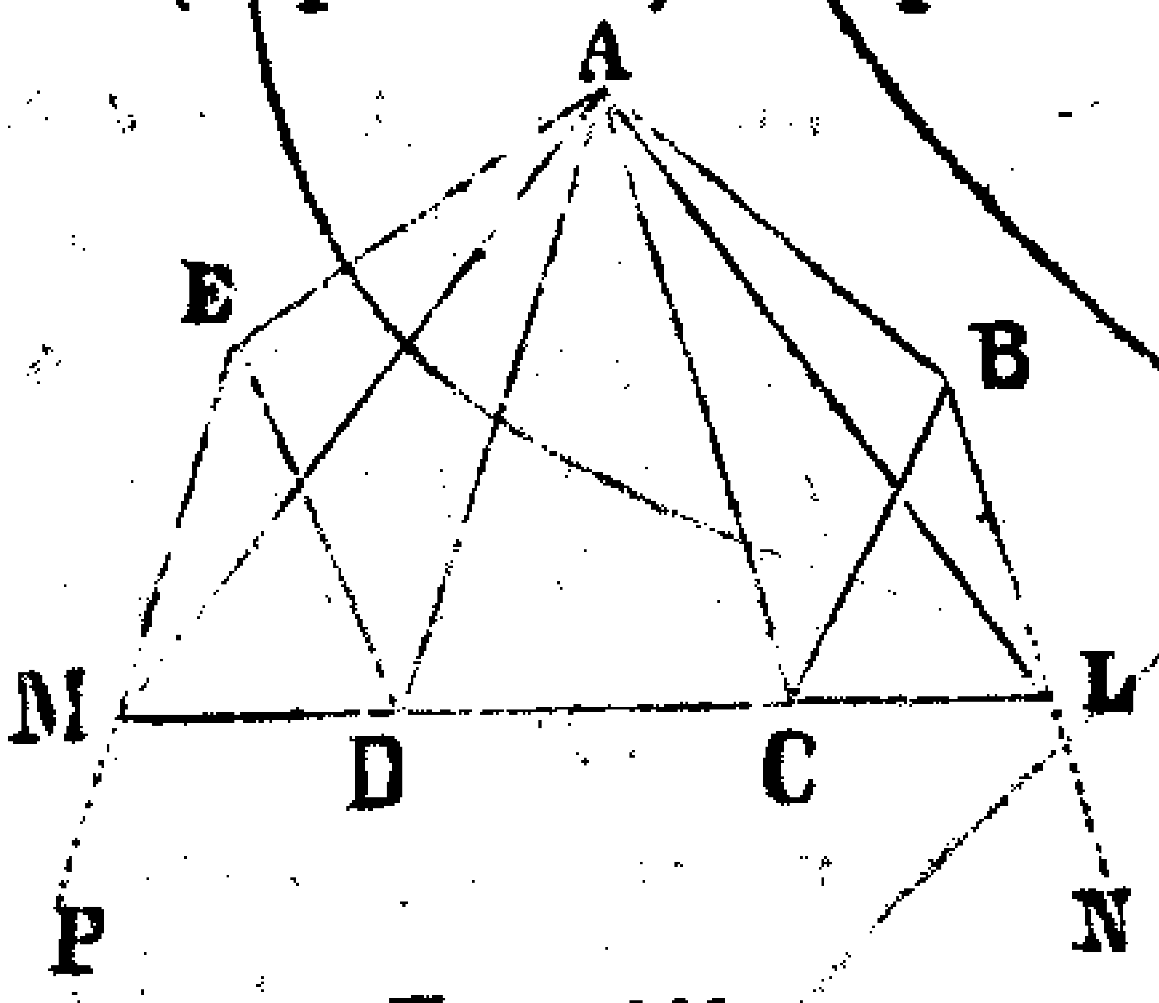
Въ вторѫ-тѫ часть земами CM за общъ мно- итель; тогава

$$ABCD=\frac{2AE+ED}{2}. CM=\frac{AE+AE+ED}{2}. CD.$$

Нъ AE+ED=AD и AE=BC, слѣд.

$$ABCD=\frac{BC+AD}{2}. CM.$$

§. 70. *Задача.* Да превърнемъ многоѫгълникъ BCD (чърт. 109) въ равномѣренъ триѫгълникъ.



Чърт. 109.

Рѣшеніе. Прекарвами діагональ AC и презъ точкѫ B линіѭ BN, успорѣдна на AC; продължавами странѫ DC, догдѣ ся пресѣче съ BN въ нѣкоѭ точкѫ L и съединявами A съ L. Триѫгълници

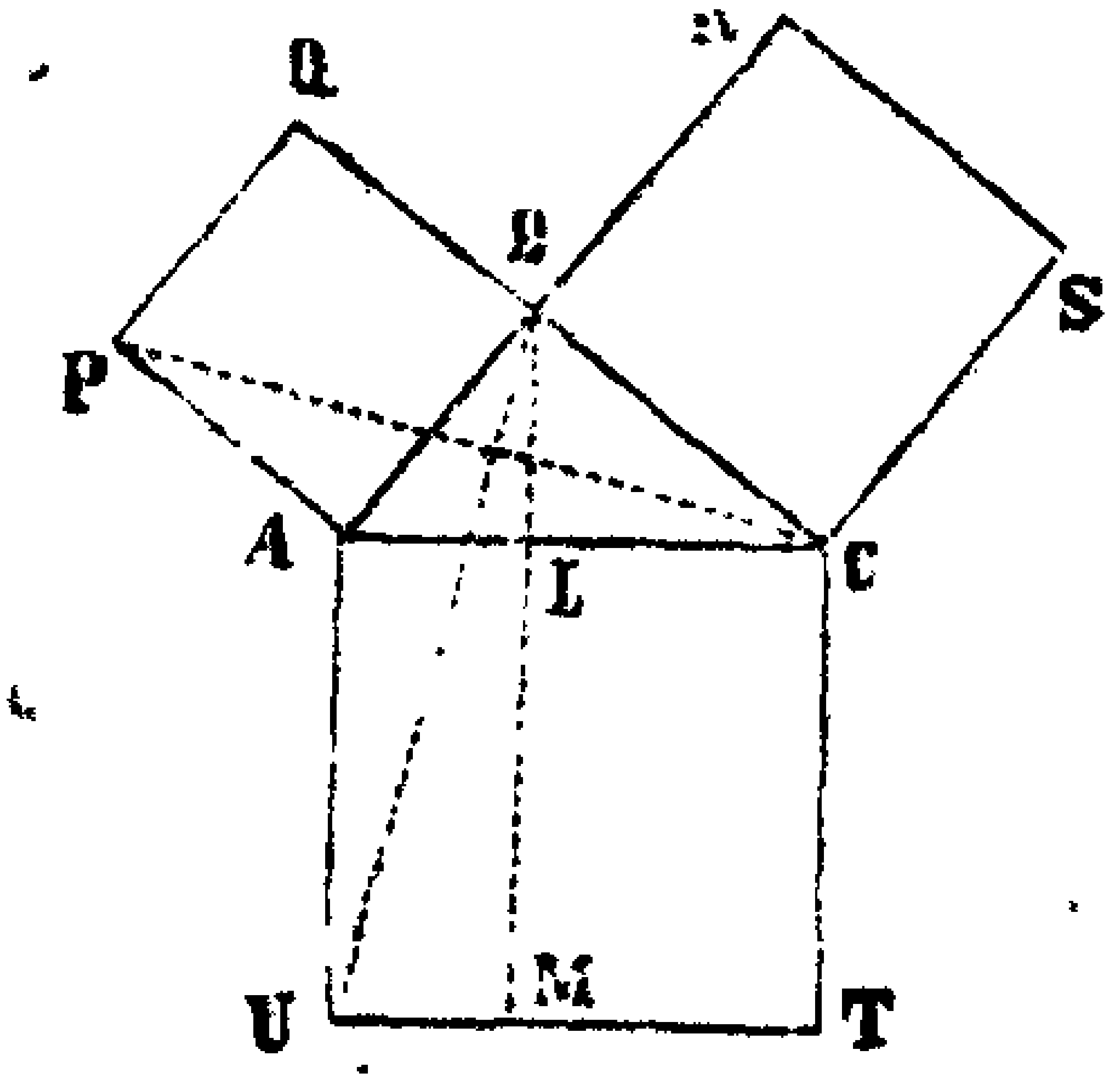
ABC и ALC иматъ общѫ основѫ AC, освѣнъ това ви
чини-тѣ имъ сѫ равни, защо-то върхове-тѣ имъ B
L ся намиратъ на линіѭ BN, успорѣдна съ AC
разстоянія-та между успорѣдни-тѣ линіи сѫ на вре
еднакви (§. 35). По тъзи причинѫ трижгълникъ A
е равномѣренъ съ △ALC (§. 68, слѣд. 3).

Ако отъ пятожгълникъ ABCDE извадимъ ли
ABC и вмѣсто него му прибавимъ равно лице A
то лице-то на пятожгълникъ-тъ нѣма да ся измѣн
нъ въ този случай той ще ся превърне въ четве
жгълникъ ALDE, кой-то е равномѣренъ съ него.
сѫщія начинъ и четвержгълникъ ALDE може да
превърне въ равномѣренъ нему трижгълникъ AL
Затова прекарвами діагоналъ AD и презъ E — ус
рѣднѫ нему линіѭ EP, продължавами DC до M
съединявами A съ M.

§. 71. За да изчислимъ лице-то на какъвъ да
многожгълникъ, превръщаме го по напредъ въ рав
мѣренъ трижгълникъ и исчисляваме лице-то на то
трижгълникъ. Нъ многожгълникъ-тъ може да ся р
дѣли и на трижгълници съ діагонали, прекарани пре
нѣкой неговъ връхъ, и да ся исчисли лице-то на
кій отъ тѣзи трижгълници отдѣлно.

§. 72. *Теоре*
Квадратъ-тъ, кой-т
построенъ на гипо
нузѫ-тѫ на пра
жгълнія трижгълник
равенъ на суммѫ
отъ квадрати-тѣ,
то сѫ построени
два-та му катет

Нека ABC (ч
110) е правожгъл



Чрт. 110.

трижгълникъ, а ACTU, BRSC и ADQB сж квадрати, построени на гипотенузж-тж и катети-тѣ; трѣба да докажемъ, чи $ACTU=BRSC+APQB$.

Доказ. Спущами отъ върхъ-тъ на правія жгълъ перпендикуляръ BM къмъ гипотенузж-тж и прекарвами линіи CP BU. Тъй като сѣкій отъ два-та жгъла PAC и UAB е съставенъ отъ правъ жгълъ, събранъ съ жгълъ BAC, то тѣзи жгъли сж равни по между си; освѣнъ това $PA=AB$ и $AC=AU$, като страни на квадрати-тѣ; слѣд. трижгълници ABU и PAC сж равни по между си (§. 15). Нъ трижгълникъ ABU и правожгълникъ ALMU иматъ общж основж AU и еднакви височини, защо-то линіи AU и BM сж успорѣдни, а разстоянія-та между успорѣдни-тѣ сж на вредъ еднакви (§. 35). Затова трижгълникъ ABU е половина отъ правожгълникъ ALMU. По сжщія начинъ може да ся докаже, чи трижгълникъ PAC е половинж отъ квадратъ APQB. Тъй като ся доказа, чи половини тѣ на правожгълникъ ALMU и на квадратъ APQB ся равномѣрни, то отъ това слѣдува, чи цѣлія правожгълникъ ALMU е ровномѣренъ съ цѣлія квадратъ APQB.

По сжщія начинъ ся доказва, чи квадратъ BRSC и правожгълникъ LCTM сж равно голѣми. И тъй

$$ALMU=APQB \text{ и } LCTM=BRSC.$$

Като съберемъ тѣзи двѣ равенства, ще получимъ:

$$ALMU+LCTM=APQB=BRSC$$

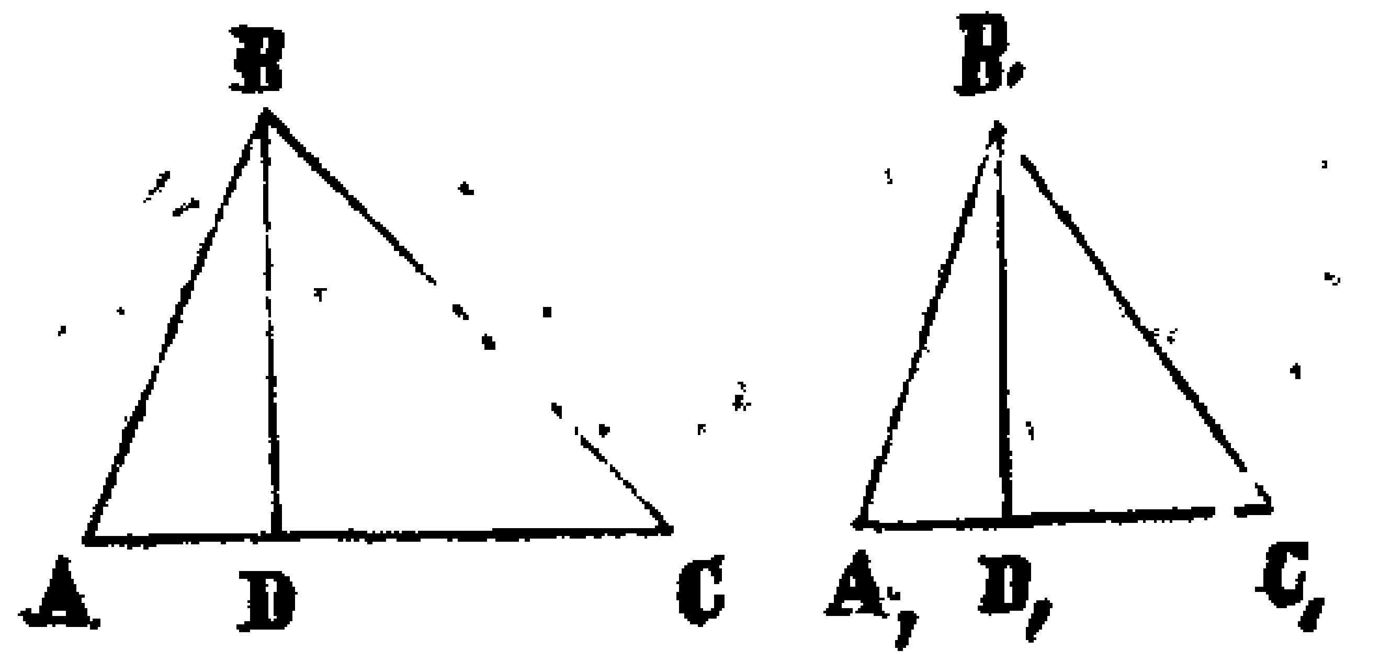
$$\text{или } ACTU=APQB+BRSC.$$

Нека гипотенуза AC съдържа b метра, катетъ AB—c метра и катетъ BC—a метра; тогава спорѣдъ доказанж-тж теоремж ще имами:

$$b^2=a^2+c^2.$$

Забелѣжка. Доказана-та теорема ся нарича *Питагорова.*

§. 73. *Теорема. Лица-та на два подобни трижгълника ся отнасять, като квадрати отъ сходни страни.*



Чърт. 111.

Нека ABC и A,B,C, (чърт. 111) сж два подобни трижгълника; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{ABC}{A,B,C,}=\frac{AB^2}{A,B,^2}.$$

Доказ. Къто прекарами височини BD и B,D, ще имами:

$$\frac{ABC}{A,B,C,}=\frac{AD\text{x}BD}{A,C,\text{x}B,D,}\quad(1)$$

(§. 68 слѣд. 1). Нъ правожгълни-тѣ трижгълници ABD и A,B,D, сж подобни, защо-то

$\angle A,=\angle A$ и $ADB=\angle A,D,B,$ (къто прави), слѣд.

$$\frac{AB}{A,B,}=\frac{BD}{B,D,}\ \text{сжщо}\ \frac{AB}{A,B,}=\frac{AC}{A,C,}.$$

Къто умножимъ тѣзи двѣ равенства помежду имъ, намирами:

$$\frac{AB^2}{A,B,^2}=\frac{AC.BD}{A,C,.B,D,}.$$

Къто сравнимъ това равенство съ равенство (1) ще имами:

$$\frac{ABC}{A,B,C,}=\frac{AB^2}{A,B^2}.$$

ЗАДАЧИ.

32. Да опредѣлимъ лице-то на параллелограммъ-тъ, ако основа-та му е 5,75 метра, а височина-та 3,24 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на параллелограммъ-тъ е равно на 18,63 квадратни метра.

33. Да опредѣлимъ лице-то на правоѫгълникъ-тъ, ако основа-та му е 7,5 метра, а височина-та 2,12 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на правоѫглникъ-тъ е 15,9 квадр. метра.

34. Да опредѣлимъ лице-то на триѫгълникъ-тъ, ако основа-та му е 6,25 метра, а височина-та 5,04 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на триѫглникъ-тъ е 15,75 квадрат. метра.

35. Да опредѣлимъ лице-то на правоѫгълнія триѫгълникъ, ако единъ-тъ му катетъ е 12,5 метра, а другія 8,4 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на правоѫгълнія триѫгълникъ е 52,5 квадр. метра.

36. Да опредѣлимъ лице-то на трапеціѭ-тѫ, ако една отъ успорѣдни-тѣ ѝ страни е 9,5 метра, другата 11,5 метра, а височина-та ѝ е 8.45 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на трапеціѭ-тѫ е 88,725 квадр. метра.

37. Да опредѣлимъ лице-то на трапеціѭ-тѫ, ако сумма-та отъ успорѣдни-тѣ ѝ страни е 26,48 метра, а височина-та ѝ е 15,5 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на трапеціѭ-тѫ е 205,22 квадрат. метра.

38. Колко плочи ще идатъ за покриваніе-то на дворъ-тъ, кой-то има формѫ на правоѫгълникъ, съ дължинѫ 15 метра и височинѫ 12,2 метра, ако голѣмина-та на сѣкѫ плочѫ е $1/4$ отъ квадратнія метръ.

Рѣшеніе. Лице-то на дворъ-тъ е 183 кв. метра; а тъй къто въ сѣкій квадратенъ метръ ще влѣзѫтъ 4 плочи, то за цѣлія уворъ ще идѫтъ 732 плочи.

39. Двѣ-тѣ срѣщуположни стѣни на стаѭ тѫ сѫ два равни правоѫгълника съ основѫ 4,5 метра и височинѫ 3,4 метра; други-тѣ двѣ срѣщуположни стѣни сѫ два равни квадрата съ основѫ 3,4 метра, а сѣкій отъ два-та прозорца заема по 1,36 квадр. метра; колко ще струва измазваніе-то на тъзи стаѭ съ маслянѫ боѭ, ако сѣкій квадратенъ метръ е спазаренъ по 8,5 гроша.

Рѣшеніе. Лице-то на правоѫгълници-тѣ ще бѫде 30,6 квадр. метра, а лице-то на квадрати-тѣ 23,12 метра; тъй щото всичко-то лице ще бѫде 53,72 квадр. метра, а безъ прозорци-тѣ — 51 квадр. метръ. Измазваніе-то на сѣкій квадр. метръ струва 8,5 гроша; слѣд. измазваніе-то на 51 квадр. метръ ще стори 433 грош. и 20 пари.

40. Стрѣха-та на домъ-тъ състои отъ двѣ равни трапеціи и отъ два равни триѫгълника. По голѣма-та отъ успорѣдни-тѣ страни на трапеціѫ-тѫ е 15 метра, по малко-та — 9 метра, а височина-та на трапеціѭ-тѫ е 5 метра. Основа-та на единъ отъ триѫгълници-тѣ е 4 метра, а височина-та му — 5 метра. Да исчислимъ, колко ще струва покриваніе-то на домъ-тъ, ако сѣкій квадратенъ метръ е спазаренъ по 3 гроша.

Рѣшеніе. Лице-то на трапеціѫ-тѫ е 120 квадр. метра, а лице-то на триѫгълници-тѣ — 20 квадр. метра; тъй щото всичко-то лице на стрѣхѫ-тѫ ще бѫде 140 квадр. метра. Покриваніе-то на сѣкій квадр. метръ струва 3 гроша; слѣд. покриваніе-то на цѣлѫ-тѫ стрѣхѫ ще струвѫ 420 гроша.

41. Да построимъ квадратъ, лице то на кой-то да бѫде два пѫти по голѣмо отъ лице-то на даденія квадратъ.

Рѣшеніе. Діагоналъ-тъ на даденія квадратъ ще бѫде страна на този, кой-то търсимъ. Наистина, ако значимъ а странж-тж на даденія квадратъ съ а, а дігоналъ-тѣ му съ х, то отъ правожгълнія трижгълникъ, порѣдъ Питагоровж-тж теореомж, ще имами:

$$x^2 = a^2 + a^2, \text{ т. е. } x^2 = 2a^2$$

42. Лице-то на трижгълникъ-тъ е 27 квадр. метра, а височина-та му 12 метра. Да опрѣдѣлимъ основу-тж му.

Рѣшеніе. Тъй като число 27 е произлѣзло отъ умноженіе на основж-тж съ половинж-тж отъ височинж-тж, то основж-тж на трижгълникъ-тъ ще ся намѣри, като раздѣлимъ 27 съ половинж-тж отъ височинж-тж, т. е. съ 6. Тогава ще получимъ $\frac{27}{6} = 4{,}5$; и тъй основа-та на трижгълникъ-тъ е 4, 5 метръ.

43. Да построимъ квадратъ равномѣренъ на сумму-тж отъ два квадрата, на кои-то страни-тѣ сж а и b.

Рѣшеніе. Земами правж линіж и отъ нѣкож нѣйнж точкж издигами перпендикуляръ; отмѣрвами на правж-тж (отъ основж-тж на перпендикуляръ-тъ) величинж а, а на перпендикуляръ-тъ — величинж b; съединявами крайни-тѣ точки съ правж линіж; тъзи линія ще бжде страна-та на квадратъ-тъ, кой-то е сумма отъ два-та дадени квадрата. Това слѣдува отъ Питагоровж-тж теоремж.

44. Да настроимъ квадратъ, равномѣренъ на суммж-тж отъ нѣколко квадрата, на кои-то страни-тѣ сж равни на а, b, c, d, и пр.

Рѣшеніе. Земами два-та прави квадрата и ги събирами по способъ-тъ, изложенъ въ задача 43. Послѣ къмъ суммж-тж имъ по сжщія начинъ прибавяме третія квадратъ c и пр.

45. Да раздѣлимъ трижглъникъ-тъ на m равни части съ линіи, прекарани презъ врьхъ-тъ му.

Рѣшеніе. Раздѣлявами основж-тж на трижгъникъ-

тъ на m равни части и точки-тѣ на дѣленіе-то съ
динявами съ върхъ-тъ. Тогава трижгълникъ-тъ ще
раздѣли на m равномѣрни трижгълника, защо-то вси
ки-тѣ тѣзи трижгълници иматъ равни основи и в
сочини.

46. Една-та страна на параллелограммъ-тъ
8,5 метра, а друга-та 6 метра. Да опрѣдѣлимъ лице-
му, като знаемъ, чи дължина-та на тъзи часть о
по голѣмж-тж странж, коя-то е между върхъ-тъ на
стрія жгълъ и основж-тж на перпендикуляръ-тъ сп
стнатъ отъ тжпія жгълъ къмъ по голѣмж-тж стран
е 3 метра.

Рѣшеніе. Височина-та на параллелограмма ще
опредѣли отъ правожгълніж трижгълникъ, кой-то щ
ся получи, кога отъ върхъ-тъ на тжпія жгълъ сп
стимъ перпендикуляръ къмъ голѣмж-тж странж. А
означимъ тъзи височина съ h, то, спорѣдъ Питагоров
тж теоремж ще имами: $6^2 = h^2 + 3^2$ или $h^2 = 6^2 - 3^2 = 2$
слѣд. $h = \sqrt{27} = 5{,}196$. Сега остава да умножимъ осн
вж-тж 8, 5 метра; производеніе-то 44,166 квадр. метр
ще бжде на параллелограмъ-тъ.

47. На линіж a да поставимъ правожгълник
равномѣренъ на даденія правожгълникъ, на кой-
основа-та е b, а височина-та h.

Рѣшеніе. Ако означимъ неизвѣстнж-тж височин
на правожгълникъ-тъ съ x, то, спорѣдъ условіе-то н
задачж-тж, ще имами $ax = bh$ или $\frac{x}{h} = \frac{b}{a}$. Отъ то
слѣдува, чи неизвѣстна-та величина е четвърта пр
порціонална съ линіи-тѣ a, b и h. Земами какъв
да е жгълъ и на еднж отъ страни-тѣ му отмѣрва
основж a, а слѣдъ неж и основж b; послѣ на друг
тж странж на жгълъ-тъ отмѣрвами височинж h
крайнж-тж ѝ точкж съединявами съ крайниж-тж точ

кж на отмѣренж-тж основж a, а презъ крайнж-тж точкж на отмѣренж-тж основж b прекарвами успорѣднж линіж; тъзи послѣдня-та ще отсѣче отъ другж-тж странж на жгълъ-тъ часть, коя-то ще бжде четвьрта пропорціоналнж къмъ дадени-тѣ величини a, b, и h; слѣд. получена-та четвьрта линія може да служи за височинж на правожгълникъ-тъ, кой-то ще бжде равномѣренъ на даденія.

V-ий класс

I-ий срокъ

Свършекъ! на II-ий

ГЛАВА VIII.

Край на геометрия

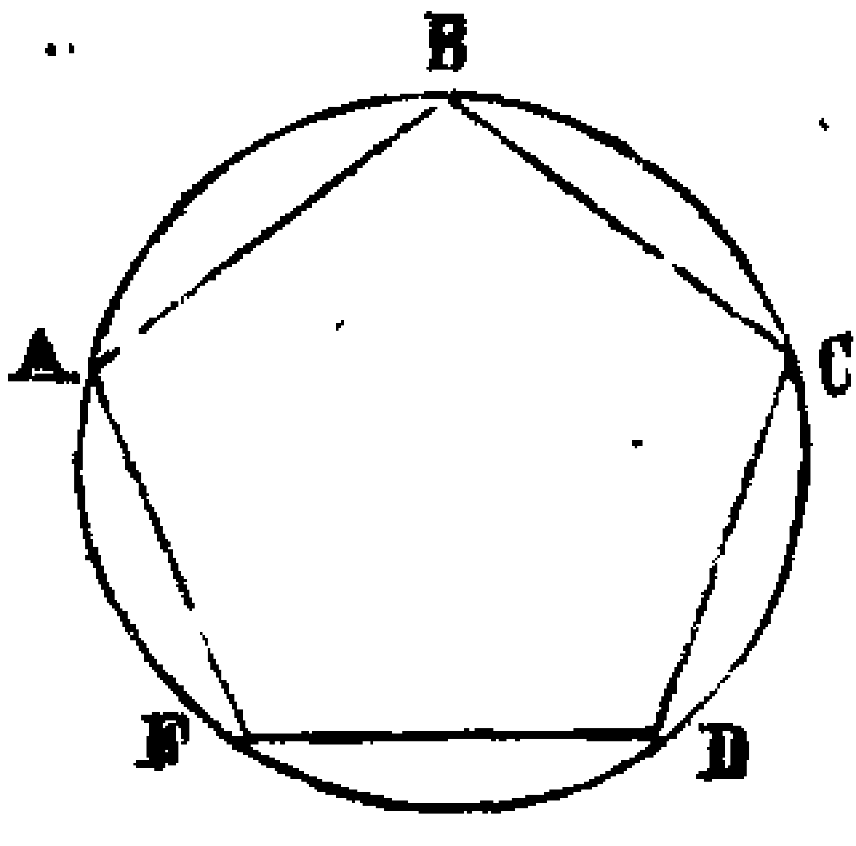
ОПРЕДѢЛЕНІЕ НА ОКРЖЖНОСТЬ-ТЖ И ЛИЦЕ-ТО НА КРЖГЪ-ТЪ.

[illegible]

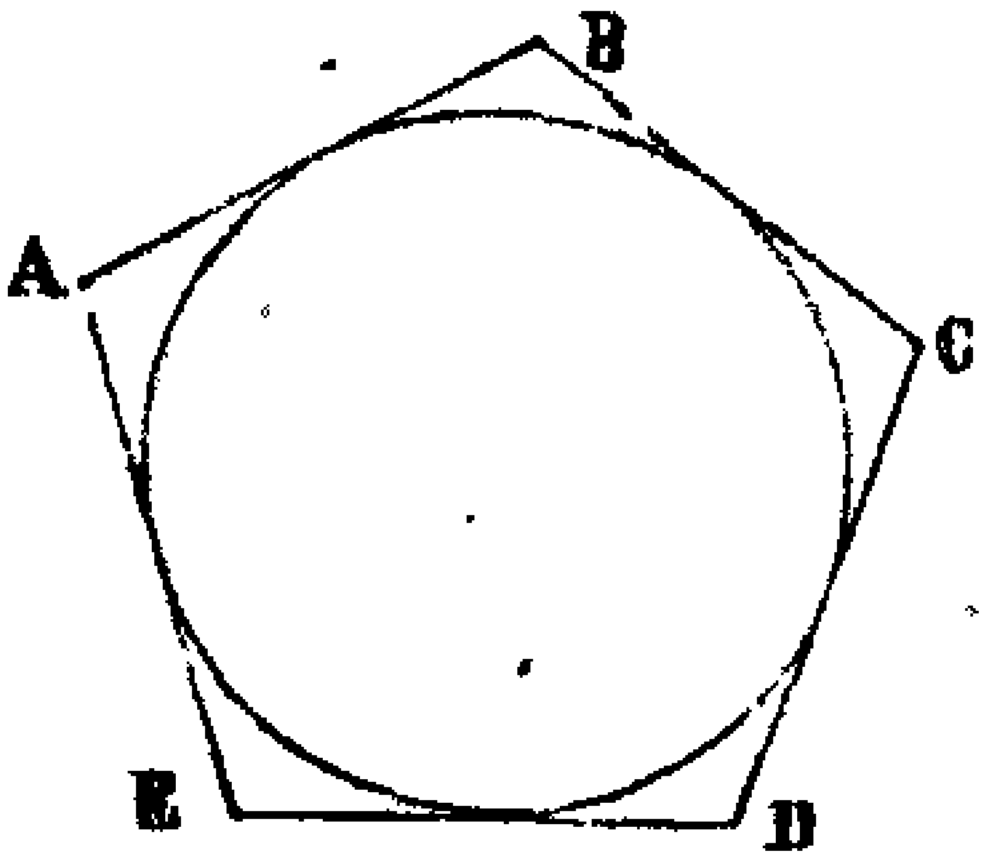
[illegible]

x

§. 74. Многожгълникъ-тъ ся нарича *вписанъ въ кржгъ*, ако всички-тѣ му жгъли сж вписани; напр. многожгълникъ ABCDE (чьрт. 112); многожгълникъ-тъ ся нарича *описанъ около кржгъ*, ако всички-тѣ му жгъли сж описани, напр. многожгълникъ ABCDE (чьрт. 113). Кржгъ-тъ, въ кой-то е вписанъ многожгълникъ, ся нарича *описанъ кржгъ*; а кржгъ-тъ, около кой-то е описанъ многожгълникъ, ся нарича *вписанъ*.



Чьрт. 112.



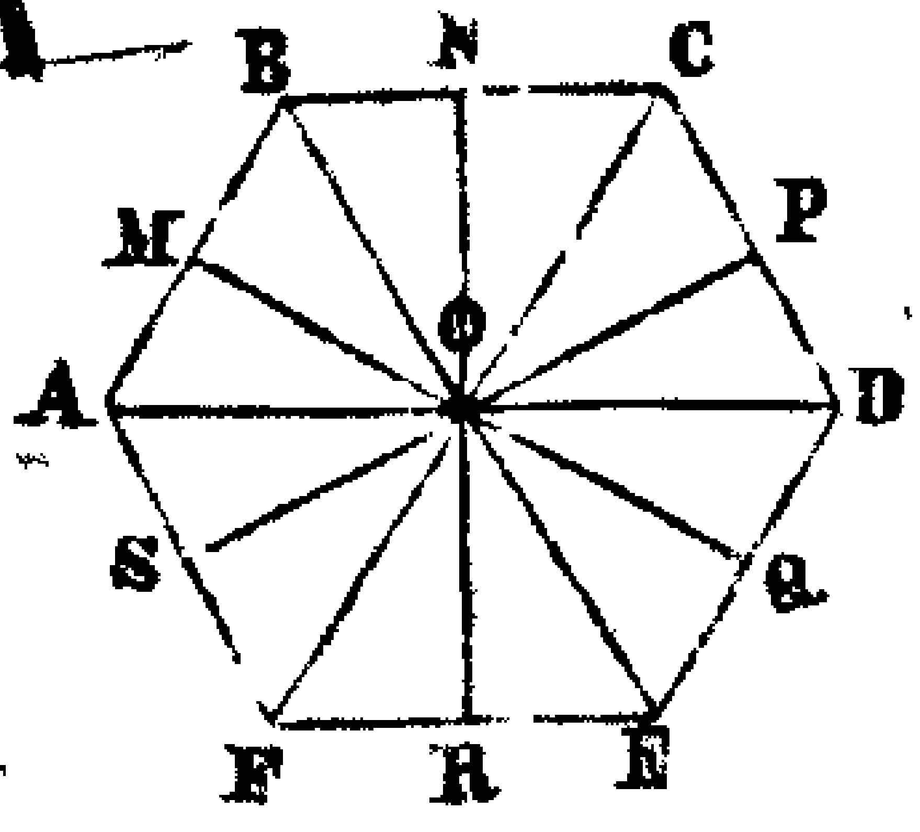
Чьрт. 113.

Явно е, чи всички-тѣ страни на описанія многожгълникъ сж касателни къмъ окржжность-тж.

§. 75. Многоѫгълникъ-тъ ся нарича *правиленъ*, ако всички-тѣ му страни и ѫгъли сѫ равни по между си; тъй на пр. квадратъ-тъ е правиленъ многоѫгълникъ. Отъ това опредѣленіе слѣдува:

1. Правилни-тѣ едноименни (кои-то иматъ еднакво число страни) многоѫгълници, сѣкога иматъ равни ѫгъли. Наистина, ако многоѫгълникъ-тъ има n страни, то сумма-та на вѫтрѣшни-тѣ му ѫгъли е равна на 2d (n—2) (§. 38); а тъй, като въ този случай тѣ всички-тѣ сѫ равни по между си, то сѣкій отъ тѣхъ ще бѫде равенъ на $\frac{2d\ (n-2)}{n}$. Явно е, чи, като земемъ другъ правиленъ многоѫгълникъ съ сѫщо-то число страни, то сѣки отъ вѫтрѣшни-тѣ му ѫгъли ще бѫде сѫщо равенъ на $\frac{2d\ (n-2)}{n}$.

2. Правилни-тѣ едноименни многоѫгълници сѫ подобни. Наистина, ѫгъли-тѣ имъ сѫ равни; също и страни-тѣ имъ сѫ пропорціонални: защо-то ако първа-та страна на правилнія многоѫгълникъ е на пр. 2 пѫти по малка отъ първѫ-тѫ странѫ на едноименнія, то и втора-та ще бѫде два пѫти по малка отъ вторѫ-тѫ и пр. Отъ подобія-та на правилни-тѣ едноименни многоѫгълници слѣдува, чи периметри-тѣ имъ сѫ отнасять по между си, като страни-тѣ имъ (§. 53).



Чърт. 114.

§. 76. *Теорема. Около сѣкій правиленъ многоѫгълникъ може да ся опише крѫгъ.*

Доказ. Нека ABCDEF (чърт. 114) е правиленъ многоѫгълникъ, т. е. въ него AB=BC=CD.... и ∠A=∠B=∠C.... Презполовявами ∠A и ∠B съ линіи AO и BO, кои-то ся срѣщатъ въ точкѫ

О и съединявами О съ всички-тѣ върхове на многоѫгълникъ-тъ. Тъй, като $\angle A$ и $\angle B$ сѫ презполовени, то $\angle BAO = \angle ABO$; слѣд. $\triangle ABO$ е равнобедренъ, т. е. $AO = BO$. Послѣ, триѫгълници ABO и BOC сѫ равни (§. 15), защо-то $\angle ABO = \angle OBC$, страна AB е равна на BC и страна BO е обща; отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува $AO = OC$. Въ сѫщо-то време $\angle BCO = \angle BAO$; нъ $\angle BAO$ е половина отъ $\angle A$, слѣд. и $\angle BCO$ ще бѫде половина отъ $\angle A$, или все едно отъ равнія му C, т. е. $\angle BCO = \angle OCD$. Лесно е сега да ся докаже, чи $\triangle ACO = \triangle OCD$; наистина, $\angle BCO = \angle OCD$, $BC = CD$ и OC обща. Отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува $BO = OD$. По сѫщія начинъ ся доказва равенство-то и на други-тѣ триѫгълници; слѣд.

$$AO = OB = OC = OD = OE = OF.$$

И тъй точка О е на еднакво разстояніе отъ всички-тѣ върхове на многоѫгълникъ-тъ; слѣд. ако отъ О, съ радіусъ равенъ на AO, опишемъ крѫгъ, той ще премине презъ всички-тѣ върхове на многоѫгълникъ-тъ, и затова ще бѫде крѫгъ описанъ около многоѫгълникъ-тъ.

Точка О, центръ на описанія крѫгъ, ся нарича сѫщо *центръ на многоѫгълникъ-тъ*.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи ѫгли-тѣ AOB, BOC и пр. сѫ равни и сѣкій отъ тѣхъ е равенъ на четери прави дѣлени съ число-то на страни-тѣ въ многоѫгълникъ-тъ.

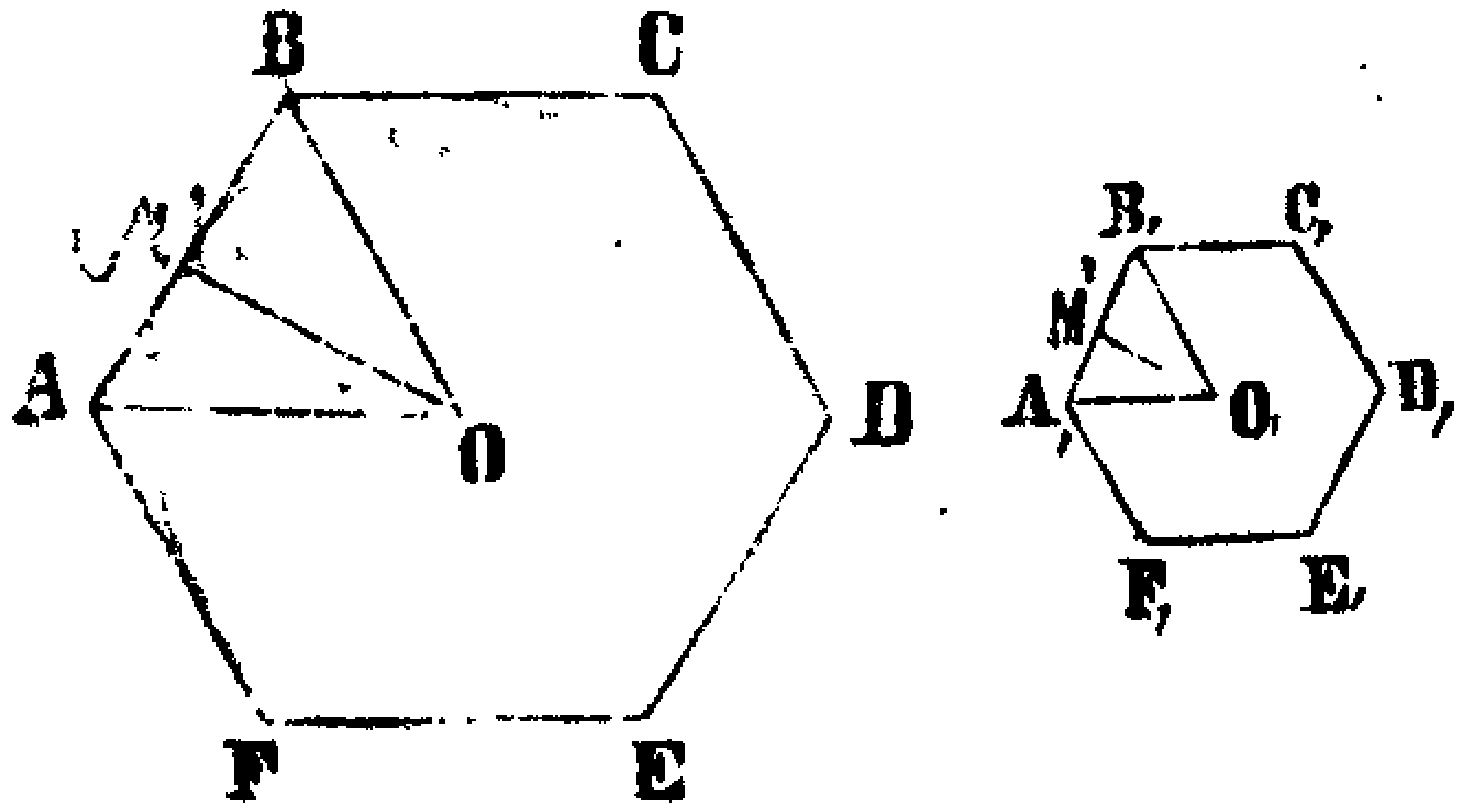
Ако отъ центръ-тъ на многоѫгълникъ-тъ спустимъ перпендикуляри OM, ON, OP, OQ . . . връхъ страни-тѣ му, то всички-тѣ тѣзи перпендикуляри ще бѫдѫтъ равни по между си. Наистина, правоѫгълни-тѣ триѫгълници OMB и ONB сѫ равни, защо-то иматъ общѫ гипотенузѫ OB и $\angle MBO = \angle NBO$ (§. 24); отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува $OM = ON$; по сѫщія начинъ ся доказва, чи $ON = OP = OQ$ и пр.

Отъ казано-то слѣдува, чи ако съ радіусъ OM опишемъ крѫгъ, то този крѫгъ ще мине презъ всички-тѣ точки N, P, Q и пр и ще ся касае къмъ всички-тѣ страни на многоѫгълникъ-тъ. Това показва, чи въ сѣкій правилэнъ многоѫгълникъ може да ся впише крѫгъ.

Радіусъ OM на вписанія крѫгъ ся нарича *апотемѫ*. Отъ равенство-то на правоѫгълни-тѣ триѫгълници AMO и BMO (тѣ сѫ равни, защо-то $AO = BO$ и $\angle MAO = \angle MBO$ §. 24) слѣдува, чи апотема-та презполовява странѫ-тѫ на правилнія многоѫгълникъ.

§. 77. *Теорема*. *Периметри-тѣ на правилни-тѣ едноименни многоѫгълници ся отнасять, като радіуси-тѣ на вписани-тѣ въ тѣхъ или описани-тѣ около тѣхъ крѫгове.*

Доказ. Нека бѫдѫть ABCDEF и A, B, C, D, E, F, (чьрт. 115) два едноименни правилни многоѫгълника,



Чьрт. 115.

а O и O, центрове-тѣ имъ. Съединявами O съ A и B и спущами перпендикуляръ OM врьхъ AB; сѫщо правимъ и въ многоѫгълникъ A, B, C, D, E, F,. Триѫгълници AOB и A,B,O, сѫ подобни, защо-то $\angle BAO = \angle B,A,O,$ и $\angle ABO = \angle A,B,O,$, като половини отъ равни-тѣ ѫгъли A и A,, B и B, (§. 75, слѣд. 1).

