ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Упражненията, които съпровождат по-голямата част от параграфите, са обикновено лесни и не могат да запълнят нуждата от сериозен сборник от задачи по математически анализ. Тяхното единствено предназначение е да помогнат на читателя да провери дали е усвоил предишния материал. В този смисъл обаче те представляват неразделна част от текста и решаването на повечето от тях е извънредно препоръчително.

Считам за свой дълг да изразя признателността си към моя учител проф. Я. Тагамлицки. Моята дългогодишна работа като асистент под негово ръководство, многобройните ни беседи, както и неговият отличен курс по диференциално и интегрално смятане безспорно са оказали своето благоприятно влияние при написването на настоящия учебник.

Изказвам също така топла благодарност на др. доц. Д. Скордев, който прочете внимателно целия ръкопис и направи редица бележки, които допринесоха за неговото подобряване.

Накрая искам да изкажа своята благодарност на др. стаж. ас. Я. Кинтишев, който ми помогна при подбора на задачите за упражнения, на др. ас. К. Петров, който бе така любезен да поеме грижата за изработване на чертежите, както и на др. Гр. Благоева за нейното изключително старание при редактирането на книгата.

София, декември 1969 г. Д. Дойчинов

УВОД

А. Реални числа

В основата на целия наш курс по математически анализ лежи множеството на реалните числа. Тук ще изброим по-важните, основните свойства на това множество.*

I. На всеки две реални числа a и b съответствува едно реално число, наречено тяхна **сума**, което се бележи с $a+b$. Когато осъществяваме това съответствие, т. е. когато намираме тази сума, казваме, че извършваме действието **събиране**. То е подчинено на следните изисквания:

1) $a+b=b+a$ (комутативен закон).

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (асоциативен закон).

3) Уравнението $a+x=b$, където a и b са дадени реални числа, има винаги, и то едно единствено решение относно x. Това единствено решение се нарича **разлика** на числата b и a и се бележи с $b-a$, а действието, чрез което намираме тази разлика, се нарича **изваждане**.

4) Съществува едно единствено реално число, което се явява решение на уравнението $a+x=a$ при всеки избор на реалното число a. Това число се нарича **нула** и се бележи със знака 0.

Преди да продължим списъка на основните свойства на реалните числа, ще направим няколко забележки.

Асоциативният закон 2) ни дава възможност да въведем понятието сума на три числа a, b, c, която бележим с $a+b+c$, като под този израз разбираме числото $(a+b)+c$, или все едно числото $a+(b+c)$. Аналогично се дефинира понятието сума на произволен (но краен) брой реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, която се бележи с $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

По-нататък от дефиницията на разликата $b-a$ е ясно, че за всеки две реални числа a и b

$$a+(b-a)=b,$$

---

* В Допълнението, поместено на края на курса, е показано как множеството на реалните числа може да бъде изградено, като се излезе от множеството на рационалните числа.

тъй както пък от дефиницията на числото 0 следва, че за всяко реално число a

$$a+0=a.$$

Решението на уравнението $a+x=0$ се нарича противоположно число на числото a и за краткост се бележи със знака $-a$ вместо с $0-a$.

Въз основа на изброените дотук четири свойства на реалните числа могат да бъдат получени редица други. Така например може да се докаже, че:

$-(-a)=a$ за всяко a;

$0=-0$, т. е. числото 0 е противоположно само на себе си;

$a-b=a+(-b)$, т. е. всяка разлика може да се разглежда като сума; както и много други твърдения, на които няма да се спираме.

II. На всеки две реални числа a и b съответствува едно реално число, наречено тяхно произведение, което се бележи с ab. Когато осъществяваме това съответствие, т. е. когато намираме това произведение, казваме, че извършваме действието умножение. При това са изпълнени следните изисквания:

5) $ab=ba$ (комутативен закон на умножението).

6) $(ab)c=a(bc)$ (асоциативен закон на умножението).

7) Ако $a\neq 0$, то уравнението $ax=b$ има винаги, и то едно единствено решение относно x. То се нарича частно на числата b и a и се бележи с $\frac{b}{a}\cdot$ Самото действие, чрез което намираме това частно, се нарича деление.

8) Съществува едно единствено число, явяващо се решение на уравнението $ax=a$ при всеки избор на реалното число $a\neq 0$. Това число се нарича единица и се бележи със знака 1.

Тук могат да се направят забележки, подобни на онези, които направихме по-рано. Така асоциативният закон при умножението, аналогично на това, което имахме при събирането, ни позволява да въведем понятието произведение на три и повече реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, което бележим с $a_1a_2\ldots a_n$.

По-нататък за всяко $a\neq 0$ и за всяко b имаме

$$a\frac{b}{a}=b, \quad a\,.\,1=a.$$

Числото $\frac{1}{a}$ се нарича обратно или реципрочно на числото a.

Може лесно да се покаже, че

$$\frac{1}{\frac{1}{a}}=a \text{ при } a\neq 0,$$

т. е. че реципрочното число на числото $\frac{1}{a}$ е a.