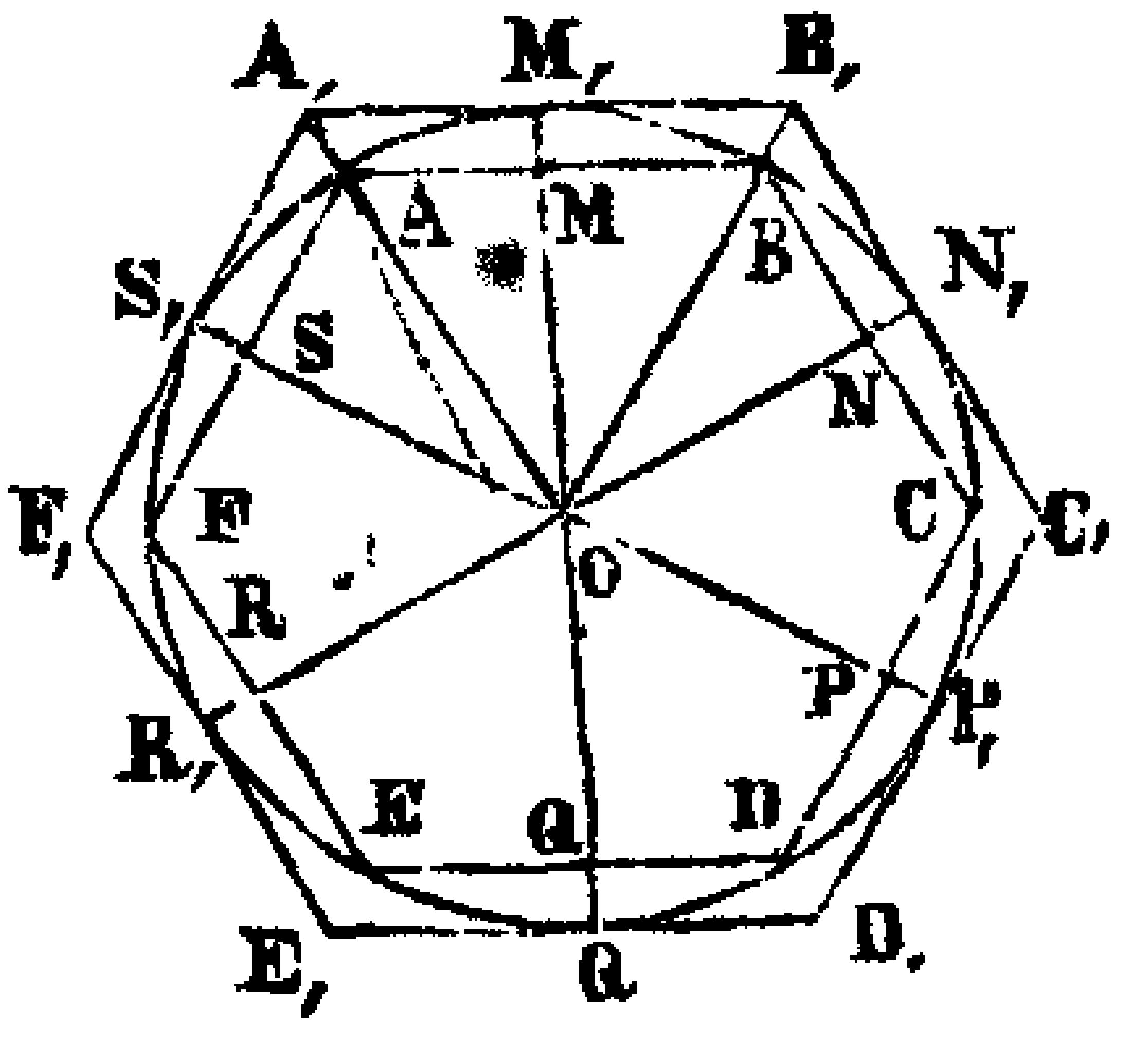
Сжщо и правожгълни-тѣ трижгълници АМО и А,М,О, сж подобни. Отъ подобіе-то на трижгълници-тѣ слѣдува (§. 49) $\frac{AB}{A,B,}=\frac{AO}{A,O,}=\frac{MO}{M,O,}$.

Нъ тъй, като периметри-тѣ на правилни-тѣ многожгълници ся отнасять като страни-тѣ имъ (§. 75, слѣд. 2) то:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EF}{A,B,+B,C,+C,D,+D,E,+E,F,}=\frac{AB}{A,B,}=\frac{AO}{A,O,}=\frac{MO}{M,O,}.$$

§. 78. *Задача. По даденж-тж странж на правилнія вписанъ многожгълникъ да опредѣлимъ странж-тж на едноименнія описанъ.*

Рѣшеніе. Нека ABCDEF (чьрт. 116) е правиленъ вписанъ многожгълникъ. Отъ центръ О прекарвами къмъ страни-тѣ му перпендикулярни радіуси ОМ, ON, OP, OQ, и проч. и къмъ краища-та имъ M,N,P, . . . касателни A,B,, B,C,, C,D, и пр. Тогава ще ся състави описанъ многожгълникъ A,B,C,D,E,F, кой-то ще бжде правиленъ. За да докажемъ това, трѣба да завѣлежимъ, чи четверожгълници OM,B,N,, ON,C,P, и пр. сж равни. Наистина ∠M,ON, и ∠N,OP, сж равни, защо-то джги-тѣ имъ M,BN, и N,CP,, като съставени отъ равни половини M,B, N,B и пр. сж равни (§. 60); слѣд. ако наложимъ тѣзи четверожгълници единъ на другій, то OM, ще иде по OP, линія B,N, ще иде N,C, и линія M,B, — по P,C,, тъй що-то точка B, ще падне на C,. Отъ равенство-то на четверожгълници-тѣ слѣдува ∠B,=∠C,; по този сжщія начинъ ще докажемъ, чи ∠B, е равенъ и на



Чрт. 116.

други-тѣ жгъли D,E, и пр. Освѣнъ това, тъй като N,B, е равна на N,C, то перпендикулярни-тѣ радіуси OM,, ON, и пр. презполовявать страни-тѣ на описанія многожгълникъ; слѣд. ако половина M,B, е равна на половинж P,C,, то и цѣла-та страна A,B, е равна на C,D,, тъй сжщо, ако половина M,B, е равна на половина O,D, то и цѣла-та страна A,B, е равна на D,E, и пр. И тъй многожгълникъ A,B,C,D,E,F, е правиленъ; въ сжщо-то време той е едноименен съ вписанія ABCDEF.

За да опредѣлимъ странж-тж на многожгълникъ A,B,C,D,E,F, трѣба да забелѣжимъ, чи, ако съединимъ центръ O съ върхове-тѣ му, то линіи-тѣ OB,, OA,, и проч. ще минать и презъ върхове-тѣ на вписанія многожгълникъ. Наистина, трижгълници OM,B, и ON,B, сж равни, защо-то OM,=ON,, M,B,=N,B, и OB, е обща (§. 18); отъ равенство-то на тѣзи трижгълници слѣдува, чи OB, презполовява ∠M,ON,; сжщо и трижгълници OMB и ONB сж равни, защо-то OM=ON (като апотеми), MB=NB (като половини отъ равни-тѣ хорди) и OB е обща: отъ това слѣдува, чи линія OB презполовява сжщія жгълъ M,ON,; и тъй линіи OB, и OB трѣба до ся сливать или съ други думи, върхъ B ся намира на линіж OB,; сжщо и върхъ A ся намира на OA, и пр.

Трижгълници OAM и OA,M, сж подобни, защо-то AB и A,B, сж успорѣдни (§. 29).

Отъ подобіе-то на тѣзи трижгълници слѣдува (§. 49):

$$\frac{A,M,}{AM}=\frac{O,M,}{OM},\ \text{или}\ \frac{2A,M,}{2AM}=\frac{OM,}{OM},\ \text{т. е.}\ \frac{A,B,}{AB}=\frac{OM,}{OM}\ (1)$$

А отъ правожгълнія трижгълникъ OMA имами:

$$OM^2=\overline{OA}^2-\overline{AM}^2;\ \text{слѣд.}\ OM=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2};$$

нъ тъй като $AM=\frac{AB}{2}$, то $OM=\sqrt{OA^2-\frac{AB^2}{4}}$.

Като замѣстимъ въ ур. (1) OM съ равно-то му, ще получимъ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{OM'}{\sqrt{OA^2-\frac{AB^2}{4}}}$.

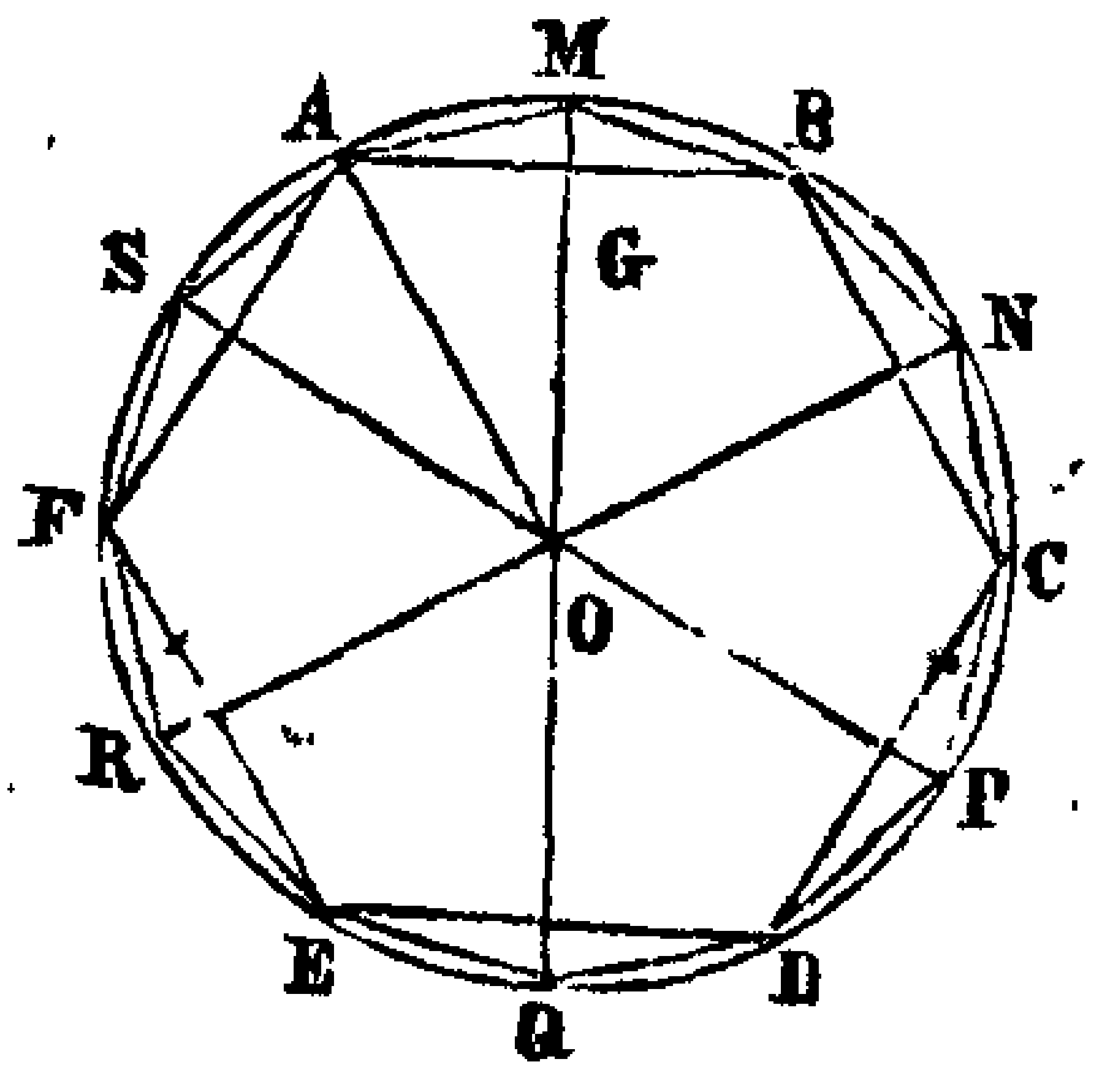
Нека вписанія многоѫгълникъ има n страни и да означимъ странѫ-тѫ му съ a_n, странѫ-тѫ на описанія съ b_n, а радіусъ-тъ съ r, тогава

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\frac{a_n{}^2}{4}}}, \quad \text{или } b_n=\frac{r.\ a_n}{\sqrt{r^2-\frac{a_n{}^2}{4}}}.$$

Съ помощъ-тѫ на това уравненіе можемъ опредѣли странѫ-тѫ на описанія многоѫгълникъ, ако знаемъ странѫ-тѫ на едноименнія вписанъ.

§. 79. *Задача. Да удвоимъ число-тѫ на страни-тѣ на правилнія вписанъ многоѫгълникъ.*

Рѣшеніе. Нека ABCDEF (чърт. 117) е правиленъ вписанъ многоѫгълникъ. Прекарвами радіуси OM, ON, OP и пр. перпендикулярни къмъ страни-тѣ му, и съединявами точкѫ M съ A и B, точкѫ N съ B и C и пр. Многоѫгълникъ AMBNCP......, кой-то е съставенъ по този начинъ, ще има два пѫти повече страни отъ пърѣія; въ сѫщо-то време той ще бѫде правиленъ. Наистина, тъй като перпендикулярни-тѣ радіуси презполовявать равни-тѣ дѫги AMB, BNC и пр. то хорди AM, BM и пр. сѫ равни по между си; освѣнъ това ∠AMB е равенъ



Чърт. 117

на ∠BNC, защо-то отъ равенство-то на дѫги AMB, BM и пр., кои-то ся стѣгнати съ равни хорди (отъ страни-тѣ на многоѫгълникъ-тъ) излиза, чи всички-тѣ ѫгъли AMB, BMC, CND и пр. имать еднаквѫ мѣркѫ.

Явно е, чи периметръ-тъ на вписанія многоѫгълникъ ся уголѣмява, кога удвоимъ число-то на страни-тѣ му.

За да опрѣдѣлимъ странѫ-тѫ на съставенія п този начинъ многоѫгълникъ, като знаемъ странѫ-тѫ на ABCDEF и радіусъ-тъ на крѫгъ-тъ, постѫпвами тъй.

Отъ правоѫгълнія триѫгълникъ AMG имами:

$$AM^2 = AG^2 + MG^2.$$

Нъ $MG = OM - OG$; слѣд. $MG^2 = OM^2 - 2OM.OG + OG^2$ (1). А отъ правоѫгълнія триѫгълникъ AOG имами:

$$OG^2 = AO^2 - AG^2, \text{ слѣд. } OG = \sqrt{AO^2 - AG^2}.$$

Кato замѣстимъ въ урав. (1) OG^2 и OG съ равни-тѣ имъ, ще получимъ:

$$MG^2 = OM^3 - 2OM\sqrt{AO^2 - AG^2} + AO^2 - AG^2,$$

слѣд. $AM^3 = AG^2 + OM^2 - 2OM\sqrt{AO^2 - AG^2} + AO^2 - AG^2 = OM^3 + AO^2 - 2OM\sqrt{AO^2 - AG^2}$.

Нъ $AG = \frac{AB}{2}$, слѣд. $AG^2 = \frac{AB^2}{4}$; и тъй

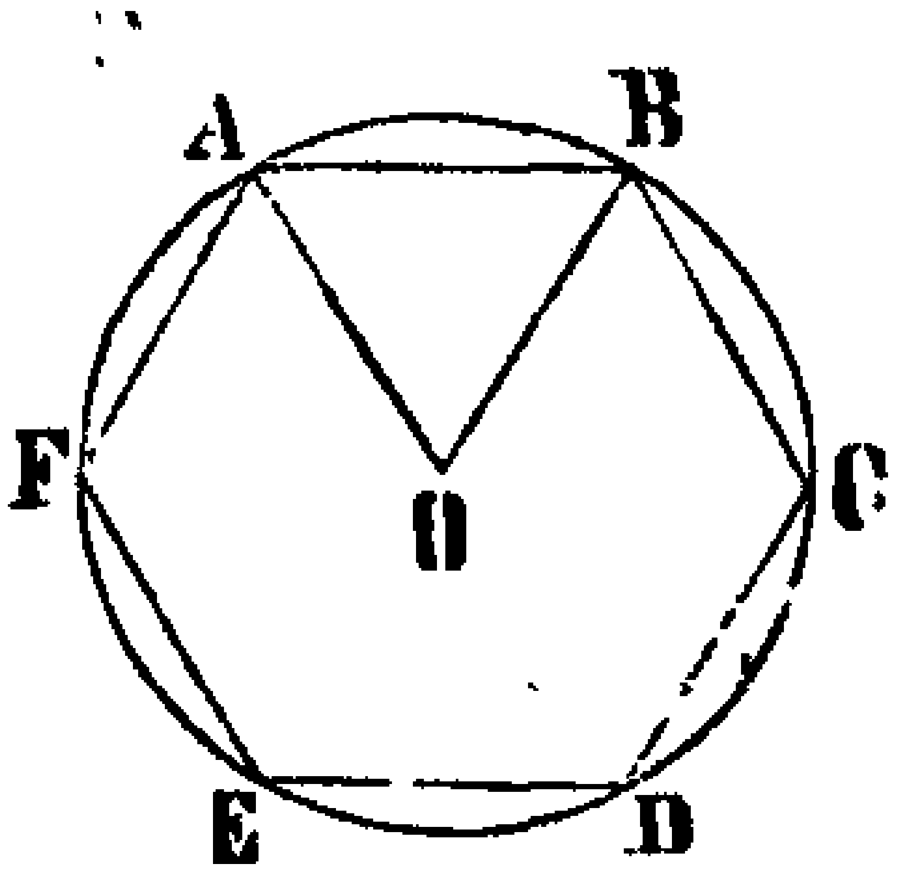
$$AM^2 = OM^2 + AO^3 - 2OM\sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}.$$

Нека многоѫгълникъ ABCDEF има n страни и да означимъ странѫ-тѫ му съ a_n, странѫ-тѫ на многоѫгълникъ AMBNC . . . . . съ a_{2n}, а радіусъ-тъ на крѫгъ-тъ съ r; тогава послѣдне-то урав. ще земе видъ

$$a^2_{2n} = r^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2_n}{4}} \text{ или } a^2_{2n} = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

Съ помощъ-тѫ на това уравненіе можемъ подадемѫ тѫ странѫ на вписанія многоѫгълникъ съ n страни да опредѣлимъ странѫ-тѫ на вписанъ сѫщо многоѫгълникъ съ 2n страни, къто опредѣлимъ странѫ-тѫ на многоѫгълникъ съ 2n страни, можемъ послѣ да опредѣлимъ странѫ-тѫ на вписанъ многоѫгълникъ съ 4n, съ 8n и пр. страни. А къто употрѣбили израженіе-то на §. 78 ще опредѣлимъ странѫ-тѫ на описанія многоѫгълникъ съ 2n, 4n, 8n и пр. страни.

§. 80. *Задача. Да опредѣлимъ странѫ-тѫ на правилнія вписанъ шестоѫгълникъ.*



Чьрт. 118.

Рѣшеніе. Нека ABCDEF (чьрт. 118) е правиленъ вписанъ шестоѫгълникъ. Къто съединимъ А и В съ О, ще видимъ, чи $\angle AOB=\frac{360^0}{6}=60^0$ (§. 76); слѣд. сумма-та на други-тѣ два ѫгъла OAB и OBA е равна на $180^0-60^0=120^0$; нъ тъй, къто отъ равенство-то на страни AO и OB излиза, чи тѣзи ѫгъли сѫ равни по между си, то сѣкій отъ тѣхъ е равенъ на $\frac{120^0}{2}=60^0$. Това показва, чи трижгълникъ AOB е равностърнястъ и чи *страна-та на правилнія списанъ шестоѫгълникъ е равна на радіусъ-тъ.*

Къто знаемъ странѫ-тѫ на правилнія вписанъ шестоѫгълникъ, можемъ едно слѣдъ друго да опредѣлимъ странѫ-тѫ на вписанія дванадесятоѫгълникъ, двадесяточетвероѫгълникъ и пр.

§. 81. Да си представимъ два правилни едноименни многоѫгълника и около тѣхъ двѣ описани окрѫжности. Видѣхме (§. 77), чи периметри-тѣ на многоѫгълници-тѣ ся отнасять, къто радіуси-тѣ на описани-тѣ около тѣхъ крѫгове. Тъзи теоремѫ си остава справедлива, колко-то много страни и да иматъ многоѫгълници-тѣ. Нъ колко-то по много страни имат многоѫгълници-тѣ толкова повече периметри-тѣ им ся приближавать да ся слѣѭть съ окрѫжность-т слѣд. крѫгове-тѣ могѫть да ся разглѣждать, къто правилни многоѫгълници съ безкрайно голѣмо число страни. Явно е послѣ това, чи *окрѫжности-тѣ ся отнасять по между си, къто радіуси-тѣ.* Ако означим съ C и c дължини-тѣ на двѣ окрѫжности, съ k и радіуси-тѣ имъ; то спорѣдъ казано-то по горѣ н имами: $\frac{C}{c}=\frac{k}{r}$ или $\frac{C}{c}=\frac{2k}{2r}$.

Послѣдне-то равенство показва, чи окрѫжности тѣ ся отнасять по между си, къто діаметри-тѣ.

Пропорція $\frac{C}{c}=\frac{2k}{2r}$ може да ся напише и тъ $\frac{C}{2k}=\frac{c}{2r}$. Това значи, чи ако раздѣлимъ нѣкоѭ окрѫжность съ діаметръ-тъ и другѫ окрѫжность пакъ с діаметръ-тъ ѝ, то ще получимъ равни числа; тъз мисьль ся изразява тъй: *отношеніе-то на окрѫжност тѫ къмъ діаметръ-тъ е число постоянно.* Това постоянно число изобразявать съ грѫцкѫ буквѫ π, тъ що-то $\frac{C}{2k}=\pi$.

§. 82. *Теорема. Дължина-та на окрѫжность-т е равна на радіусъ-тъ, умноженъ съ 2π.*

Нека C е дължина-та на окрѫжность-тѫ и k радіусъ-тъ ѝ; трѣба да докажемъ, чи $C=2\pi k$.

Доказ. Отъ равенство $\frac{C}{2k}=\pi$ имами $C=2\pi k$, това искахме да докажемъ.

Ако въ уравненіе $C=2\pi k$ считами радіусъ-т за единицѫ, то $C=2\pi$; това ще рѣче, чи *2π е дължина-та на тъзи окрѫжность, на коя-то радіусъ-т е равенъ на единицѫ.*

X§. 83. *Задача.* Да опредѣлимъ отношеніе-то на ржжность-тж къмъ діаметръ-тъ, т. е. π.

Рѣшеніе. Това най лесно ще стане, ако опредѣимъ дължинж-тж на тъзи окржжность, на коя-то раіусъ-тъ ся счита за единицж, т. е. 2π. Кѫто знаемъ π, лесно ще намѣримъ и π.

Тъзи окржжность ся исчислява постьпенно. Тъй а пр. исчисляватъ най напредъ периметри-тѣ на писани-тѣ многожгълници съ 6, 12, 24, 48 и пр. грани и послѣ периметри-тѣ на едноименни-тѣ опиани. Разумѣва ся, чи колко то повече страни има огожгълникъ-тъ, толкова повече периметръ-тъ му е ся приближава къмъ окржжность-тж.

Да исчислимъ най напредъ периметръ-тъ на равилнія вписанъ шестожгълникъ. Страна-та му, къ-то знаемъ, е равна на радіусъ-тъ (§. 80); но адіусъ-тъ е равенъ на 1; слѣд. ако означимъ съ a_6 транж тж на шестожгълникъ-тъ, то $a_6=1$, затова пеиметръ-тъ му ще бжде равенъ на 6.

Послѣ, спорѣдъ §. 79, страна-та на вписанія ванадесятожгълникъ ще бжде:

$$=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_6^2}{4}}}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=$$

,517,638 . . . .

Слѣд. периметръ-тъ му ще бжде:

$$12\times0{,}517.638=6{,}211.656.$$

о сжщія начинъ ще намѣримъ, чи периметръ-тъ на ногожгълникъ-тъ съ 24 страни ще бжде 6,265.257 ъ 48 страни —6,278.700 и пр.

Послѣ отъ урав. на §. 78, ако съ b_6 означимъ транж-тж на описанія шестожгълникъ, ще имами:

$$b_6=\frac{a_6}{\sqrt{1-\frac{a_6^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=1{,}154700.$$

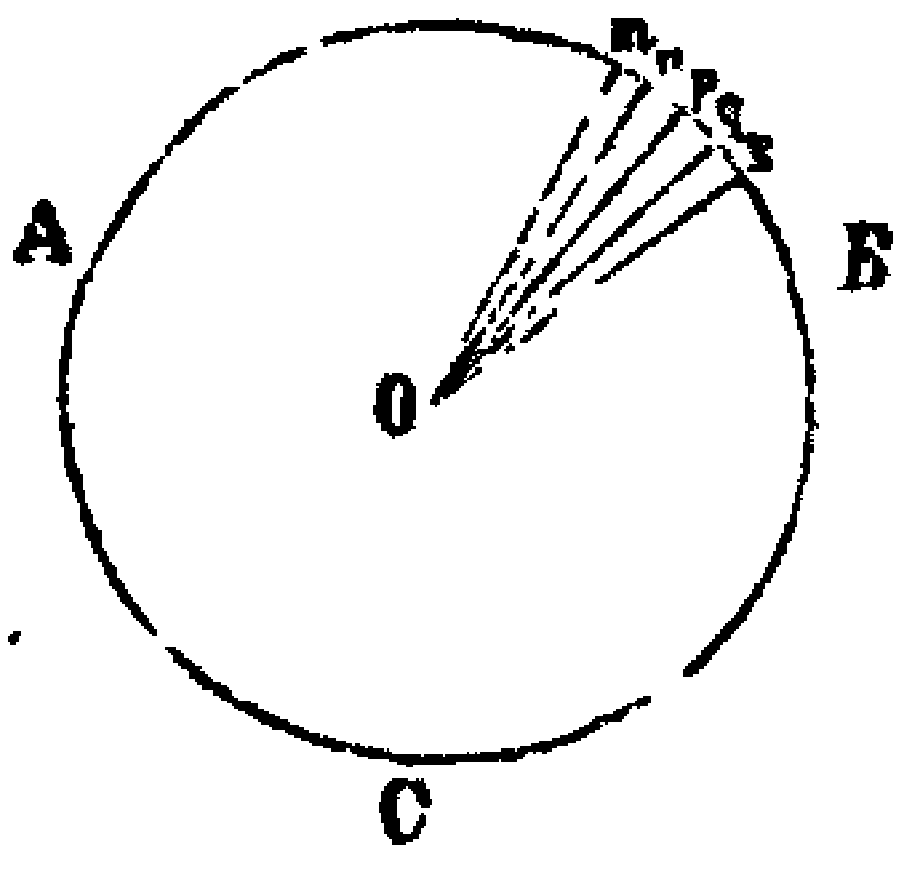
Слѣд. периметръ-тъ на описанія шестожгълник ще бжде 6,928,200. По сжщія начинъ ще намѣримъ чи периметръ-тъ на описанія многожгълникъ съ 1 страни ще бжде 6,630776, съ 24 страни — 6,31905 съ 48 страни — 6,292176 и пр.

Отъ това ся види, чи разлика-та между периметри-тѣ на правилни-тѣ вписани и едноименни описани многожгълници, става толкова по малка, колкото по вече страни-тѣ иматъ. Тъй на пр. ако исчислимъ периметръ-тъ на вписанія многожгълникъ с 3072 страни, той ще бжде 6,283184; а периметръ-т на описанія многожгълникъ съ сжщо-то число стран ще бжде 6,283187. Разлика-та между тѣхъ ще бжд по малка отъ 0,00001, слѣд. и разлика-та между тѣз многожгълници и окржжность-тж ще бжде още п малкж отъ 0,00001; а тъй като окржжность-тж н този кржгъ е 2π, то $2\pi=6,28318$, слѣд. $\pi=3,1415$ (съ точность до 0,00001).

§. 84. *Теорема. Лице-то на кржгъ-тъ е равно н квадратъ отъ радіусъ-тъ умноженъ съ π.*

Нека k е радіусъ-тъ на кржгъ-тъ и k лице-т му; трѣба да докажемъ, чи $k=\pi k^2$

Доказ. Да си прѣдставимъ, чи окржжность АВ (чьрт. 119) е раздѣлена на много равни части д толкози малки, що-то сѣка от тѣхъ, на пр. mn да може да с счита за правж линіж. Кът съединимъ всички-тѣ точки н дѣленіе-то, на пр. m, n, p, q . . съ центръ-тъ ще раздѣлимъ кржгъ-тъ на множество равни трижгълници, таквизи, като mo Ако считами радіусъ $mo=k$ з височинж на трижгълникъ mo



Чьрт. 119.

гово-то лице ще бѫде равно на $\frac{mnk}{2}$, тъй сѫщо ли-
-то на слѣдующія триѫгълникъ nop ще бѫде $\frac{np.k}{2}$,
ице-то на $\triangle poq$ ще бѫде $\frac{pq.k}{2}$ и пр.

За да намѣримъ лице-то на крѫгъ-тъ, трѣба да
беремъ лица-та на всички-тѣ триѫгълници, кои-то
съставятъ, слѣд.

$$= \frac{mn\,k + np.k + pq.k + qs.k}{2} = \left(\frac{mn + np + pq + qs +}{2}\right)$$

Нъ сумма-та $mn + np + pq + \ldots$ е равна на цѣлѫ-
окрѫжность, коя-то е $2\pi k$, слѣд

$$K = \frac{k.2\pi k}{2} \text{ или } K = \pi k^2.$$

ЗАДАЧИ.

48. Да раздѣлимъ окрѫжность-тѫ на шесть ра-
и части.

Рѣшеніе. Съ пергелъ-тъ измѣрвами радіусъ-тъ
окрѫжность-тѫ. Дѫга-та, коя-то е стѣгната отъ
рдѫ, равнѫ на радіусъ-тъ ще бѫде шеста-та часть
ъ окрѫжность-тѫ и за това ще ся помѣсти шесть
ти въ цѣлѫ-тѫ окрѫжность.

49. Да раздѣлимъ окрѫжность тѫ на 4 равни
сти.

Рѣшеніе. Два перпендикулярни по между си діа-
тра ще раздѣлѭтъ окрѫжность-тѫ на 4 равни части.

50 Да раздѣлимъ правія ѫгълъ на 3 равни части.

Рѣшеніе. Отъ върхъ А на правія ѫгълъ АВС
исвами съ произволенъ радіусъ дѫгѫ, коя-то ще
есѣче страни-тѣ на ѫгълъ-тъ въ токчи В и С. На

джгж BC отмѣрвами хордж CD, равна на радіусъ-тъ; тогава джга BD ще бжде третіж часть отъ четвъртинж-тж на окржжность-тж, а жгълъ BAD — трет часть отъ правія жгълъ. Джгж BD отмѣрвами на джг CD и получвами по този начинъ и други-тѣ двѣ трет части отъ правія жгълъ.

51. Да опредѣлимъ странж-тж на вписанія квадратъ.

Рѣшеніе. Нека ABCD е вписанъ квадратъ и радіусъ-тъ на кржгъ-тъ. Къто прекарами діагонал AC и BD и къто забелѣжимъ, чи тѣ сж взаимно перпендикулярни и ся презполовявать (§. 43), заключвами, чи точка-та на пресичаніе-то имъ съвпад съ центръ-тъ и AOB е правъ жгълъ. За това $AB^2=AO^2+OB^2=r^2+r^2=2r^2$, слѣд. $AB=r\sqrt{2}$.

52. *Да опредѣлимъ радіусъ-тъ на кржгъ-тъ, който е вписанъ въ нѣкой квадратъ, ако радіусъ-тъ н описанія кржгъ е* r.

Рѣшеніе. Нека AB е страна-та на вписані квадратъ и o центръ-тъ на кржгъ-тъ. Перпендикуляръ OD къмъ AB ще бжде радіусъ на вписані кржгъ, а линія OB— радіусъ на описанія. Отъ правожгълнія трижгълникъ ODB имами: $\overline{OD}^2=\overline{OB}^2-\overline{BD}$ Ако $OB=r$, то страна-та на вписанія квадратъ щ бжде $r\sqrt{2}$ (задаче 51); слѣд. $BD=\frac{r\sqrt{2}}{2}$, и $\overline{BD}^2=\frac{r^2}{2}$ Къто замѣстимъ $\overline{OB}^2$ и $\overline{BD}^2$ съ равни-тѣ имъ, ще получимъ: $\overline{OD}^2=r^2-\frac{r^2}{2}=\frac{r^2}{2}$; слѣд. $OD=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

53. Да опрѣдѣлимъ радіусъ-тъ на кржгъ-тъ, който е вписанъ въ правилнія шестожгълникъ, ако радіусъ тъ на описанія кржгъ е r.

Рѣшеніе. Нека AB е страна-та на шестожгълникъ-тъ, o — центръ-тъ на кржгъ-тъ и OD перпенди куляръ, спуснатъ врьхъ AB. Отъ правожгълнія трижгълникъ OBD имами: $\overline{OD}^2=\overline{OB}^2-BD^2$; нъ OB е радіусъ r, а BD— полоовина отъ странж-тж на правожгълникъ, т. е. $\frac{r}{2}$; слѣд. $\overline{OD}^2=r^2-\frac{r^2}{4}$, и $OD=\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

54. Да опредѣлимъ странж-тж на правилнія дванадесятожгълникъ, кой-то е вписанъ въ кржгъ съ радіусъ r.

Рѣшеніе. Нека AB е страна-та на вписанія шестожгълникъ и о — центръ на кржгъ-тъ. Отъ центръ O спущами перпендикуляръ OD врьхъ AB и го продължавами, до гдѣ ся просѣче съ окржжность-тж въ точкж M; линія MB ще бжде страна на вписанія дванадесятожгълникъ. Отъ правожгълнія трижгълникъ MDB имами: $MB^2=\overline{DB}^2+DM^2$. Линія DB е половина отъ странж-тж на шестожгълникъ-тъ, т. е. $DB=\frac{r}{2}$; $DM=OM-OD=r-\frac{r\sqrt{3}}{2}$ (Задача 53). Слѣд. $\overline{DM}^2=r^2-r^2\sqrt{3}+\frac{3}{4}r^2$. Кьто замѣстимъ $\overline{DB}^2$ и $\overline{DM}$ съ равни-тѣ имъ, ще получимъ:

$$MB^2=\frac{r^2}{4}+r^2-r^2\sqrt{3}+{}^3/_4r^2=2r^2-r^2\sqrt{3}=r^2(2-\sqrt{3});$$

слѣд. $BM=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

55. Да опредѣлимъ радіуси-тѣ на кржгове-тѣ, отъ кои-то единъ-тъ е описанъ около квадратъ съ странж a, а другія вписанъ въ сжщія квадратъ.

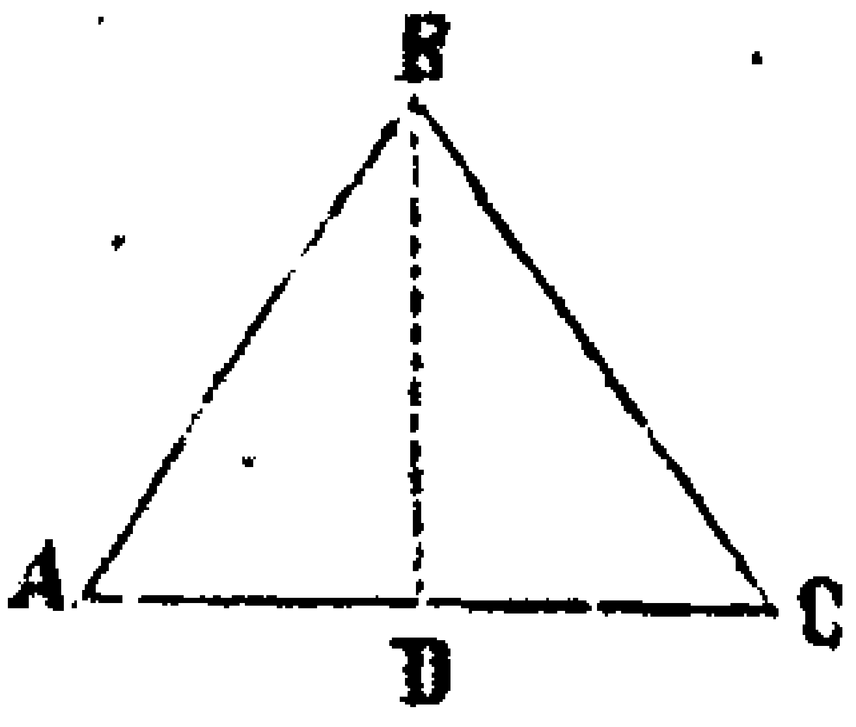
Рѣшеніе. Ако a е страна-та на квадратъ-тъ и r радіусъ-тъ на описанія кржгъ, то $a=r\sqrt{2}$, слѣд. радіусъ-тъ на описанія кржгъ ще бжде $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Кьто знаемъ радіусъ-тъ на описанія кржгъ, лесно ще опредѣлимъ радіусъ-тъ на вписанія, защо-то той е апотема на квадратъ-тъ Нека го означимъ съ $r_,$; тогава отъ правоѫгълнія триѫгълникъ ще имами:

$$r_,^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\text{; слѣд. } r_, = \frac{a}{2}.$$

56. Да исчислимъ лице-то на правилнія многоѫгълникъ съ n страни.

Рѣшеніе. Нека h е апотема-та на многоѫгълникъ-тъ и a страна-та му. Ако съединимъ центръ O съ всички-тѣ върхове на многѫгълникъ-тъ, то ще получимъ n равни триѫгълници; лице-то на единъ отъ тѣхъ ще бѫде равно $\frac{ah}{2}$; слѣд. лице-то на всички триѫгълници или лице-то на многоѫгълникъ-тъ ще бѫде $n\frac{ah}{2}$.

57. Да опредѣлимъ лице-то на триѫгълникъ-тъ по три-тѣ дадени негови страни.



Чьрт. 120.

Рѣшеніе. Нека ABC (чьрт. 120) е нѣкой триѫгълникъ. Да означимъ лице-то му съ △ и нека страна BC е равна на a, AC=b и AB=c. Като прекарами височинѫ BD, отъ правоѫгълнія триѫгълникъ ABD имами: $BD^2 = c^2 - AD^2$ (1). А отъ правоѫгълнія триѫгълникъ BDC ще получимъ: $a^2 = BD^2 + DC^2$ (2). Нъ $DC = AC - AD = b - AD$; слѣд. $DC^2 = b^2 - 2b.AD + AD^2$. Като замѣстимъ въ уравненіе (2) BD^2 и DC^2 съ равни-тѣ имъ ще получимъ:

$a^2 = c^2 - AD^2 + b^2 - 2b.AD + AD^2$ или, $a^2 = c^2 + b^2 - 2b.AD$.

А отъ послѣдню-то $AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

Въ урав. (1) Замѣстеми AD^2 съ равно-то му; тогава $BD^2 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}$

Кѫто замѣстимъ въ числителя на вторѫ-тѫ часть разликѫ-тѫ на квадрати-тѣ съ произвѣденіе отъ суммѫ и разликѫ, ще получимъ:

$$BD^2=\frac{[2bc+(b^2+c^2-a^2)]\ [2bc-(b^2+c^3-a^2)]}{4b^2}.$$

Нъ $2bc+(b^2+c-a^2)=2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$, и $2bc-(b^2+c^2-a^2)=2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b^2+c^2-2bc)=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$.

Слѣд. $BD^2=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4b^2}$,

а отъ тука.

$$BD=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}}{2b}$$

Кѫто опредѣлихми височинѫ-тѫ на трижгълникъ-тъ, ще намѣримъ:

$$\Delta=\frac{AC.BD}{2}=\frac{B.BD}{2}=\frac{b}{2\times 2b}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}$$

слѣд $\Delta=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}$.

58. По даденѫ-тѫ странѫ на правилнія трижгълникъ, да опредѣлимъ лице-то му.

Рѣшеніе. Нека ABC е трижгълникъ и страна-та му a. Ако отъ върхъ B спустимъ перпендикуляръ BD врьхъ странѫ AC и ако означимъ дължинѫ-тѫ на този перпендикуляръ съ h, то лице-то на трижгълникъ-тъ ще бѫде $\frac{ah}{2}$. Нъ отъ правожгълнія трижгълникъ BDC имами $h^2=BC^2-CD^2$, BC е равна на a, а CD е половина отъ a (това слѣдува отъ равенство-то на правожгълни-тѣ трижгълници ABD и DBC), кѫто замѣстимъ BC^2 и CD^2 съ равни-тѣ имъ ще получимъ $h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$ или $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Слѣд. лице то на трижгълникъ-тъ ще бжде равно на

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

59. По даденж-тж странж на правилнія шестожгълникъ да опредѣлимъ лице-то му.

Рѣшеніе. Нека $AB=a$ е страна-та на шестожгълникъ-тъ и O центръ на описанія около него кржгъ. Къто съединимъ O съ A и B и къто спустимъ перпендикуляръ OD, отъ правожгълнія трижгълникъ OBD, ще имами $OD^2=a^2-\frac{a2}{4}=\frac{3a^2}{4}$, слѣд. $OD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Това е апотема-та на правилнія шестожгълникъ. Спорѣдъ задачж 56 лице-то на многожгълникъ-тъ е равно на половинж отъ произвѣденіе-то, кое-то е съставено отъ число-то на страни-тѣ, отъ дължинж-тж на странж-тж и отъ дължинж-тж на апотемж-тж; слѣд. лице-то на шестожгълникъ-тъ ще бжде равно на:

$$\frac{6.a.a\sqrt{3}}{2.2.}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

60. Да изчислимъ дължинж-тж на окржжность-тж, ако радіусъ-тъ е равенъ на 5, 15 метра.

Рѣшеніе. Отъ формулж $C=2\pi R$ (§. 82) имами: $R=5{,}15$, $\pi=3{,}14$ (приблизително); слѣд.

$C=2\times3{,}14\times5{,}15=6{,}28\times5{,}15=32{,}342$ метра.

61. Да изчислимъ дължинж-тж на окржжность-тж, ако діаметръ-тъ й е 12 метра.

Рѣшеніе. Ако діаметръ-тъ на окржжность-тж е 12 метра, то радіусъ-тъ ще бжде 6; слѣд.

$C=2\times3{,}14\times6=6{,}28\times6=37{,}68$ метра.

62. Дължина-та на окржжность-тж е 50,24 метра; на колко е равенъ радіусъ-тъ й?

Рѣшеніе. Отъ формулж $C=2\pi R$ имами $R=\frac{C}{2\pi}$. Слѣд. за да намѣримъ радіусъ-тъ, трѣба дължинж-тж на окрѫжность-тѫ 50,24 да раздѣлимъ съ 2π, т. е. 6,28; тогава ще получимъ $R=\frac{50,24}{6,28}=8$ метра.

63. Дължина-та на окрѫжность-тѫ е 94,2 метра, на колко е равенъ радіусъ-тъ ѝ?

Рѣшеніе. Радіусъ-тъ е равенъ на 15 метра.

64. Радіусъ-тъ на окрѫжность-тѫ е равенъ на 9 метра; колко е дълга дѫга-та, коя-то съдържа 120°?

Рѣшеніе. Тъй като всичка-та окрѫжность е дълга $2\pi R=6,28\times9$ метра, то 360° сѫ равни на $6,28\times9$ метра, а 1° ще бѫде 360 пѫти по малъкъ, т. е. $\frac{6,28\times9}{360}$; слѣд. 120° ще иматъ 120 пѫти по голѣмѫ дължинѫ отъ $\frac{6,28\times9}{360}$, т. е. 120° ще съдържатъ $\frac{6,28\times9\times120}{360}$ метра. Като исчислимъ това израженіе ще намѣримъ, чи дължина-та на дѫгѫ-тѫ е 18,84 метра.

65. Радіусъ-тъ на окрѫжность-тѫ е 12 метра, колко е дълга дѫга-та, коя-то съдържа 30°?

Рѣшеніе. Дължина-та на дѫга-та е 6,28 метра.

66. Радіусъ-тъ на окрѫжность-тѫ е 2,5 метра, колко е дълга окрѫжность-тѫ, коя-то съдържа $26^{0}+34'$?

Рѣшеніе. Дължина-та на окрѫжность-тѫ е равна на 1,158 метра.

67. Да опредѣлимъ лице-то на крѫгъ-тъ, ако діаметръ-тъ му е 10,5 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на крѫгъ-тъ е равно на πR^2, гдѣ-то $R=\frac{10,5}{2}=5.25$, Като замѣстимъ R^2 съ равно-то му $(5,25)^2=27,5625$ и π съ равно-то му **3,14**, ще получимъ $3,14\times27,5625=86,546$ (приблизително.) И тъй лице-то на крѫгъ-тъ е 86,546 квадратни метра.

68. Да опредѣлимъ лице-то на крѫгъ-тъ, ако радіусъ-тъ му е 6 метра.

Рѣшеніе. Лице-то на крѫгъ-тъ е равно на 113,04 квадр. метра.

69. Радіусъ-тъ на екваторъ-тъ е 6376984 метра: какво пространство изминува сѣка отъ точки-тѣ му въ сѣкундѫ?

Рѣшеніе. Ако радіусъ-тъ е 6376984, то окрѫжность-тѫ ще бѫде 6,28×6376984 метра. Такова пространство ще изминува сѣка отъ точки-тѣ за 24 часа, или за 24×60×60 секунди; слѣд. за еднѫ сѣкундѫ сѣка отъ точки-тѣ на екваторъ-тъ ще изминува: 24×60×60 пѫти по малко пространство, т. е.

$$\frac{6,28\times6376984}{24\times60\times60}=463,6\ .\ .\ .\ .\ \text{метра.}$$

70. Діаметръ-тъ на задни-тѣ колеле-та на каруцѫ-тѫ е 1,2 метра, а діаметръ-тъ на предни-тѣ 0,8 метра; колко пѫти ще ся обърнатъ задни-тѣ и предни-тѣ колеле-та, кога каруца-та измине единъ километръ.

Рѣшеніе. Задни-тѣ колеле-та ся завъртѫтъ почти 265,89 пѫти, а предни-тѣ почти 398 пѫти.

71. На 47° географическѫ широчинѫ, дължина-та на сѣкій градусъ на параллелъ-тъ (крѫгъ успорѣденъ на екваторъ-тъ) е 75,782 метра. Да опредѣлимъ радіусъ-тъ на този параллелъ.