Всяко число, което е сума от единици, се нарича естествено число.

За естествените числа въвеждаме специални означения:

$1,\ 2=1+1,\ 3=1+1+1,\ 4=1+1+1+1,\ 5=1+1+1+1+1$ и т. н.

III. Действията събиране и умножение са свързани помежду си със следното свойство, наречено дистрибутивен закон:

9) $$a(b+c)=ab+ac.$$

С помощта на изброените дотук свойства могат да се докажат за всяко реално число a например следните равенства:

$$(-1).a=-a,\ 0.a=0,\ \frac{a}{1}=a.$$

IV. Реалните числа могат да се сравняват по големина, т. е. има смисъл да твърдим, че дадено реално число a е по-малко от друго реално число b, което твърдение записваме така: $a<b$. В такъв случай казваме още, че числото b е по-голямо от числото a, което твърдение записваме и така: $b>a$. При това изпълнено е следното изискване:

10) За всеки две различни реални числа a и b имаме една от двете възможности — или $a<b$, или $b<a$.

Често се употребяват също така знаците $\leqq$ и $\geqq$. Когато пишем $a\leqq b$, с това твърдим, че е изпълнено или равенството $a=b$, или неравенството $a<b$. Аналогично $a\geqq b$ означава, че имаме или $a=b$, или $a>b$.

Ясно е, че от валидността на двете неравенства $a\leqq b$ и $a\geqq b$ следва равенството $a=b$.

Неравенствата $a<b$, $a>b$ се наричат строги, а неравенствата $a\leqq b$, $a\geqq b$ — нестроги неравенства.

Реалните числа, които са по-големи от числото 0, се наричат положителни, а онези, които са по-малки от 0 — отрицателни. Числото 0 е единственото реално число, което не е нито положително, нито отрицателно.

Неравенствата удовлетворяват още следните изисквания:

11) Ако $a\leqq b$, $b\leqq c$, то $a\leqq c$.

12) Ако $a\leqq b$, $c\leqq d$, то $a+c\leqq b+d$.

13) Ако $0\leqq a\leqq b$, $0\leqq c\leqq d$, то $0\leqq ac\leqq bd$.

Забележка. Свойствата 11), 12) и 13) остават в сила, ако навсякъде знакът $\leqq$ бъде заменен със знака $<$.

Като следствия от изброените свойства могат да се установят и следните твърдения:

Сумата и произведението на две положителни числа са също положителни числа.

Ако $a>b$, то $-a<-b$. По-специално, ако $a>0$, то $-a<0$.

Ако $a<b$, то $b-a>0$ и обратно.

Числото 1 е положително.

V. На всяка двойка числа a и p, където a е положително, а p — произволно реално число, съответствува едно положително реално число, наречено „a в степен p", което бележим с a^p. Осъществяването на това съответствие, т. е. намирането на числото a^p, се нарича повдигане в степен или степенуване и е подчинено на следните изисквания:

14) $a^0=1$ за всяко положително число a.

15) Ако n е естествено число, то $a^n=aa\dots a$, където броят на множителите от дясната страна на това равенство е n.

16) $(ab)^p=a^pb^p$ за всяка двойка положителни числа a и b и за всяко реално число p.

17) $a^pa^q=a^{p+q}$ за всяко положително число a и за всяка двойка реални числа p и q.

18) $(a^p)^q=a^{pq}$ за всяко положително число a и за всяка двойка реални числа p и q.

19) Ако $a>1$ и $p>0$, то $a^p>1$.

С помощта на тези свойства на действието степенуване могат да се докажат още и следните твърдения:

$1^p=1$ за всяко реално число p.

$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$ за всяко $a>0$ и за всяко реално p.

Ако $a>1$ и $p<0$, то $a^p<1$.

Ако $0<a<1$ и $p>0$, то $a^p<1$.

Ако $0<a<1$ и $p<0$, то $a^p>1$.

Забележка. Когато степенният показател p има вида $\frac{1}{n}$, където n е едно естествено число, то често вместо с $a^{\frac{1}{n}}$ си служим с означението $\sqrt[n]{a}$, което се чете „корен n-ти от a". Съгласно свойство 18) за всяко положително число a имаме

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\quad \sqrt[n]{a^n}=a.$$

Реалните числа притежават по-нататък и следното свойство:

20) Ако a и b са две положителни реални числа и ако $a\neq 1$, то уравнението $a^x=b$ има винаги, и то едно единствено решение относно x. Това решение се бележи с $\log_a b$ и се нарича „логаритъм от b при основа a".

Ясно е, че при $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$ имаме

$$a^{\log_a b}=b.$$

Лесно се проверява също, че при $a>0$ и $a\neq 1$ са изпълнени равенствата

$$\log_a a=1,\qquad \log_a 1=0.$$

Също тъй лесно се доказват равенствата

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c, \qquad \log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$$

при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ и $c>0$, както и равенството

$$\log_a(b^p)=p\log_a b$$

при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, p — произволно.