Рѣшеніе. Ако единъ градусъ съдържа 75.782 метра, то 360° ще съдържатъ 75,782×360 метра. Това ще бѫде дължинѫ-тѫ на окрѫжность-тѫ; за да намѣримъ радіусъ-тъ ѝ, трѣба 75,782×360 да раздѣлимъ съ 2π, т. е. съ 6,28, тогава ще получимъ:

$$\frac{75,782\times360}{6,28}=4341989.$$

И тъй радіусъ-тъ на параллелъ-тъ е 4341989 метра.

72. Да опредѣлимъ діаметръ-тъ на крѫгъ-тъ, кой-то е равномѣренъ съ квадратъ-тъ, ако страна-та на квадратъ-тъ е 60 метра.

Рѣшеніе. Спорѣдъ смисълъ-тъ на задачѫ-тѫ имами $60^2=\pi X^2$, гдѣ-то x е неизвѣстнія радіусъ на крѫгъ-тъ, кой-то търсимъ, Отъ това равенство имами: $X^2=\frac{3600}{3,14}=1146,50$; слѣд. $x=\sqrt{1146,50}=33,86$, а 2X, т. е. діаметръ-тъ е равенъ на 67,7 метра.

73. ~~Да опредѣлимъ~~ радіусъ-тъ на крѫгъ-тъ, на кой-то лице-то му ся уголѣмява съ 100 квадр. метра, ако радіусъ-тъ му ся уголѣми съ 1 метръ.

Рѣшеніе. Спорѣдъ смисълъ-тъ на задачѫ-тѫ имами $\pi(x+1)^2=\pi X^2+100$, гдѣ-то x е радіусъ-тъ на този крѫгъ, кой-то търсимъ, кѫто възвисимъ отъ квадратъ двучленъ $x+1$, ще получимъ:
$\pi(x^2+2x+1)=\pi x^2+100$ или $\pi x^2+2\pi x+\pi=\cancel{\pi x^2}+100$; слѣд. $2\pi x=100-\pi=96,86$, а отъ това $x=\frac{96,86}{6,28}=15,42$ метра.

74. Отъ два-та концентрирани крѫга лице-то на по малкія е K^2, а разлика-та между радіуси-тѣ на два-та крѫга е d, да опредѣлимъ лице-то, кое-то е заключено между тѣзи два крѫга.

Рѣшеніе. Ако означимъ съ x радіусъ-тъ на по-малкія крѫгъ, то спорѣдъ смисълъ-тъ на задачѫ-тѫ имами: $\pi x^2=k^2$; слѣд. $x=\frac{k}{\sqrt{\pi}}$. Тъй кѫто разлика-та между радіуси-тѣ на два-та крѫга е $d+\frac{K}{\sqrt{\pi}}$ ще бѫде радіусъ-тъ на поголѣмія крѫгъ; слѣд. лице-то на голѣмія крѫгъ е $\pi\left(d+\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^2=\pi d^2+\frac{2dk\pi}{\sqrt{\pi}}+k^2=\pi d^2+$

$2dk\sqrt{\pi}+k^2$. За да намѣримъ лице-то, кое-то е заключено, трѣба отъ лице-то на голѣмія кржгъ да извадимъ лице-то на по малкія. Тогава ще имами: $\pi d^2+2dk\sqrt{\pi}+k^2-k^2=\pi d^2+2kd\sqrt{\pi}$.

Днесь, I-ний свършихъ ~~III~~-ий ! [illegible] не [illegible] алгебрата !!!

II-ий

ЧАСТЬ II.

класъ.

Кантъ – Но тези ми [illegible] мина [illegible]

минахме

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

съ I-ий

[illegible] отъ ~~I~~-ий класъ

II-ий

ГЛАВА I.

[illegible]

изъ V-ий класъ

ЛИНІИ И ПЛОСКОСТИ ВЪ ПРОСТРАНСТВО-ТО.

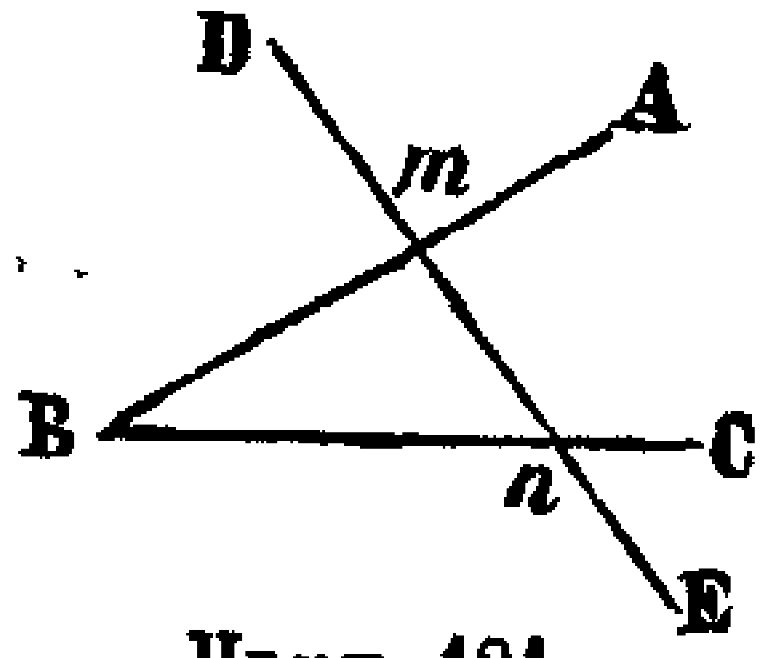
§. 85. *Плоскость* ся нарича тъзи повьрхнина, съ коя-то ся слива сѣка права линія, ако има съ нея двѣ общи точки. Отъ това слѣдува, чи плоскость-та може да пресѣче правж-тж линіж само въ еднж точкж, защо-то ако ж пресѣче още въ еднж точкж, тя ще ся слѣе съ нея.

Тъзи точка, въ коя-то правата ся пресича отъ плоскость-та, ся нарича *основж* на правж-тж.

X§. 86. *Теорема. Презъ три точки въ пространство-то* A, B *и* C, *кои-то не лежжтъ на еднж правж, може да ся прекара само една плоскость.*

Доказ. Кѫто прекарами плоскость презъ правата, коя-то съединява точки A и B, можемъ да си въобразимъ, чи плоскость-та ся върши около тъзи линія до тогава, до кѫто срѣщне точкж C; слѣд. презъ три точки можемъ сѣкога да прекарами плоскость.

Нъ презъ точки A, B и C не може да ся пре-



Чьрт. 121.

кара по вече отъ една плоскость. Наистина, нека презъ точки А, В и С (чьрт. 121) минува плоскость; да земимъ каквѫ да е линіѭ DE, коя-то лежи на тъзи плоскость. Ще докажимъ, чи ако презъ А, В и С премине втора плоскость, то линія DE ще лежи и на вторѫ-тѫ плоскость, а това ще означава, чи плоскости-тѣ съвпадатъ. Съединявами А и С съ В; нека m и n ся точки-тѣ, въ кои-то линія DE пресича АВ и АС. Ако презъ А, В и С премине втора плоскость, то точки m и n ще лежѭть на тъзи плоскость, защо-то АВ и АС лежѫть на неѭ; нъ ако m и n сѫ на вторѫ-тѫ плоскость, то и цѣла-та линіѭ DE ще лежи на неѭ (§. 85). И тъй плоскости-тѣ съвпадать, т. е. презъ три точки пространство-то може да премине само една плоскость.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува.

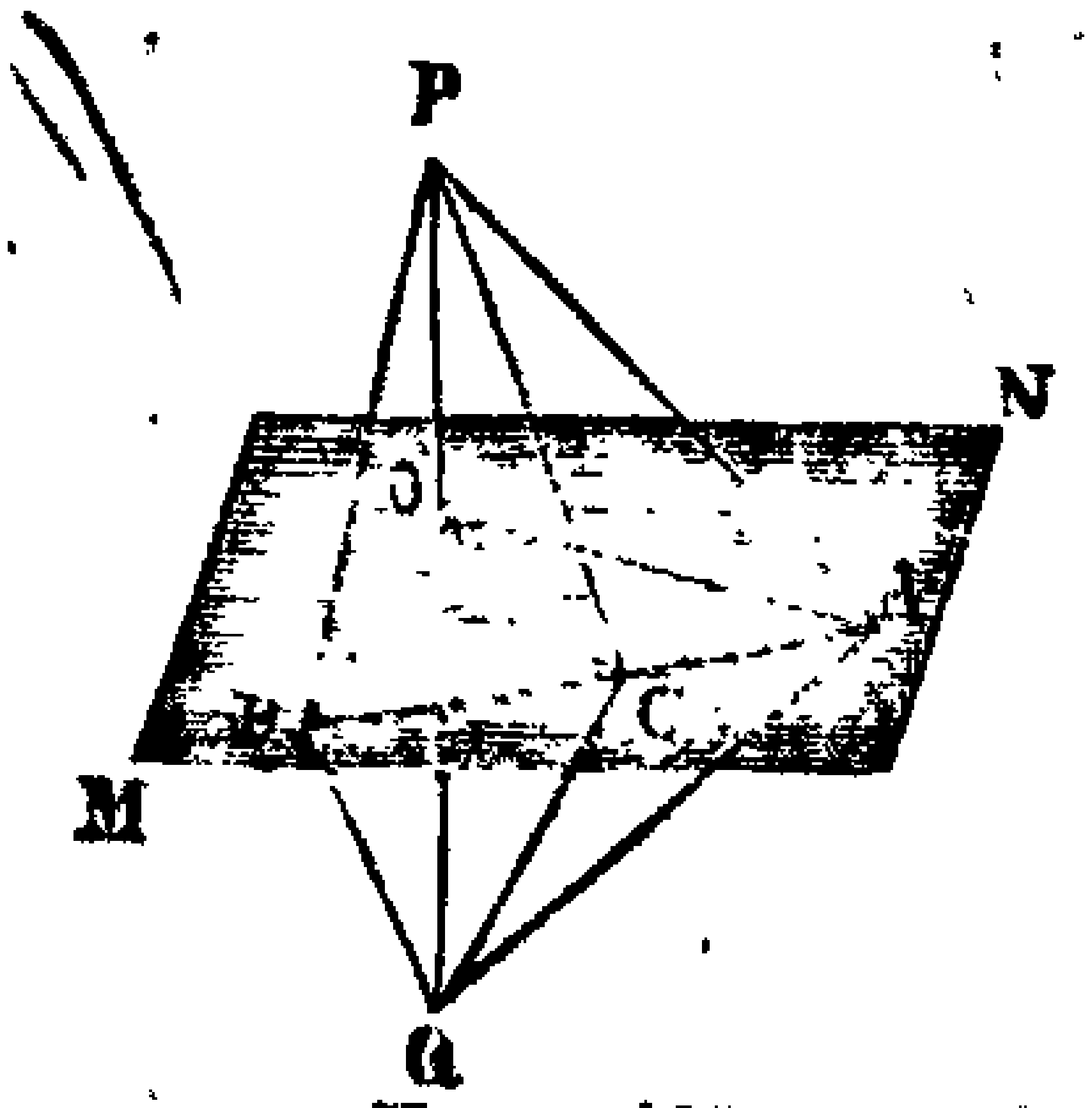
1) Три точки, кои то не лежѫть на еднѫ правѫ, напълно опредѣлявать полуженіе-то на плоскость-тѫ въ пространство-то, защо-то презъ таквизи три точки може да мине само една плоскость. Презъ двѣ-тѣ отъ тѣзи точки сѣкога можемъ да си представимъ правѫ линіѭ, слѣд. права линія и точка, коя-то е вънъ отъ неѭ, сѫщо опредѣлявать полуженіе-то на плоскость-тѫ въ пространство-то.

2) Тъй както двѣ успорѣдни линіи лежѫть на еднѫ плоскость, а полуженіе-то имъ на тъзи плоскость ся опредѣлява съ три точки, то двѣ успорядни линій опредѣлявать полуженіе-то на плоскость-тѫ.

3) Пресичаніе-то на двѣ плоскости е сѣкога права линія, защо-то ако допустимъ, чи въ просича-

ніе-то имъ има макаръ три точки, кои-то не лежѫть на еднѫ правѫ, то плоскости-тѣ ще ся сливать.

✗ §. 87. *Теорема. Ако права-та е перпендикулярна къмъ двѣ линій, прекарани презъ основѫ-тѫ и на плоскостьтѫ; то тя ще бѫде перпендикулярна сѫщо и къмъ сѣка другѫ линіѭ, коя-то е прекарана презъ основѫ-тѫ и на сѫщѫ-тѫ плоскость.*



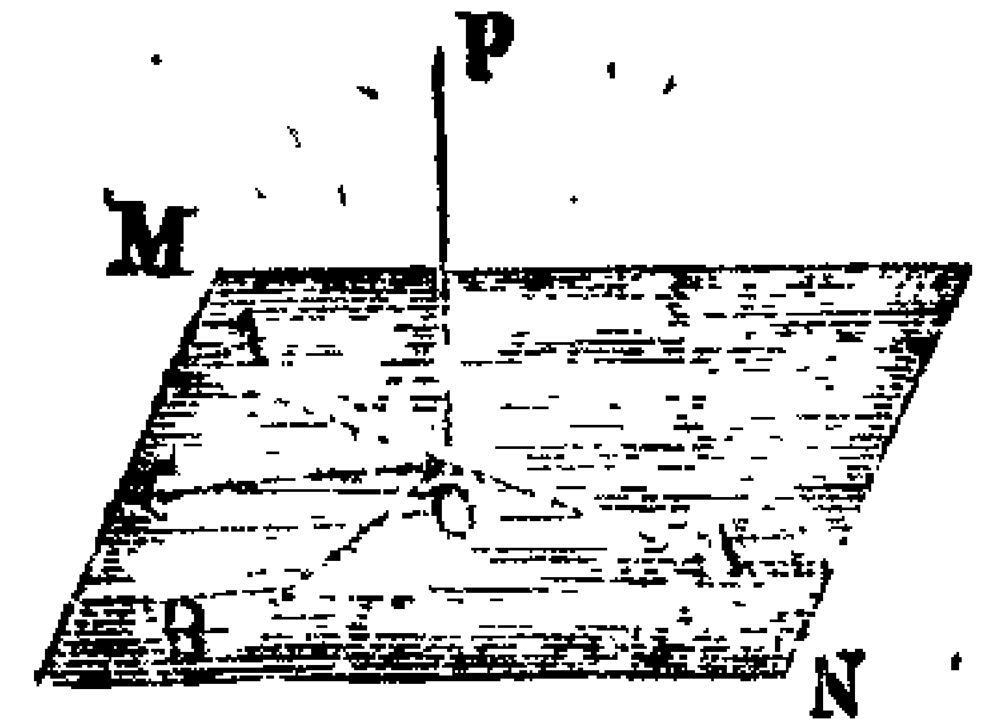
Чрьт. 122.

Нека PO (чьрт. 122) е перпендикулярна къмъ двѣ линіи OA и OB, кои-то сѫ на плоскость MN и минувать презъ основѫ O; трѣба да докажимъ, чи права-та PO е перпендикулярна сѫщо и къмъ сѣкѫ другѫ линіѭ OC, коя-то е прикарана на сѫщѫ-тѫ плоскость презъ основѫ O.

Доказ. Прекарвами на плоскость MN произволнѫ линіѭ AB, коя-то ще пресѣче прави-тѣ OB, OC и OA въ точки B, C и A; послѣ, като продължимъ линіѭ PO отъ другѫ-тѫ странѫ на плоскость-тѫ, отмѣрвами на продълженіе-то ѝ часть OQ=OP и съединявами точки A, B и C съ P и Q. Правоѫгълни-тѣ триѫгълници POB и QOB, кои-то имать равни катоти, ся равни по между си; сѫщо и правоѫгълни-тѣ триѫгълници POA QOA ся равни по между си; слѣд. PB=QB и PA=QA. По тъзи причинѫ триѫгълници PAB и QAB, кои-то имать три-тѣ си страни равни, ся равни по между си; слѣд. ∠PAB=∠QAB. Послѣ, триѫгълници PAC и QAC сѫ равни, защо-то освѣнъ равенство-то на ѫгли PAC и QAC, имами PA=QA и AC=AC; отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува PC=QC. Най послѣ, триѫгълници POC и QOC, кои-то имать общѫ странѫ OC, OP=OQ и PC=QC, сѫ равни; слѣдов.

$\angle POC = \angle QOC$, т. е. линія PO е перпендикулярна къмъ OC.

Ній предположихми, чи линія OC е вътрѣ въ ѫгълъ AOB; нъ доказанна-та теорема е вѣрна и тогава, кога-то линіѭ OC лежи вънъ отъ ѫгълъ AOB (чьрт. 123) *Наистина*, тогава можемъ да продължимъ еднѫ отъ перпендикулярни-тѣ, напр. AO, до нѣкоѭ точка A_1; $\angle POA_1$ ще бѫде правъ, т. е. PO ще бѫде перпендикулярна къмъ A_1O и линіѭ CO ще бѫде вътрѣ въ $\angle BOA_1$, т. е. този случай ся прекарва къмъ пьрвіѭ.

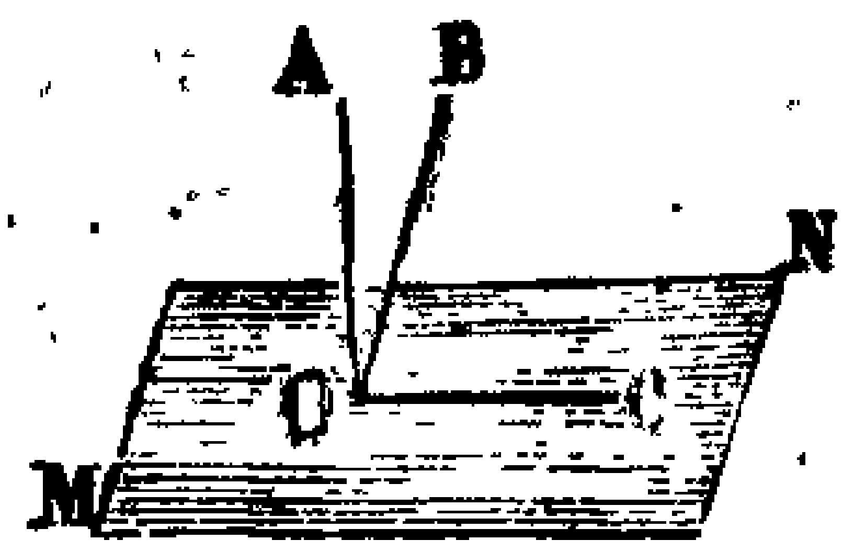


Чьрт. 123.

Линія-та, коя-то е перпендикулярна къмъ всички-тѣ прави, прекарани на плоскость-та презъ основѫ-тѫ ѝ, ся нарича *перпендикулярнѫ къмъ тѣзи плоскость.*

Отъ доказанѫ-тѫ теоремѫ слѣдува, чи, ако линія-та е перпендикулярна къмъ двѣ прави, прекарани на плоскость-тѫ презъ основѫ-тѫ ѝ, тя ще бѫде перпендикулярна и къмъ плоскость-тѫ.

§. 88. *Теорема.* Отъ сѣкѫ точкѫ на плоскость-тѫ може да ся издигне къмъ неѭ само единъ перпендикуляръ.

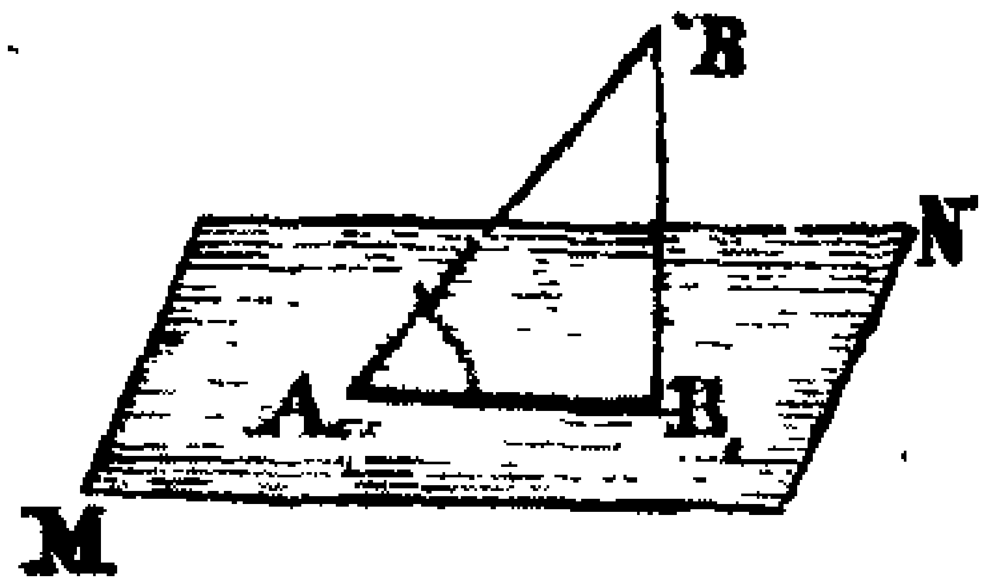


Чьрт. 124.

Нека линіѭ AO (чьрт. 124) е перпендикулярна къмъ плоскость MN; трѣба да докажемъ, чи сѣка друга права OB, коя-то е прекарана презъ основѫ-тѫ O, нѣма да бѫде перпендикулярна къмъ MN.

Доказ. Презъ точки B, O и A си въобразими вторѫ плоскость; нека тя пресича плоскость MN по линія OC. Ако допустимъ, чи и линія OB е перпендикуляръ, то $\angle BOC$ ще бжде правъ и въ сжщо-то време по малъкъ отъ другія правъ жгълъ АОС, кое-то е невъзможно (§. 5).

3) §. 89. *Теорема. Отъ сѣкж точкж, коя-то лежи вънъ отъ плоскость-тж, можемъ да спустимъ врьхъ плоскость-тж само единъ перпендикуляръ.*

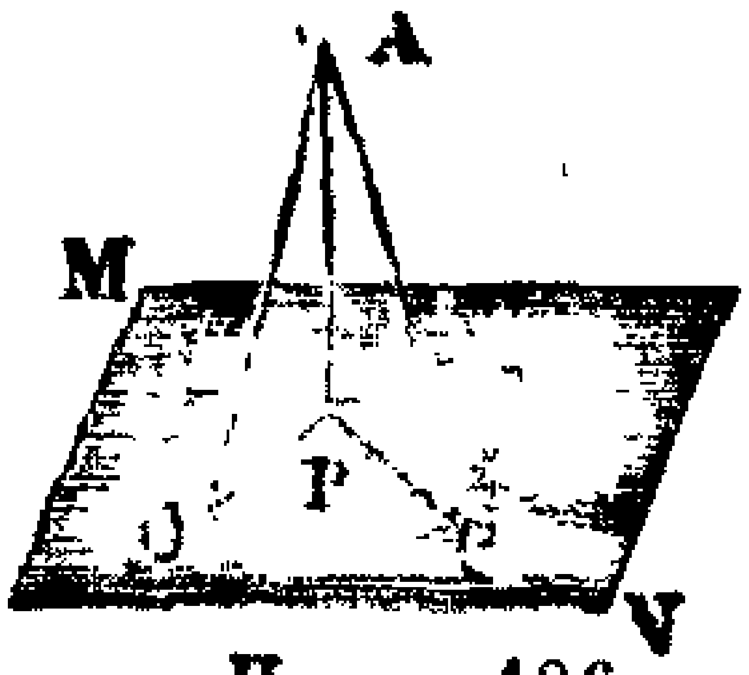


Чьрт. 125.

Нека отъ точка В (чьрт. 125) е спустнатъ перпендикуляръ ВВ, врьхъ плоскость MN; трѣба да докажемъ, чи сѣка друга линія ВА, коя-то е прекарана презъ точкж В, нѣма да бжде перпендикулянa къмъ плоскость MN.

Доказ. Ако считами и АВ за перпендикуляръ, то като съединимъ А съ В,, ще получимъ трижгълникъ, въ кой-то има два прави жгъла В, и А, а това е невъзможно (§. 37 слѣд. 3).

4) §. 90. *Теорема. Ако отъ точкж-тж, коя-то лежи вънъ отъ плоскость-тж, прекарами къмъ нея перпендикуляръ и наклонени, то 1) перпендикуляръ-тъ е по късъ отъ сѣкж наклоненж и 2) равноотдалечени-тѣ отъ перпендикуляръ-тъ наклонени ся равни по между си.*



Чьрт. 126.

1. Нека АР (чьрт. 126) е перпендикуляръ, кой-то е спуснатъ отъ нѣкоѭ точкж А врьхъ плоскость MN, а АС е наклонена; трѣба да докажемъ, чи АС>АР.

Доказ. Съединяваме С съ Р и получваме правожгъленъ трижгълникъ АРС, въ кой-то АС е гипотенуза; слѣд. АС>АР (§. 21).

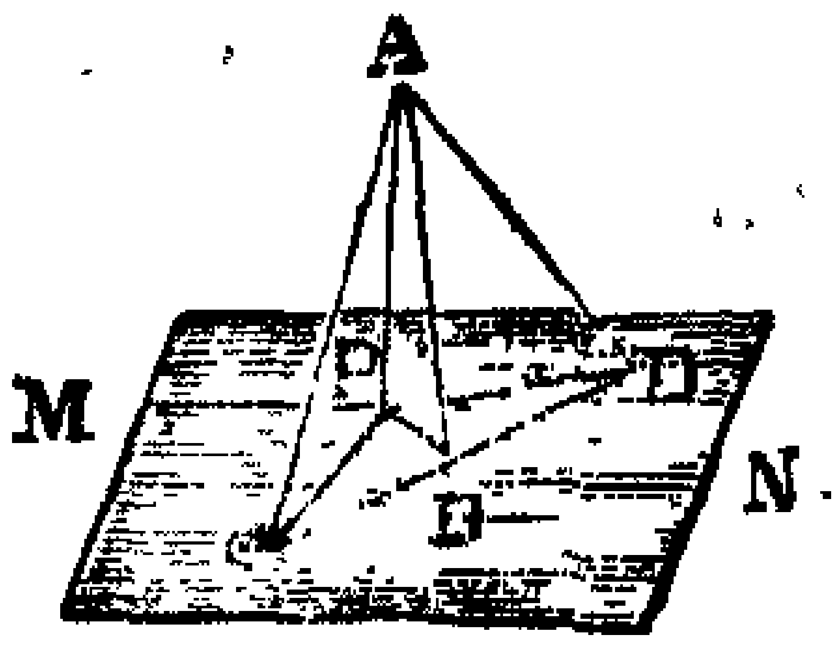
2. Нека АО и АВ, ся двѣ наклонени, равноотдалечени отъ перпендикуляръ-тъ; трѣба да докажемъ, чи АО=АС.

Доказ. Правоѫгълни-тѣ триѫгълници ACP и AOP и AOP имать общъ катетъ AP и, освѣнъ това, $CP=OP$ (спорѣдъ както допущами); слѣд. тѣ ся равни (§. 23) и за това $AO=AC$.

Отъ казано-то слѣдува, чи перпендикуляръ-тъ е най късо-то разстояніе отъ точкѫ-тѫ до плоскость-тѫ; за това разстояніе-то отъ точкѫ-тѫ до плоскость-тѫ ся измѣрва съ перпендикуляръ.

§. 91. *Линія-та, коя-то е прекарана на плоскость-тѫ презъ основѫ-тѫ на наклоненѫ-тѫ перпендикулярно към правѫ-тѫ, коя-то съединява тъзи основѫ съ основѫ-тѫ на перпендикуляръ тъ, ще бѫде перпендикулярна и къмъ наклоненѫ-тѫ.*

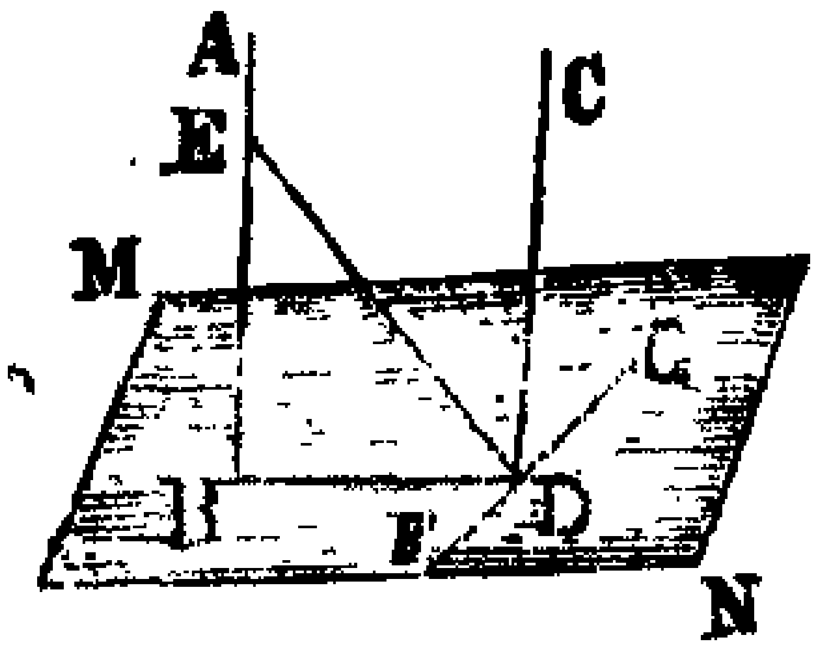
Нека AB (чърт. 127) е наклонена и линія CD е прекарана на плоскость-тѫ презъ основѫ B перпендикулярно къмъ линія BP, коя-то съединява B съ основѫ P на перпендикуляръ AP; трѣба да докажемъ, чи $CD \perp AB$.



Чърт. 127.

Доказ. Отмѣрвами на линія CD части BC и BD равни по между си и съединявами точки C и D съ A и P. Правоѫгълни-тѣ триѫгълници PBC и PBD, кои-то имать равни катети, сѫ равни; слѣд. $PD=PC$ Тъй сѫщо правоѫгълни-тѣ триѫгълници APD и APC, кои-то имать общъ катетъ AP и освѣнъ това $PC=PD$, ся равни; за това $AC=AD$. Най послѣ, триѫгълници ABC и ABD ся равни, защо-то имать общѫ странѫ AB и освѣнъ това $CB=BD$ и $AC=AD$. Отъ равенство-то на тѣзи триѫгълници слѣдува: $\angle ABC=\angle DBA$, т. е. линіѭ AB е перпендикулярна къмъ CD.

§. 92. *Теорема. Ако една отъ успорѣдни-тѣ линіи е перпендикулярна къмъ плоскость-тѫ, то и другѫ-тѫ ще бѫде перпендикулярна къмъ неѭ.*



Чърт. 128.

Нека линіи AB и CD (чърт. 128) сѫ успорѣдни по между си и права-та AB е перпендикулярна къмъ плоскость MN; трѣба да докажемъ, чи и линія CD е перпендикулярна къмъ MN.

Доказ. Да си представимъ плоскость-тѫ, въ коя-то лежѫтъ успорѣдни-тѣ; тъзи плоскость ще присѣче MN по линіѭ BD. Къто прекарами на плоскость MN линіѭ FG, перпендикулярнѫ къмъ BD, и къто съединимъ D съ нѣкоѭ точкѫ E на правѫ-тѫ AB, ще видимъ, (§ 91) чи линіѭ FG е перпендикулярна къмъ двѣ линіи BD и ED, кои-то лежѫтъ на плоскось ABDC, слѣд. тя ще бѫде перпендикулярна и къмъ плоскость ABDC, а спорѣдъ това и къмъ линіѭ CD, коя-то е на сѫщѫ-тѫ плоскость (§. 87). Нъ спорѣдъ успорѣдность-тѫ на AB и CD, линія BD, коя-то е перпендикулярна къмъ AB, ще бѫде перпендикулярна и къмъ CD (§. 31). И тъй линіѭ CD е перпендикулярна къмъ двѣ линіи BD и FD, кои-то лежѫтъ на плоскость MN; слѣд. тя е перпендикулярна и къмъ плоскость MN (§. 87)

§. 93. *Теорема. Двѣ линіи, кои-то сѫ перпендикулярни къмъ нѣкоѭ плоскость, успорѣдни ся по между си.*

Нека линіи AB и CD (чърт. 128) сѫ перпендикулярни къмъ плоскость MN; трѣба да докажемъ, чи тѣ сѫ успорѣдни по между си.

Доказ. Да допустимъ, чи линіи AB и CD не сѫ успорѣдни и да си въобразимъ презъ точкѫ B линіѭ успорѣднѫ на CD. Тъзи линія спорѣдъ §. 92 ще бѫде перпендикулярна къмъ плоскость MN, тъй щото въ точкѫ B ще бѫдѫтъ два перпендикуляра къмъ плоскость MN, кое-то е невъзможно (§. 88).

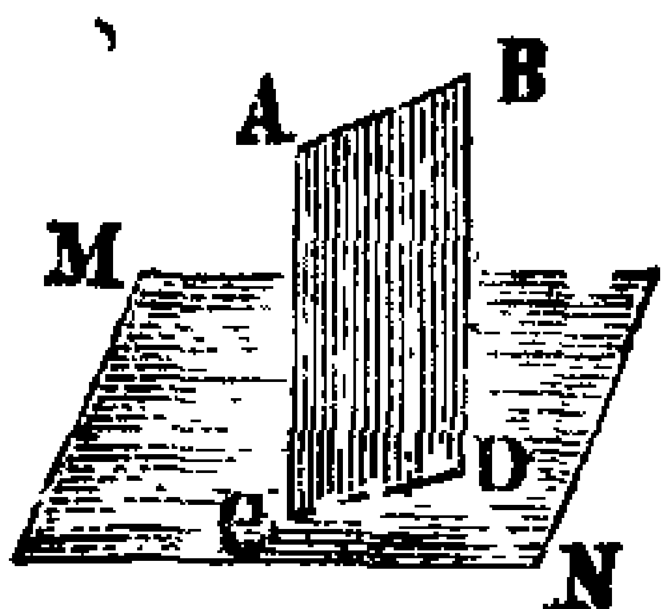
§. 94. *Теорема. Двѣ линіи въ пространство-то* AB и CD, *кои-то ся успорѣдни на третѫ линіѭ* MN *успорѣдни сѫ и по между си.*

Доказ. Къто си въобразимъ плоскость, перпендикулярна къмъ правѫ-тѫ MN забелѣзваме, чи линіи AB и CD сѫ перпендикулярни къмъ тъзи плоскость (§. 92); нъ ако линій AB и CD сѫ перпендикулярни все къмъ еднѫ плоскость, тѣ сѫ успорѣдни по между си (§. 93).

Права линіѭ и плоскость, кои-то не ся срѣщать, колко-то и да ги продължавами, ся наричать успорѣдни.

§. 95. *Теорема. Линія-та, коя-то е успорѣдна съ нѣкоѭ плоскость, намира ся на вредъ на еднакво разстояніе отъ неѭ.*

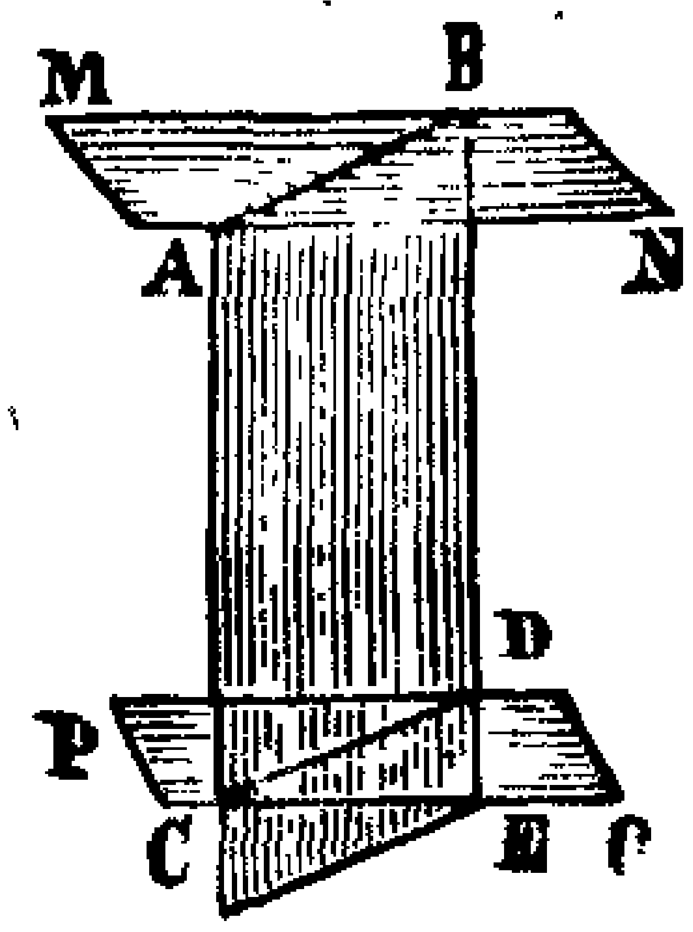
Нека AB (чърт. 129) е линія, успорѣдна съ плоскость MN; къто спустимъ отъ нѣкой двѣ нейни точки A и B перпендикуляри AC и BD врьхъ плоскость MN, ще можемъ да докажемъ, чи AC=BD.



Чърт. 129.

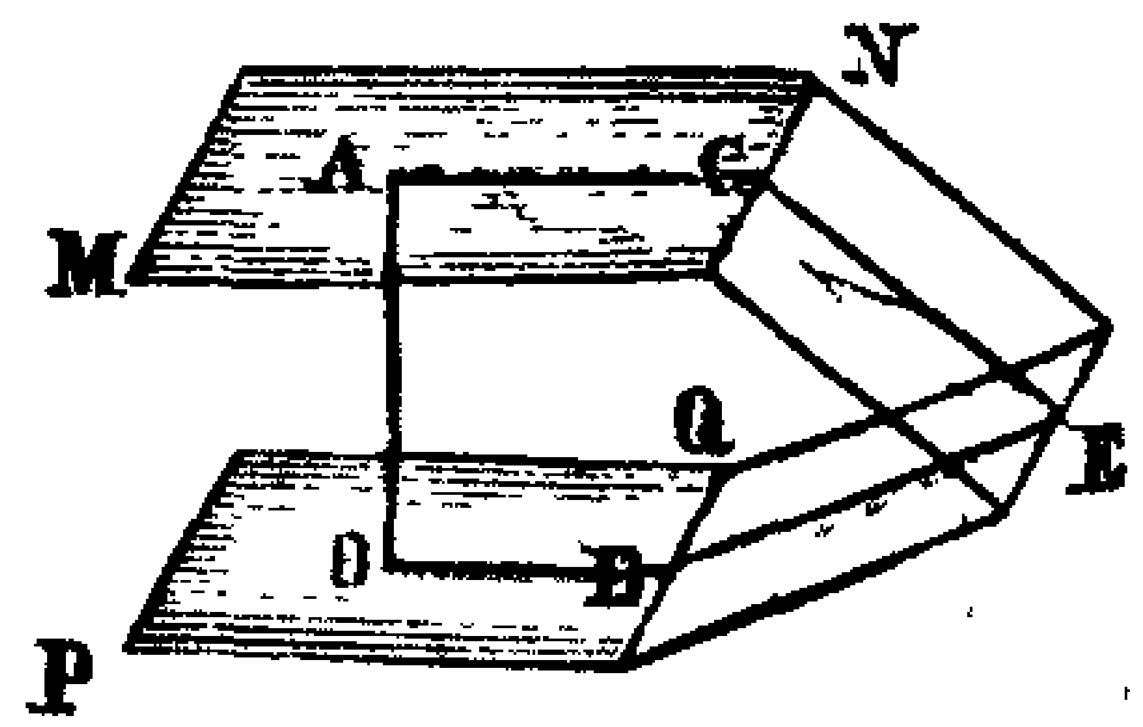
Доказ. Тъй къто AC и BD сѫ перпендикулярни къмъ плоскость MN, тѣ сѫ успорѣдни по между си (§. 93). Да си представимъ плоскость презъ AC и BD; на тъзи плоскость ще ся намира линіѭ AB, защо-то тя има двѣ общи точки съ неѭ A и B; освѣнъ това тъзи плоскость ще присѣче плоскость MN по линіѭ CD, успорѣдна на AB; защо-то, ако допустимъ, чи тѣзи двѣ линіи ся пресичатъ, ще излѣзи, чи AB пресича плоскость MN, кое-то е невѣрно. Нъ ако AB е успорѣдна на CD и AC успорѣдна на BD, то AC=BD (§. 34).

§. 96. Двѣ плоскости, кои-то не ся срѣщать,



Чърт. 130.

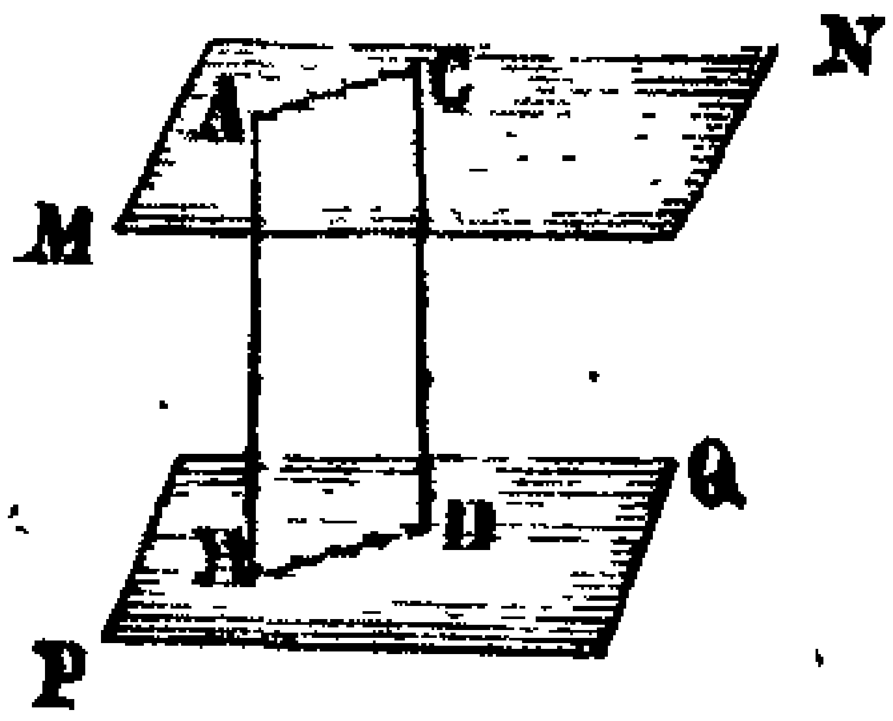
колко и да ги продължавами, ся наричатъ *успорѣдни*. Отъ това слѣдува, 1) двѣ успорѣдни плоскости MN и PQ (чърт. 130) ся пресичать отъ третѭ плоскость AE по линіи AB и CD успорѣдни по между си. Наистина, тъй като AB и CD лежѫть на плоскости MN и PQ, то, ако допустимъ, чи тѣ ся пресичатъ, ще излѣзи, чи и плоскости MN и PQ ся пресичать, а тѣзи плоскости ся успорѣдни по между си. 2) Двѣ плоскости MN и PQ (чърт. 131), кои-то ся перпендилярни къмъ правѫ AB, успорѣдни ся по между си. Наистина, ако тѣзи плоскости ся срѣщаха, то, като прекарами презъ AB и презъ нѣкоѭ точкѫ E на срѣщаніе-то имъ плоскость CABDE, ще излѣзи, чи отъ точкѫ E сѫ спустнати два перпендикуляра врьхъ линіѭ AB, а това е невъзможно (§. 25).



Чърт. 131.

§. 97. *Теорема. Отсѣчки-тѣ на успорѣдни-тѣ линіи, кои-то ся заключени между двѣ успорѣдни плоскости, сѫ равни по между си.*

Нека AB и CD (чърт. 132) сѫ отсѣчки на двѣ успорѣдни линіи заключени между двѣ успорѣдни плоскости MN и PQ; трѣба да докажемъ, чи AB=CD.