Връзката между логаритмите на едно и също положително число c, взети при две различни основи a и b, се дава с равенството

$$\log_b c=\log_a c.\log_b a.$$

Това равенство се получава по следния начин: Полагаме $\log_a c=\alpha$ и $\log_b c=\beta$. Тогава от равенството $a^\alpha=b^\beta$ получаваме $\beta=\log_b a^\alpha$, или $\beta=\alpha\log_b a$, след което заместваме α и β със съответните изрази.

VI. Вече споменахме, че ако $a>0$, то $-a<0$, т. е. че ако $a\neq 0$, то от двете противоположни числа a и $-a$ едното е положително, а другото — отрицателно. Онова от тях, което е положително, се нарича **абсолютна стойност** или **модул** на числото a и се бележи с $|a|$. По такъв начин, когато $a>0$, имаме $|a|=a$, а когато $a<0$, имаме $|a|=-a$.

Абсолютната стойност на числото 0 по дефиниция приемаме равна на 0.

От казаното дотук е ясно, че за всяко реално число a имаме

$$a\leqq|a| \quad \text{и} \quad -a\leqq|a|.$$

Лесно се установява, че за всяка двойка реални числа a и b имаме

21) $$|a+b|\leqq|a|+|b|.$$

22) $$|a-b|\geqq|a|-|b|.$$

23) $$|ab|=|a|\,.\,|b|.$$

Нека забележим още, че, както не е трудно да се види, неравенството $|x|<a$ е равносилно с неравенствата $-a<x<a$.

VII. Както вече отбелязахме, всяко число, което е сума от единици, се нарича естествено число. Лесно се вижда, че:

24) Сумата и произведението на две естествени числа са също така естествени числа.

Следващите две свойства, отнасящи се до естествените числа, носят специални названия.

25) **Принцип на Архимед.** Не съществува реално число, по-голямо от всички естествени числа.

Като използуваме терминологията, въведена малко по-нататък, това твърдение може да се изкаже и така: множеството от естествените числа не е ограничено отгоре.

26) **Принцип за пълната математическа индукция.** Ако едно множество N от естествени числа съдържа числото 1 и ако от това, че N съдържа n, следва, че N съдържа и $n+1$, то множеството N съдържа всички естествени числа.

Всяко число, което може да се представи като разлика на две естествени числа, се нарича **цяло** число. Всяко естествено число е цяло. И наистина всяко естествено число n може да се представи като разлика на естествените числа $n+1$ и 1. Числото 0 е също цяло число, тъй като например $0=1-1$. Множеството на естествените числа съвпада с множеството на целите положителни числа. Не е трудно да се установи, че:

27) Сумата, разликата и произведението на две цели числа са също цели числа.

Всяко число, което се явява частно на две цели числа, се нарича **рационално** число. Всяко цяло число е рационално, тъй като за всяко цяло число n имаме $n=\frac{n}{1}$. В сила е твърдението:

28) Сумата, разликата, произведението и частното на две рационални числа са също рационални числа.

Забележка. Що се отнася до частното на две рационални числа, това твърдение е валидно, разбира се, само когато това частно съществува, т. е. когато знаменателят му е различен от нула.

Онези реални числа, които не са рационални, се наричат **ирационални**.

За да се убедим, че съществуват ирационални числа, нека покажем, че например числото $\sqrt{2}$ е ирационално. Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число. Тогава ще имаме $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, където p и q са естествени числа. Можем при това да допуснем, че p и q са взаимно прости, т. е. че те нямат общ делител, различен от 1 (ако те имаха такъв, ние бихме могли да го съкратим). От равенството $p=\sqrt{2}q$ получаваме $p^2=2q^2$. Оттук виждаме, че числото p^2 е четно, откъдето пък заключаваме, че и p е четно число. Тогава $p=2k$, където k е някое естествено число. Следователно ще имаме $4k^2=2q^2$, или $2k^2=q^2$. Сега пък заключаваме, че числото q^2, а заедно с него и числото q е четно. И така p и q са четни числа, което обаче противоречи на това, че ние ги избрахме взаимно прости. Полученото противоречие показва, че числото $\sqrt{2}$ е ирационално.

В сила е по-нататък следното твърдение:

29) **Гъстота на рационалните и ирационалните числа.** Ако a и b са две реални числа и $a<b$, то съществуват поне едно рационално число r и поне едно ирационално число s, такива, че $a<r<b$ и $a<s<b$.

Оттук лесно заключаваме, че между* всеки две различни реални

---

* Казваме, че числото c се намира **между** числата a и b, ако $a<c<b$ или $b<c<a$.

числа се намират както безбройно много рационални, така и безбройно много ирационални числа.

VIII. Преди да формулираме следващото особено важно свойство на множеството на реалните числа, ще се запознаем с някои дефиниции.

Едно множество M, съставено от реални числа, се нарича ограничено отгоре, ако съществува такова реално число b, че за всяко число x от множеството M да имаме $x \leqq b$. Числото b се нарича в такъв случай горна граница на множеството M. Нека отбележим изрично, че самото число b може да принадлежи, а може и да не принадлежи на множеството M.

Така например множеството S от всички отрицателни реални числа е ограничено отгоре, тъй като всяко число от това множество е по-малко от числото 0. Числото 0 представлява една горна граница на множеството S, при това такава, която не принадлежи на това множество. Разбира се, числото 0 не е единствената горна граница на множеството S — всяко произволно взето положително число е също горна граница на S.

Изобщо, когато едно множество M от реални числа е ограничено отгоре, то притежава винаги безбройно много горни граници. И наистина, ако b е една горна граница на множеството M, то всяко число, по-голямо от b, ще бъде очевидно също горна граница на това множество.

Нека M е едно ограничено отгоре множество от реални числа. Да си зададем въпроса: има ли между неговите горни граници една най-малка, т. е. една такава, която да бъде по-малка от всяка друга. Отговорът на този въпрос (който не е очевиден) е утвърдителен. В това именно се състои и следното извънредно важно свойство на реалните числа:

30) Принцип за непрекъснатост. Ако едно множество M от реални числа е ограничено отгоре, то между неговите горни граници винаги има една най-малка.

Тази най-малка горна граница ще наричаме занапред точна горна граница. Тогава принципът за непрекъснатост може да се изкаже и така:

Всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница.

Разбира се, за точната горна граница на едно ограничено отгоре множество M от реални числа имаме също така две възможности — тя да принадлежи или да не принадлежи на множеството M.

Лесно можем да съобразим, че ако измежду числата x, съдържащи се в дадено множество M, има едно най-голямо — да го означим с x_0, то това число е точната горна граница на множеството M. И наистина числото x_0 удовлетворява неравенството $x \leqq x_0$ за всяко число x от M и следователно е горна граница на множеството M. От друга страна, всяка друга горна граница b на множеството M удовлетворява неравенството $b \geqq x_0$.

Възможно е обаче дадено множество от реални числа да бъде ограничено отгоре, без то да притежава най-голямо число (какъвто е например случаят с множеството от всички отрицателни реални числа). В такъв случай точната горна граница е число, непринадлежащо на даденото множество.

Аналогично на понятието горна граница се въвежда и понятието долна граница. А именно едно множество M от реални числа се нарича ограничено отдолу, ако съществува такова число a, че за всяко число x от M да имаме $a \leq x$. Тогава числото a се нарича долна граница на множеството M. Всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава безбройно много долни граници. Най-голямата от тях се нарича точна долна граница. С помощта на принципа за непрекъснатост може да се установи, че тази най-голяма долна граница винаги съществува, т. е. че е в сила твърдението:

Всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава точна долна граница.

Точната долна граница на едно ограничено отдолу множество M от реални числа може, разбира се, да принадлежи или да не принадлежи на M. Ако множеството M съдържа едно най-малко число, то това число представлява същевременно и неговата точна долна граница.

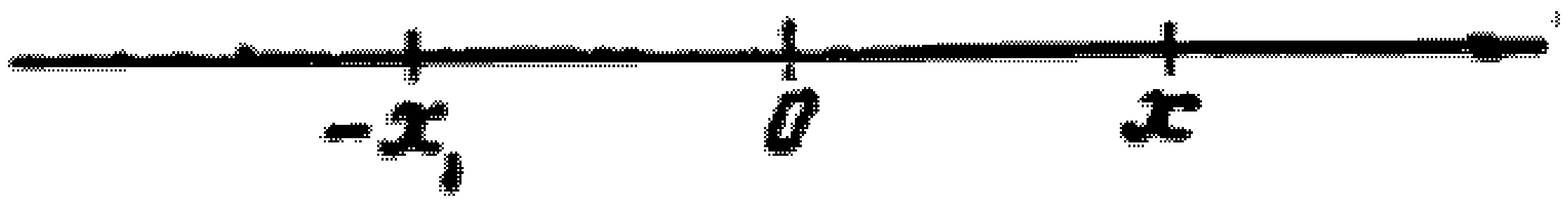
Когато едно множество M от реални числа е ограничено както отгоре, така и отдолу, то се нарича накратко ограничено. Съгласно казаното това означава, че съществуват две реални числа a и b такива, че за всяко число x от M да имаме $a \leq x \leq b$.

Всяко множество от реални числа, което не е ограничено, ще наричаме неограничено. Така например множеството от естествените числа, както и множеството от целите числа са неограничени (първото от тях не е ограничено отгоре, а второто — нито отгоре, нито отдолу).

IX. Особено често ще срещаме един специален вид множества от реални числа, наречени интервали.

Нека a и b са две реални числа и нека $a<b$. Множеството от всички реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a<x<b$, ще бележим (a, b) и ще наречем отворен интервал. Числото a е ляв край, а числото b — десен край на този интервал. Множеството пък от числата x, удовлетворяващи неравенствата $a \leq x \leq b$, ще бележим $[a, b]$ и ще наричаме затворен интервал. Затвореният интервал $[a, b]$ съдържа очевидно всички числа от отворения интервал (a, b), но освен тях той съдържа още и своите краища — числата a и b. Интервалите $[a, b)$ и $(a, b]$ се наричат полузатворени (или полуотворени). Първият от тях е множеството от числата x, за които имаме $a \leq x<b$, а вторият — множеството от ония x, за които имаме $a<x \leq b$.