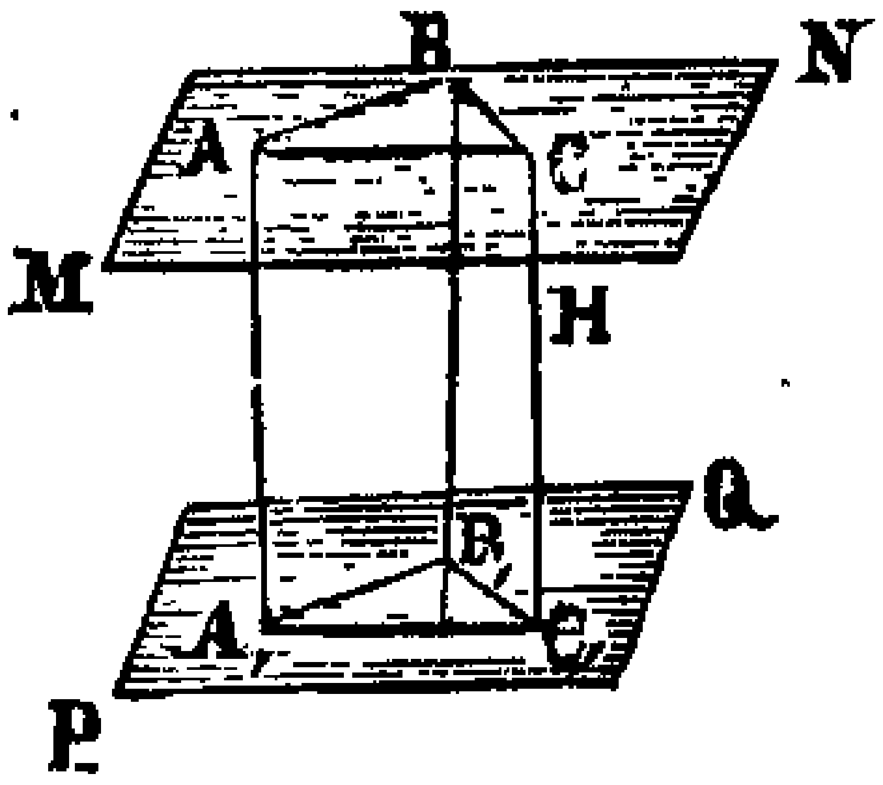
Чърт. 132.

Доказ. Като прекарами плоскость презъ линіи AB и CD, тя ще пресиче плоскость MN и PQ по линіи AC и BD, кои-то ще бѫдѫть успорѣдни по между си (§. 96 слѣд. 1). Нъ ако $AC \| BD$ и $AB \| CD$, то отсѣчки-тѣ на двѣ успорѣдни между двѣ други успорѣдни сѫ равни; (§. 34) слѣд. $AB = CD$.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи *разстоянія-та между двѣ успорѣдни плоскости сѫ навредъ еднакви,* защо-то перпендикуляри-тѣ, кои-то ся спуснати отъ двѣ точки на еднѫ-тѫ плоскость врьхъ другѫ-тѫ, сѫ успорѣдни (§. 93), слѣд. спорѣдъ доказаннѫ-тѫ теоремѫ, тѣ ся равни по между си.

§. 98. *Теорема. Двѣ плоскости сѫ успорѣдни, ако отсѣчки-тѣ на три успорѣдни между тѣхъ линіи, кои то не лежѫть на еднѫ плоскость, сѫ равни.*

Нека имами двѣ плоскости, MN и PQ (чьрт. 133); между кои-то сѫ намирать три равни успорѣдни отсѣчки $AA_,$, $BB_,$ и $CC_,$, и тѣзи отсѣчки не лежѫть на еднѫ плоскость; трѣба да докажемъ, чи плоскость MN е успорѣдна на плоскость PQ.



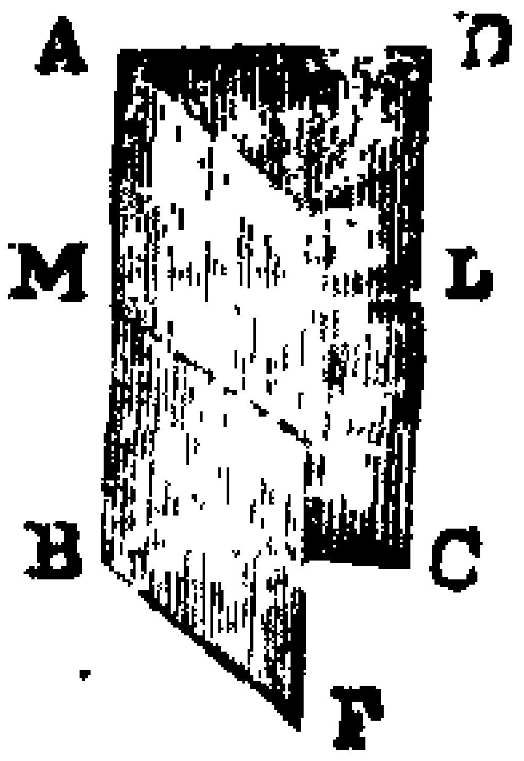
Чьрт. 133.

Доказ. Съединявами точки A и B по между имъ съ правѫ линіѭ AB и презъ линіѭ AB прекарвами плоскость, успорѣдна на плоскость PQ. Ако допустимъ, чи тъзи плоскость не минува презъ точкѫ c, а презъ нѣкоѭ точкѫ H по низко отъ C, то отъ успорѣдность-тѫ на плоскости-тѣ ще излѣзи $BB = C_,H$ (§. 97); нъ това е невѣрно, защо-то $C_,H$ е по малка отъ CC, а слѣд. и отъ равнѫ-тѫ ѝ $BB_,$. По сѫщій-тъ начинъ ще ся докаже, чи плоскость-та не може да мине презъ нѣкоѭ точкѫ по високо отъ точкѫ c. И тъй успорѣдна-та плоскость трѣба да премине презъ точкѫ c; нъ тогава тя ще ся слѣе съ плоскость MN, защо-то презъ три точки A, B и C, кои-то не лежѫть на еднѫ правѫ, може да ся прекара само една плоскость. Отъ това слѣдува, чи плоскость MN е успорѣдна на PQ.

ГЛАВА II.

ѪГЪЛИ, ОБРАЗУВАНИ ОТЪ ПЛОСКОСТИ.

§. 99. Неопредѣлена-та часть отъ пространството, коя-то е между двѣ пресѣчени плоскости ABCD и ABFE (чърт 134) ся нарича *двуграненъ ѫгълъ;* плоскости ABC и ABFE ся наричать негови *страни*, а линіѭ-та на пресичаніе-то имъ — *рѫбъ* или *върхъ* на ѫгълъ-тъ.



Чърт. 134.

Двугранній-тъ ѫгълъ ся означава съ четери букви CBAE, нарѣдени тъй, що-то букви-тѣ, кои-то сѫ при върхъ-тъ, ся турѭть между други-тѣ двѣ букви.

Ако отъ нѣкоѭ точкѫ M на рѫбъ AB прекарами къмъ него перпендикуляри ML и MN, кои-то лежѫть еднѫ-тѫ на плоскость AC, а другѫ на плоскость AF, то ѫгълъ LMN, кой-то е съставенъ отъ тѣзи перпендикуляри, ся нарича *линеенъ ѫгълъ* ся двуграннія.

Плоскость-та, коя-то минува презъ лиціи ML и MN, ще бѫде перпендикулярна къмъ рѫбъ AB (§. 87); слѣд. линейнія ѫгълъ ся образува сѫщо и отъ пресичаніе на страни-тѣ на двугранніа ѫгълъ съ плоскость, перпендикулярна къмъ рѫбъ-тъ.

Отъ пресичаніе-то на двѣ плоскости ся образувать четери двугранни ѫгъла; два-та отъ тѣхъ, кои-то иматъ само общъ върхъ и общѫ странѫ, ся наричать *смежни*, а тѣзи, кои-то иматъ само общъ върхъ — *вертикални*.

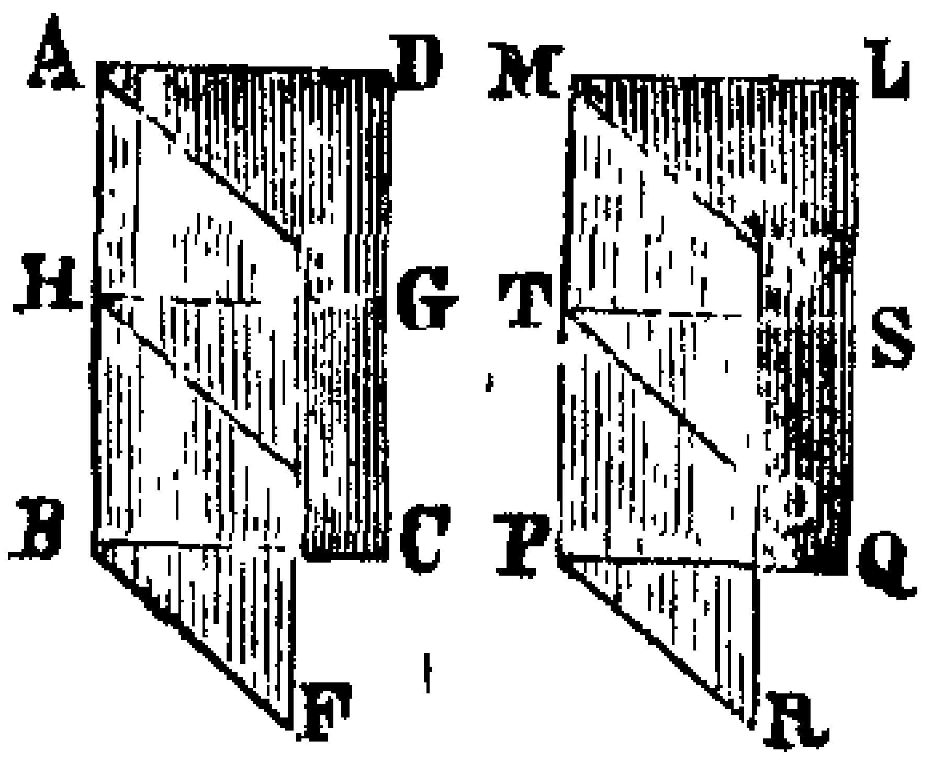
Кога два смежни ѫгъла ся равни по между си, то сѣкій отъ тѣхъ ся нарича *правъ*, а плоскости-тѣ, кои-то го образувать, — *перпендикулярни по между си*. 7)

§. 100. *Теорема. Двугранни-тѣ ѫгли ся равни, кога-то линейни-тѣ имъ ѫгли ся равни.* и обратно

Нека DABF и LMPR (чьрт. 135) сѫ два двугранни ѫгъла, а STO и GHK линейни-тѣ имъ ѫгли; трѣба дѫ докажемъ, чи ако

$$\angle STO = \angle GHK,$$

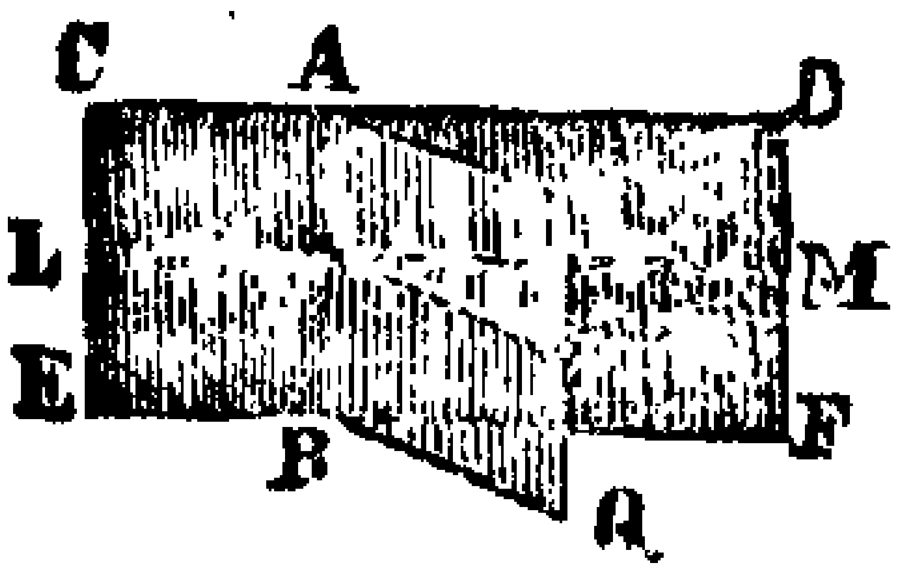
то и двугранни-тѣ ѫгли ще бѫдѫтъ равни по между си.



Чьрт. 135.

Доказ. Налагами двугранніа ѫгълъ LMPQ на ADBF тъй, що-то ръбове-тѣ имъ да съвпаднать и точка T да надне на H и линія TS да иде по HG; тогава плоскость MQ ще съвпадне съ плоскость AC, защо-то и двѣ-тѣ плоскости минувать презъ три точки A, H и G, кои-то не лежѫть на еднѫ правѫ линіѭ TO при налеганіе-то нѣма да бѫде вънъ отъ плоскость AF, защо-то линейни-тѣ ѫгли ся равни; тъзи линіѭ ще ся слѣе съ линіѭ HK, защо-то и двѣ-тѣ ся перпендикулярни къмъ AB въ точкѫ H. Тогава плоскость MK ще съвпадне съ плоскость AF, защо-то и двѣ-тѣ минувать презъ три точки A, H и K, кои-то не лежѫть на еднѫ правѫ. И тъй страни-тѣ на двугранни-тѣ ѫгли съвпадать; слѣд. тѣзи ѫгли ся равни.

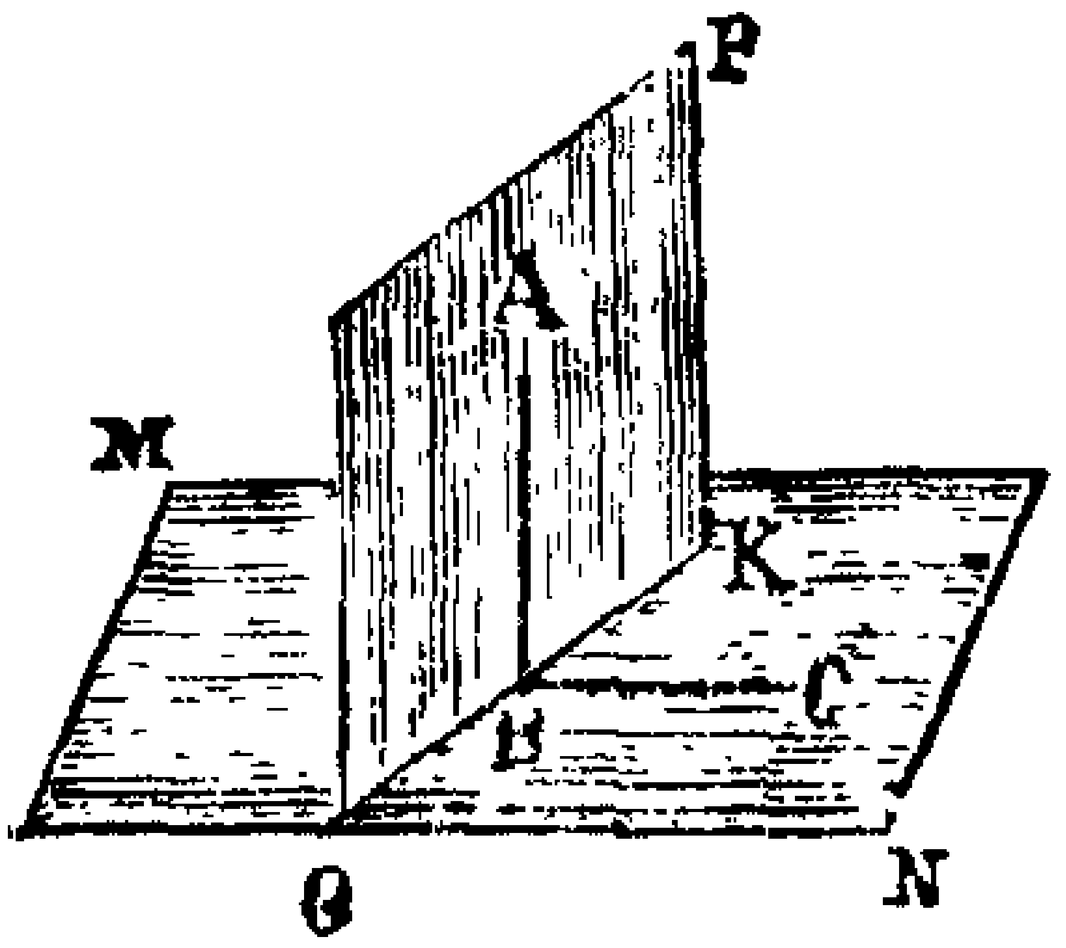
Отъ тъзи теоремѫ слѣдва: 1) ако линейнія ѫгълъ е правъ, то и двугранніа е *правъ*. Наистина, на смежни-тѣ двугранни ѫгли CABQ и DABQ (чьрт. 136)



Чърт. 136.

отговарять смежни линейни ѫгъли LNP и MNP; разумѣва ся, чи кога-то смежни-тѣ линейни ѫгъли ся равни (прави), то и смежни-тѣ двугранни ѫгъли ще бѫдѫть равни (прави). 2) Двугранни-тѣ ѫгъли съ успорѣдни страни ся равни, защо-то линейни-тѣ имъ ѫгъли ся равни, като ѫгъли съ успорѣдни страни (§. 36).

§. 101. *Теорема.* Плоскость-та, коя-то минува презъ линіѭ, перпендикулярна къмъ даденѫ-тѫ плоскость, ще бѫде перпендикулярна къмъ тъзи плоскость. Нека плоскость PQ (чърт. 137) минува презъ линіѭ AB, перпендикулярна къмъ плоскость MN; трѣба да докажемъ, чи плоскости MN и PQ сѫ перпендикулярни.



Чърт. 137.

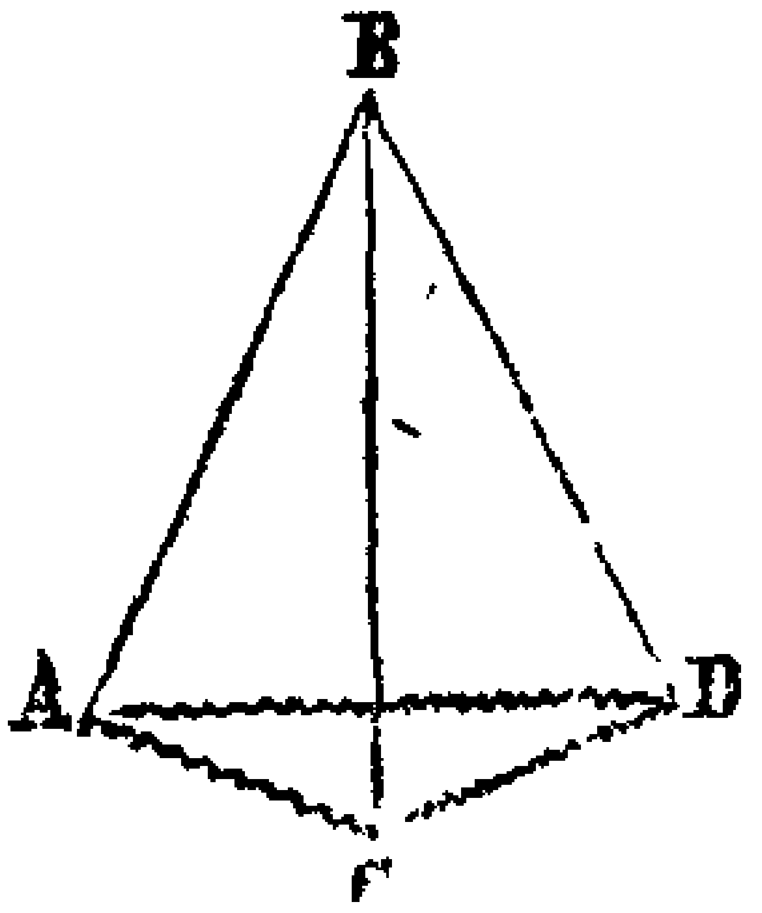
Доказ. Прекарвами на плоскость MN линія Bc, перпендикулярнѫ къмъ линіѭ QK, въ коя-то ся пресичать двѣ-тѣ плоскости. Тъй като линіѭ AB е перпендикулярна къмъ плоскость MN, то ѫгълъ ABC е правъ; нъ той е линеенъ ѫгълъ на двуграннія PKQN, слѣд. този двугранненъ ѫгълъ е правъ (§. 100, слѣд. 1), т. е. плоскость PQ е перпендикулярна къмъ MN.

§. 102. Отъ всички-тѣ посоки, кои-то може да има права-та линія въ пространство-то, една заслужва особѣнно вниманіе: тя е посока-та, коя-то пріема сѣкій конецъ, ако единъ-тъ му край е неподвиженъ, а къмъ другіѭ е завързано нѣкое тежко тѣло, кое-то свободно виси. Тъзи посока на конецъ-тъ ся нарича *отвѣснѫ или вертикалнѫ линіѭ.*

Плоскость-та, коя-то е перпендикулярна къмъ вертикалнѫ-тѫ линіѭ, ся нарича *горизонтална плоскость*, а сѣка права, коя-то лежи въ горизонталнѫ-тѫ плоскость, — *горизонталнѫ линіѭ*. Повърхнина-та на водѫ-тѫ, коя-то е въ нѣкой сѫдъ съвсѣмъ спокойно, представя горизонталнѫ плоскость.

Плоскость-та, коя-то минува презъ вертикалнѫ-тѫ линіѭ, ся нарича *вертикалнѫ плоскость*. Явно е, чи сѣка вертикална плоскость е перпендикулярна къмъ горизонталнѫ-тѫ (§. 101).

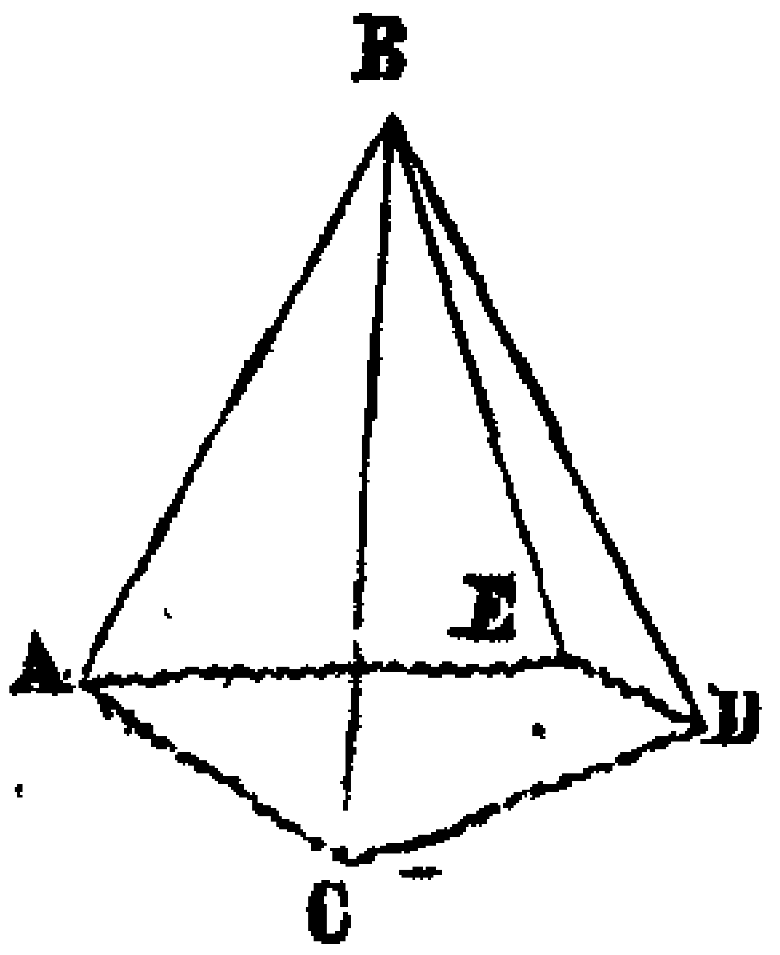
§. 103. Неопредѣлена-та часть отъ пространство-то, коя-то е между три плоскости ABC, CBD и DBA (чърт. 138), пресѣчени въ еднѫ точкѫ B, ся нарича *триграненъ ѫгълъ*; точка B ся нарича *върхъ* на ѫгълъ-тъ, линіи AB, CB и DB, по кои-то ся пресичать плоскости-тѣ, сѫ *рѫбове* на ѫгълъ-тъ, а ѫгли-тѣ ABC, CBD и DBA — негови *страни*.



Чърт. 138.

Ако ся срѣщнать повече отъ три плоскости въ еднѫ точкѫ, то неопредѣлена-та часть отъ пространство-то, коя-то остава между тѣхъ, ся нарича изобщо *многогранненъ ѫгълъ*.

Многограннія ѫгълъ, какъ-то и триграннія, ся означава или съ еднѫ буквѫ, коя-то е при върхъ-тъ му, напр. ѫгълъ B, (чърт. 139) или заедно съ тъзи буквѫ ся изказвать и други-тѣ, кои-то ся намирать на рѫбове-тѣ му, напр. ѫгълъ BACDE.



Чърт. 139.

ГЛАВА III.

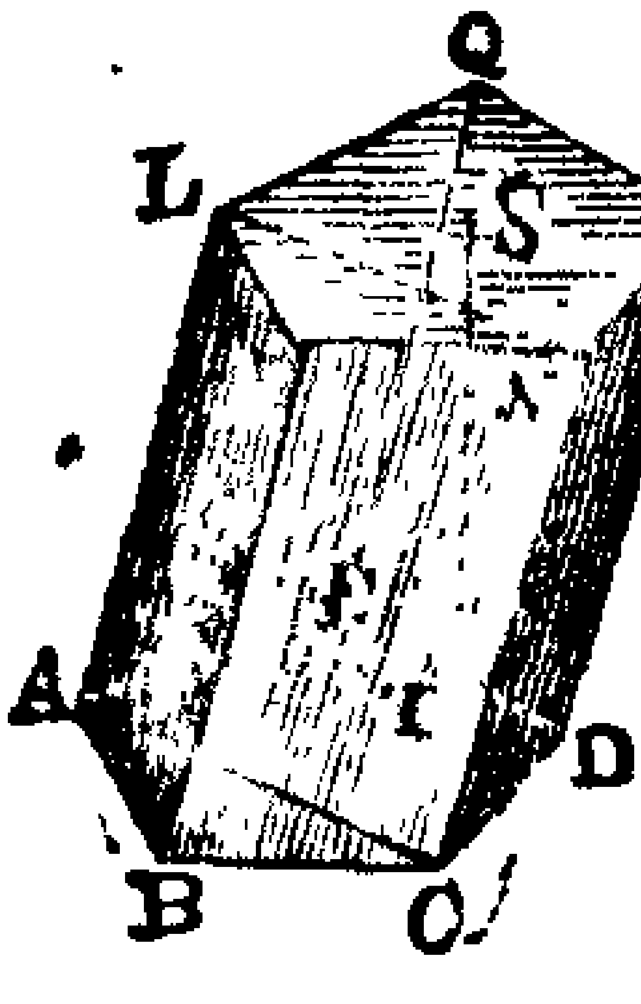
ЗА МНОГОГРАННИЦИ-ТѢ.

§. 104. Часть отъ пространство-то, заградена отъ всички страни съ многоѫгълници, ся нарича *многогранникъ*; многоѫгълници-тѣ ся наричать *страни*, страни-тѣ на многоѫгълници-тѣ — *рѫбове*, а върхове-тѣ на многоѫгълници-тѣ — *върхове* на многогранникъ-тъ.

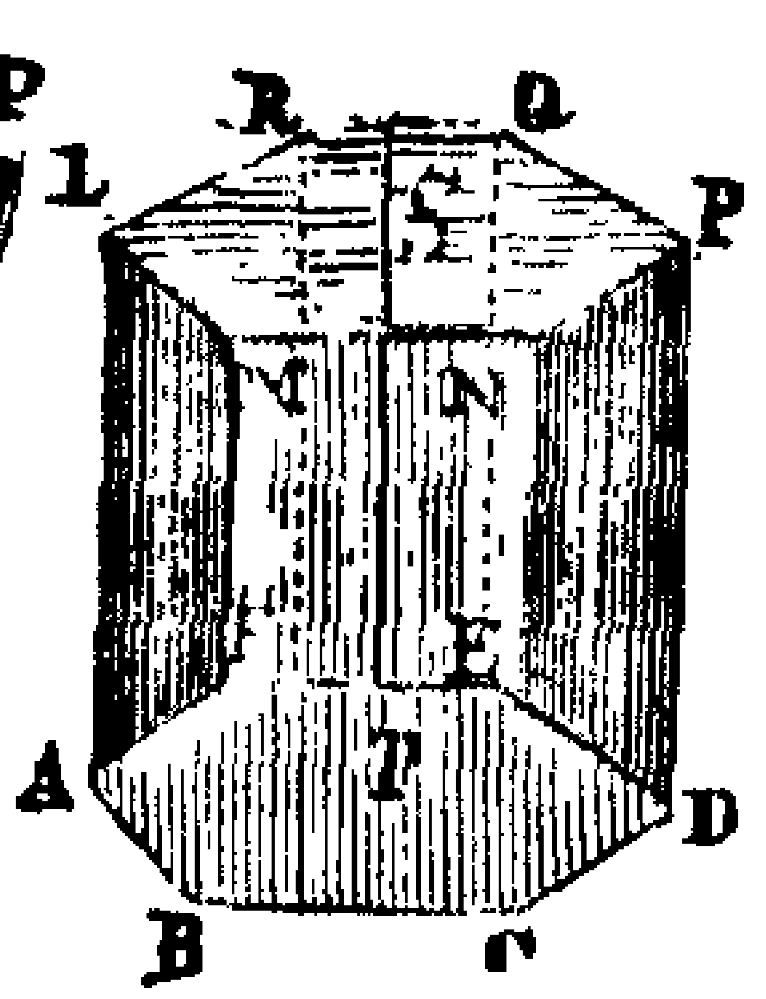
Сумма-та отъ страни-тѣ на многогранникъ-тъ ся нарича неговѫ *повърхнинѫ*.

Най простія отъ всички-тѣ многогранници е многогранникъ съ четери страни, защо-то само двѣ или три плоскости не могѫть да заградіѫть пространство-то отъ всички страни. Многогранникъ-тъ съ четери страни ся нарича *четверогранникъ* или *тетраедръ*, съ шесть — *шестогранникъ* или *ексаедръ*, съ осьмъ *осмогранникъ* или *октаедръ*, съ дванадесять страни *дванадесятогранникъ* или *додекаедръ*, съ двадесять страни — *двадесятогранникъ* или *икосаедръ*.

§. 105. Многогранникъ ABCDLMNPQ (чърт. 140), на кой-то двѣ-тѣ страни ABCDE и LMNPQ сѫ два равни многоѫгълника разположени въ плоскости успорѣдни по между си, а други-тѣ страни ABML, BCNM . . . . ся параллелограми, ся нарича *призмѫ*. Успорѣдни-тѣ многоѫгълници ABCDE и LMNPQ ся наричать *основи* на призмѫ-тѫ, а разстояніе-то между тѣхъ,



Чрът. 140.



Чърт. 141.

т. е. перпендикуляръ ST, кой-то е спустнатъ отъ нѣкоіѫ точкѫ на еднѫ-тѫ основѫ върхъ другѫ-тѫ, — *височинѫ* на призмѫ-тѫ.

Явно е, чи околоврьстни-тѣ рѫбове на призмѫ-тѫ сѫ успорѣдни по между си (§. 94); освѣнъ това тѣ сѫ равни по между си, защо-то сѫ заключени между успорѣдни плоскости (§. 97).

Ако основи-тѣ на призмѫ-тѫ сѫ триѫгълници, тя ся нарича *триѫгълнѫ*, ако сѫ четвероѫгълници — *четвероѫгълнѫ* и пр.

Плоскость ACNL (чьрт. 140), коя-то минува презъ два околоврьстни рѫба на призмѫ-тѫ, кои-то не сѫ единъ до другій, ся нарича *діагоналнѫ плоскость*. Явно е, чи діагонални-тѣ плоскости, кои-то сѫ прекарани все презъ единъ рѫбъ, раздѣлять сѣкѫ призмѫ на триѫгълни призми съ еднакви височини.

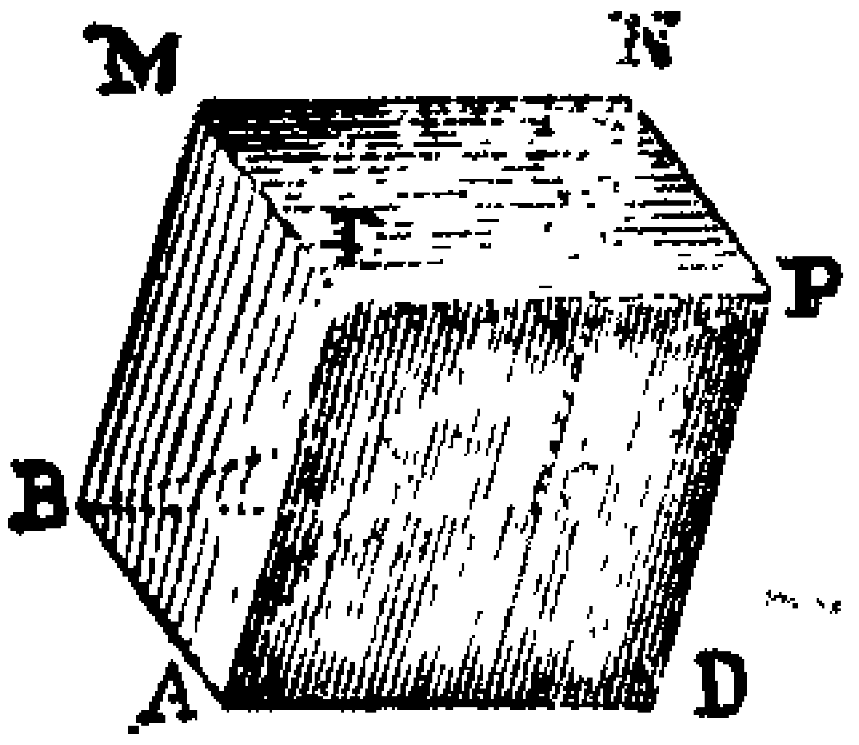
Призма-та ся нарича наклоненѫ (чьрт. 140), кога-то околоврьстни-тѣ рѫбове не сѫ перпендикулярни къмъ основи-тѣ, и права (чьрт. 141), кога-то тѣ сѫ перпендикулярни къмъ основи-тѣ.

Явно е, чи околоврьстни-тѣ страни на правѫ-тѫ призмѫ ADLP (чьрт. 141) сѫ правоѫгълници.

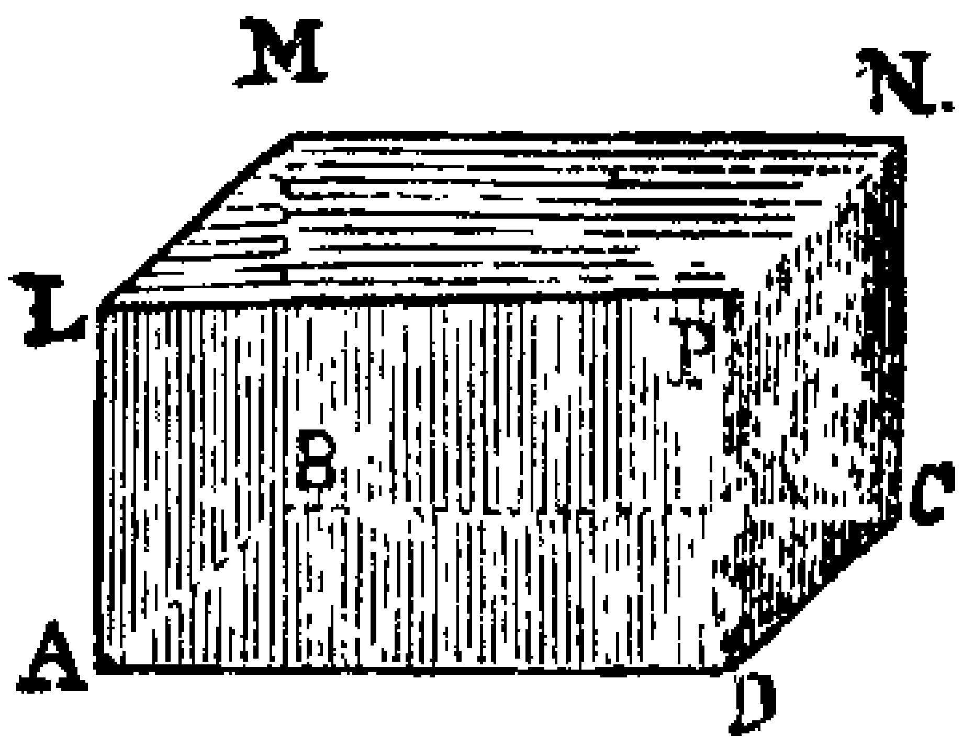
Прави-тѣ призми съ равни основи и височини сѫ равни, защо-то при налаганіе-то имъ съвпадать.

Права-та призма, на коя-то основи-тѣ сѫ правилни многоѫгълници, ся нарича *правилна*; линія-та, коя-то съединява центрове-тѣ на двѣ-тѣ основи, ся нарича ось на призмѫ-тѫ.

§. 106. Призма ABCDLMNP (чьрт. 142), на коя-то основи-тѣ ABCD и LMNP сѫ параллеллограмми, ся нарича *параллелепипедъ*. Линіѭ BP, коя-то съединява върхове-тѣ на два срѣщуположни тригранни ѫгъла, ся нарича *діагональ* на параллелепипедъ-тъ. Правія параллелепипедъ ABCDLMNP (чьрт. 143),



Чьрт. 142



Чьрт. 143.

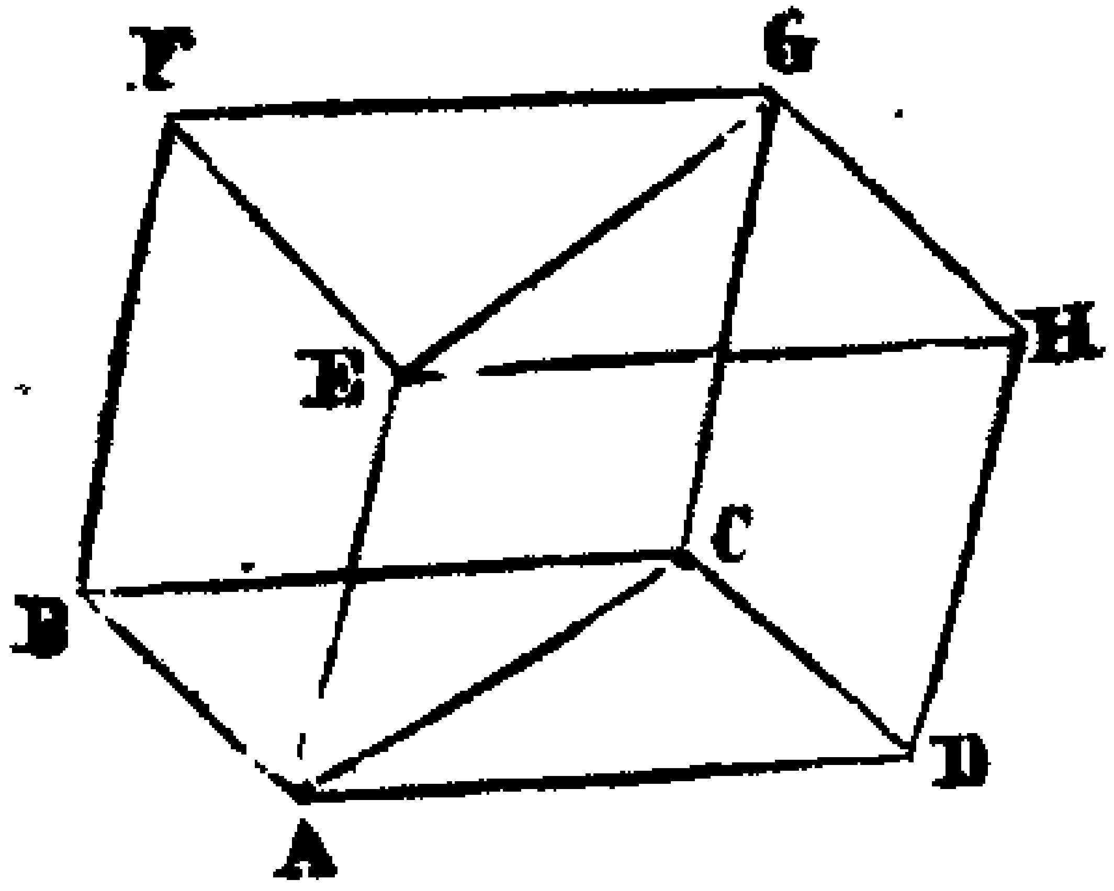
ен кой-то основи-тѣ сж правожгълници, ся нарича *правожгъленъ параллелепипедъ*; три-тѣ му ржба AB, AD и AL, кои-то излизать отъ единъ вьрхъ, ся наричать негови измѣрванія.

Правожгълнія параллелепипедъ, на кой-то всички-тѣ три измѣрванія сж равни, ся нарича *кубъ*. Явно е, чи всички-тѣ страни на кубъ-тъ сж равни квадрати.

Параллелепипедъ-тъ, на кой-то всички-тѣ страни сж ромбове, ся нарича *ромбоедръ*.

§. 107. *Теорема. Въ сѣкій параллелепипедъ срѣщуположни-тѣ страни ся равни и успорѣдни.*

Нека AG (чьрт. 144) е параллелепипедъ; трѣба да докажемъ, чи параллелограмми EFGH и ABCD сж равни и плоскости-тѣ имъ успорѣдни.



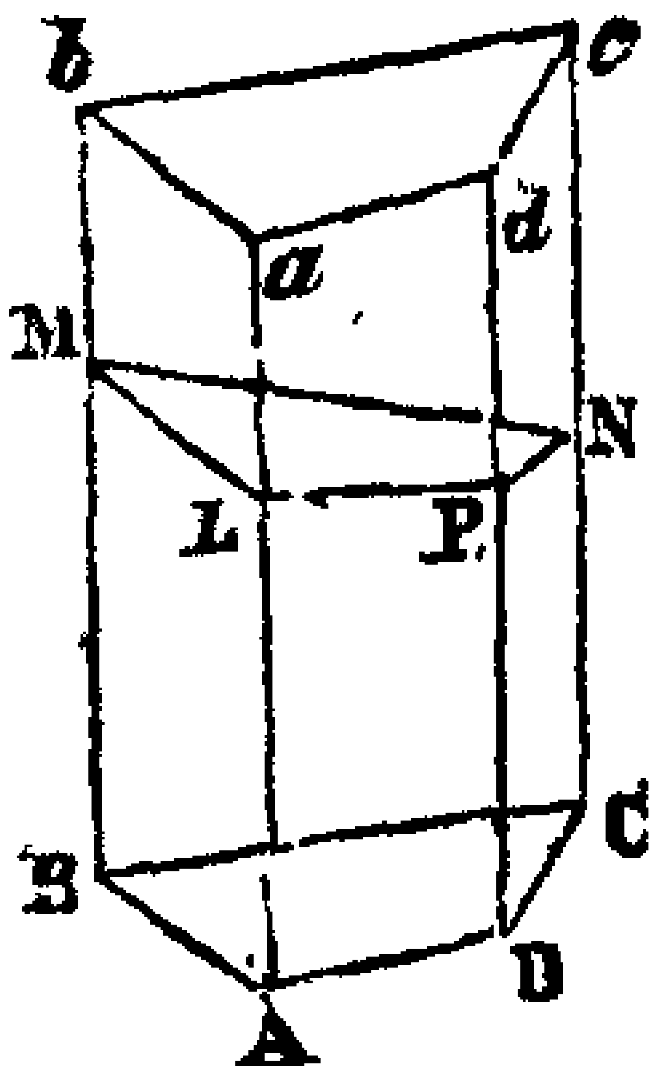
Чьрт. 144.

Доказ. Въ параллелограммъ AEHD страна AE е равна и успорѣдна на HD (§. 40). Сжщо въ параллелограммъ HDGC страна HD е равна и успорѣдна на CG. И тъй отсѣчки-тѣ на три успорѣдни AE, HD и CG между плоскости ABCD и EFGH сж равни; слѣд. ABCD е успорядна на EFGH (§. 98).

За да докажемъ, чи страна ABCD е равна на

EFGH, прекарвами плоскость презъ AE и CG; тъзи плоскость ще пресѣче ABCD и EFGH по линіѫ AC и EG успорѣдни по между си (§. 96 слѣд. 1); освѣнъ това линіѫ AC е равна на EG (§. 34). Триѫгълници ABC и EFG сѫ равни, защо-то AB=EF, AC=EG и BC=FG (§. 18); нъ тѣзи триѫгълници сѫ полвини отъ параллелограмми ABCD и EFGH (§. 40), слѣд. и цѣли-тѣ параллелограмми сѫ равни по между си.

§. 108. *Теорема. Околовьрстна-та повьрхнина на сѣкѫ призмѫ е равна на околовьрстнія ѝ рѫбъ, умноженъ съ периметръ-тъ на перпендикулярно-то сѣченіе.*



Чьрт. 145.

Нека ABCDabcd (чьрт. 145) е каква да-е призма и LMNP е сѣченіе, перпендикулярно къмъ околовьрстни-тѣ ѝ рѫбове; трѣба да докажемъ, чи околовьрстна-та повьрхнина на призмѫ-тѫ е равна на (LM+MN+NP+PL) Aa.