Всички изброени дотук видове интервали образуват фамилията на крайните интервали. Освен с тях ние ще работим и с така наречените безкрайни интервали. Това са също специални множества от реални числа. Така интервалът (a, ∞) представлява множеството от всички реални числа x, за които имаме $x>a$, интервалът $[a, \infty)$ пък се състои от всички числа x, за които $x \geq a$. Аналогично интервалът $(-\infty, a)$ се състои от ония реални числа x, които удовлетворяват неравенството $x<a$, а интервалът $(-\infty, a]$ — от ония x, за които $x \leq a$. Най-сетне множеството на всички реални числа също ще разглеждаме като безкраен интервал, който ще означаваме $(-\infty, \infty)$.



Черт. 1

Като използуваме понятието интервал, можем сега да изкажем дефиницията на понятието ограничено множество по следния начин:

Едно множество M от реални числа се нарича ограничено, когато съществува някакъв краен интервал, който съдържа всички числа от M.

X. Често за по-голяма нагледност в разсъжденията ние ще изобразяваме реалните числа като точки върху една права. Това става по следния начин: В геометрията се установява, че ако изберем една отсечка като единица-мярка за дължина, то всяка друга отсечка ще има за дължина някакво положително реално число — рационално, когато измерваната отсечка е съизмерима с отсечката-единица, или пък ирационално, когато е несъизмерима с нея. Обратно, всяко положително реално число може да се разглежда като дължина на някоя отсечка.

Да разгледаме сега една права, която е начертана хоризонтално, и да си изберем върху нея една точка, която ще ни изобразява числото 0. След това да си вземем една отсечка, която ще ни служи за единица-мярка. На всяко положително реално число x ще съответствува тогава някаква отсечка — отсечката с дължина x. Ако единият край на тази отсечка съвпада с точката 0 и я нанесем надясно върху нашата права, то другият ѝ край ще съвпадне с някаква точка, която именно ще изобразява числото x. Ако пък нанесем същата отсечка наляво от точката 0, ще получим друга точка върху нашата права — тази точка ще изобразява числото $-x$ (черт. 1). По такъв начин всяко реално число се изобразява като точка от разглежданата права. Обратно, всяка точка от тази права изобразява някакво реално число — това число е положително, когато точката лежи вдясно от точката 0, и отрицателно, когато тя лежи вляво от нея. Ето защо в бъдеще много често вместо думата реално число ще употребяваме думата точка. Самата права пък, върху която нанасяме реалните числа, ще наречем реална права.

Не е трудно да се съобрази, че ако a и b са две реални числа, то неравенството $a<b$ е равносилно с изискването точката a да се намира вляво от точката b върху реалната права. Разстоянието пък между тези две точки, което се дава с дължината на свързващата ги отсечка и което ще наричаме дължина на интервала (a, b), се равнява на $b-a$. На тези именно забележки се основава онази нагледност в разсъжденията, която получаваме, когато изобразяваме реалните числа като точки.

Нека въведем още едно понятие, което ще срещаме често по-нататък — понятието околност на число или, както ще казваме обикновено, **околност на точка**. Ако a е едно реално число, или все едно една точка от реалната права, то всеки отворен интервал от вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, където ε е някакво положително реално число, ще наричаме **околност** на точката a. Поради произволния избор на положителното число ε е ясно, че всяка точка a притежава безбройно много околности.*

С оглед на нашата бъдеща работа е полезно да отбележим следното. Ако ε е положително число, а x и a са две реални числа, то неравенството

$$|x-a|<\varepsilon$$

е еквивалентно, както знаем, с неравенствата

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon,$$

които пък от своя страна са равносилни с неравенствата

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

По такъв начин виждаме, че множеството от числата x, удовлетворяващи неравенството $|x-a|<\varepsilon$ при дадени a и ε, съвпада с отворения интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Накрая нека въведем за по-голямо удобство едно твърде често използвано в съвременната математика означение. Когато едно число a принадлежи на дадено множество M, ние записваме този факт така: $a\in M$. Като си послужим с това означение, можем да изкажем направената по-горе забележка по следния начин:

Неравенството $|x-a|<\varepsilon$ е равносилно с условието $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Б. Някои предварителни сведения

I. Някои означения:

а) Нека n е цяло положително число. Прието е произведението

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, . \,.\, n$$

да се означава накратко така: $n!$ (чете се „n факториел"). От някои съображения за удобство въвеждаме и символа $0!$, като по дефиниция $0!=1$.

б) Нека n е произволно реално число, а k — цяло положително число. Символът $\binom{n}{k}$ (чете се „n над k"), с който се означава един израз,

---

* Понякога е удобно интервалът $(-\infty, \infty)$ да бъде разглеждан също като околност на дадена точка a. По такъв начин този интервал се явява околност на всяка точка от реалната права.

срещащ се при различни въпроси от математиката, се въвежда с равенството

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}.$$

Когато не само k, но и n е цяло положително число и при това $k\leqq n$, това равенство може да се напише и във вида

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Оказва се удобно да се въведе отделно и символът $\binom{n}{0}$ с помощта на равенството

$$\binom{n}{0}=1$$

за всяко реално число n.

в) Често пъти дадена сума от n събираеми се записва кратко с помощта на един специален символ — символа Σ. Това е възможно, когато можем да напишем израз, в който участвува някакъв променлив параметър (например k), така че, като даваме на този параметър последователни стойности, например стойностите от 1 до n или пък от 0 до $n-1$, да получаваме съответните събираеми от дадената сума. Ето за пример няколко равенства, поясняващи казаното — в дясната страна на всяко от тях е записана в кратка форма сумата, която подробно е написана в лявата:

$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}q^k,$$

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\sum_{k=1}^{n}\sin kx,$$

$$a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

II. Биномна формула на Нютон:

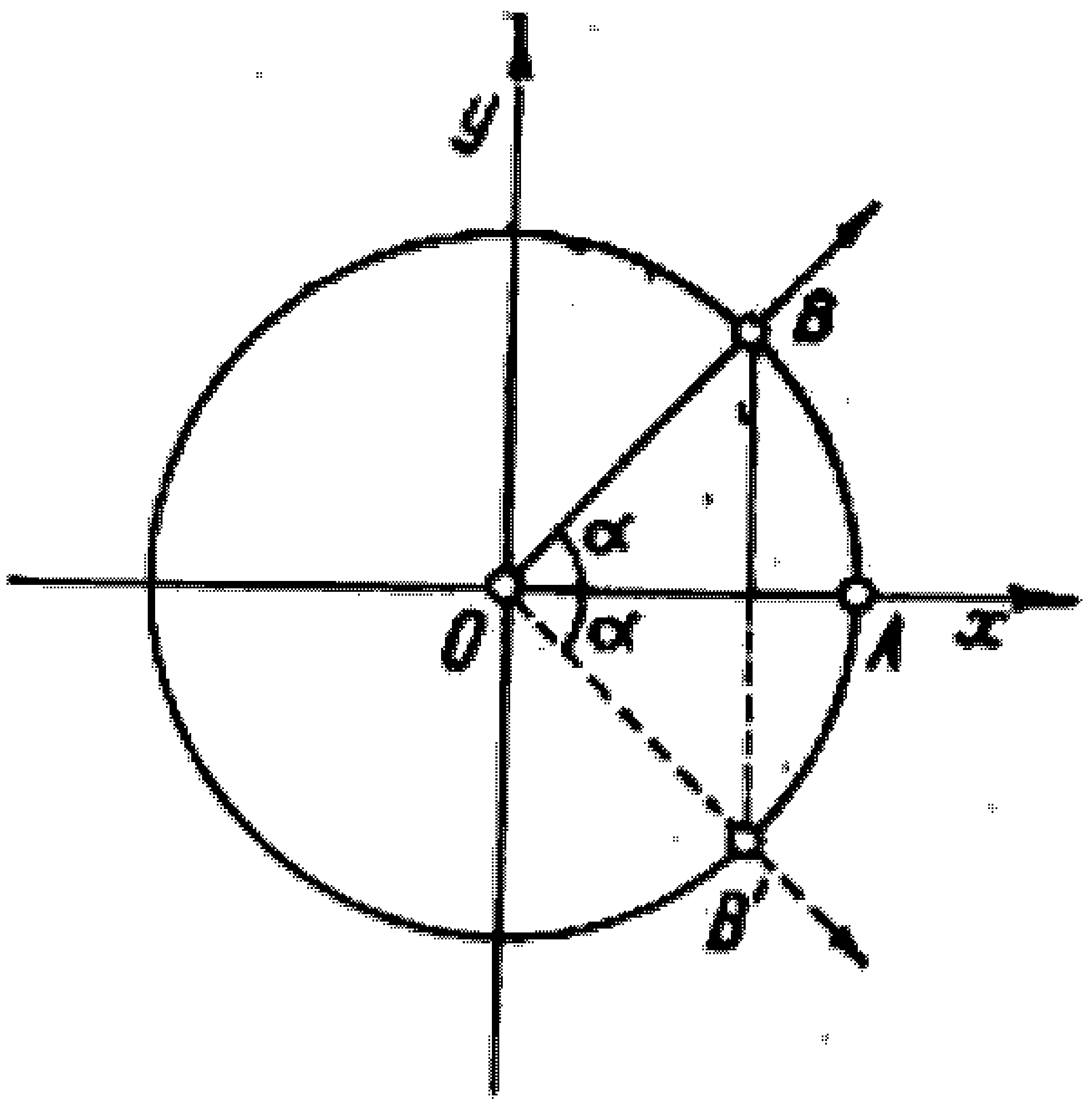
Ако a и b са две реални числа, а n е цяло положително число, то

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n.$$

Това равенство носи названието **формула на нютоновия бином**. То може лесно да бъде установено с помощта на принципа за пълната математическа индукция.