Доказ. Околовьрстна-та повьрхнина на призмѫ-тѫ е съставена отъ лица-та на параллелограмми AadD, DdcC,CcbB и BbaA; тѣзи лица ся равни на Aa.LP, Dd.PN, Cc.MN и Bb.ML; слѣд. околовьрстна-та повьрхнина на призмѫ-тѫ ще бѫде равна на

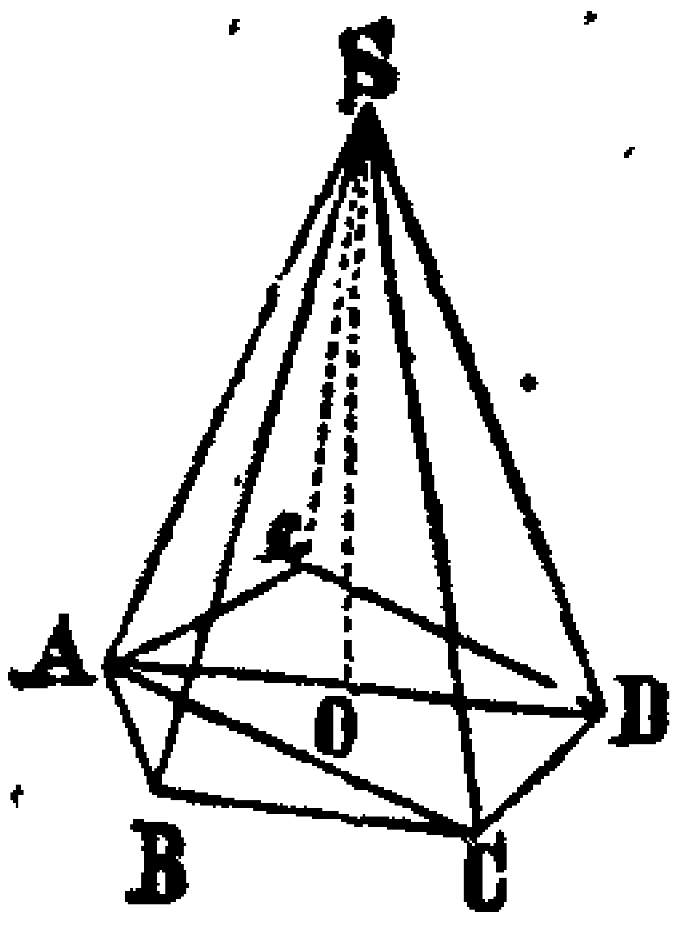
$$Aa.LP+Dd.PN+Cc.MN+Bb.ML$$

Нъ околовьрстни-тѣ рѫбове на призмѫ-тѫ сѫ равни по между си, т. е. Dd=Aa, Cc=Aa и Bb=Aa; слѣд. околовьрстна-та повьрхнина на призмѫ-тѫ ще бѫде равна на

$$Aa.LP+Aa.PN+Aa.MN+Aa.ML=(LP+PN+MN+ML)\ Aa.$$

Отъ тъзи теоремѫ слѣдва, чи околовьрстна-та повьрхнина на права-тѫ призмѫ е равна на рѫбъ-тъ, умноженъ съ периметръ-тъ на основѫ-тѫ, защо-то въ правѫ-тѫ призмѫ основа-та може да ся счита за сѣченіе, перпендикулярно къмъ рѫбъ-тъ.

§. 109. Многогранникъ ABCDE (чьрт. 146), на кой-то една-та страна ABCDE е нѣкой многоѫгълникъ, а други-тѣ страни ASB,BSC . . . . сѫ триѫгълници съ общъ врьхъ S, ся нарича *пирамидѫ*. Многоѫгълникъ ABCDE ся нарича основѫ, точка S—*вьрхъ*, а перпендикуляръ SO, кой-то е спустнатъ отъ вьрхъ S врьхъ основѫ-тѫ, — *височинѫ на пирамидѫ-тѫ*.

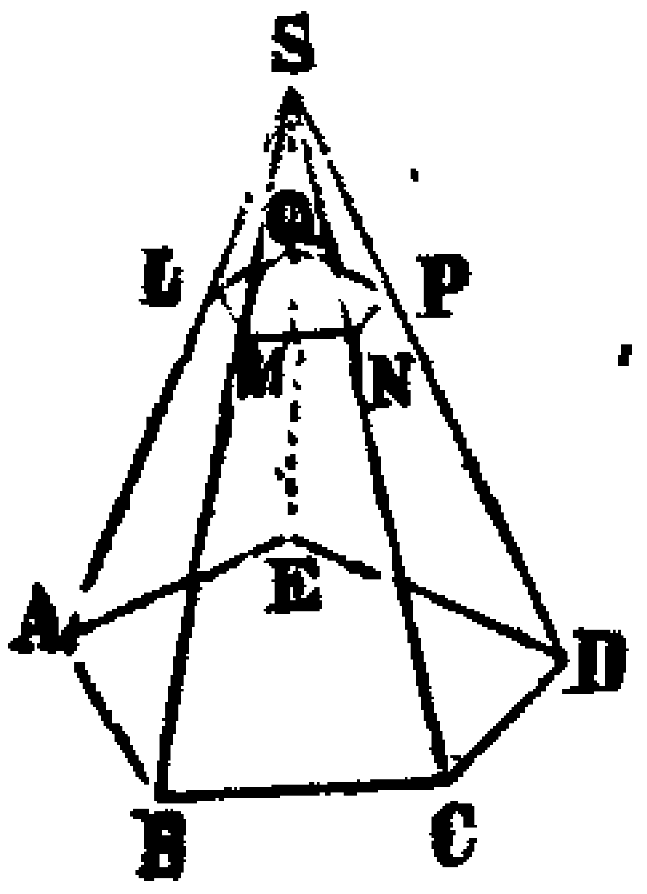


Чьрт. 146.

Пирамида-та ся нарича *триѫгълнѫ*, *четвероѫгълнѫ* или многоѫгълнѫ, ако основа-та ѝ е триѫгълникъ, четвероѫгълникъ или нѣкой многоѫгълникъ.

Плоскость ASC, коя-то минува презъ два рѫба AS и CS, кои-то не сѫ единъ до другій, ся нарича *діагоналнѫ плоскость*. Явно е, чи сяка многоѫгълна пирамида SABCDE може да ся раздѣли на триѫгълни пирамиди SABC, SADC, SADE съ діагонални плоскости ASC и ASD, кои-то минуватъ все презъ единъ рѫбъ AS.

Кога-то основа-та на пирамидѫ-тѫ е правиленъ многоѫгълникъ и центръ-тъ на този многоѫгълникъ съвпада съ основѫ-тѫ на височинѫ-тѫ (чьрт. 147), тогава пирамида-та ся нарича *правилнѫ*; височина-та въ този случай ся нарича ось на пирамидѫ-тѫ. Явно е, чи триѫгълници ASB,BSC . . . . кои-то заграждать правилнѫ-тѫ пирамидѫ, сѫ равни по между си, защо-то страни-тѣ на основѫ-тѫ сѫ равни и рѫбове-тѣ на пирамидѫ-



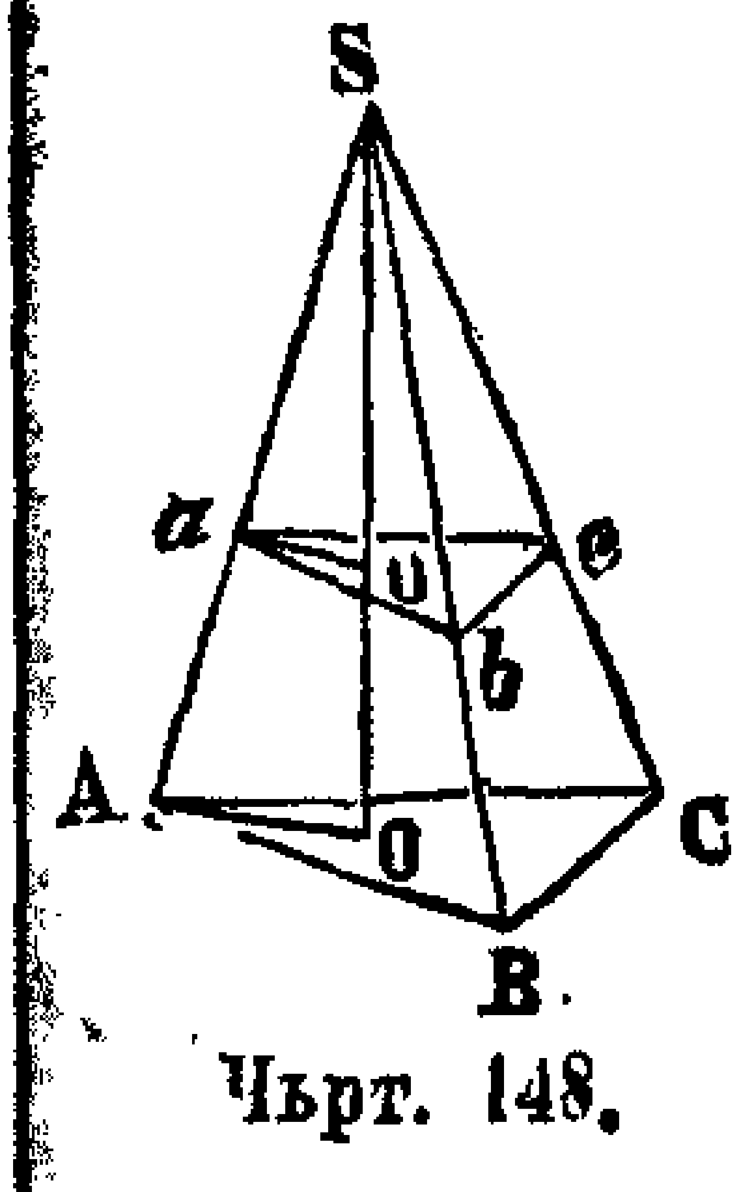
Чьрт. 147.

тж като наклонени; равно отдаличени отъ ось-тж на пирамидж-тж, сж сжщо равни (§. 90). Височина-та на единъ отъ тѣзи трижгълници, т. е. перпендикуляръ-тъ, кой-то е спустнатъ отъ върхъ-тъ на пирамидж-тж врьхъ нѣкоіж странж на основж-тж, ся нарича *апотема* на пирамидж-тж.

Ако пресѣчемъ пирамидж SABCDE (чьрт. 147) съ плоскость LMNPQ, успорѣдна на основж-тж, то ще получимъ многогранникъ ABCDELMNPQ, кой-то ся нарича *пресѣченж пирамидж.* Сѣченіе LMNPQ ся нарича *горнѭ основж*, а разстояніе-то му до долнѭ-тж основж, — *височинж на пирамидж-тж.*

Ако пирамида SABCDE е правилна, то и пресѣченна-та пирамида ся нарича *правилнж*; въ този случай височина-та на коя-да-е отъ трапеціи-тѣ, кои-то съставять околоврьстнж-тж повьрхнинж на пресѣченж-тж пирамида, ся нарича *апотемж.* 9

§. 110. *Теорема. Ако разсѣчемъ трижгълнж-тж пирамидж съ плоскость, успорѣдна на основж-тж, то ржбове-тѣ и височина-та ѝ ще ся раздѣлѭтъ на части пропорціонални, и въ сѣченіе-то ще ся получи трижгълникъ, подобенъ на основж-тж.*



Чьрт. 148.

Нека SABC (чьрт. 148) е трижгълна пирамида, SO височина-та ѝ, а abc е сѣченіе, успорѣдно на основж-тж; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\frac{SO}{So}$$

и ощи, чи трижгълници ABC и abc сж подобни.

Доказ. Ако прекарами плоскость презъ точки A,S и O, тя ще пресѣче успорѣдни-тѣ плоскости, по линіи AO и ao успорѣдни по между си (§. 96 слѣд. 1); след. трижгълници SAO и sao сж подобни и за това

$\frac{SO}{So}=\frac{AS}{aS}$; (1) тъй сѫщо, ако прекарами плоскость презъ точки A, B и S, ще намѣримъ, чи линіи-тѣ AB и ab сѫ успорѣдни и за това отъ подобіе-то на триѫгълници SAB и Sab ще имами: $\frac{AS}{aS}=\frac{SB}{Sb}$.

По сѫщій-тъ начинъ ся доказва пропорціоналность-та и на дриги-тѣ рѫбове.

Освѣнъ това, триѫгълници ABC и abc сѫ подобни, защо-то страни-тѣ имъ сѫ пропорціонални (§. 50). Наистина, отъ подобіе-то на триѫгълници ABS и abS имами: $\frac{AB}{ab}=\frac{SB}{sb}$; сѫщо отъ подобіе-то на триѫгълници SBC и sbc имами: $\frac{SB}{sb}=\frac{BC}{bc}$; слѣд. $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$; по сѫщія начинъ ся доказва чи $\frac{BC}{bc}=\frac{CA}{ca}$.

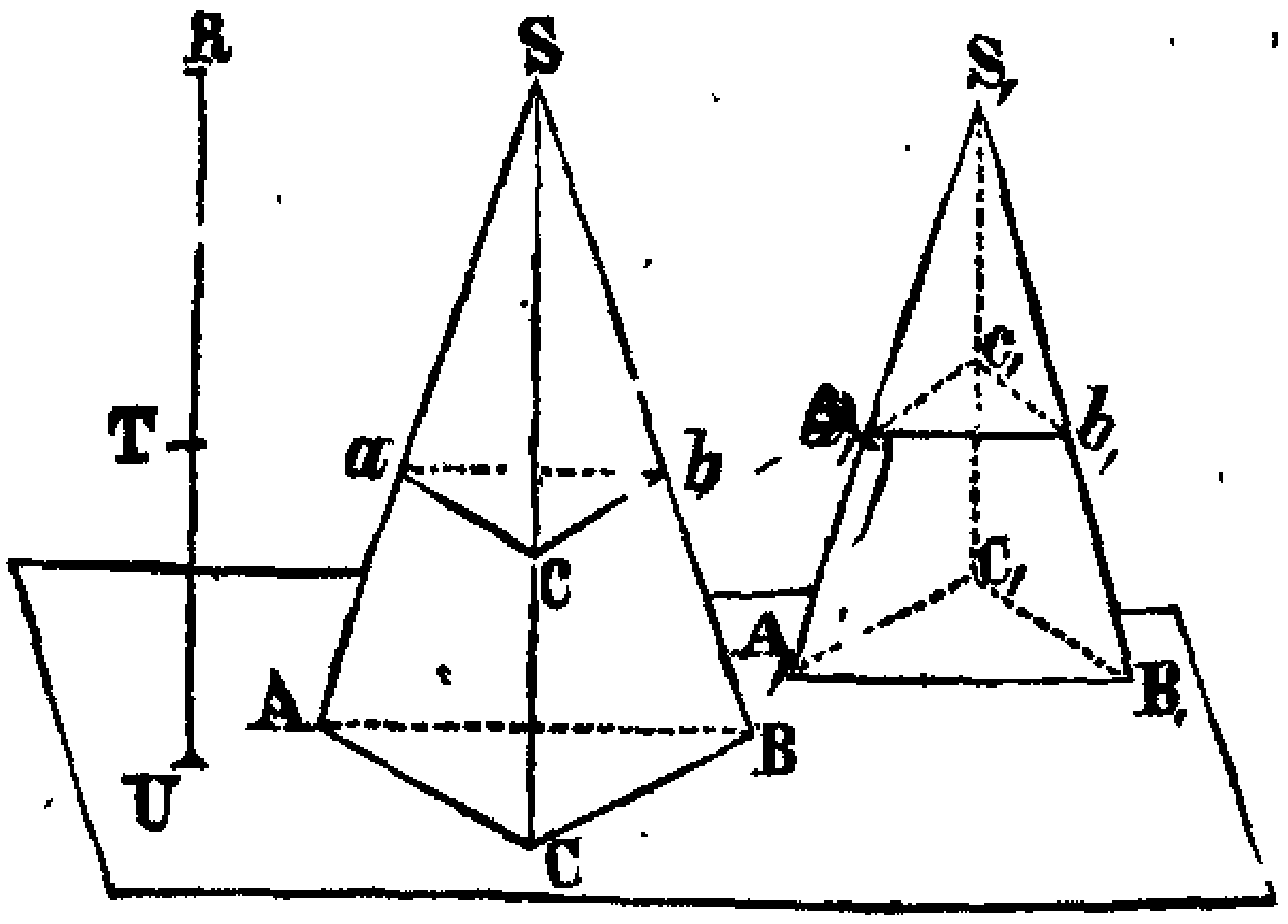
Тъй като лица-та на подобни-тѣ триѫгълици ся отнасѭтъ, като квадрати отъ сходни-тѣ страна (§. 73), то $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB^2}{ab^2}$; нъ $\frac{AB}{ab}=\frac{SA}{sa}=\frac{SO}{so}$, или

$$\frac{AB^2}{ab^2}=\frac{SO^2}{so^2}\text{; слѣд. }\frac{ABC}{abc}=\frac{SO^2}{so^2},$$

т. е. лица-та на основѫ-тѫ и успорѣдно-то ѝ сѣченіе ся отнасѭтъ, като квадрати отъ разстояніе-то имъ до върхъ-тъ на пирамидѫ-тѫ.

§. 111. *Теорема. Ако двѣ триѫгълни пирамиди иматъ равни височини, основи-тѣ имъ лежѫтъ на еднѫ плоскость, то лица-та, кои-то произлизатъ отъ пресичаніе съ плоскость успорѣднѫ на основѫ-тѫ, ся пропорціонални на лица-та на основи-тѣ.*

Нека SABC и S,A,B,C, (чьрт. 149) сѫ двѣ триѫгълни пирамиди, кои-то иматъ еднаквѫ височинѫ RU. Нека основи-тѣ имъ ABC и A,B,C, лежѫтъ на



Чьрт. 149.

днѫ плоскость и нека abc и a,b,c, сѫ сѣченія, обра- увани отъ плоскость, успорѣднѫ на основѫ-тѫ, трѣба а докажемъ, чи $\frac{ABC}{abc}=\frac{A_,B_,C_,}{a_,b_,c_,}$.

Доказ. Да кажимъ, чи плоскость-тѫ, съ коя-то ѣчемъ пирамидѫ-тѫ, срѣща линіѭ RU въ точкѫ F огава (спорѣдъ §. 110) имами:

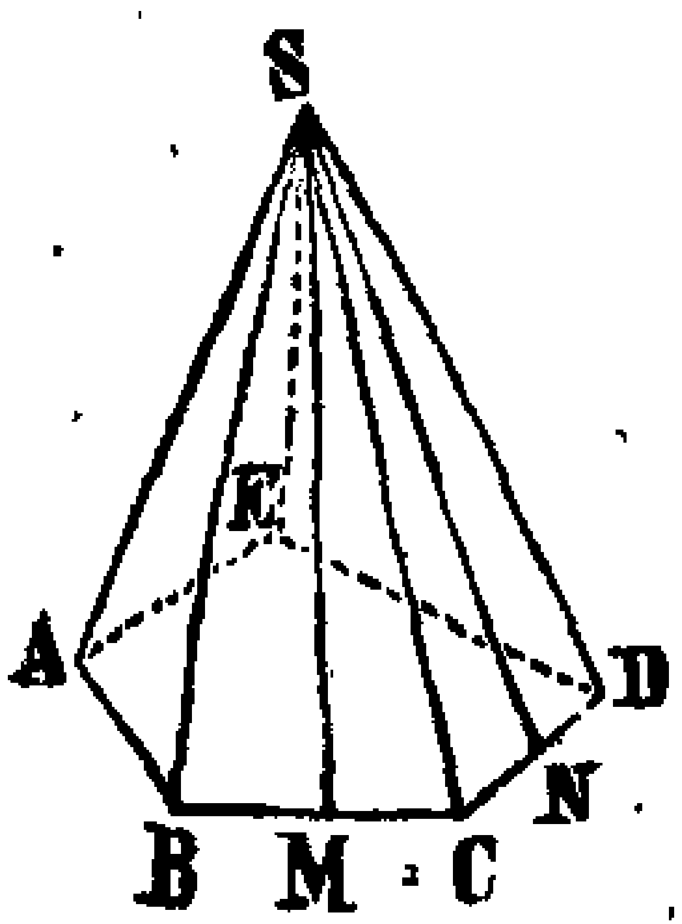
$$\frac{ABC}{abc}=\frac{BU^2}{RT^2} \text{ и } \frac{A_,B_,C_,}{a_,b_,c_,}=\frac{RU^2}{RT^2}, \text{ слѣд. } \frac{ABC}{abc}=\frac{A_,B_,C_,}{a_,b_,c_,}.$$

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи ако основи-тѣ ABC и A,B,C, ся равномѣрни, то и сѣченіѭ-тѫ abc и a,b,c, ще бѫдѫтъ сѫщо равномѣрни.

§. 112. *Теорема. Околоврьстна-та повьрхниа на правилнѫ-тѫ пирамидѫ е равна на периметрь-тъ на основѫ-тѫ, умноженъ съ половинѫ-тѫ отъ апотемѫ-тѫ.*

Нека SABCDE (чьрт. 150) е правилна пирамида и SM апотема-та ѝ; трѣба да докажемъ, чи околоврьстна-та повьрхнина на тази пирамидѫ е равна на:

$$(AB+BC+CD+DE+AE)\ \frac{SM}{2}.$$



Чьрт. 150.

Доказ. Околоврьстна-та повьрхнина на правилнѫ-тѫ пирамидѫ е съставена отъ лица-та на равни-тѣ триѫгълници ASB, BSC, CSD, DSE и

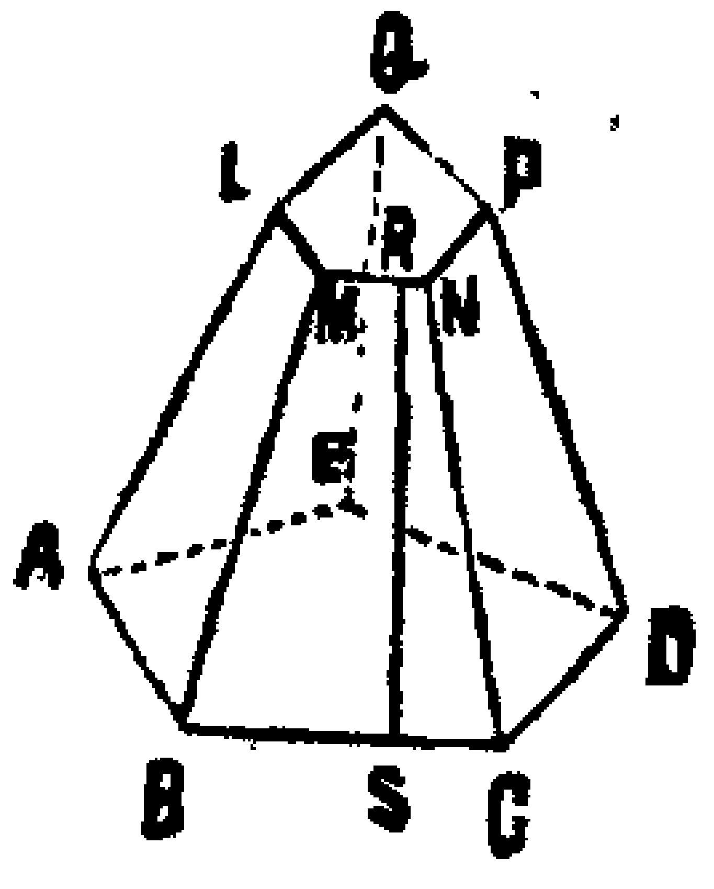
ESA; лице-то на триѫгълникъ BSC напр. е равно н BC. $\frac{SM}{2}$ (§. 68), сѫщо лице-то на триѫгълникъ CS е равно на CD. $\frac{SN}{2}$; нъ SN=SM (§. 24 слѣд.) слѣд лице-то на △CSD е равно на CD. $\frac{SM}{2}$. По сѫщі начинъ ще намѣримъ, чи лице-то на △DSE е равн на CD. $\frac{SM}{2}$, на △ESA е AE. $\frac{SM}{2}$, и на △ASB е AB. $\frac{SM}{2}$. За да намѣримъ околоврьстнѫ-тѫ повьрхнин на пирамидѫ-тѫ, трѣба да съберемъ всички-тѣ тѣз лица; слѣд. околоврьстна-та повьрхнина на правилнѫ-тѫ пирамидѫ е равна на:

$$AB.\frac{SM}{2}+BC.\frac{SM}{2}+CD.\frac{SM}{2}+DE.\frac{SM}{2}+AE.\frac{SM}{2}=$$

$$(AB+BC+CD+DE+AE)\,\frac{SM}{2}.$$

(2) §. 113. *Теорема. Околоврьстна-та повьрхнина н правилнѫ-тѫ присѣченѫ пирамидѫ е равна на полусуммѫ-тѫ отъ периметри на основи-тѣ ѝ, умноженѫ съ апотемѫ-тѫ.*

Доказ. Околоврьстнѫ-тѫ повьрхнинѫ присѣченѫ пирамидѫ състои отъ трапеціи съ равни височини, и лице-то на трапеціѭ-тѫ е равно на полусуммѫ-тѫ отъ успорѣдни-тѣ страни умноженѫ съ височинѫ-тѫ (§. 69), слѣд. околоврьстна-та повьрхнина на правилнѫ-тѫ пресѣченѫ пирамидѫ ABCDELMNPQ (чърт. 151) е равна на:



Чърт. 151.

$$\frac{N+BC}{2}.RS+\frac{NP+CD}{2}.RS+\frac{PQ+DE}{2}.RS+\frac{QL+AE}{2}.$$

$$RS+\frac{LM+AB}{2}.RS=$$

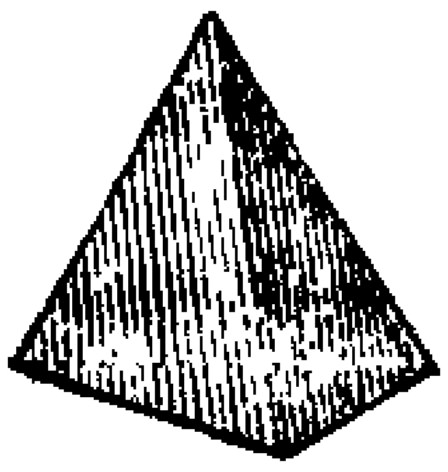
$$\frac{(MN+NP+PQ+QL+LM+BC+CD+DE+EA+AB)}{2}RS$$

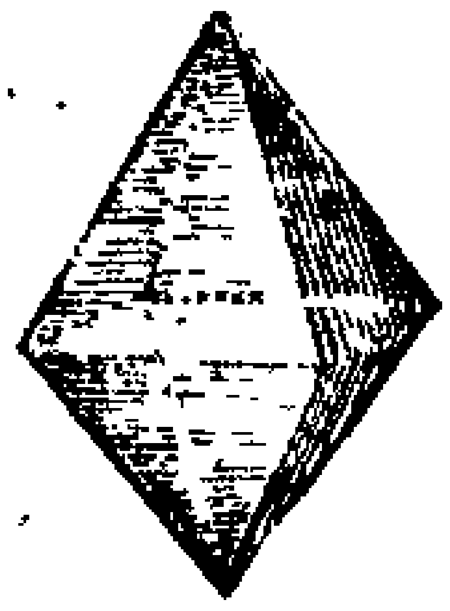
X

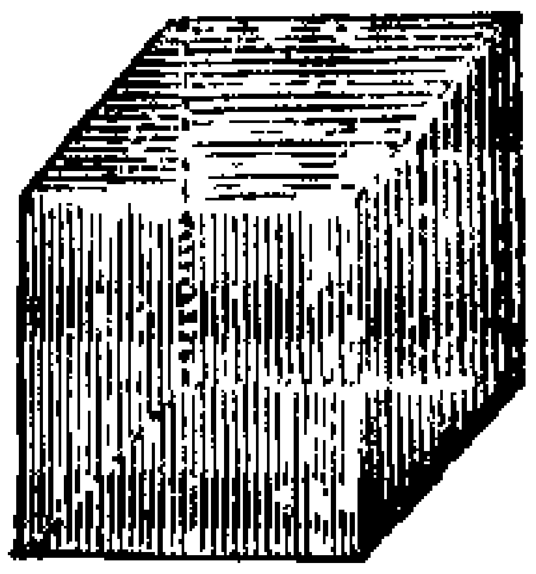
ПРАВИЛНИ МНОГОГРАННИЦИ.

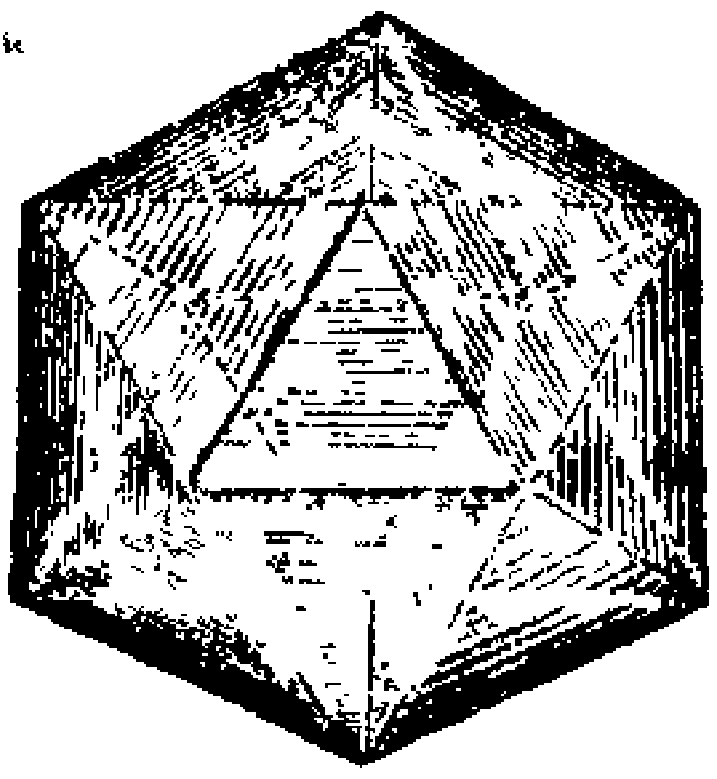
§. 114. *Правиленъ многогранникъ* е този, на кой- всички-тѣ рѫбове, страни, плоски, двугранни и ногогранни ѫгли ся равни по между си.

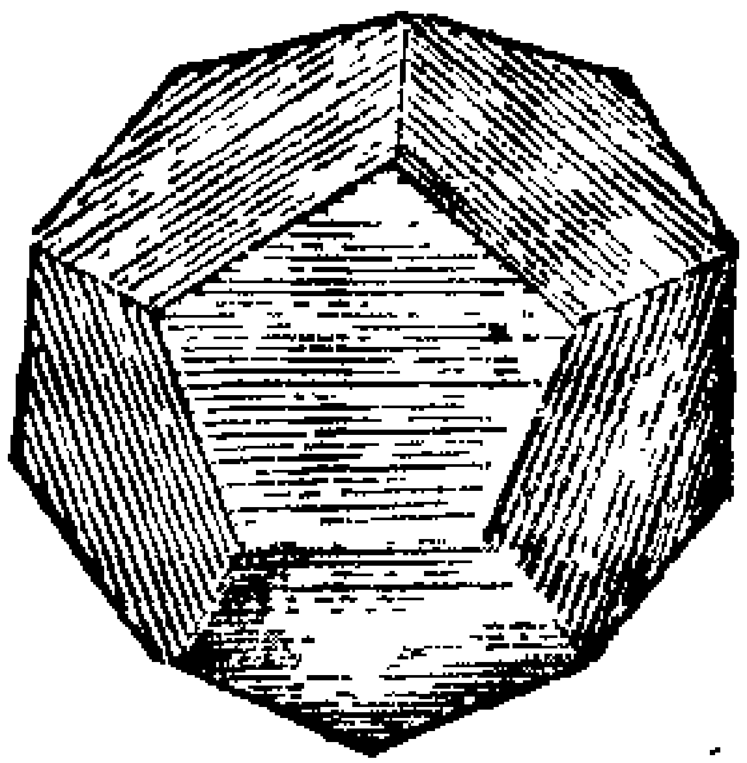
Къмъ правилни-тѣ многогранници ся отнасѭтъ.


Чьрт. 152.


Чьрт. 153.


Чьрт. 154.


Чьрт. 155.


Чьрт. 156.

1) Правиленъ четвероgranникъ или *тетраедръ* ьрт. 152.), той има 4 страни, кои-то сѫ равностърня- и трижгълници, 6 рѫба и 4 тригранни ѫгъла.

2) Правиленъ шестогранникъ или *ексаедръ* (чьрт. 53) т. е. *кубъ*; той има 6 страни 12 рѫба и 8 три- ранни ѫгъла.

3) Правиленъ осмогранникъ или *октаедръ* (чьрт 154); той има 8 страни, кои-то сѫ равностърняст трижгълници, 12 рѫба и 6 четверогранни ѫгъла.

4) Правиленъ дванадесятогранникъ или *додекаедръ* (чьрт. 155); той има 12 страни, кои-то сѫ правилни петоѫгълници, 30 рѫба и 20 тригранни ѫгъл

5) Правиленъ двадесятогранникъ или *икосаедр* (чьрт. 156); той има 20 страни, кои-то сѫ равностърнясти трижгълници, 30 рѫба и 12 петогранни ѫгъл

Правилни-тѣ многогранници имать голѣмо значеніе въ кристалографія-та.

IIIий урокъ.

ГЛАВА IV.

ИЗМѢРВАНІЕ НА ОБЪЕМИ-ТѢ.

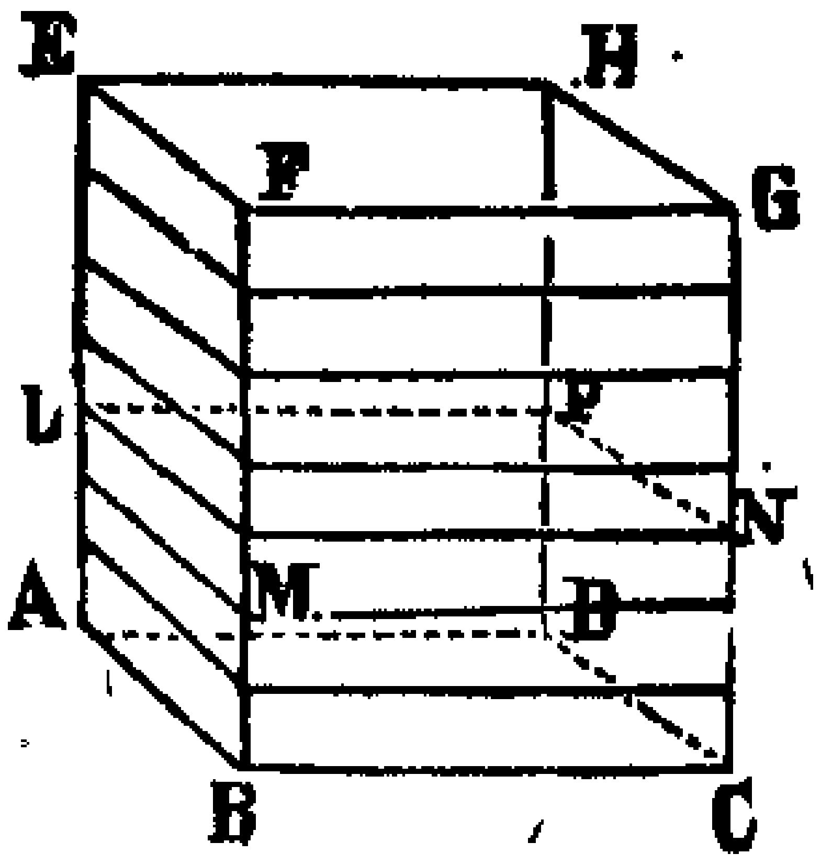
Объемъ на параллепипедъ-тъ, призмѫ-тѫ и пирамидѫ-тѫ.

§. 115. Пространство-то, кое-то заема нѣкое тѣло, ся нарича *объемъ* на тѣло-то. Да измѣримъ объемъ-тъ на нѣкое тѣло ще рѣче да узнаемъ, колко пѫти влиза въ този объемъ объемъ-тъ на друго тѣло, кой-то ся пріема за единицѫ. За единицѫ на объеми-тѣ пріематъ *кубъ-тъ*, на кой-то измѣрванія-та сѫ линейни единици. Такъвзи кубъ ся нарича *кубическѫ единицѫ*. Тъй напр., ако метръ-тъ ся пріема за линейнѫ единицѫ, то единицѫ на объеми-тѣ ще бѫде кубическія метръ т. е. кубъ-тъ, на кой-то сѣкій рѫбъ е равенъ на единъ метръ.

Двѣ тѣла, кои-то имать равни объеми, ся наричать *равномѣрни*.

§. 116. *Теорема. Объеми-тѣ на два правоѫгълни параллелепипеда, кои-то имамь еднакви основи, ся отнасять по между си къто височини-тѣ.*

Нека AG и AN (чьрт. 157) сѫ два правоѫгълни параллелепипеда, кои-то иматъ общѫ основѫ AC, трѣба да докажемъ, чи $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{AL}$.

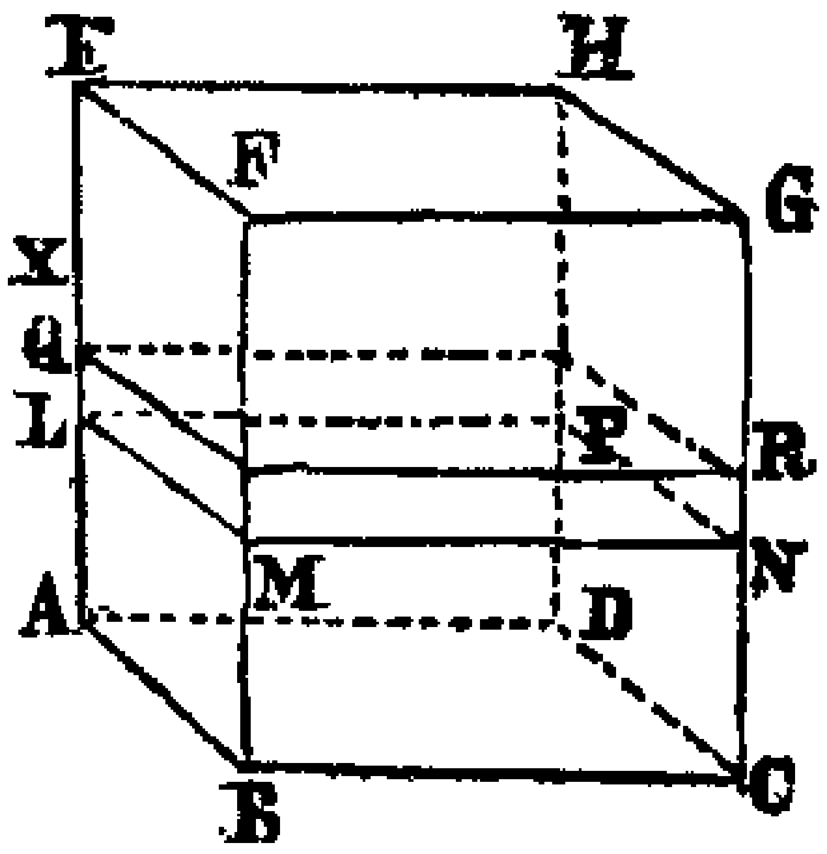


Чьрт. 157.

Доказ. Ще разглѣдами два случая:

1. *Случай.* Нека височини-тѣ AE и AL сѫ съизмерими и обща-та мѣрка влиза m пѫти въ AE и n пѫти въ AL, тогава $\frac{AE}{AL}=\frac{m}{n}$. Ако презъ точки-тѣ на дѣленіе-то на линіѭ AE прекараме плоскости, успорѣдни на основѫ-тѫ, то параллелепипеда AG и AN ще ся раздѣлѭть на m и на n правоѫгълни параллелепипеда равни по между си (§. 105); слѣд. $\frac{AG}{AN}=\frac{m}{n}$ и за това $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{AL}$.

2. *Случай.* Нека височини-тѣ AE и AL (чьрт. 158), сѫ несъизмѣрими; тогава ще докажемъ, чи отношеніе $\frac{AG}{AN}$, неможе да бѫде ни по голѣмо, ни по малко отъ отношеніе $\frac{AE}{AL}$.



Чьрт. 158.

Наистинна, ако $\frac{AG}{AN}<\frac{AE}{AX}$, то мвесто AL ще земемъ по голѣмѫ линіѭ AX, тъй що-то да бѫде $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{AX}$. Раздѣлями линіѭ AE на толкози число равни части, що-то сѣка отъ тѣхъ да бѫде по малка отъ LX; тогава макаръ една отъ точки-тѣ на дѣлеція-та ще падне между L и X; нека тъзи точка е Q. Прекарваме презъ Q плоскость QR, успорѣдна на основѫ-тѫ, тогава ще ся образува новъ паралелепипедъ AR, височина-та на кой-то е съизмѣрима съ височинѫ-тѫ на паралелепипедъ AG: слѣд. спорѣдъ доказанно-то ще имами:

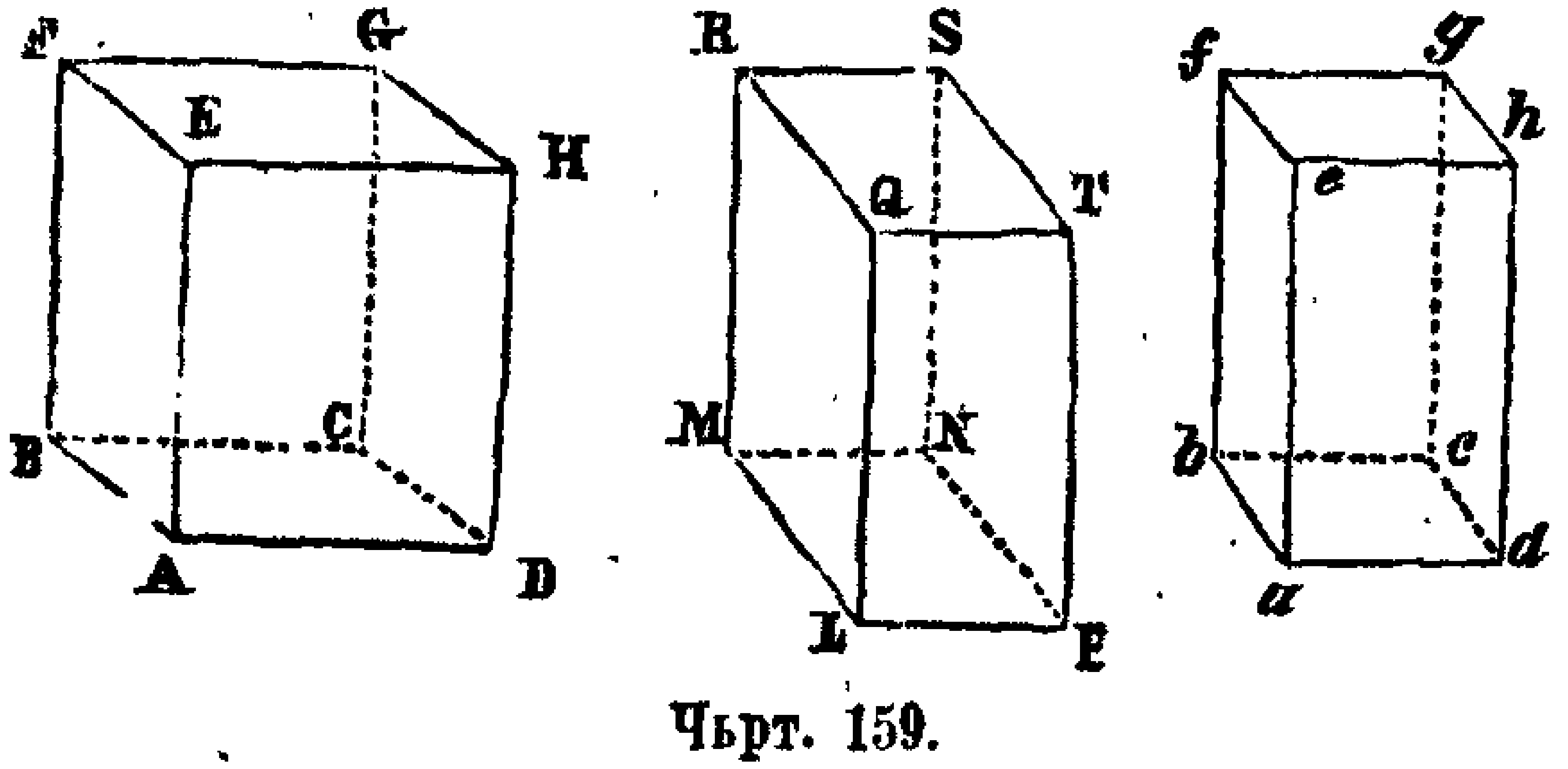
$$\frac{AG}{AR}=\frac{AE}{AQ}.$$

Ако раздѣлимъ тъзи пропорціѭ съ $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{AX}$, то ще получимъ пропорціѭ $\frac{AN}{AR}=\frac{AX}{AQ}$, коя-то е невѣрна, защо-то $\frac{AN}{AR}<1$ а $\frac{AX}{AQ}>1$.

Отъ това слѣдува, чи и предположеніе-то $\frac{AG}{AN}<\frac{AE}{AL}$ е невѣрно. По сѫщія начинъ може да ся докаже, чи и предположеніе-то $\frac{AG}{AN}>\frac{AE}{AL}$ е невѣрно; слѣд. възможно е само да бѫде $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{AX}$.

§. 117. *Теорема. Обеми-тѣ на два правоѫгълни паралелепипеда, кои-то иматъ равни височини, ся отнасятъ като лица-та на основи-тѣ.*

Нека правоѫгълни-тѣ паралелепипеди AG и



Чьрт. 159.

LS (чьрт. 159) иматъ равни височини AE и LQ; трѣба да докажемъ, чи $\frac{AG}{LS}=\frac{ABCD}{LMNP}$.

Доказ. Земами третій параллепипедъ ag, кой-то има сжщж-тж височинж съ параллелепипеди AG и LS, нъ въ кой-то да бжде ab=AB и bc=MN. Ако въ параллелепипеди AG и ag считаме правожгълници-тѣ AF и af за основи, то (§.116) $\frac{AG}{ag}=\frac{BC}{bc}$.

Ако въ параллелепипеди LS и ag считами правожгълници-тѣ MS и bg за основи и забелѣжимъ, чи тѣзи правожгълници ся равни то (§.116) $\frac{ag}{LS}-\frac{ab}{LM}$. Къто умножимъ тъзи пропорція съ първж-тж и къто съкратимъ, ще получимъ:

$$\frac{AG}{LS}=\frac{BC.ab}{bc.LM}.$$

Нъ тъй къто ab=AB и bc=MN, то произведенія-та BC.ab и bc.MN сж лица-та на основи-тѣ ABCD и LMNP; слѣд. $\frac{AG}{LS}=\frac{ABCD}{LMNP}$.

§. 118. *Теорема. Обеми-тѣ на два правожгълни параллелепипеда, кои-то иматъ различни основи и височини, ся отнасятъ къто произведенія-та отъ лица-та на основи-тѣ и височини-тѣ.*

Нека параллелепипеди P и $P_{,}$ иматъ основи b и $b_{,}$, а височини h и $h_{,}$; трѣба да докажемъ, чи

$$\frac{P}{P_{,}}=\frac{bh}{b_{,}h_{,}}.$$

Доказ. Земами третій параллелепипедъ Q, кой-то да има основж b и височинж $h_{,}$; тогава (§§. 116 и 117): $\frac{P}{Q}=\frac{h}{h_{,}}$ и $\frac{Q}{P_{,}}=\frac{b}{b_{,}}$. Къто умножимъ тѣзи пропорціи еднж съ другж получвами $\frac{P}{P_{,}}=\frac{b.h}{b_{,}h_{,}}$.

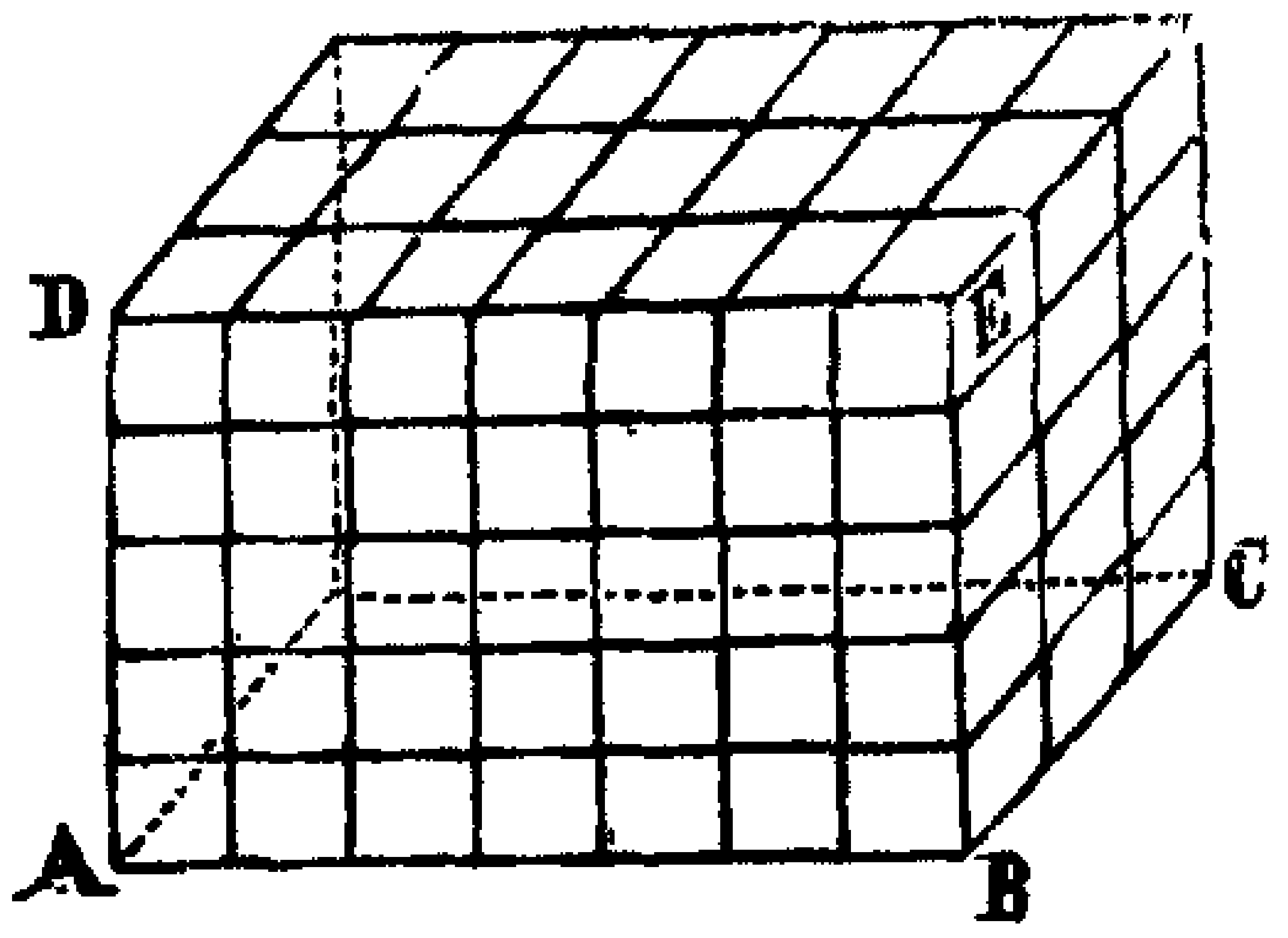
§. 119. *Теорема. Обемъ-тъ на правожгълнія па-*

раллелепипедъ е равенъ на произведеніе-то отъ лице-то на основж-тж и височинж-тж.

Доказ. Нека правожгълнія параллелепипедъ P има основж b и височинж h, и Q е кубическж-т единицж. Спорѣдъ §. 118 имами $\frac{P}{Q}=\frac{b.h}{1.1}$; а тъй кът Q ся счита за единицж, то $P=b.h$. Това значи, ч въ объемъ-тъ на правожгълнія параллелепипедъ влизать толкози кубически единици, колко-то единиц ся получвать, кога умножимъ височинж-тж съ лице-то на основж-тж. Тъзи мисьль ся исказва обикновенно тъй: *объемъ-тъ на правожгълнія параллелепипедъ е равенъ на произведеніе-то отъ основж-тж и височинж-тж му.*

Ако изобразимъ съ h височинж-тж на правожгълнія параллелепипедъ, а съ l и m други-тѣ м двѣ измѣрванія, то l.m ще бжде лице-то на основж-тж; слѣд. $P=h.l.m.$ т. е. объемъ-тъ на правожгълні параллелепипедъ е равенъ на произведеніе-то от три-тѣ му измѣрванія.

Нека напр. височына-та BE на правожгълнія параллелепипедъ C (чърт. 160) сждърж 5 единици, а двѣ-т му други измѣрвані AB и BC—7 и 3 единицы; тогава объем-тъ ще бжде равенъ н 5.7.3=105 кубическ единици. Наистин ако прекарами през точки-тѣ на дѣленіе-то на сѣкж отъ тѣзи три лині BE, BA и BC плоскости, успорѣдни на двѣ-тѣ друг линіи, то всичкія параллелепипедъ ще ся раздѣли



Чърт. 160.

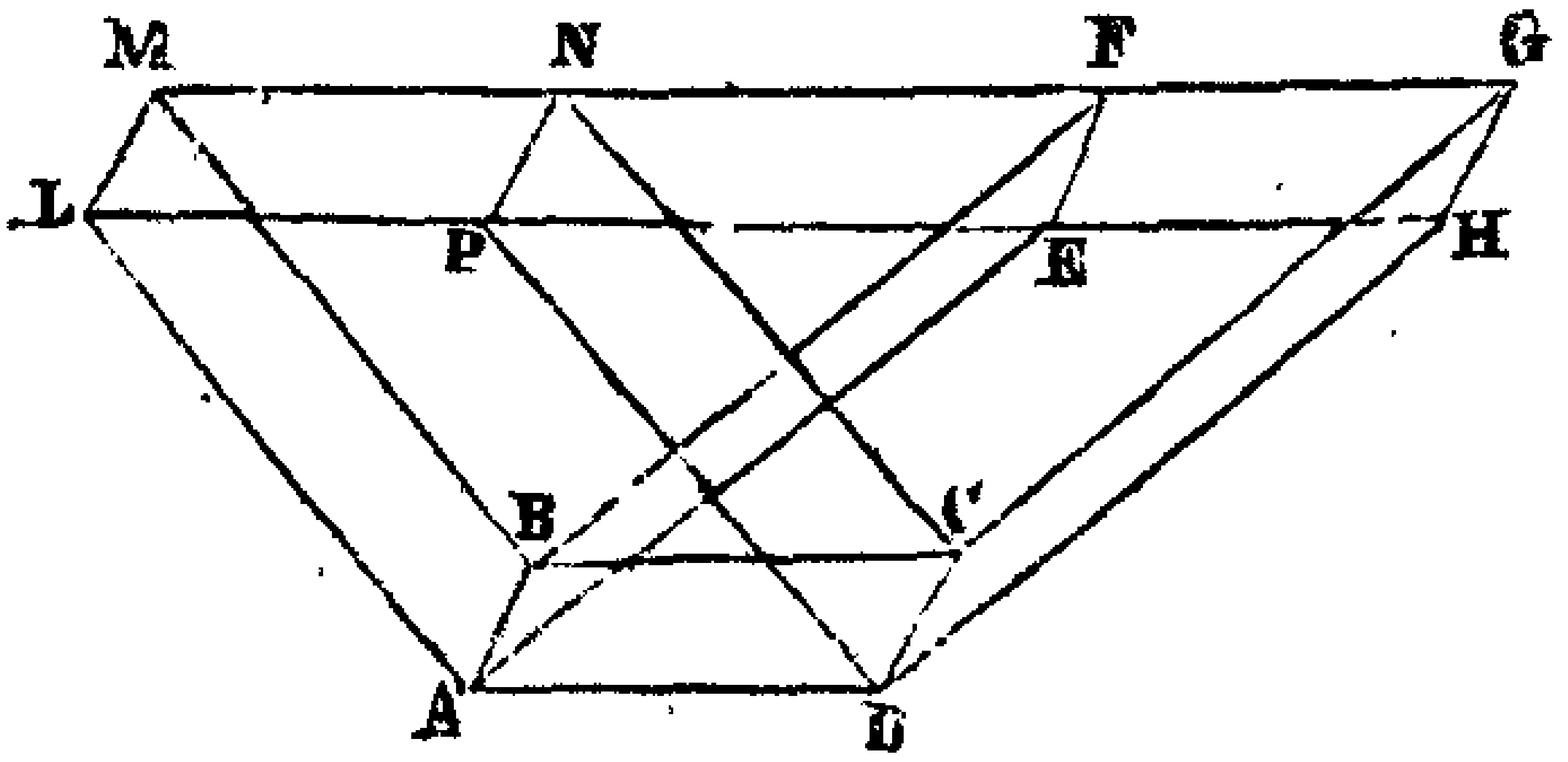
105 равни куба, отъ кои-то сѣкій е равенъ на кубическж-тж единицж.

Явно е, чи объемъ-тъ на кубъ-тъ ще бжде a^3, ако ржбъ-тъ му е равенъ на a; ето защо третя-та стьпень на сѣко количество ся нарича *кубъ*.

Отъ казанно-то слѣдува, чи ако отношеніе-то на двѣ линейны единици a и b е m, т. е. $\frac{a}{b}=m$, то отношеніе-то на сжщи-тѣ кубически единици $\frac{a^3}{b^3}$ ще бжде m^3. напр. Отношеніе-то на метръ-тъ и дециметръ-тъ е 10, слѣд. отношеніе-то на кубическій-тъ метръ къмъ кубическій дециметръ ще бжде $10^3=1000$, т. е. кубическія метръ съдьржа 1000 кубически дециметра.

§. 120. *Теорема. Два параллелепипеда ся равномѣрни, ако иматъ одщж основж и равни височини.*

Нека параллелепипеди AN и AG (чьрт. 161)



Чьрт. 161.

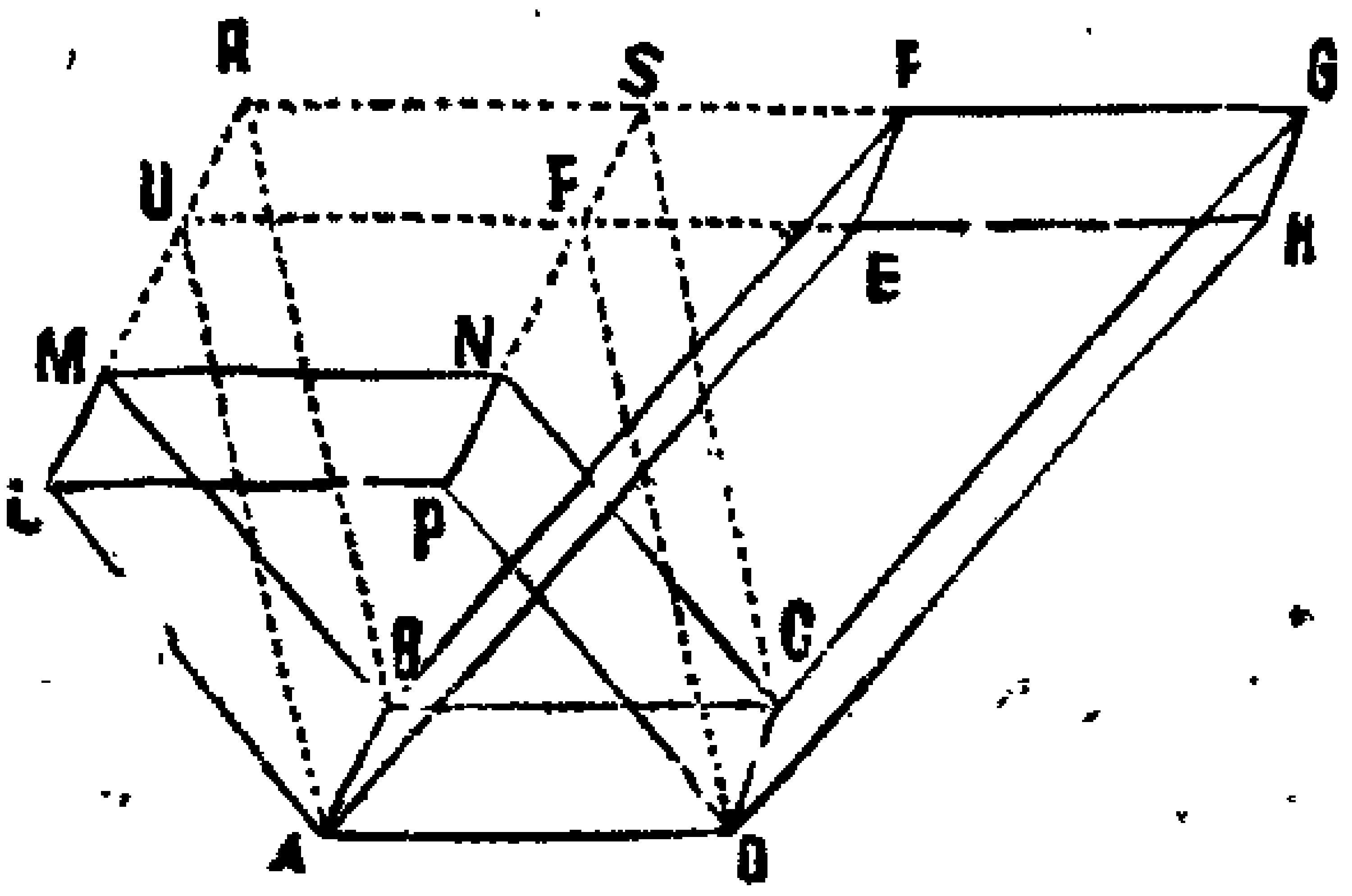
иматъ еднаквж основж AC и равни височини; трѣба да докажемъ, чи тѣзи параллелепипеди сж равни.

Доказ. Тъй като височини-тѣ на параллелепипеди-тѣ сж еднакви, то горни-тѣ имъ основи LN и EG лежжтъ на еднж плоскость. Да допустимъ първо, чи линіи EH— и FG сж продълженіе отъ линіи-тѣ LPMN, т. е. чи околовръстни-тѣ страни AP и AH лежжтъ на еднж плоскость, сжщо и страни-тѣ BN и

BG, или, чи два-та параллелепипеда сѫ заключен между двѣ успорѣдни плоскости AH и BG.

Триѫгълни-тѣ призми MBFLAE и NCGPDH с равни по между си. Наистина, параллелограмми AM и DN, сѫщо и параллелограмми AF и DG сѫ равни като срѣщуположни страни на параллелепипедъ-тъ а двугранни-тѣ ѫгли MBAE и NCDH сѫ равни, защо-то ся съставени отъ плоскости успорѣдни по между си (§. 100 слѣд. 2). Ако сега вложимъ призм NCGPDH въ призмѫ MBFLAE тъй що-то рѫбъ DC да съвпадне съ рѫбъ AB и двуграннія ѫгълъ NCDH съ двуграннія ѫгълъ MBAE, то параллелограммъ DG ще съвпадне съ параллелограммъ AF и парал. DN съ парал. AM; слѣд. и призми-тѣ ще съвпаднатъ Ако отъ всичкія многогранникъ извадимъ призм NCGPDH, то ще остане параллелепипедъ AN; ак отъ сѫщія многогранникъ извадимъ равнѫ призм MBFLAE, то ще остане параллелепипедъ AG. От това трѣба да заключимъ, чи параллелепипедъ AN и AG сѫ равномѣрни.

Да допустимъ, чи параллелепипеди AN и A

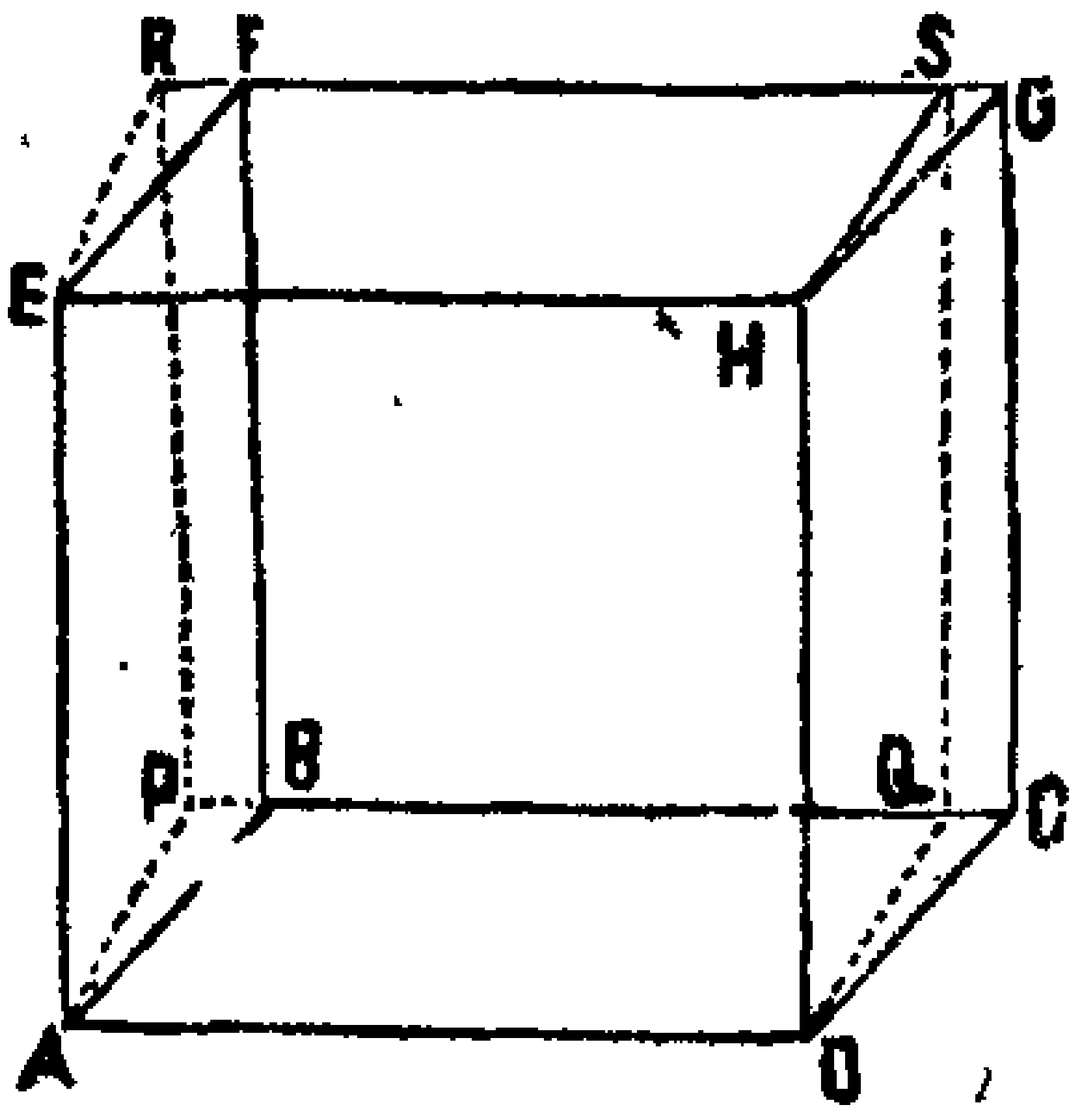


Чьрт. 162.

(чьрт. 162), кои-то иматъ еднаквѫ основѫ AC и равни височини, не ся намиратъ между двѣ успорѣдни плоскости. Като продължимъ плоскости AH, BG, DN, AM и EG, ще съставимъ третій параллелепи педъ ABCDRSTU, кой-то има общж основж и еднаквж височинж съ параллелепипеди AN и AG и ся заключва, както съ първія, тъй и съ вторія, между успорѣдни плоскости. Отъ това слѣдува, чи той е равномѣренъ както съ AN, тъй и съ AG, и затова параллелепипеди AN и AG сж равномѣрни по между си.

§. 121. *Теорема. Обемъ-тъ на правія параллелепипедъ е равенъ на произведеніе-то отъ основж-тж и височинж-тж.*

Нека ABCDEFGH (чърт. 163) е правъ параллелепипедъ; да означимъ лице-то на основж-тж ABCD съ b, височинж-тж му съ h и объемъ-тъ съ V; трѣба да докажемъ, чи V=b.h.



Чърт. 163.

Доказ. Кѫто прекарами презъ ржбове AE и DH плоскости перпендикулярни къмъ ржбъ AD, ще съставимъ правожгъленъ параллелепипедъ APQDERSH, кой-то има съ параллелепип. ABCDEFGH еднаква височинж AE, а основи-тѣ на два-та параллелепипеда сж равномѣрни (§. 67). Ако считами правожгълникъ AEHD за общж основж на два-та параллелепипеда, кои-то въ този случай ще иматъ еднаквж височинж AP, то спорѣдъ (§. 120) трѣба да заключимъ, чи два-та параллелпипеда сж равномѣрни. Нъ обмъ-тъ на правожгълнія параллелепипедъ е равенъ на APQD.h (§. 119), т. е. на b.h; слѣд. и объемъ-тъ на правія параллелепипедъ ще бжде сжщо равенъ на b.h, т. е. V=b.h.

§. 122. *Теорема. Обемъ-тъ на сѣки параллелепи-*

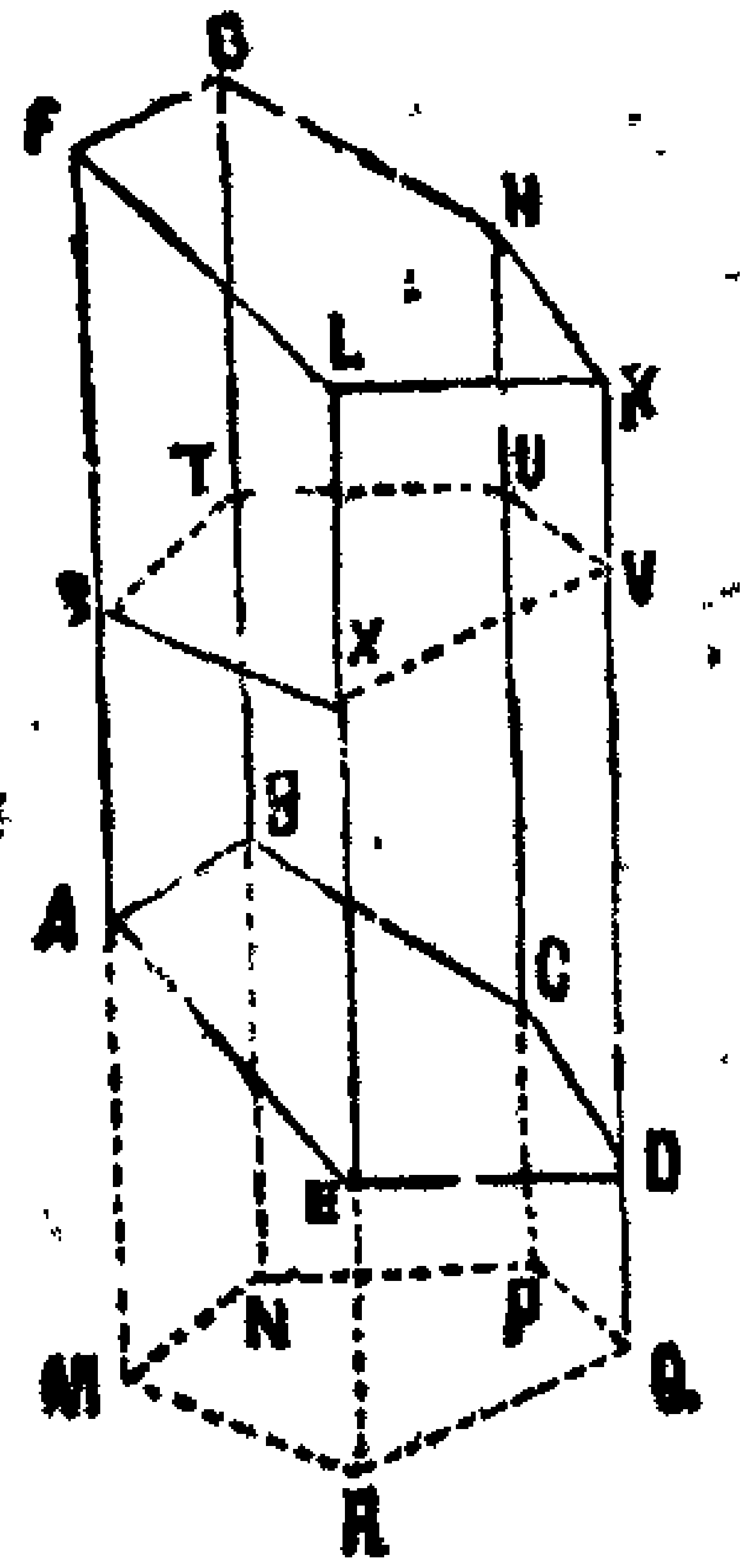
педъ е равенъ на произведеніе-то отъ основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ.

Да означимъ лице-то на основѫ-тѫ на нѣкой паралелепипедъ съ b, височинѫ-тѫ му съ h и объемъ-тъ му съ V; трѣба да докажемъ, чи V=b.h.

Доказ. Като земимъ правъ паралелепипедъ, който да има сѫщѫ-тѫ основѫ и височинѫ, спорѣдъ (§. 120) заключавами, чи тѣзи два паралелепипеда сѫ равномѣрни, а тъй като спорѣдъ (§. 121) объемъ-тъ на правія паралелепипедъ е равенъ на b.h то V=.b.h.

§. 123. *Теорема. Сѣка наклонена призма е равномѣрна съ правѫ-тѫ призмѫ, коя-то има височинѫ, равна на околовръстнія рѫбъ на наклоненѫ-тѫ призмѫ и основѫ, равна на перпендикулярно-то сѣченіе къмъ околовръстни-тѣ рѫбове на наклоненѫ-тѫ призмѫ.*

Нека ABCDEFGHK (чьрт. 164) е наклонена призма. Ако на рѫбъ AF и на продълженіе-то му земемъ таквизи двѣ точки S и M, що-то да бѫде SM=AF, и ако презъ точки S и M прекарами плоскости STUVX и MNPQR, перпендикулярни къмъ околоврьстни-тѣ рѫбове, то ще ся състави права призма MNPQRSTUVX, на коя-то височина-та SM е равна на околоврьстнія ѝ рѫбъ на наклоненѫ-тѫ призмѫ, а основа-та MNPQR е сѣченіе перпендикулярно къмъ околоврьстнія V рѫбъ на наклоненѫ-тѫ призмѫ; трѣба да докажимъ, чи призми ABCDEFGHKL и MNPQRSTUVX сѫ равномѣрни.



Чьрт. 164.

Доказ. Многоѫгълници SA и MC сѫ равни по между си: наистинна многоѫгълникъ

STUVX е равенъ на MNPQR, защо-то $TS=MN$ (като срѣщуположни страни на параллеллограммъ-тъ) сѫщо $TU=NP$, $UV=PQ$ и пр. освѣнъ това $\angle STU=\angle MNP$ и $\angle TUV=\angle NPQ$ и пр. (тъй като страни-тѣ на тѣзи ѫгъли ся взаимно успорѣдни). Въ сѫщо-то време $SM=AF$ и $SA=SA$ слѣд. $SM-SA=AT-SA$, или $SF=AM$, послѣ $AF=GB$ (като срѣщуположни страни на паралеллограммъ AFGB) $SM=TN$, слѣд. $GB=FN$ или $GB-FB=TN-FB$, т. е $GT=BN$. По сѫщія начинъ ся доказва равенство-то и на други-тѣ рѫбове на многогранници SH и MC. Ако сега вложимъ многогр. SH въ MC тъй, що-то страна STUVX да съвпадне съ MNPQR, то околоврьстни-тѣ рѫбове ще съвпаднать, защо-то тѣ сѫ взаимно равни и перпендикулярни къмъ плоскость MQ затова многогранникъ SH ще съвпадне съ MC и ще му бѫде равенъ.

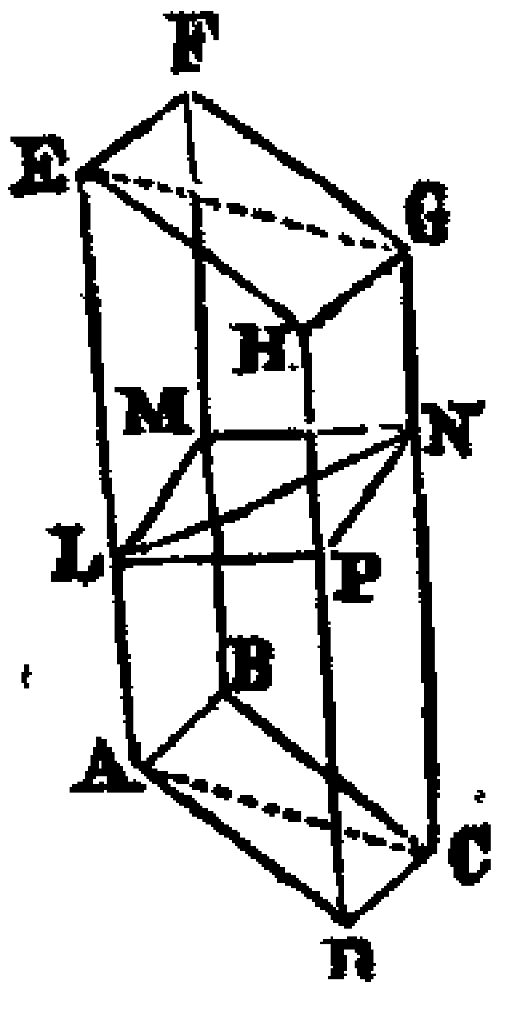
Ако къмъ многогранникъ ADVS прибавимъ частъ SH, то ще получимъ наклоненѫ-тѫ призмѫ

ABCDEFGHKL;

а ако къмъ сѫщія многогранникъ ADVS прибавимъ частъ MC, то ще получимъ правѫ-тѫ призмѫ

MNPQRSTUVX;

отъ това слѣдува, чи наклонена-та и права-та призма сѫ равномѣрни.



Чърт. 165.

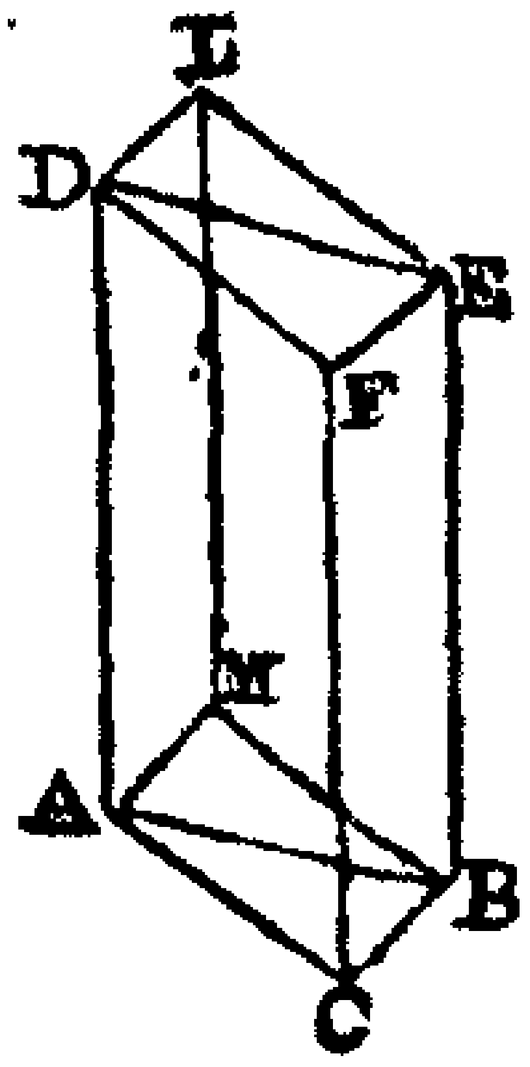
§. 124. *Теорема. Сѣкій параллелепипедъ ся раздѣля отъ діагоналнѫ-тѫ плоскость на двѣ равномѣрни призми.*

Нека ABCDEFGH (чърт. 165) е нѣкой параллелепипедъ и AEGC діагонална-та му плоскость; трѣба да докажемъ, чи призми ADCEHG и ABCEFG сѫ равномѣрни.

Доказ. Нека LMNP е сѣченіе, перпендикулярно къмъ околоврьстни-тѣ рѫбове на параллелепипедъ-тъ. Тъй като срѣщуположни-тѣ страни на параллелепипедъ-тъ сѫ успорѣдни, то LM || NP и MN || LP (§. 96. слѣд. 1), затова четвероѫгълникъ LMNP е паралеллограммъ и триѫгълници LMN и NPL сѫ равни по между си (§. 41). Отъ това слѣдува, чи двѣ-тѣ наклонени призми ADCEHG и ABCEFG, (спорѣдъ §. 123) сѫ равни на двѣ прави призми, кои-то иматъ еднаквѫ височинѫ AE и равни основи LMN и NPL; и тъй като прави-тѣ призми съ еднакви основи и височини сѫ равни (§. 105), то наклонени-тѣ призми ADCEHG и ABCEFG сѫ равномѣрни.

§. 125. *Теорема. Объемъ-тъ на триѫгълна-та призмѫ е равенъ на произведеніе-то отъ височинѫ-тѫ и основѫ-тѫ ѝ.*

Доказ. Нека AMBDLE (чърт. 166) е каква-да-е триѫгълна призма. Като допълнимъ триѫгълникъ AMB до паралеллограммъ AMBC и като построимъ надъ този паралеллограммъ параллелепипедъ AMBCDLEF ще намѣримъ спорѣдъ (§. 124), чи триѫгълна-та призма AMBDLE е полвина отъ този параллелепипедъ; а тъй като объемъ-тъ на параллелепипедъ-тъ е равенъ на произведеніе отъ основѫ-тѫ AMBC и височинѫ-тѫ на призмѫ-тѫ, то объемъ-тъ на призмѫ AMBDLE ще бѫде равенъ на полвинѫ отъ произведеніе-то на параллелограммъ AMBC и височинѫ-тѫ на призмѫ-тѫ; нъ полвинѫ-тѫ отъ параллелограммъ AMBC е триѫгълникъ AMB; слѣд. объемъ-тъ на триѫгълнѫ-тѫ призмѫ е равенъ на произведеніе-то отъ основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ ѝ.



Чърт. 166.

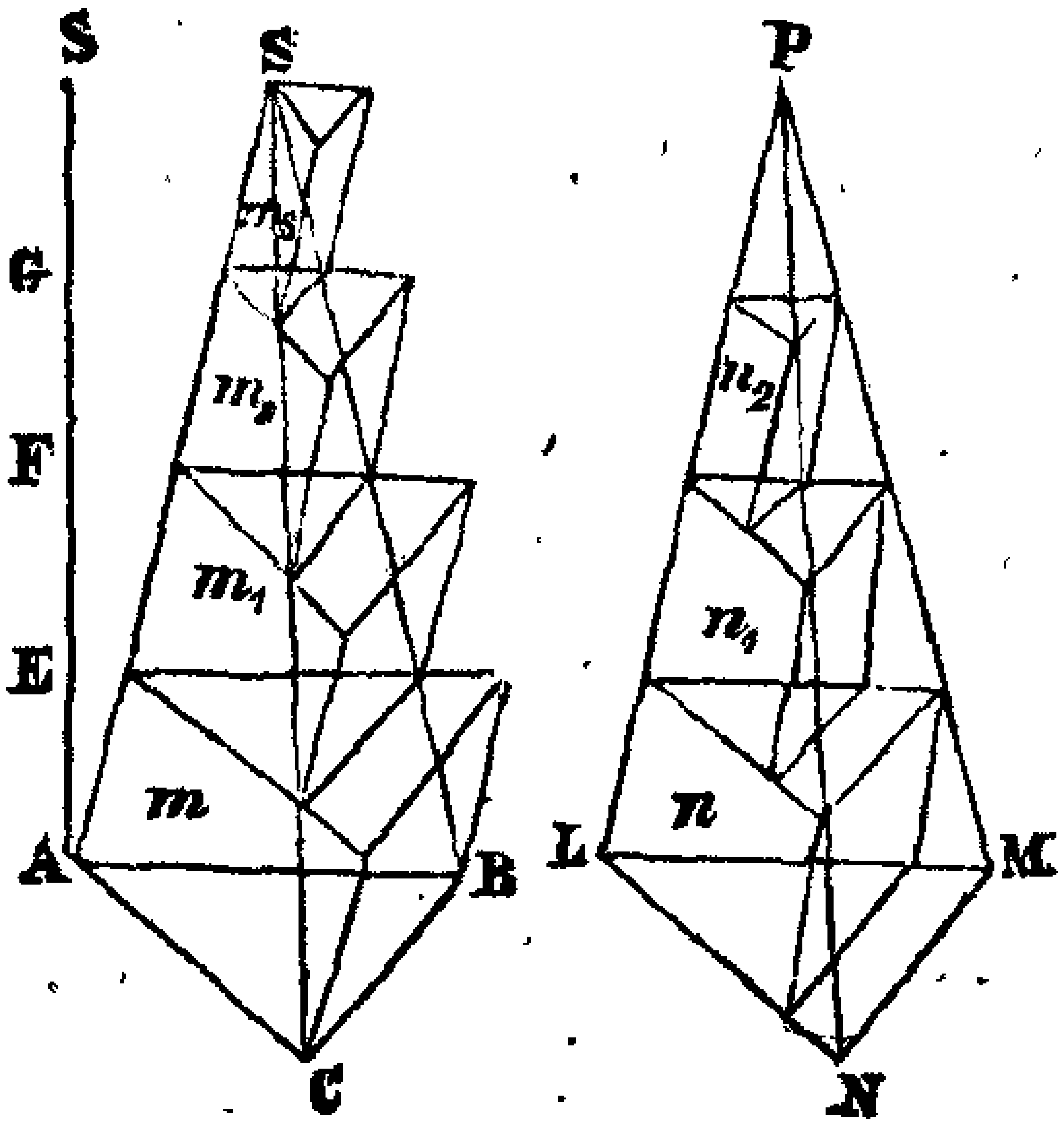
Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи объемъ-тъ на правѫ-тѫ призмѫ е равенъ на произведеніе-то отъ основѫ-тѫ и околовръстній-тъ ѝ рѫбъ.

§. 126. *Теорема. Объемъ тъ на сѣкѫ многоѫгълнѫ призмѫ е равенъ на произведеніе-то отъ основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ ѝ.*

Доказ. Тъй като сѣка многоѫгълна призма може да ся раздѣли на триѫгълни призми, кои-то иматъ съ неѭ еднаквѫ височинѫ, а суммѫ-тѫ отъ основи-тѣ на тѣзи призми е равна на основѫ-тѫ на многоѫгълнѫ-тѫ призмѫ, то объемъ-тъ на многоѫгълнѫ-тѫ призмѫ е равенъ на суммѫ-тѫ отъ триѫгълници-тѣ, кои-то съставятъ основѫ-тѫ ѝ, умноженѫ съ височинѫ-тѫ т. е. на произведеніе-то отъ основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ.

§. 127. *Двѣ триѫгълни пирамиди, кои-то иматъ равномѣрни основи и равни височини сѫ равномѣрни.*

Нека триѫгълни пирамиди SABC и PLMN (чърт. 167) иматъ равномѣрни основи ABC и LMN и еднаквѫ височинѫ равнѫ на SA; трѣба да докажемъ, чи пирамиди-тѣ сѫ равномѣрни.



Чърт. 167.

Доказ. Нека основи-тѣ на двѣ-тѣ пирамиди ся намирѫтъ на еднѫ плоскость. Да допустимъ, чи тѣзи пирамиди не сѫ равни и нека разлика-та между тѣхъ е P, тъй що-то SABC—PLMN=P. Да представимъ количество P като произведеніе отъ лице-то на триѫгълникъ ABC и нѣкоѭ величинѫ h, т. е да допустимъ, чи P=ABC.h и да раздѣлимъ височинѫ

SA на толковж равни части SG, GF, FE, EA що-то сѣка часть да бжде по малка отъ h. Ако презъ всичкитѣ точки на дѣленіе-то G, F, E прекарами плоскости, успорѣдни на основи-тѣ на пирамиди-тѣ, то сѣченія-та, кои-то произлизать отъ тѣзи плоскости, ще бждятъ трижълници взаимнѡ равномѣрни, защо-то тѣзи трижгълници спорѣдъ §. 111, сж пропорціонални на основи-тѣ ABC и LMN, а тѣзи основи сж равномѣрни. Да си представимъ надъ трижгълници-тѣ въ пирамидж SABC рѣдъ отъ издадени призми m, m_1, m_2, m_3, и надъ трижгълници-тѣ въ пирамидж PLMN рѣдъ отъ вътрѣшни призми n, n_1, n_2. Отъ построеніе-то ся види, чи:

$$SABC < m + m_1 + m_2 + m_3 \dots \text{ и } PLMN > n + n_1 + n_2 \dots$$

Отъ тѣзи неравенства заключвами, чи отъ двѣтѣ разлики SABC—PLMN и

$$(m + m_1 + m_2 + m_3) - (n + n_1 + n_2)$$

първа-та има по малко умаляемо и по голѣмъ умалитель отъ вторж-тж; затова

$$SABC - PLMN < m + m_1 + m_2 + m_3 - n - n_1 - n_2 .$$

Нъ призми m_3 и n_2, кои-то имать равномѣрни основи и равни височини, сж равномѣрни; по сжщж-тж причинж сж равномѣрни призми n_1 и m_2 също n и m_1; слѣд. къто скратимъ, ще получимъ:

$$SABC - PLMN < m;$$

а тъй къто $m = ABC.AE$, то $SABC - PLMN < ABC.AE$.