III. Радиан. Неравенството $|\sin x| \leqq |x|$:

Навсякъде в настоящия курс, където се говори за ъгли, те ще бъдат измервани в радиани. Както е известно, един радиан е големината на ъгъла, притежаващ следното свойство: ако опишем окръжност с център върха на този ъгъл и произволен радиус, то раменете на ъгъла отсичат от тази окръжност дъга с дължина, равна на дължината на радиуса. Оттук следва, че ако раменете на един ъгъл отсичат от една окръжност с център върха на ъгъла дъга с дължина l и ако радиусът на окръжността има дължина r, то големината на ъгъла, измерена в радиани, е равна на $\frac{l}{r}$. Ако радиусът на окръжността е 1, то големината на ъгъла, измерена в радиани, е просто равна на l. Така пълният ъгъл има големина 2π радиана, правият ъгъл е $\frac{\pi}{2}$ радиана и т. н.



Черт. 2

Нека отбележим следното неравенство, използуващо се по-нататък в настоящия курс:

$$|\sin \alpha| \leqq |\alpha| \text{ за всяко } \alpha.$$

(Тук α е големината на ъгъл, измерен в радиани.) Това неравенство е очевидно, когато $|\alpha| \geqq \frac{\pi}{2}$. Когато $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то се вижда от следните геометрични съображения: Ако $\sphericalangle AOB=\alpha$ и ако опишем една окръжност с център O и радиус 1 (черт. 2), то дъгата $\overset{\frown}{BAB'}$ има големина 2α, а големината на хордата BB' е равна на $2 \sin \alpha$. Ясно е тогава, че ще имаме $0<\sin \alpha<\alpha$. При $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ неравенството $|\sin \alpha| \leqq |\alpha|$ следва от това, че в този случай $0<-\alpha<\frac{\pi}{2}$, и от факта, че $\sin(-\alpha)=-\sin \alpha$. Най-сетне имаме $\sin 0=0$. По такъв начин желаното неравенство е доказано за всяко реално число α.

ЧАСТ I

РЕДИЦИ И РЕДОВЕ

ГЛАВА I

БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ

Целта на тази първа глава от нашия курс е да се запознаем с най-основното понятие на математическия анализ — понятието **граница**. По-точно ще се запознаем с понятието **граница на една безкрайна редица** и ще изучим неговите свойства.

§ 1. Редици. Ограничени и неограничени редици

Ще казваме, че ни е дадена една **безкрайна редица** (или по-кратко — една **редица**) от реални числа, когато по някакво правило на всяко естествено число е съпоставено някое реално число. Ако с a_1 означим онова число, което е съпоставено на числото 1, с a_2 — онова, което е съпоставено на числото 2, и т. н., изобщо с a_n —онова реално число, което е съпоставено на естественото число n, то дадената редица ще се записва обикновено така:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Числата a_1, a_2 и т. н. се наричат **членове** на редицата — a_1 е нейният първи член, a_2 — втори и т. н.; n-тият член a_n се нарича още и **общ член** на редицата. Числото n пък се нарича **номер** или **индекс** на члена a_n.

От казаното дотук е ясно, че всяка редица се състои от безбройно много членове. Разбира се, някои от тези членове (даже всичките) могат да бъдат равни на едно и също реално число.

Една редица ние считаме за дадена, когато ни е известно правилото за получаване на нейните членове. Това правило може да бъде изразено по различни начини. Обикновено се дава някаква формула за пресмятане на общия член на редицата. Ето няколко примера на безкрайни редици, записани по два начина — подробно и посредством формула за n-тия им член:

(1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$ или $a_n=n$;

(2) $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots,$ или $a_n=2n$;

(3) $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$ или $a_n=1$;

(4) $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \quad \text{или} \quad a_n=\frac{1}{n};$$

(5) $$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots, \quad \text{или} \quad a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Ето и други примери за безкрайни редици, при които n-тият член се записва по по-сложен начин:

(6) $$1, 0, 1, 0, \ldots, \text{ или } a_n=\begin{cases} 1 & \text{при нечетно } n \\ 0 & \text{при четно } n; \end{cases}$$

(7) $$1, -1, 2, -2, \ldots, \text{ или } a_n=\begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{при нечетно } n \\ -\frac{n}{2} & \text{при четно } n; \end{cases}$$

(8) $$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots, \text{ или } a_n=\begin{cases} 0 & \text{при нечетно } n \\ \frac{2}{n} & \text{при четно } n. \end{cases}$$

Една редица може да бъде зададена и индуктивно, т. е. по начин основан на пълната математическа индукция. Например може да бъдат дадени нейният първи член a_1 и някаква формула за пресмятане на a_{n+1} посредством a_n. Така например равенствата