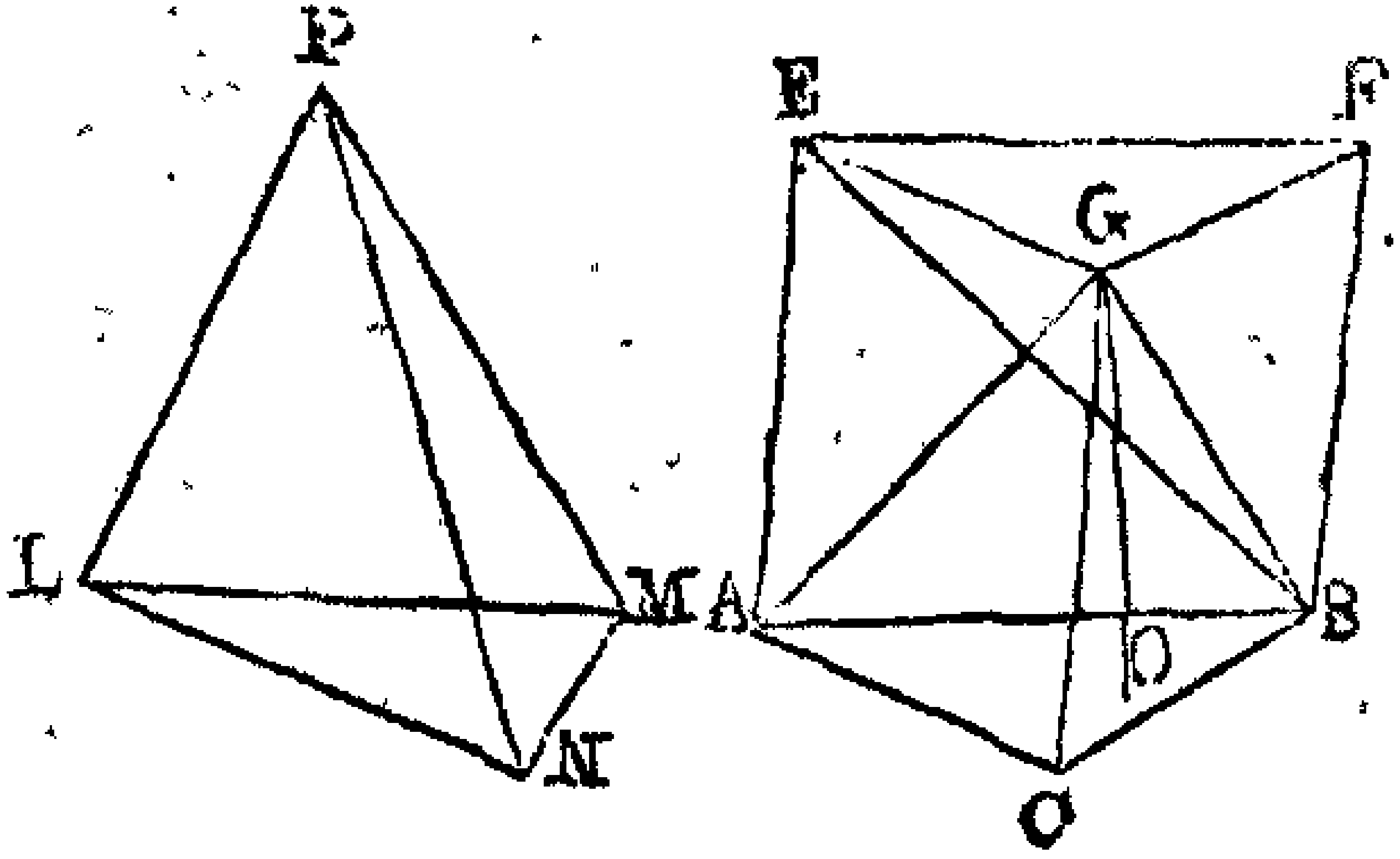
Нъ ній означихми разликж-тж SABC—PLMN съ P или съ ABC.h; слѣд. $ABC.h < ABC.AE$.

Къто съкратимъ на ABC, получвами $h < AE$, кое-то е невѣрно; защо-то допустихми, чи сѣка часть на дѣленіе-то е по малка отъ h. Отъ това слѣдува, чи пирамиди-тѣ SABC и PLMN сж равномѣрни.

§. 128. *Теорема. Трижгълна-та пирамида е третя часть отъ призмж-тж, коя-то има съ нея равномѣрнж основж и равнж височинж.*

Нека триѫгълна пирамида PLMN и триѫгълна призма ABCEFG (чърт. 168) иматъ равномѣрни основи LMN и ABC и еднаквѫ височинѫ go; трѣба да докажемъ, чи PLMN = $^1/_3$ ABCEFG.

Доказ. Къто прекарами въ призмѫ ABCEFG плоскости AGB и EGB, ще ѭ раздѣлимъ на три триѫгълни пирамиди GABC, GABE и BEGF. Тъй къто триѫгълници LMN и ABC сѫ равномѣрни и височини-тѣ на пирамидѫ PLMN и GABC сѫ еднакви, то спорѣдъ §. 127, пирамиди-тѣ сѫ равномѣрни. По сѫщѫ-тѫ причинѫ сѫ равномѣрни и пирамиди PLMN и BEFG. Ако считами триѫгълникъ BEF за основѫ и точкѫ G за върхъ на пирамидѫ BEFG, триѫгълникъ AEB за основѫ и точкѫ G за върхъ на пирамидѫ GAEB, то явно е, чи тѣзи пирамиди, къто иматъ равни основи (§. 41) и равни височини, сѫ равномѣрни.



Чърт. 168.

Отъ това заключвами, чи призма ABCEFG сѫ състои отъ три пирамиди, равномѣрни по между си и равномѣрни на пирамидѫ PLMN, слѣд. пирамида PLMN е третя часть отъ призмѫ ABCEFG.

Отъ тъзи теоремѫ слѣдува, чи объемъ-тъ на сѣкѫ триѫгълнѫ пирамидѫ е равенъ на третѭ-тѫ часть отъ произвѣденіе-то на основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ.

§. 129. *Теорема. Объемъ-тъ на многоѫгълнѫ-тѫ пирамидѫ е равенъ на третѭ-тѫ часть отъ произвѣденіе-то на основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ.*

Доказ. Тъй къто сѣка многоѫгълна пирамида може да ся раздѣли на триѫгълни пирамиди, кои-то имать съ неѭ еднаквѫ височинѫ, а сумма-та отъ основи-тѣ на тѣзи пирамиди, съставя основѫ-тѫ на многожгълнѫ-тѫ пирамидѫ, то объемъ-тъ на многожгълнѫ-тѫ пирамидѫ е равенъ на третѭ-тѫ часть отъ суммѫ-тѫ на трижгълници-тѣ, кои-то съставять основѫ-тѫ ѝ, умноженѫ съ височинѫ-тѫ, т. е. на третѭ-тѫ часть отъ произвѣденіе-то на основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ.

Ако означимъ съ V объемъ-тъ на пирамидѫ-тѫ, съ B и H основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ ѝ, то $V=\frac{BH}{3}$.

IV-ий урокъ.

ГЛАВА V. Peut-être!

Декемврий 11-ий 1877 г. Вторникъ

КРЖГЛИ ТѢЛА.

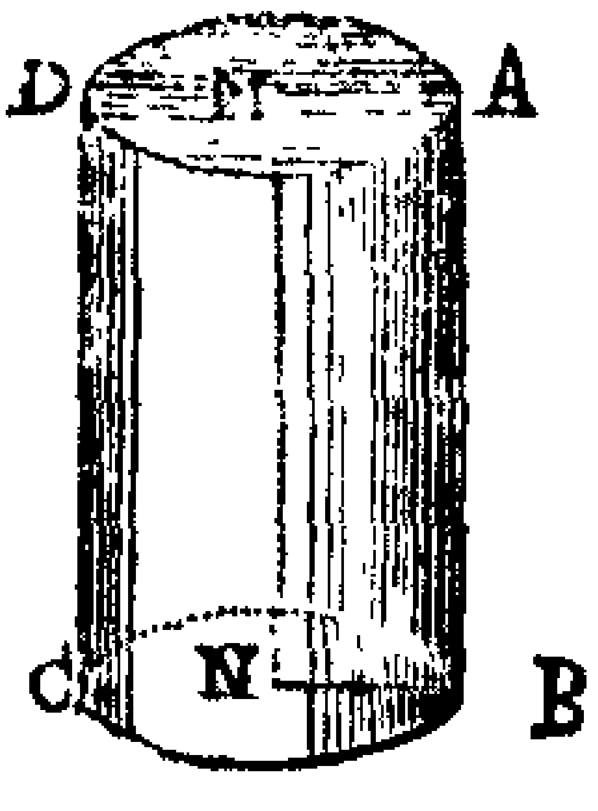
2-ий часъ сутр.

Цилиндръ, конусъ и сфера. Конусъ.

9-10 [illegible]

([illegible] I [illegible])

§. 130. Ако правожгълникъ MABN (чърт. 169) ся завърти единъ пжть около странѫ-тѫ си MN, коя-то остава неподвижна, то ще ся образува тѣло ABCD, кое-то ся нарича *правъ цилиндръ*. Неподвижна-та страна MN ся нарича *ось* на цилиндръ-тъ, кржгове-тѣ, кои-то сѫ описани отъ страни MA и NB — *основи* на цилидръ-тъ, а растояніе-то по между имъ т. е. дължина-та на осьтѫ — *височинѫ* на цилиндръ-тъ



Чърт. 169.

§. 131. Тъй като основи-тѣ на цилиндръ-тъ сѫ кржгове, а кржгове-тѣ могѫть да ся разглѣждать, като многожгълници съ безкрайно голѣмо число страни (§. 81), то отъ това слѣдува, чи правія цилиндръ може да ся счита за правѫ призмѫ, основи-тѣ на коя-то сѫ многожгълници, съ безкрайно голѣмо число страни.

§. 132. *Теорема. Околоврьстна-та повьрхнина на цилиндръ-тъ е равна на пройзведеніе-то отъ окржжность-тж на основж-тж и височинж-тж.*

Доказ. Тъй като цилиндръ-тъ може да ся счита за призмж, основи-тѣ, на коя-то сж многожгълници съ безкрайно голѣмо число страни, то околоврьстна-та повьрхнина на цилиндръ-тъ е равна на периметрътъ на основж-тж (на окржжность-тж на основж-тж), умноженъ съ височинж-тж (§. 108).

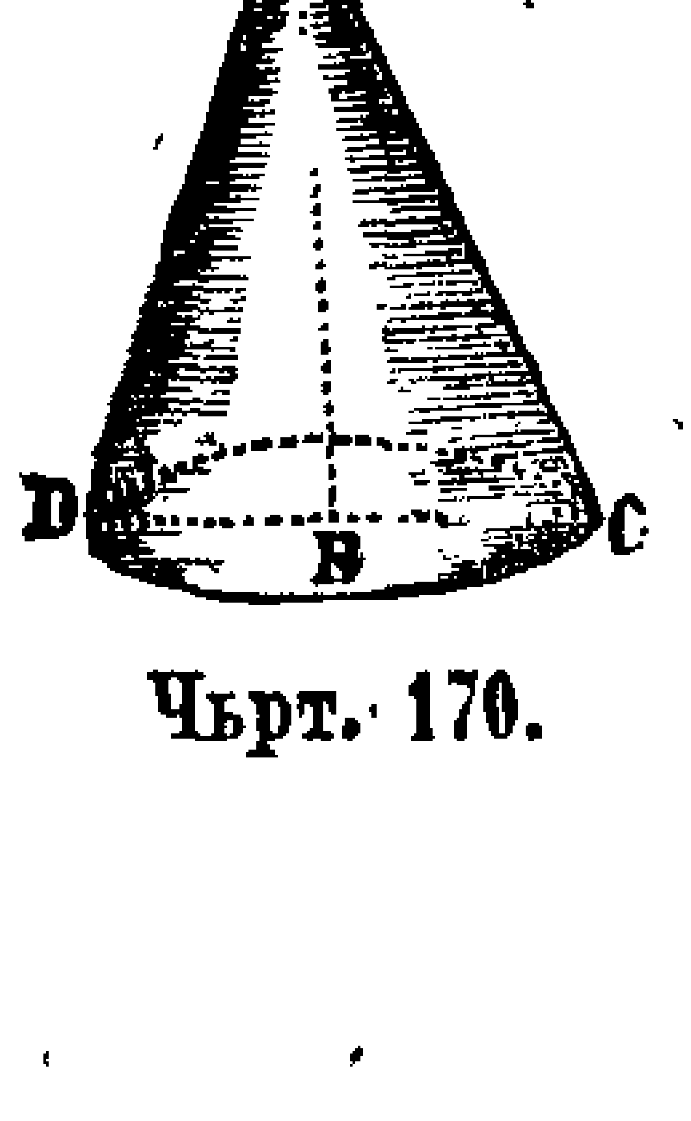
Ако P е околоврьстна-та повьрхнина на цилиндръ-тъ, R — радіусъ-тъ на основж-тж, H — височина-та на цилиндръ-тъ, то $P=2\pi RH$. А пълна-та повьрхнина на цилиндръ-тъ, т. е. околоврьстна-та повьрхнина, събрана съ лице-то на двѣ-тѣ му основи, ще бжде $2\pi RH+2\pi R^2$.

§. 133. *Теорема. Объемъ-тъ на цилиндръ-тъ е равенъ на произведеніе-то отъ лице-то на основж-тж и височинж-тж му.*

Доказ. Тъзи теорема е вѣрна, защо-то цилиндрътъ е призма, на коя-то основи-тѣ сж многожгълници съ безкрайно голѣмо число страни, а объемъ-тъ на сѣкж многожгълнж призмж е равенъ на произведеніето отъ основж-тж и височинж-тж ѝ (§. 126).

Ако V е объемъ-тъ на цилиндръ-тъ, H — височина-та му, и R — радіусъ-тъ на основж-тж, то $V=\pi R^2.H$.

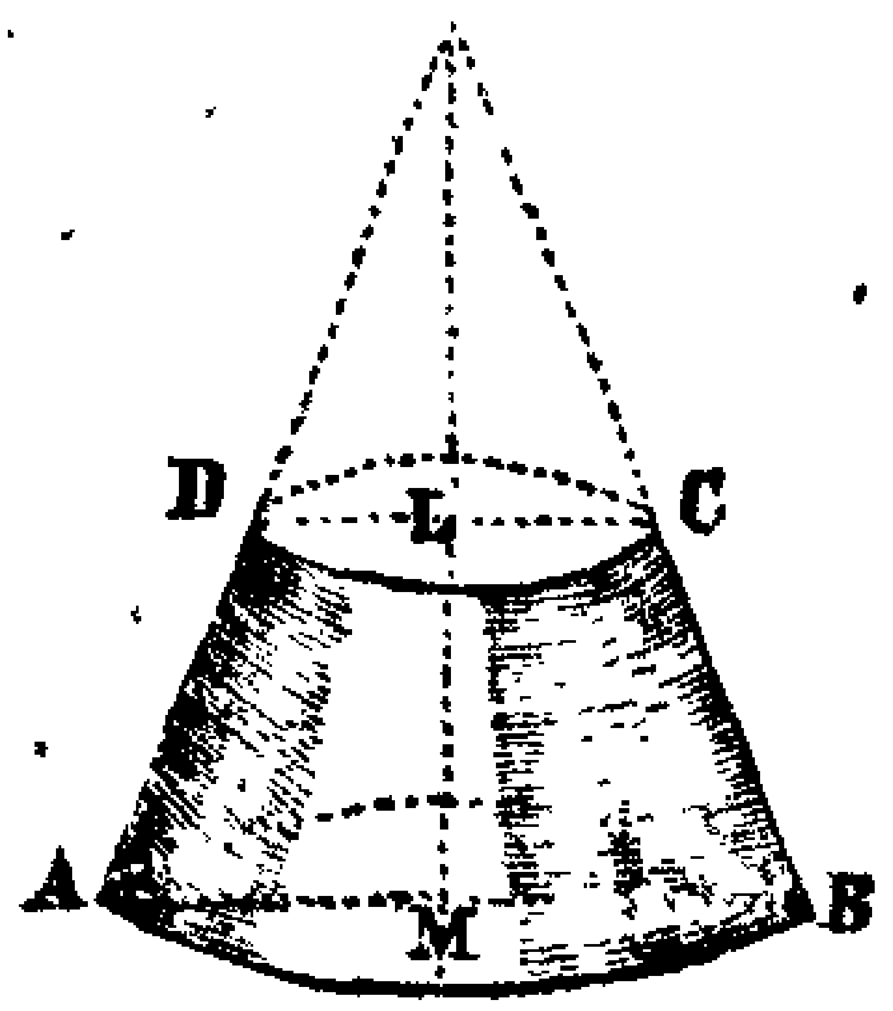
§. 134. Ако правожгълнія трижгълникъ ABC (чьрт. 170) ся завьрти единъ пжть около катетъ AB, кой-то остава неподвиженъ, то ще ся образува тѣло ADC, кое-то наричать *правъ кржгълъ конусъ.* Неподвижна-та страна AB ся нарича *ось* и въ сжщо-то време *височинж* на конусъ-тъ, страна AC — *образова-*



Чърт. 170.

телнж линіѭ, кржгъ DC, кой-то е описанъ отъ движеніе-то на катетъ BC, — *основж*, а точкж A — *върхъ* на конусъ-тъ.

Ако пресѣчемъ конусъ-тъ съ плоскость, успорѣднж на основж-тж, то ще ся получи тѣло ABCD (чърт. 171), кое-то наричать *пресѣченъ конусъ*. Явно е, чи пресѣченія конусъ може да ся получи, още отъ завъртяваніе-то на трапеціѭ MBCL около странж LM, къмъ коя-то сж перпендикулярни успорѣдни-тѣ страни. Кржгове-тѣ, кои-то сж описани отъ страни MB и LC, ся наричать *основи*, разстояніе-то между тѣхъ — *височинж*, а линія CB *образователнж*.



Чрт. 171.

§. 135. Тъй като основа-та на правія конусъ е кржгъ-тъ може да ся счита за правиленъ многожгълникъ съ безкрайно голѣмо число страни (§. 81), то конусъ-тъ е пирамидж, на коя-то основа-та е многожгълникъ съ безкрайно голѣмо число страни. Явно е, чи образователна-та линія на конусъ-тъ представлява апотемж-тж на тъзи пирамидж.

§. 136. *Теорема. Околовръстна-та повърхнина на конусъ-тъ е равна на произведеніе-то отъ окржжностьтж на основж-тж и половинж-тж на образователнжтж линіѭ.*

Доказ. Тъзи теорема е вѣрна, защо-то конусъ-тъ е пирамида, основа-та на коя-то е правиленъ многожгълникъ съ безкрайно голѣмо число страни, а околовръстна-та повърхнина на пирамидж-тж е равна на произведеніе-то отъ периметръ-тъ на основж-тж и половинж-тж на апотемж-тж (§. 112).

Ако P е околовръстна-та повърхнина на конусъ-тъ, C — дължина-та на образователнѫ-тѫ линіѭ, R — радіусъ-тъ на основѫ-тѫ му, то $P=\frac{2\pi R.l}{2}$ или $P=\pi R.l$. А пълна-та повърхнина на конусъ-тъ, т. е. околовръстна-та му повърхнина, събрана съ лицето на основѫ-тѫ, ще бѫде $\pi R.l+\pi R^2$.

§. 137. *Теорема. Околовръстна-та повърхнина на пресѣченія конусъ е равна на полусуммѫ-тѫ отъ окрѫжности-тѣ на основи-тѣ му, умноженѫ съ образователнѫ-тѫ линіѭ.*

Доказ. Тъзи теорема е вѣрна, защо-то пресѣченія конусъ може да ся счита за пресѣченѫ пирамидѫ, основи-тѣ на коя-то сѫ многоѫгълникъ съ безкрайно голѣмо число страни (§. 113).

Ако P е околовръстна-та повърхнина на пресѣченія конусъ, R и r сѫ радіуси-тѣ на основи-тѣ му и l—дължина-та на образвателнѫ-тѫ линіѭ, то

$$P=\frac{(2\pi R+2\pi r).l}{2},\ \text{или}\ P=\pi(R+r)l.$$

§. 138. *Теорема. Обемъ-тъ на конуси-тѣ е равенъ на третьѭ-тѫ часть отъ произведеніе-то на основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ му.*

Доказ. Тъзи теорема е равна, защо-то конусъ-тъ е пирамида, основа-та на коя-то е правиленъ многоѫгълникъ съ безкрайно голѣмо число страни, а обѣемъ-тѣ на сѣкѫ многоѫгълнѫ пирамидѫ е равенъ на третьѭ-тѫ часть отъ произведеніе-то на основѫ-тѫ и височинѫ-тѫ ѝ (§. 129).

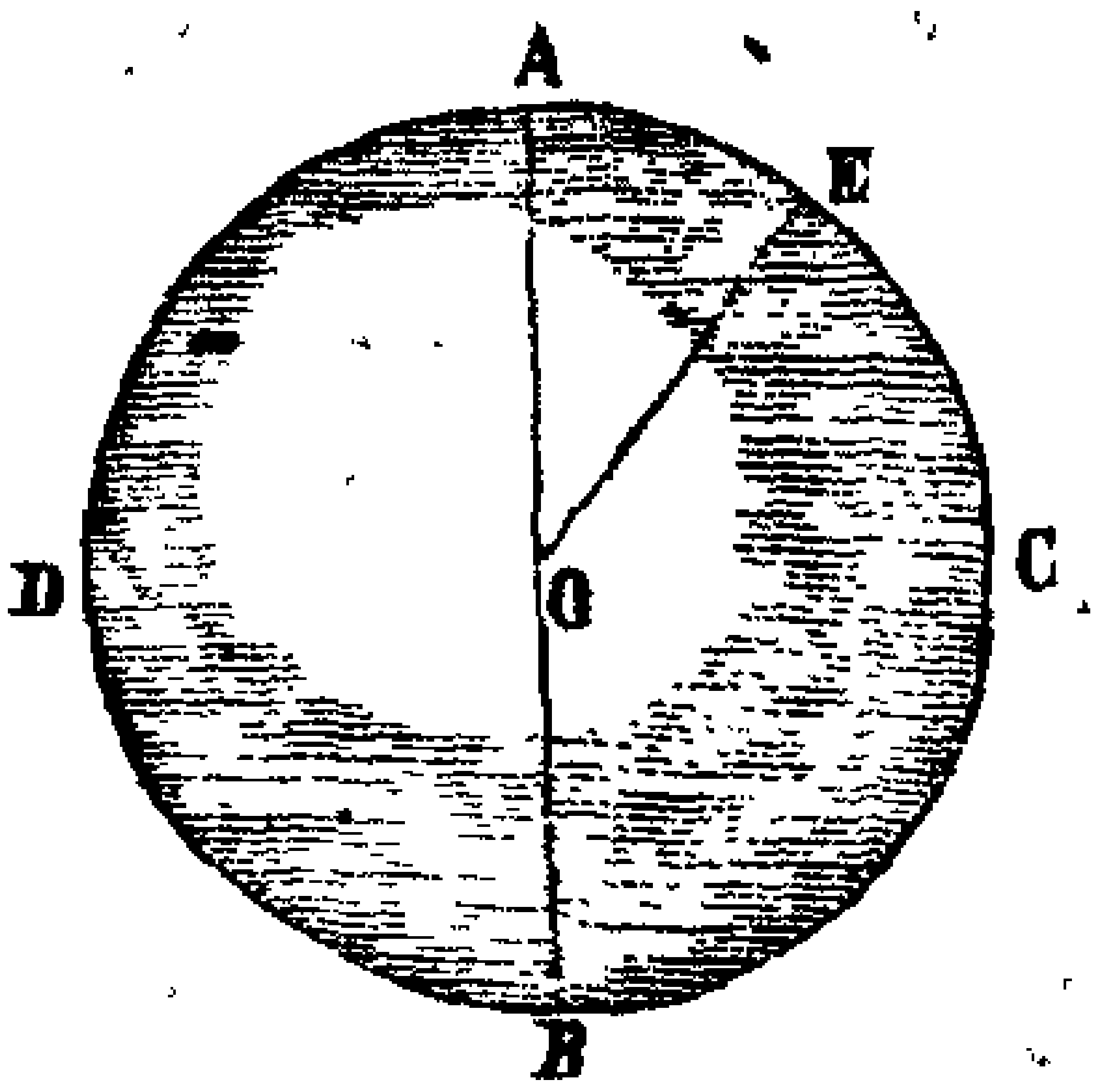
Ако V е обѣемъ-тъ на конусъ-тъ, R— радіусъ-тѣ на основѫ-тѫ и H— височина та му, то

$$V=\frac{\pi R^2.H}{3}.$$

§. 139. Отъ въртеніе-то на полокрѫгъ ABC (чърт. 172) около неподвижнія діаметръ AB ся образува тѣло,

[illegible]
8
4 [illegible]
[illegible]
25 [illegible]

[illegible] 9 [illegible]
[illegible] 2 [illegible]
[illegible] 11 [illegible] 1893 год.



Чьрт. 172.

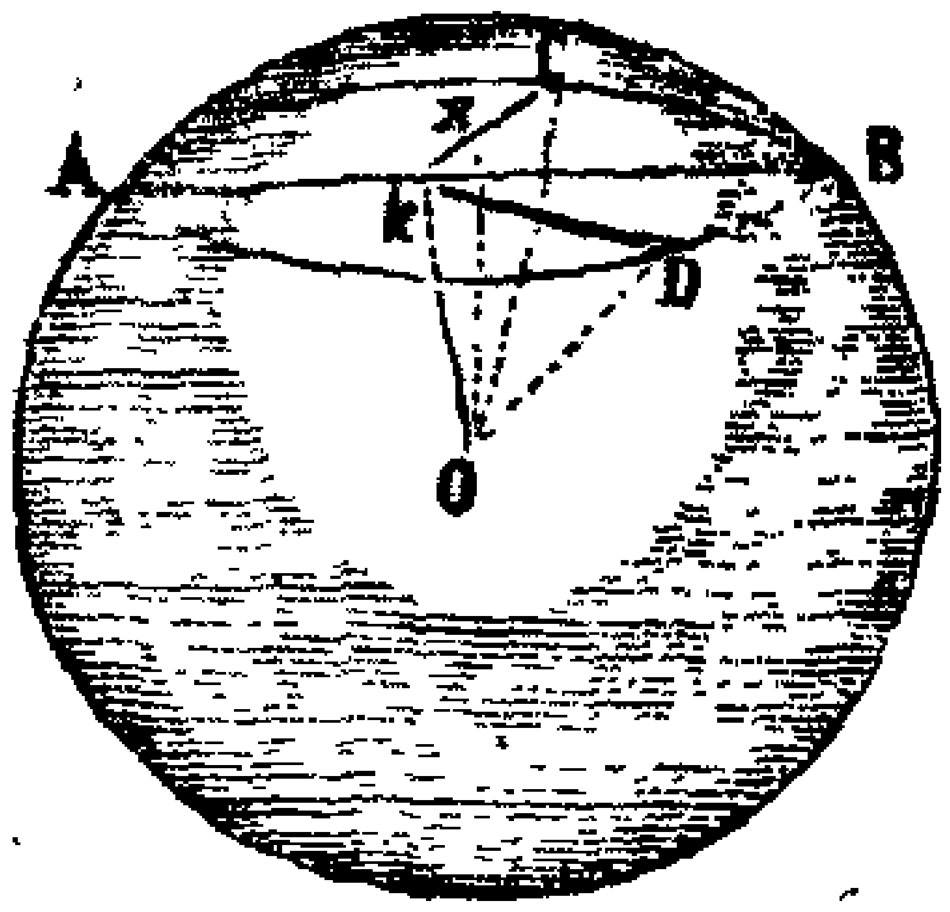
кое-то ся нарича *сферѫ*. Точка О, коя-то е на еднакво разстояніе отъ всички-тѣ точки на сферѫ-тѫ, ся нарича *центръ*. Линія-та, коя-то съединява центръ-тъ съ нѣкоѭ точкѫ на повърхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ, — радіусъ, а линія-та, коя-то минува презъ центръ-тъ и съединява двѣ точки на повърхнинѫ-тѫ, — *діаметръ* на сферѫ-тѫ.

Тъй като всички-тѣ радіуси не сферѫ-тѫ сѫ равни, то ***сфера-та е тѣло, заградено съ повърхнинѫ, на коя-то всички-тѣ точки ся намирать на еднакво разстоянія отъ еднѫ вѫтрѣшнѫ точкѫ, нарѣченѫ центръ.***

Цилиндръ-тъ, конусъ-тъ и сфера-та ся наричать *крѫгли тѣла*, защо-то произлизать отъ вьртеніе-то на геометрически фигури.

§. 140 *Теорема. Сѣко сѣченіе на сферѫ-тѫ съ плоскость е крѫгъ.*

Нека АВ (чьрт. 173) е сѣченіе на сферѫ-тѫ съ нѣкоѭ плоскость; трѣба да докажемъ, чи това сѣченіе е крѫгъ.



Чьрт. 173.

Доказ. Спущами перпендикуляръ Ok отъ центръ О врьхъ сѣченіе АВ. Ако земемъ двѣ произволни точки С и D на кривѫ-тѫ линіѭ ADB и ги съеденимъ съ k, то може да ся докаже, чи растоянія kC и kD сѫ равни по между си.

Наистина, нека допустимъ, чи $kC < kD$; намѣсто kC земами линіѭ kx равнѫ на kD и съединява-

Стоянковъ

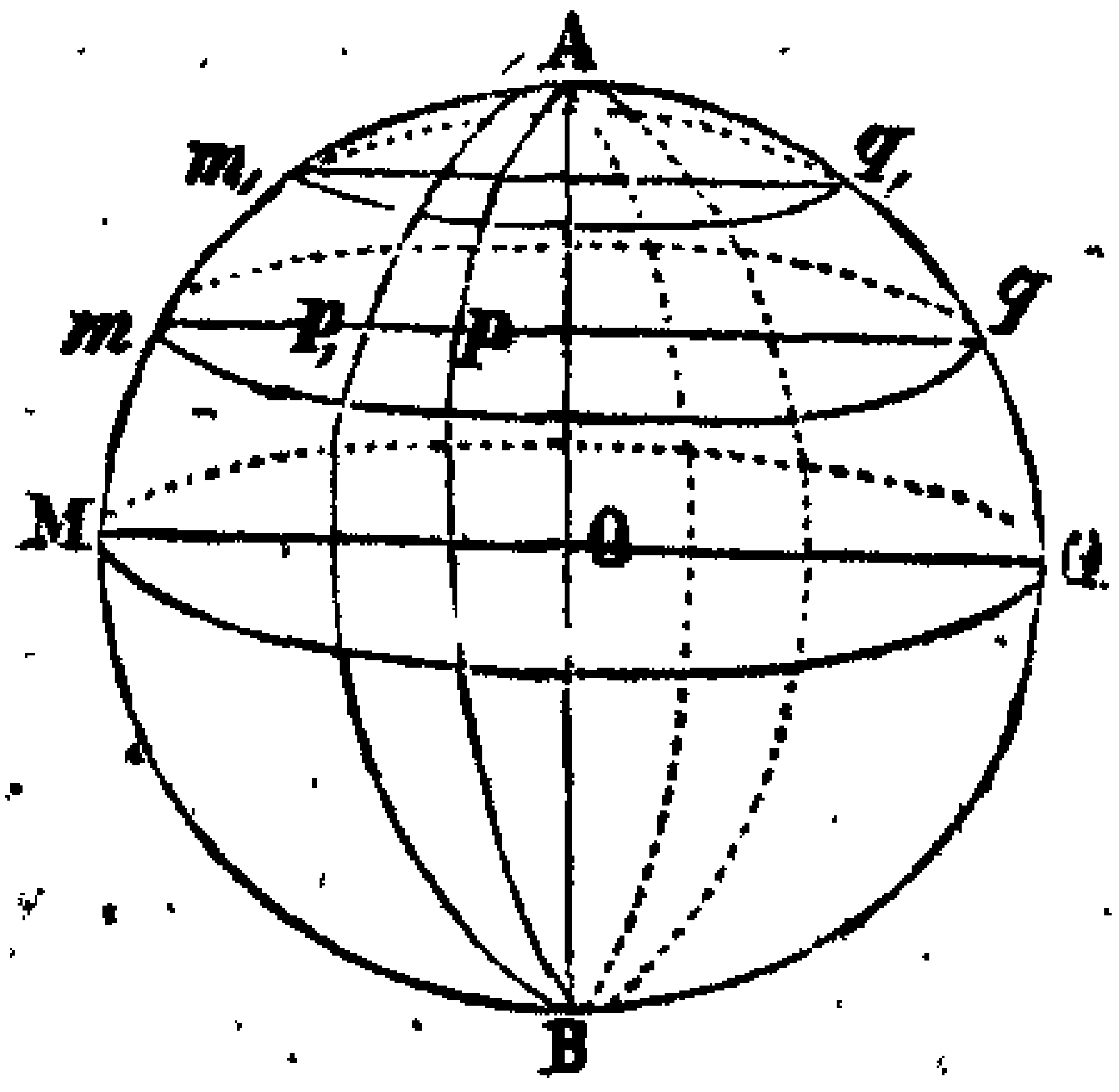
ми X съ O; тогава правожгълни-тѣ трижгълници KOX и KOD сж равни по между си, защо-то иматъ общъ катетъ OK и други-тѣ катети KX и KD сж равни по между си (§. 23). Отъ равенство-то на тѣзи трижгълници слѣдува $OD=OX$; нъ $OD=OC$, къто радіуси на сферж-тж, слѣд. $OX=OC$. И тъй равни-тѣ наклонени OX и OC не сж равно отдалечени отъ перпендикуляръ OK, а това е невъзможно (§. 27), слѣд. невъзможно е да бжде $KC>KD$. По сжщій начинъ ся доказва, чи неможе да бжде $KC<KD$, слѣд. $KC=KD$. Сжщо тъй ся доказва, чи и всички-тѣ други точки на кривж-тж ADB сж на равно растояніе отъ точкж K, слѣд. крива-та ADB е окржжность, за това и сѣченіе-то ще бжде кржгъ.

Ако означимъ растояніе OK съ k, радіусъ KD съ r и радіусъ-тъ на сферж-тж OD съ R, то отъ правожгълнія трижгълникъ OKD ще имами $R^2=r^2+k^2$ или $V^2=R^3-k^2$; а къто извлечемъ отъ двѣ-тѣ части на равенство-то коренъ квадратенъ ще получимъ:

$$r=\sqrt{R^2-k^2}\ (1).$$

Равенство (1) показва, чи колко-то е по малко растояніе-то k, толкова ще бжде по голѣмъ радіусъ-тъ на сѣченіе-то r, защо-то толкова е по голѣма разлика-та R^2-k^2 слѣд. и $\sqrt{R^2-k^2}$. Ако сѣченіе-то минува презъ центръ-тъ на сферж-тж, то k ще бжде равно на нулж и отъ ур. (1) ще получимъ $r=\sqrt{R^2}-R$; т. е. радіусъ-тъ на сѣченіе-то бива равенъ на радіусъ-тъ на сферж-тж, и сѣченіе-то е тогава най голѣмо Такова сѣченіе, кое-то минува презъ центръ-тъ, ся нарича *голѣмъ кржгъ*, а всички-тѣ други сѣченія — *малки кржгове*.

Кога-то сфера-та ся разглѣжда къто тѣло, кое-то произлиза отъ вьртеніе-то на кржгъ AQBM (чьрт. 174) около діаметръ AB, то діаметръ AB ся нарича *ось*



Чрът. 174.

на сферѫ-тѫ, два-та му края A и B — *полюси*, голѣмія крѫгъ MQ, кой-то е перпендикуляренъ къмъ ось-тѫ, — *екваторъ*, малки-тѣ крѫгове mq, m, q, . . . , кои-то сѫ перпендикулярни къмъ ось-тѫ, *параллели*, най послѣ голѣми-тѣ крѫгове ApB. Ap,B. . . ., кои-то минуватъ презъ ось-тѫ, — *меридіани*.

§. 141. Плоскость-та, коя-то има съ повьрхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ само еднѫ общѫ точкѫ, ся нарича *касателнѫ плоскость*, а обща-та точкѫ — *точкѫ на касаніе-то*.

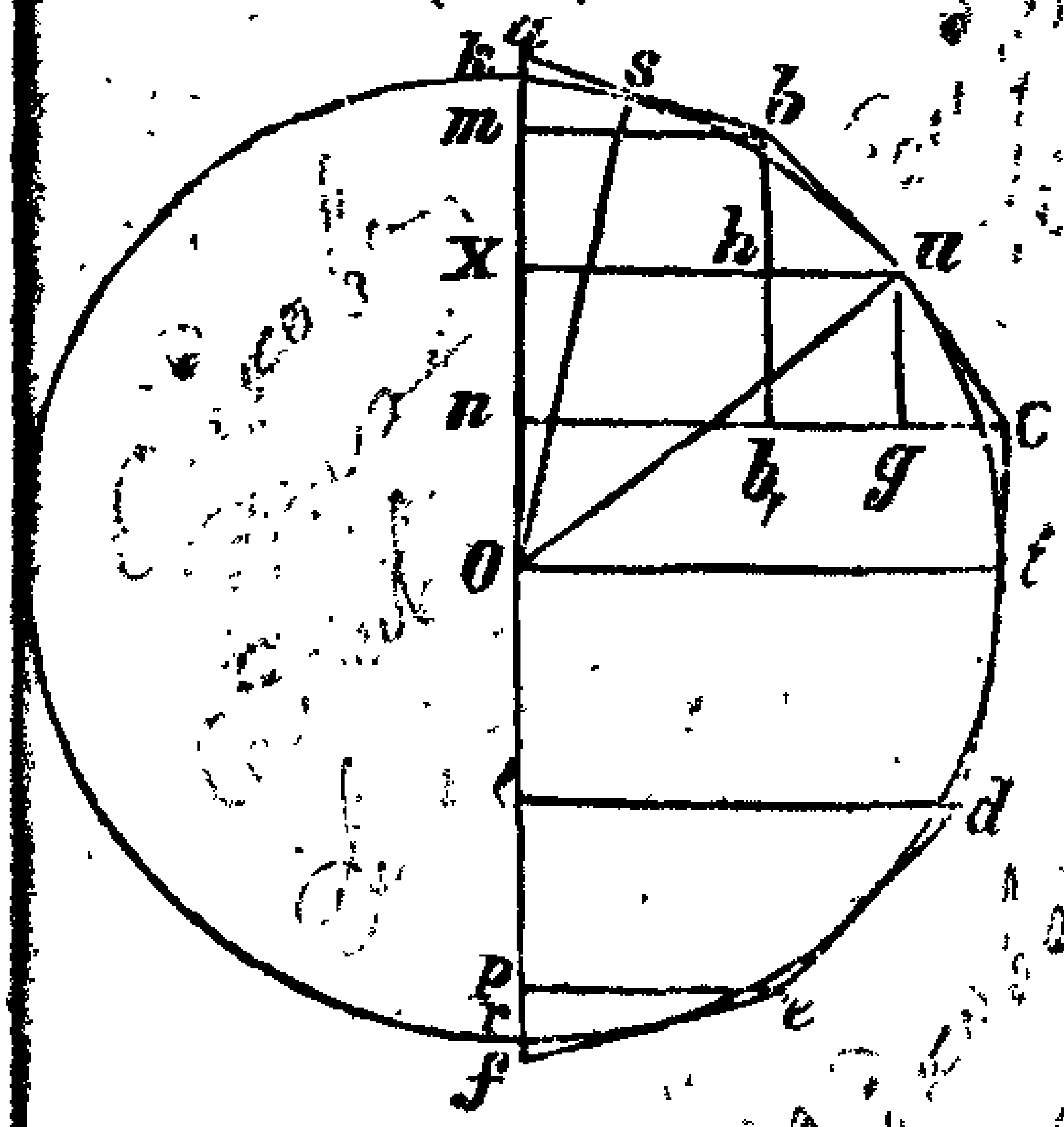
§. 142. *Теорема. Радіусъ-тъ на сферѫ-тѫ, кой-то е прекаранъ къмъ точкѫ-тѫ на касаніе-то, е перпендикуляренъ къмъ касателнѫ-тѫ плоскость.*

Доказ. Линія-та, коя-то съединява центръ-тъ съ точкѫ-тѫ на касаніе-то, е най кѫса отъ всички-тѣ линіи, кои-то съединяватъ центръ-тъ съ други-тѣ точки на касателнѫ-тѫ плоскость, защо-то тѣзи точки сѫ вънъ отъ сферѫ-тѫ; а ній знаемъ, чи най кѫсо-то растояніе отъ точкѫ-тѫ до плоскость-тѫ е перпендикуляръ (§. 90), слѣд. радіусъ-тъ е перпендикуляренъ къмъ касателнѫ-тѫ плоскость.

Ако земимъ много малка частъ отъ сферѫ-тѫ, то можемъ безъ голѣмѫ погрѣшкѫ да ѭ считами за плоскостъ и тогава радіусъ-тъ ще бѫде перпендикуляренъ къмъ неѭ. Ето защо може да ся каже, чи радіусъ-тъ е сѣкога перпендикуляренъ къмъ повьрхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ.

§. 143. *Теорема. Повьрхнина-та на сферѫ-тѫ е* *равна на произведеніе-то отъ окржжность-тж на голѣмія кржгъ и діаметръ-тъ на сферж-тж*

Доказ. Нека около полукржгъ ksutr (чърт. 175) е описана половина отъ правиленъ многожгълникъ abcdex съ четно число страни. При вьртѣніе-то на полукржгъ-тъ заедно съ многожгълникъ-тъ около діаметръ-тъ kr, полукржгъ-тъ ще образува сферж, а полумногожгълникъ-тъ — *тѣло*, кое-то състои:



Чърт. 175.

1) Отъ два жгълни конуса, образувани отъ линіи ab и ef.

2) Отъ рѣдъ пресѣчени конуси, образувани отъ други-тѣ страни на многожгълникъ-тъ, кьто напр. отъ bc и de.

3) Отъ цилиндръ, образуванъ отъ линіж de, ако предложимъ, чи тжзи линія е успорѣдна на діаметръ kr.

Повьрхнина-та на конусъ-тъ, кой-то е образуванъ отъ линіи ab е равна на $2\pi.mb.\frac{ab}{2}$ (§. 136); нъ $\frac{ab}{2}=as$ (§. 78), слѣд. повьрхнина-та на конусъ-тъ е $2\pi.mb.ac$. Ако съединимъ точка s съ центръ O, означимъ радіусъ-тъ на сферж-тж съ R и забѣлѣжимъ, чи правожгълни тѣ трижгълници asO и brna, кои-то иматъ общъ жгълъ a, сж подобни, то $\frac{sa}{sO}=\frac{ma}{mb}$ или

$as.mb=am.R$; за това повьрхнина-та на конусъ-тъ ще бхде $2\pi.am.R=2\pi R.am$; нъ $2\pi R$ е окрѫжность-та на голѣмія крѫгъ, а am — височина-та на конусъ-тъ, слѣд. *тѫзи повьрхнинѫ е равна на окрѫжность-тѫ на голѣмія крѫгъ, умножена съ височина-та на конусъ-тъ.*

Повьрхнина-та на пресѣченія конусъ, кой-то е образуванъ отъ вьртеніе-то на нѣкоѭ отъ страни-тѣ на многоѫгълникъ-тъ, напр. отъ страна bc, е равна на $\pi(mb+nc)bc$ (§. 137), като спустимъ перпендикуляри $bb_,$ и ug отъ правоѫгълникъ $mbhx$ имами: $mb=hx=xu-hu$ (1), а отъ правоѫгълникъ $xugn$ имами $xu=ng$ и $nc=ng+gc=xu+gc$. Тъй като линіи-тѣ $bb_,$ и gu сѫ успорѣдни и $bu=uc$, то $gc=b_,g=hu$; слѣд. $nc=xu+hu$ (2). Събирами равенство (1) и (2) и получвами $mb+nc=xu-hu+xu+hu=2xu$; слѣд. $\pi(mb+nc)bc=2\pi.xu.bc$. Правоѫгълни-тѣ триѫгълници Oxu и $cbb_,$ сѫ подобни, защо-то острія ѫгълъ Oux е равенъ на $\angle cbb_,$; наистина, $\angle Onx+\angle xub=d$ и $\angle xub+\angle cbb_,=d$ (§. 37, слѣд. 4), слѣд.

$\angle oux+\angle xub=\angle xub+\angle cbb_,$, или $\angle oux=\angle cbb_,$. Отъ подобіе-то на триѫгълници Oxu и $cbb_,$ имами

$$\frac{ux}{ou}=\frac{bb_,}{bc}, \text{ или } bc.ux=bb_,ou=mn.R;$$

слѣд. $2\pi xu.bc=2\pi R.mn$. Тъй като mn е височина на пресѣченія конусъ, то *повьрхнина-та му е сѫщо равна на окрѫжность-тѫ на голѣмія крѫгъ, умноженѫ съ височинѫ-тѫ на конусъ-тъ.*

Най послѣ като предположимъ, чи линія cd' е успорѣдна на діаметръ kr, ще намѣримъ, чи повьрхнина-та на цилиндръ-тъ, образуванъ отъ неѭ, е равна на $2\pi nc.dc$ (§. 132), нъ $nc=Ot=R$; слѣд. *повьрхнина-та на този цилиндръ е равна сѫщо на окрѫжность-тѫ на голѣмія крѫгъ, умноженѫ съ височина-та му.*

Отъ казано-то заключавами, чи повърхнина-та, коя-то е образувана отъ вьртеніе-то на многоѫгълникъ abcdef, състои отъ таквизи части, отъ кои-то сѣка е равна на произведеніе-то отъ окрѫжность-тѫ на голѣмія крѫгъ и височинѫ-тѫ ѝ; слѣд. сумма-та отъ всички-тѣ тѣзи повърхнини е равна на окрѫжность-тѫ на голѣмія крѫгъ, умножена съ сумма-та на височини-тѣ имъ, т. е. линіѫ af.

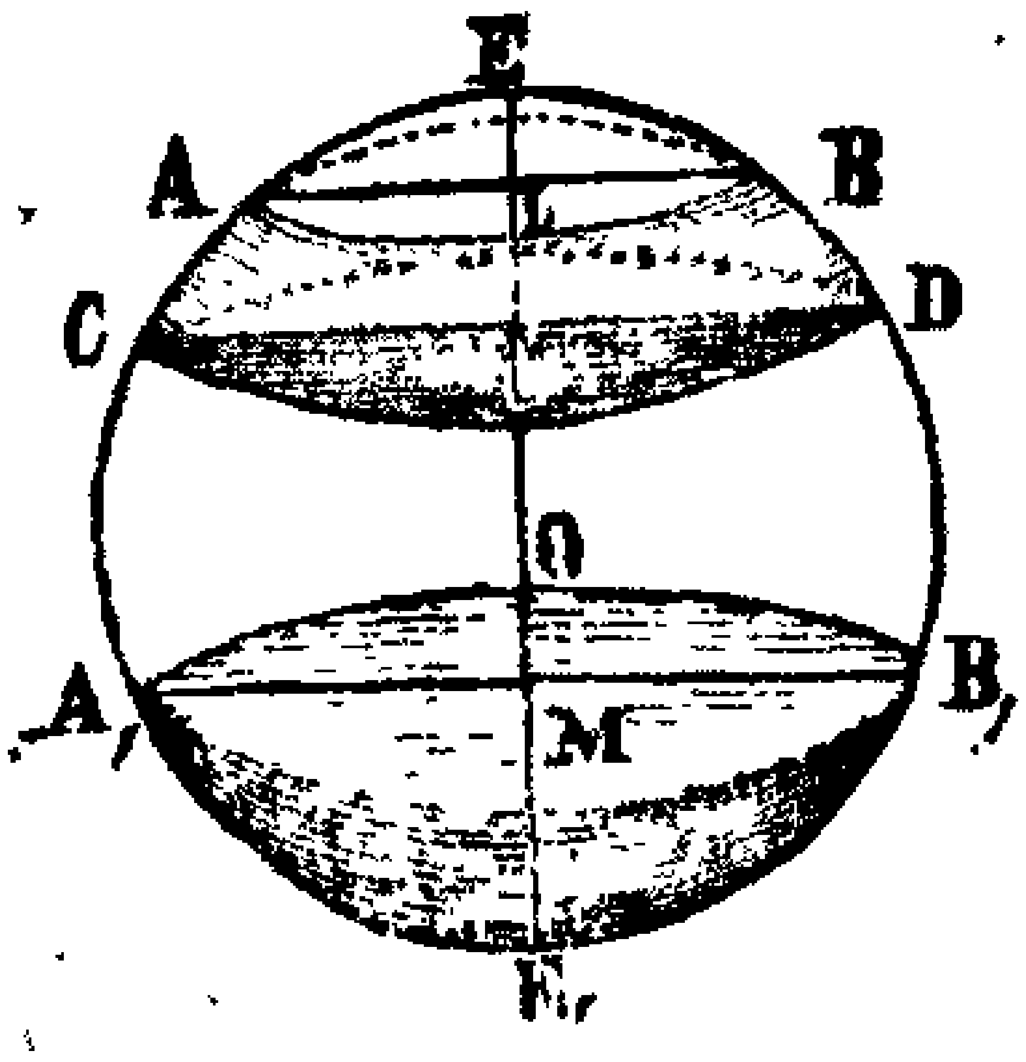
Ако число-то страни-тѣ на многоѫгълникъ-тъ стане безкрайно голѣмо, то периметръ-тъ му ще ся слѣе съ окрѫжность-тѫ, линія af ще стане равна на діаметръ-тъ и повърхнина-та, коя-то е описана отъ многоѫгълникъ-тъ, ще ся слѣе съ повърхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ. Отъ това заключавами, чи повърхнина-та на сферѫ-тѫ е равна на окрѫжностъ-тѫ на голѣмія крѫгъ, умноженѫ съ діаметръ-тъ.

Тъй кѫто окрѫжностъ-та на голѣмія крѫгъ е $2\pi R$, а діаметръ-тъ на сферѫ-тѫ $2R$, то повърхнина-та на сферѫ-тѫ ще бѫде $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$ кѫто забелѣжимъ, чи πR^2 е лице-то на голѣмія крѫгъ, заключавами, чи *повърхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ е равна на четворно-то лице на голѣмія крѫгъ.*

Ако повърхнини-тѣ на двѣ сфери сѫ P и p, радіуси-тѣ имъ R и r, то $P = 4\pi R^2$ и $p = 4\pi r^2$, слѣд. $\frac{P}{p} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}$ или $\frac{P}{p} = \frac{R^2}{r^2}$ т. е *повърхнини-тѣ* на двѣ сфери ся отнасять по между си кѫто квадрати отъ радіуси-тѣ имъ.

§. 144. Часть отъ сферѫ-тѫ ABCD (чърт. 177) коя-то е заключена между два успорѣдни крѫга AB и CD, ся нарича *сферическій поясъ*; успорѣдни крѫгове AB и CD ся наричать *основи*, а растояніе-то между тѣхъ — *височинѫ* на поясъ-тъ.

Отъ казано-то при опредѣленіе-то на сферическѫ-



Чьрт 176.

тж повьрхнинж слѣдува, чи *повьрхнинж-тж на сферическія поясъ е равна на произведеніе-то отъ височини-тѣ му и окржжность-тж на голѣмія кржгъ.*

Ако означимъ височинж-тж на поясъ-тъ съ H и радіусъ-тъ на сферж-тж съ R, то повьрхнина-та на поясъ-тъ ще бжде $2\pi R.H.$

Часть A,E,B, (чьрт. 176) отъ сферж-тж, коя-то е отсѣчена съ плоскость A,B,, ся нарича *сферическій сегментъ*, а часть отъ радіусъ-тъ E,M, кой-то е перпендикуляренъ къмъ плоскость-тж на сѣченіе-то A,B,, ся нарича *височинж* на сегментъ-тъ.

Отъ казано-то при опредѣленіе-то на сферическж-тж повьрхнинж слѣдува, чи *повьрхнина-та на сферическія сегментъ е равна на произведеніе-то отъ височинж-тж му и окржжность-тж на голѣмія кржгъ.*

§. 145. *Теорема. Обемъ-тъ на сферж-тж е равенъ на произведеніе-то отъ повьрхнинж-тж и́ и третѭ-тж часть отъ радіусъ-тъ*·

Доказ. Да си представимъ безчисленно множество пирамиди, основи-тѣ на коя-то да сж толкова малки многожгълници, що-то лица-та имъ ся сливать съ повьрхнинж-тж на сферж-тж, и върхове-тѣ на кои-то ся срѣщать въ центръ-тъ на сферж-тж. Тогава обемъ-тъ на сферж-тж ще бжде равенъ на сумма-та отъ обеми-тѣ на тѣзи пирамиди. Нъ тъй като обемъ-тъ на цѣлж пирамидж, е равенъ на основж-тж, умноженж съ третѭ-тж часть отъ височинж-тж и́, а сумма-та отъ основи-тѣ на всички-тѣ пирамиди съставя повьрнинж-тж на сферж-тж, и за височинж на всички-тѣ тѣзи пирамиди служи радіусъ-тъ на сферж-тж, то отъ това слѣдува, чи обемъ-тъ на сферж-тж е равенъ на произведеніе-то отъ повьрхнинѫ-тѫ ѝ и третѭ-тѫ часть отъ радіусъ-тъ.

Ако означимъ объемъ-тъ на сферѫ-тѫ съ V, радіусъ-тъ ѝ съ R, то повьрхнина-та ще бѫде $4\pi R^2$, слѣд.

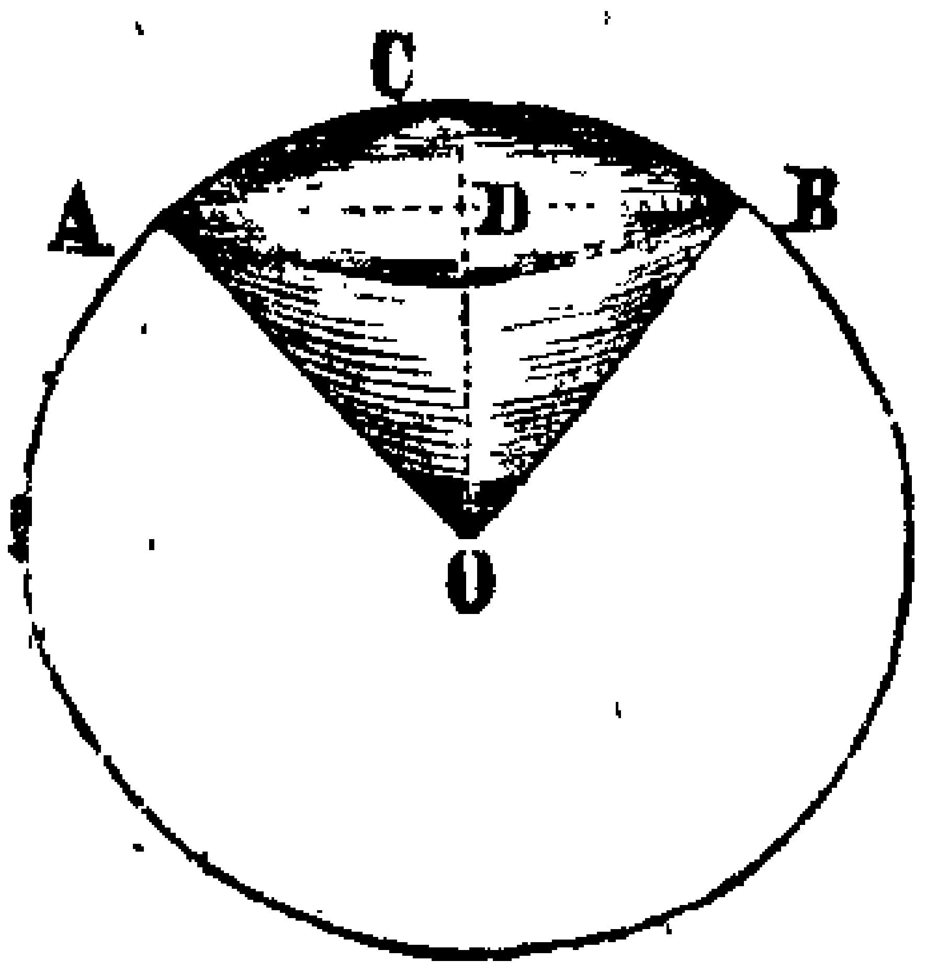
$$V=4\pi R^2\times\frac{R}{3},\ \text{или}\ V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Нека V и v сѫ объеми-тѣ на двѣ сфери, R и r радіуси-тѣ имъ, тогава $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ и $v=\frac{4}{3}\pi r^3$; слѣд.

$$\frac{V}{v}=\frac{{}^4/_3\pi R^3}{{}^4/_3\pi r^3},\ \text{или}\ \frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3},$$

т. е. *объеми-тѣ на сфери-тѣ ся отнасять кьто кубове отъ радіуси-тѣ имъ.*

§. 146. Часть отъ сферѫ-тѫ AOBC (чьрт. 177) коя-то е заградена съ сегментъ ABC и коническѫ повьрхнинѫ AOB, върхъ-тъ на коя-то е въ центръ-тъ на сферѫ-тѫ, ся нарича *сферическій секторъ.* Явно е чи сферическія секторъ може да ся разглежда кьто тѣло, кое-то е произлѣзло отъ вьртеніе-то на крѫговія секторъ BOC около радіусъ-тъ на крѫгъ CO.



Чьрт. 177.

Отъ казано-то при опредѣленіе-то на объемъ-тъ на сферѫ-тѫ слѣдува, чи *объемъ-тъ на сферическія секторъ е равенъ на произведеніе-то отъ повьрхнина-та на сферическія сегментъ ACB и третя-та часть на радіусъ-тъ.*

Ако означимъ съ V объемъ-тъ на сферическія секторъ, съ H височина-та на сегментъ-тъ ACB, съ R радіусъ-тъ на сферѫ-тѫ и ако забелѣжимъ, чи повьрхнина-та на сегментъ-тъ е равна на $2\pi RH$ (§. 144), то ще намѣримъ, чи объемъ-тъ на сферическія секторъ е равенъ на $^2/_3\pi R^2H$.

ЗАДАЧИ.

75. Да опредѣлимъ объемъ-тъ на правоѫгълнія параллелепипедъ, ако дължина-та му е 8,4 метра, широчина-та му 7,5 метра и височина-та му 5 метра.

Рѣшеніе. Сморѣдъ §. 119 объемъ-тъ на параллелепипедъ-тъ ще бѫде равенъ на 315 кубически метра.

76. Да опредѣлимъ объемъ-тъ на въздухъ-тъ кой-то ся намира въ правоѫгълнѫ стаѭ, ако дължина-та на стая-та е 30,42 метра, широчина-та ѝ 28,30 метра, а височина-та 14,15 метра.

Рѣшеніе. Объемъ-тъ на въздухъ-тъ е 12181,5369 кубически метра.

77. Правоѫгъленъ бассейнъ, съ дѫлжинѫ 6,5 метра, широчинѫ 4,4 метра и дълбочинѫ 2,7 метра, е напълненъ съ водѫ до $^2/_3$ отъ височина-та си; колко кубически метра водѫ съдържа той?

Рѣшеніе. Бассейнъ-тъ съдържа 51,48 кубически метра водѫ.

78. Да намѣримъ околовръстнѫ-тѫ повърхнинѫ и объемъ-тъ на правилнѫ-тѫ шестоѫгълнѫ пирамидѫ, ако височина-та ѝ е равна на 63 метра, апотема-та е 64,14 метра, а радіусъ-тъ на описнія около основѫ-тѫ крѫгъ е 17 метра.

Рѣшеніе. Ако радіуса на описанія крѫгъ е 17 метра, то и страна-та на шестоѫгълникъ-тъ е равна на 17 метра (§. 80). Апотема-та h на шестоѫгълника ще ся опредѣли отъ формула

$$h^2=(17)^2-(\frac{17}{2}))^2=289-72,25=216,75.$$

Слѣд. h=14,72 метра. Спорѣдъ §. 112 околоврьстна-та повьрхнина на пирамидѫ-тѫ ще бѫде равна на $6\times17\times\frac{64,14}{2}=3271,14$ квадратни метра. За да опредѣлимъ объемъ-тъ на пирамидѫ-тѫ, трѣба да знаемъ лице-то на основѫ-тѫ. Основа-та състой отъ шестъ равни триѫгълника, отъ кои-то сѣкій е равенъ на $14,72\times8,5=125,12$ квадратни метра, слѣд. лице-то на основа-та е $125,12\times6=750,72$ к. метра. Спорѣдъ §. 129 объемъ-тъ на пирамида-та ще бѫде равенъ на

$$750,75\times\frac{63}{3}=15765,12 \text{ кубически метра.}$$

79. Височина-та на триѫгълнѫ-тѫ призмѫ е 38,5 метра, а основа-та ѝ представлява правоѫгъленъ триѫгълникъ единъ-тъ катетъ, на кой-то е 12,5 метра, а другія 18 метра. Да опредѣлимъ объемъ-тъ на призмѫ-тѫ.

Рѣшеніе. Ако считами единъ-тъ катетъ за основѫ на триѫгълникъ-тъ, а другія за височинѫ, то лице-то на основѫ-тѫ ще бѫде $12,5\times\frac{18}{2}=112,5$ квадратни метра. Спорѣдъ §. 125 объемъ-тъ на призмѫ-тѫ ще бѫде $112,5\times38,5=4331,25$ кубически метра.

80. Апотема-та на правилнѫ-тѫ пресѣченѫ пирамидѫ е 13 метра, а основи-тѣ сѫ петоѫгълници; страна-та на горнія е 3 метра, а страна-та на долнія 4,5 метра. Да опредѣлимъ околоврьстнѫ-тѫ повьрхнинѫ на правилнѫ-тѫ пресѣченѫ пирамидѫ.

Рѣшеніе. Периметръ-тъ на горнѭ-тѫ основѫ е 15 метра, а на долнѭ-тѫ 22,5 метра. Спорѣдъ §. 113 околоврьстна-та повьрхнина на пресеченѫ-тѫ пырамидѫ ще бѫде $\frac{15+22,5}{2}\times13=243,75$ квадратни метра.

81. Височина-та на цилиндръ-тъ е 8,5 метра

а радіусъ-тъ на основѫ-тѫ му 5 метра. Да опредѣлимъ всичкѫ-тѫ повьрхнинѫ и обьемъ-тъ на цилиндръ-тъ.

Рѣшеніе. Спорѣдъ §. 132, всичка-та повьрхнина на цилиндръ-тъ ще бѫде $2\pi RH+2\pi R^2=2\times3,14\times5\times8,5+2\times3,14\times25=423,9$ квадратни метра. Спорѣдъ §. 133, обьемъ-тъ на цилиндръ-тъ ще бѫде равенъ на 667,25 кубически метра.

82. Височина-та на конусъ-тъ е 12,5 метра, радіусъ-тъ на основѫ-тѫ 5,4 метра, а дължина-та на образователнѫ-тѫ линіѭ 13,6 метра. Да опредѣлимъ всичкѫ-тѫ повьрхнинѫ и обьемъ-тъ на конусъ-тъ.

Рѣшеніе. Спорѣдъ §. 136 всичка-та повьрхнина на конусъ-тъ ще бѫде $3,14\times5,4\times13,6+3,14\times(5,4)^2=322,164$ квадратни метра. Спорѣдъ §. 138 обьемъ-тъ на конусъ-тъ ще бѫде $\frac{3,14\times(5,4)^2\times12,5}{3}=381,51$ кубически метра.

83. Обьемъ-тъ на конусъ-тъ е 86,5 кубич. метра, а радіусъ-тъ на основѫ-тѫ му 3,5 метра. Да опредѣлимъ височинѫ-тѫ на конусъ-тъ.

Рѣшеніе. Отъ формулѫ $V=\frac{\pi R^2H}{3}$ имами $H=\frac{3V}{\pi R^2}=\frac{3\times86,5}{3,14\times(3,5)^2}=6,75$ метра.

§. 84. Обьемъ-тъ на цилиндръ-тъ е 135 кубически метра, а височина-та му 15 метра. Да опредѣлимъ радіусъ-тъ на цилиндрическѫ-тѫ основѫ.

Рѣшеніе. Отъ формулѫ $V\pi R^2H$ имами $R^2=\frac{V}{\pi H}$, слѣд. $R=\sqrt{\frac{V}{\pi H}}$. Къто замѣстимъ въ вторѫ-тѫ часть букви-тѣ съ числа, ще получимъ $R=\sqrt{\frac{135}{15\times3,14}}=1,69$ метра.

85. Радіусъ-тъ на сферж-тж е 2,5 метра. Да опредѣлимъ повърхнинж-тж и объемъ-тъ на сферж-тж.

Рѣшеніе. Спорѣдъ §. 143, повърхнина-та на сферж-тж ще бжде $4\pi R^2 = 4\times3,14\times(2,5)^2 = 78,5$ квадратни метра. Спорѣдъ §. 145 объемъ-тъ на сферж-тж ще бжде $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\times3,14\times(2,5)^3 = 65,42$ кубич. метра.

86. Повърхнина-та на сферж-тж е 128 квадратни метра; да опредѣлимъ объемъ-тъ на сферж-тж.

Рѣшеніе. Повърхнина-та на сферж-тж е $4\pi R^2 = 128$; слѣд. $R^2 = \frac{128}{4\times3,14} = 10,13$ или $R = \sqrt{10,19} = 3,19$ метра. Като знаемъ радіусъ-тъ на сферж-тж, ще опредѣлимъ объемъ-тъ ѝ отъ формулж $\frac{4}{3}\pi R^3$. Като замѣстимъ въ послѣдне-то изреженіе букви-тѣ съ числа, ще получимъ $\frac{4}{3}\times3,14\times(3,19)^3 = 135,9$ кубич. метра.

Като [illegible]

87. Да опредѣлимъ повърхнинж-тж и объемъ-тъ на земнж-тж сферж, ако радіусъ-тъ на земнж-тж е 632,62 миріаметра.

Рѣшеніе. Повърхнина-та на земнж-тж е 5090379,6 квадратни миріаметра; объемъ-тъ на земнж-тж е равенъ приблизително на 1081 миліона кубически миріаметра.

88. Да опредѣлимъ радіусъ-тъ на сферж-тж, ако повърхнина-та ѝ е равна на 1 квадратенъ метръ.

Рѣшеніе. Отъ равенство $4\pi R^2 = 1$ имами:

$$R^2 = \frac{1}{12,56}, \text{ слѣд. } R = \sqrt{\frac{1}{1256}} = 0,282 \text{ метра.}$$

89. Радіусъ-тъ на сферж-тж е 8 метра, а височина-та на сферическія сегментъ 5 метра. Да опредѣлимъ повърхнинж-тж на сферическія сегментъ.

Рѣшеніе Спорѣдъ §. 144 повърхнина-та на сферическія сегментъ е равна на $2\pi RH$ като замѣстимъ

Дядо Юри[illegible]
11 [illegible]
[illegible]
въ [illegible]
[illegible]
ч. 11-20 [illegible]
[illegible]
Петковъ.
1893 г. [illegible]
9+2[illegible]
[illegible]

букви-тѣ съ числа, ще получимъ $2\times3,14\times8\times5=251,2$ квадратни метра.

90. Височина-та на сферическія сегментъ е 9 метра, а радіусъ-тъ на сферѫ-тѫ 12,5 метра. Да опредѣлимъ объемъ-тъ на сферическія секторъ, кой-то отговаря на този сегментъ.

Рѣшеніе. Спорѣдъ §. 146 объемъ-тъ на сферическія секторъ ще бѫде:

$\frac{2}{3}\pi R^2H.=\frac{2}{3}\times3,14\times(12,5)^2\times9=2943,75$ кубич. метра.

91. Повърхнина-та на сферическія сегментъ е 86 квадратни метра, а височина-та му 3 метра. Да опредѣлимъ повърхнинѫ-тѫ и объемъ-тъ на сферѫ-тѫ, къмъ коя-то принадлежи сферическія сегментъ.

Рѣшеніе. Отъ равенство $2\pi RH=86$ имами:

$R=\frac{86}{2\times3,14\times3}=4,57$ метра. Къто знаемъ радіусъ-тъ, ще опредѣлимъ повърхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ отъ формулѫ $4\pi R^2$, а объемъ-тъ отъ формулѫ $\frac{4}{3}\pi R^3$. Отъ формулѫ $4\pi R^2$ имами $4\times3,14\times(4,56)^2=262,31$ квадратни метра. Объемъ-тъ на сферѫ-тѫ е равенъ на

$\frac{4}{3}\times3,14\times(4,56)^3=399,59$ кубически метра.

92. Сѣченіе-то на сферѫ-тѫ е далечъ отъ центръ-тъ ѝ 2 метра, а радіусъ-тъ му е 3,5 метра. Да опредѣлимъ повърхнинѫ-тѫ и объемъ-тъ на сферѫ-тѫ.

Рѣшеніе. За да рѣшимъ задачѫ-тѫ, трѣба да опредѣлимъ радіусъ-тъ на сферѫ-тѫ. Отъ правоѫгълнія △къ, кой-то е съставенъ отъ радіусъ-тъ на сферѫ-тѫ, радіусъ-тъ на сѣченіе-то и разстояніе-то на сѣченіе-то отъ центръ-тъ на сферѫ-тѫ имами: $R^2=(2)^2+(3,5)^2=16,25$; слѣд. $R=\sqrt{16,25}=4,03$. Повърхнинѫ-тѫ на сферѫ-тѫ е 203,97 квадратни метра, а объемъ-тъ ѝ 274 кубически метра.

93. Да опредѣлимъ повьрхнинѫ-тѫ на горѣщія поясъ на землѭ-тѫ сферѫ, ако височина-та му е 507 миріаметра, а радіусъ-тъ на землѭ-тѫ 636,62 миріаметра.

Рѣшеніе. Повьрхнина-та на горѣщія поясъ е 2026973 квадратни миріаметра. 2026966 [illegible]

[illegible] май [illegible]

94. Да опредѣлимъ повьрхнинѫ-тѫ на студенія поясъ на землѭ-тѫ, ако височина-та му е равна на 52,65 миріаметра, а радіусъ-тъ на землѭ-тѫ е 636,62 миріаметра.

Рѣшеніе. Повьрхнинѫ-тѫ на студенія поясъ е 210493,31 квадратни миріаметра.

95. Да опредѣлимъ височинѫ-тѫ на цилиндръ-тъ, ако радіусъ-тъ на основѫ-тѫ му е 8 метра, а объемъ-тъ му 486 кубически метра.

Рѣшеніе. Височина-та на цилиндръ-тъ е равна на 2,417 метра.

96. Объемъ-тъ на конусъ-тъ е 140 кубически метра, а височинѫ-тѫ му 18,5 метра; да опредѣлимъ діаметръ-тъ на основѫ-тѫ му.

Рѣшеніе. Діаметръ-тъ на основѫ-тѫ е 5,38 метра.

97. Окрѫжность-та на глобусъ-тъ е 1,5 метра; на колко сѫ равни объемъ-тъ и повьрхнинѫ-тѫ му?

Рѣшеніе. Повьрхнина-та на глобусъ-тъ е 0,7235 квадратни метра, а объемъ-тъ му 0,057876 кубически метра.

98. Да опредѣлимъ объемъ-тъ на конусъ-тъ, ако височина-та му е 12 метра, а образователна-та линія — 15 метра.

Рѣшеніе. Объемъ-тъ на конусъ-тъ е 1017,36 кубически метра.

99. Да опредѣлимъ отношеніе-то между околовръстни-тѣ повьрхнини и объеми-тѣ на два цилиндра,

кои-то произлизать отъ вьртеніе-то на правоѫгълникъ-тъ около основѫ-тѫ му и височинѫ-тѫ му.

Рѣшеніе. Ако означимъ основѫ-тѫ на правоѫгълникъ съ a, а височинѫ-тѫ му съ b, то околовръстната повьрхнина на пьрвія цилиндръ ще бѫде $2\pi ba$, а на вторія $2\pi ab$; слѣд. отношеніе-то на повьрхнини-тѣ ще бѫде $\frac{2\pi ba}{2\pi ab}=1$, т. е. тѣ сѫ равни по между си. Объемъ-тъ на пьрвія цилиндръ е πb^2a, а на вторія πa^2b; слѣд. отношеніе-то ще бѫде $\frac{\pi b^2a}{\pi a^2b}=\frac{b}{a}$, т. е. отношеніе-то е обратно пропорціонално на височини-тѣ.

100 Діаметръ-тъ на вънщна-та повьрхнинѫ на куфѫ-тѫ желѣзнѫ сферѫ е 1,2 метра, а діаметръ-тъ на вътрешнѫ-тѫ повьрхнинѫ 1 метръ. Да опредѣлимъ объемъ-тъ на желѣзо-то.

Рѣшеніе. Този объемъ е разлика отъ объеми-тѣ на двѣ-тѣ сферически повьрхнини и е равенъ на 0,381 кубически метра.

Имена-та на родолюбиви-тѣ спомоществователи. *)

ГАБРОВО. Читалище-то „Спистяваніе“ 10 тѣла. Братія Видинліеви 10 т. Женско-то Дружство „Майчина грижа“ 10 т. Ученическо-то Дружество 5 т. Учители: П. Генчевъ, Протоіерей В. Миховъ, А. Владигеровъ, Ц. Гинчевъ, Р. Каролевъ, А. Маноловъ, Н. Сарановъ, М. Радивоевъ. Цв. Самарджіевъ, Г. Промковъ и Т. Д. Анастасовъ. Учителки: Г-жа Анастасія М. Тошева отъ Желѣзникъ, Анка Николова, Анка Лечева, Василка Димитрова и Марійка Стоянова. Игуменъ Х. П. Неофитъ Соколскій, Протоіерей Стефанъ п. Станимировъ. Ив. Андреевъ Семовъ. Д. Цвѣтковъ Мичковецъ. Георгій Рачковъ. Ив. Стояновъ. Цанко Добревъ. Ив. П. Златинъ. Стоянъ Кириловъ. Лазаръ Тодоровъ. Петко Аврамовъ. Ив. Марковъ Ванковъ. Ив. Марковъ Колювъ. Христо Стомоняковъ. Хр. Цвѣтковъ Мичковецъ. Атанасъ С. Кехлибаревъ. Петръ. Д. Хесапчіевъ. Димитръ Георгіевъ Хесапчіевъ. В. Ив. Киревъ. Хараламби Бояджіевъ. Досю Ив. Гайтанджіевъ. Іосифъ Рачковъ. Христо Стояновъ. Ганко Гавриловъ. Христо К. Мархоровъ. Пенчо Георгіевъ. Косю Христовъ. Христо Колчовъ Басмаджіевъ. Цончо Пенчовъ. Досю Ивановъ.

Главно мѫжко училище. Ученици отъ VI. классъ. Иванъ Андреевъ отъ Градецъ. Желю Димитровъ отъ Градецъ. Владиміръ Белчевъ Священнодіаконъ отъ Щипъ. Н. М. Рѣсковъ. В. Хр. Дюзтабановъ. Димитръ Добревъ. Т. Цоневъ. Ц. Ив. Стояновъ.

---

*) Тѣзи спомоществователи, послѣ имена-та на кои-то нѣма цифрѫ, зематъ по едно тѣло.

Ученици отъ V. классъ. Георгій Д. Видинліевъ. Колю И. Голосмановъ. Георгій Гечовъ отъ Плѣвень. Антонъ П. Георгіевъ. Иванъ Георгіевъ отъ Градецъ. Добри Ивановъ отъ Градецъ. Ст. Пинтевъ отъ Шипкѫ. Ангелъ М. Ташикмановъ. Ст. П. Стефановъ. Георгій Ямантіевъ. Ив. Пецовъ. Стефанъ Костовъ отъ Казанлѫкъ. Стефанъ Хр. Тошковъ отъ Калоферъ. Христо Недѣлковъ отъ Г. Орѣховицѫ. Георгій Хр. Папазовъ отъ Г. Орѣховицѫ. Іоакимъ Стояновъ. Никола П Христовъ. Христофоръ Хесапчіевъ. Хр. Ц. Луковъ. Димитръ Иліевъ Табаковъ отъ Севліево.

Ученици отъ IV. классъ. Георгій П. Ивановъ Македонскій. Доню Цоневъ. Златаревъ отъ Ловечъ. Братія Кириллъ и Парашкева Колеви отъ Ловечъ. Лазаръ Ф. Обрѣшковъ отъ Г. Орѣховицѫ. Димитръ Митровъ отъ Видинъ. Евтимъ Ив. Бакърджіевъ отъ Г. Орѣховицѫ. Андрей Р. Блъсковъ отъ Шуменъ. Коста Г. Х. Ангеловъ отъ Видинъ. Тома П. Василевъ отъ Тетевень. Димитръ К. П. Василевъ отъ Ловечъ. Илія Н. Таповъ отъ Плѣвень. Петръ Д. Вангеловъ отъ Г. Орѣховицѫ. Константинъ Василевъ отъ Струмицѫ. Ив. Т. Вацовъ отъ Плѣвень. Ив. Д. Шиваровъ отъ Трѣвнѫ. Петко Х. Раювъ отъ Г. Орѣховицѫ. Петръ К. Бояджіевъ отъ Плѣвень. Георгій Ив. Вацовъ отъ Плѣвень.

Ученици отъ III. классъ. Симеонъ Г. Кисаловъ отъ Свищовъ. Георгій Ив. Бояджіевъ отъ Плѣвенъ. Димитръ. Х. Ненчевъ отъ Ловечъ. Михаилъ Първановъ отъ Ломъ. Матей Андреевъ отъ Сопотъ. Кирко Георгіевъ отъ Сопотъ. Тригоръ Н. Х. Пенковъ отъ Т. Орѣховицѫ. Миланъ К. Цановъ отъ Плѣвень.

Главно Дѣвическо училище. Ученици отъ V. классъ. Надежда Василева отъ Казанлѫкъ. Величка Петрова Булаещва отъ Казанлѫкъ. Неда Димова

Шипчанова. Тота Венкова. Величка Р. Цанкова. Радка Радославова. Велика К. Мархорова.

Ученици отъ IV. Классъ. Радка И. Петева отъ Севліево. Аница П. Михалева отъ Елена. Анна Димитракева отъ Желѣзникъ. Станка Р. Стомонякова. Дона Станчева. Васила Цанкова Чихларева. Анастасія Дончева. Елена Рачева. Марія Ив. Стомонякова. Дона Иванова. Анастасія Досева Драганова. Кица Андреева. Деша Петрова. Рада Добрева. Неда И. Христова.

Ученици отъ III. классъ. Стефани С. Малечкова отъ Г. Орѣховицѫ. Марійка Б. Българова отъ Сопотъ. Тодорица М. Бояджіева отъ Плѣвенъ. Марійка Ц. Киркова отъ Сопотъ. Лада Н. Киманод[illegible]лова отъ Казанлѫкъ. Зойка Ф. Обрѣшкова отъ Г[illegible]рѣховицѫ. Еленка С. Арабова отъ Г. Орѣховицѫ. Неда Петрова отъ Варнѫ. Елисавета п. Н. Икономова отъ Плѣвенъ. Донка С. Хитрова отъ Ловечъ. Анастасія Т. Катранова отъ Свищовъ. Пенка Т. Икономова отъ Трѣвнѫ. Недка Радева. Марійка Драгнева отъ Ловечъ. Кина Цанева отъ Трѣвнѫ. Еленка Иванчева отъ Ломъ. Витка Крьстева Пишуркова отъ Ломъ. Ламбрини Д. Вангелова отъ Г. Орѣховицѫ. Фица Кесарева. Анна Максимова. Гана Христова. Кица Х. Андреева. Марія Драгулова. Марія Петрова. Велика Петрова Паскалева. Дона Лазарева. Васила Рачева. Марія Петрова отъ Казанлѫкъ. Ирина Кирева отъ Горни-Турчета. Деша Станчева. Цана Иванова.

Ученици отъ II. классъ. Тодорица Кѫнчева отъ Търново. Евтимія Пьрванова отъ Ломъ. Веслина А. Х. Константинова отъ Свищовъ. Станка А. Х. Георгіева отъ Сопотъ. Катерина Х. Танова отъ Желѣзникъ. Бона Иванчова. Марія Досева. Марія Петкова. Злата Константинова. Марія Цонева. Христина Симеонова.

Ученици отъ I. классъ. Занвирица А. Х. Константинова отъ Свищовъ. Еленка Иванчова-Пенчова отъ Галацъ. Катерина Василева отъ Струмицѫ.

ОДЕССА. Г. г. Душеприкащики на В. Априлова за Габровско-то училище 50 тѣла. Н. Хр. Палаузовъ 5 тѣла Василій Н. Рашеевъ 10 тѣла. Н. М. Тошковъ 4 тѣла. К. Н. Палаузовъ 10 тѣла. Т. Пуліевъ 5 тѣла. С. Стомоняковъ 5 тѣла. М. Пашовъ 2 тѣла. С. Калпазановъ 3 тѣла. А. Ю. Кисевъ 2 тѣла. Петко Червенаковъ 2 тѣла. М. Ивановъ 2 тѣла. Н. П. Палаузовъ. Т. Манолловъ. С. Миларовъ. Д. Филофъ. Н. Никовъ. Добревъ. Д. Волковъ. В. Васильевъ. П. Шиваровъ. Тома Пелтеки. Антонъ Ив. Щихновъ.

ПЛОВДИВЪ. Негово Високо преосвященство [illegible]-Филиппополскій Г-нъ Панаретъ 5 тѣла. Негово Презитъщенство викарій Свято-Филиппополскаго Г-нъ Гервасій Левкійскій 3 тѣла. Г-нъ Н. Геровъ. Д-ръ Рашко Петровъ. Учит. Д. Благоевъ Д-ръ К. Кирковъ. Д. В. Манчевъ. П. Радоміровъ Ив. С. Рашевъ. Арановскій мънастирь за училище-то. Негово Високопреподобіе Г. Герасимъ, игуменъ на Арановскій мънастирь. Н. Консуловъ отъ Т. Пазарджикъ. В. Н. Золотовичъ. Братія Пѣеви. Хр. Г. Дановъ. Ученическо-то Дружство „Напредъкъ."

Ученици отъ Пловдивскѫ-тѫ Семинаріѭ. Ангелъ п. Тодоровъ отъ Голѣмо Кокаре. Г. Ивановъ отъ Пиротъ. Ав. Миневъ Голешничанинъ. С. Дончевъ отъ Клисурѫ. Сав. х. п. Евстатіевъ Стрѣлчанинъ. Ц. Т. Дессіевъ отъ Копривщицѫ. К. Поповъ отъ Мустафа-Паша. Н. Мановъ отъ Пиротъ. П. Шипковъ Македонецъ. Ив. Хр. Ванцаровъ отъ Клисурѫ. А. Сераф. Владиковъ. С. Алдевъ отъ Пирдопъ. Т. А. Кацаровъ отъ Пирдопъ. Г. П. Шойлековъ отъ Клисурѫ. Г. Константиновичъ. М. Т. Х. Колевъ отъ Казанлѫкъ. Спасъ А. Разбойниковъ отъ Мустафа-Паша. М. Ив.

Маджаровъ отъ Копривщицѫ. Вела Богдановъ о Копривщицѫ.

СОПОТЪ. Учит. Г. Смиловъ 2 тѣла. Учит. Стомоняковъ. Учит. С. П. Стойновски. Учит. Г. Н Николовъ.

ЦАРИГРАДЪ. Отъ медицинско-то училище. Г-нъ Д-ръ А. М. Рачевъ. Лазаръ Н. Павловъ. К. В. Славовъ. Желѣз. Радевъ. Харал. Мариновъ. Іосифъ п. Петровъ. П. Г. Димитровъ. К. Н. Брадинскій. А. П. Шоповъ. Н. Н. Сѫбчовъ. Крьстю М. Ковачовъ. С. С. Бобчевъ.

Отъ Робертъ-Коллежъ. Јорданъ Г. Георгіевъ. Георгій Златановъ. Добри Минковъ.

ПРАГА. Ячо Ц. Брашляновъ. А. Братоевъ. Ив. С[illegible]башевъ. Н. А. Макаковъ. Константинъ Димитровъ. Михаилъ Николаевъ. Ив. Череповъ. М. Поппова. Е. Т. Косоочяова. Д. Маркова. Е. Георгіева. И. Р. Вълчанова. Ив. Николовъ.

БУКУРЕЩЪ. Г. Странски за Призренско-то училище. Г. Хакановъ за Ененско-то училище (Казанлѫкъ). Г. Ивановичъ за училище-то въ Ени-Загрѫ. Д. А. Ивановъ 2 тѣла за Свищовско-то училище (въ Горнѭ-тѫ Махалѫ). Н. Николаевъ 2 тѣла за Българско-то училище въ Бургазъ. Ив. Кавалджіевъ 2 тѣла за Габровско-то училище. Ангелаки Саввичъ отъ Браилѫ. Россети Георгіевичъ за училище-то въ Сливенъ. Х. Казасовичъ.

ГОРНЯ ОРѢХОВИЦА. Учитель С. Иліевичъ. К. П. Ивановъ. Хр. Ив. Пановъ. Вичо К. Грънчаровъ.

Ученици отъ III. кл. въ главно-то мѫжко училище. А. Т. Пѣевъ. Атанасъ Т. Бендеревъ. Тодоръ П. Петковъ Мичевъ.

Ученници отъ II. кл. Братія Ник. и Ив. Момови. Братія Анг. и Стати Николови. Бр. Д. и А. елови.

ПЛѢВЕНЬ. Уч. Н. Марковъ. Д. П. Грънчаровъ. ди Ивановъ.

ТЪРНЪ. Священникъ Григорій 10 тѣла.

ХАДЖИОГЛУ ПАЗАРДЖИКЪ. Священникъ Ив. Ф. Македонскій за малкія си синъ Филиппа. Иванъ Господиновъ отъ Варнѫ. Учит. Хр. П. Іосифовъ отъ Шипкѫ. Калчу С. Бобчевскій. Луча Ангеловъ Хаджи. Димитръ Симеоновъ Манафовъ Никола Щерювъ Хаджи отъ Разложскѫ Банѭ. Марко Георгіевъ Манифактураджи отъ Ески-Джумаѭ. Цаню Н. Миджидійліевъ Бакалъ. Моню Данковъ Аб. Иванъ Лазаревъ Аб. отъ Килифарево. Тотю Балканскій. Савва Б. Глохан[illegible] за дѣвическо-то училище въ Жеравнѫ. Кирю Г-[illegible] Медникарскій отъ Желѣзникъ.

Ученици отъ долне-махленско-то училище. Евтимъ Ю. Х. Ивановъ. Иванъ Г. Чаушевъ. Павли Н. Стефановъ.

Ученици отъ горне-махленеско-то училище. Димитръ Станевъ. Петръ Панаіотовъ-Арабаджіевъ. Георгій Захаріевъ. Ганчу Кѫнчевъ. Иванъ К. отъ Каба-Сѫкалъ. Кирю Ивановъ отъ Ениджѫ. Михалъ Цетковъ отъ Кара-Синанъ. Драгни Д. Поповъ отъ Язѫ-Бей. Ангелъ попъ В. отъ Ференско Доганъ-Исаръ.

Учителки-тѣ отъ двѣ-тѣ училища. Кáлица и братъ ѝ Никола Добреви. Станка Великова.

СЕЛО КАБА СѪКАЛЪ. Учитель Атанасъ Рачевъ отъ Балчикъ.

СЕЛО ГЕЛЕНДЖИКЪ. Священникъ Ив. Димитріевъ. Желко Колювъ. Георгій Атанасовъ, учитель въ Чаиръ-Орманъ.

СЕЛО БОГДАНОВО. Учитель, Колю Д. Поповъ отъ Желѣзненско Кара-Бурунъ. Ученици-тѣ му: Стонъ М. Саровъ, Василъ Ст. Чобановъ. Колю Кирювъ отъ Семисъ-Ялж, Тодорка Колюва.

СЕЛО ЮШЕНЛІИ. Священникъ Златанъ Ст новъ. Учит. Д. Станчевъ. Ученици: Атанасъ Петр. Стаматъ Семовъ и Димо Митювъ.

СЕЛО ДЕЛИ-ОСМАНЛАРЪ. Священникъ Василь В. за синъ-тъ си Иванча.

КАЗАНЛЖКЪ. Економъ П. Христо Д. Караджовъ. Попъ Георгій Б. Сеизовъ. Економъ П. Стефанъ Т. Боювъ. П. Василь. П. Минковъ. Попъ Ив. С. Юлаковъ. Учитель Константинъ Владевъ. Уч. Н. М. Гуцевъ. Читалище-то въ Казанлжкъ. Ив. Нед. Узуновъ. Уч. С. С. Почаковъ. Уч. J. М. Стателовъ. Уч. Пѣю Николовъ. Клапановъ Петко Ат. Чешмеджи. Ефтимъ Ива олебіевъ. Ученикъ отъ IV классъ Христо Ивано айтанджіевъ. Георгій Недѣлчовъ. Стефанъ Пенчовъ Габровецъ. Иванчо Нейчовъ Сабонджи. Никола Т. Касіоглу. Христо Алексовъ. Георгій Милчовъ Кюркчіевъ.

ТРОЯНЪ. Учители: Илія П. Бѣлковскій, Никола Ивановъ Марковскій, Василъ Пенчовъ п. Василевъ. Ученици: Стойко Ивановъ. Найденъ Дочовъ Поповъ. Власи Марковъ, Христо Стойновъ, Христо Павловъ Стоювъ, Спасъ Василевъ. Минко Н. Мариновъ. Ради Банчовъ.

КАЛОФЕРЪ. Кирилъ Петковъ. Недю Тодоровъ. Стефанъ К. Ковачовъ. Атанасъ Гуковъ Копривщенецъ. Тодоръ Ивановъ Странскій.

ВІЕНА. Д. Г. Аниевъ. А. Г. Аниевъ. Н. С. Ковачовъ. J. С Ковачевъ.

чо
ди