(9) $$a_1=2, \quad a_{n+1}=a_n^2-1$$

дефинират редица, първите няколко члена на която са следните:

$$2, 3, 8, 63, \ldots.$$

Или пък може да бъдат дадени a_1 и a_2 и освен това някаква формула, чрез която a_{n+2} се пресмята в зависимост от a_n и a_{n+1}. Такава е например редицата, зададена с равенствата

(10) $$a_1=0, \quad a_2=1, \quad a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2},$$

въз основа на които получаваме по-подробно

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$$

Най-сетне правилото за получаване на n-тия член на една редица може да не бъде записано с каквато и да било формула, а просто да бъде изказано с думи. Например да разгледаме редицата, n-тият член на която е n-тото (поред) просто естествено число. (Едно естествено число, по-голямо от 1, се нарича просто, когато то се дели без остатък само на числото 1 и на себе си.) Ето първите няколко члена на тази редица:

(11) $$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Една редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

се нарича **ограничена отгоре**, когато множеството от нейните членове, разглеждано като множество от реални числа, е ограничено отгоре, т. е. когато съществува такова число β, че $a_n \leqq \beta$ за всяко n. Числото β се нарича тогава **горна граница** на дадената редица. Аналогично, когато съществува такова число α, че $a_n \geqq \alpha$ за всяко n, то редицата се нарича **ограничена отдолу**, а числото α — нейна **долна граница**. Най-сетне една редица се нарича накратко **ограничена**, когато е ограничена и отгоре, и отдолу, т. е. когато съществуват две такива числа α и β, че за всички членове на редицата да имаме $\alpha \leqq a_n \leqq \beta$. Другояче казано, една редица е ограничена, когато съществува някакъв краен интервал $[\alpha, \beta]$, който съдържа всички нейни членове. Всяка редица, която не е ограничена, се нарича **неограничена**.

Когато една редица е ограничена отгоре, тя притежава, разбира се, безбройно много горни граници, една от които е най-малка — това е нейната **точна горна граница**. Също така всяка ограничена отдолу редица притежава безбройно много долни граници, една от които е най-голяма — **точната ѝ долна граница**.

Лесно се вижда, че редиците (3), (4), (5), (6) и (8) са ограничени. (Посочете за всяка от тях по една горна и една долна граница!) Редиците (1), (2) и (11) са ограничени само отдолу, но не и отгоре, докато редицата (7) не е ограничена нито отгоре, нито отдолу. Следователно редиците (1), (2), (7) и (11) са неограничени.

Упражнения. 1. Напишете първите няколко члена на редиците, дадени със следните формули:

$$a_n = \sqrt{n}; \quad a_n = \frac{1}{3^n}; \quad a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}; \quad a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

2. Напишете формули за n-тите членове на редиците:

$$3, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots;$$

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

3. Докажете, че редицата, дадена с равенствата (9), е неограничена. Упътване: Установете с помощта на пълната математическа индукция, че $a_n \geqq n$.

4. Докажете, че редицата, дадена с равенствата (10), е ограничена. Упътване: Използувайте, че $0 \leqq a_1 \leqq 1$, $0 \leqq a_2 \leqq 1$, и покажете, че ако $0 \leqq a_n \leqq 1$ и $0 \leqq a_{n+1} \leqq 1$, то $0 \leqq a_{n+2} \leqq 1$, след което направете заключението въз основа на пълната математическа индукция.

5. Дайте пример за редица, която е ограничена отгоре, но не и отдолу.

Друг важен пример за сходяща редица ни дава геометричната прогресия

$$(4) \qquad q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots$$

Ще покажем, че ако $0<q<1$, то тази редица е сходяща и $\lim q^n=0$. И наистина да си вземем отново произволно положително число ε и да си образуваме след това числото $\nu=\log_q \varepsilon$. Тогава при $n>\nu$ от неравенствата $0<q<1$ и $n-\nu>0$ ще следва $q^{n-\nu}<1$ или, което е все едно, $q^n<q^\nu$. И така при $n>\nu$ получаваме

$$|q^n-0|=q^n<q^\nu=q^{\log_q \varepsilon}=\varepsilon,$$

т. е. установяваме, че при $n>\nu$ е изпълнено неравенството (3). С това е установено, че $\lim q^n=0$.

Да разгледаме и един съвършено прост, но често срещан пример. Нека всички членове на една редица са равни на едно и също реално число a, т. е. нека е дадена редицата

$$(5) \qquad a,\ a,\ \ldots,\ a,\ \ldots$$

В случая $a_n=a$ за всяко n. Лесно е да се види, че тази редица е сходяща и клони към a. Действително каквото и да бъде положителното число ε, неравенството (3) е изпълнено за всички членове на редицата, тъй като то се превръща в очевидното неравенство

$$|a-a|<\varepsilon.$$

Тогава каквато и стойност да дадем на ν, например $\nu=1$, изискването на дефиницията за сходимост ще бъде удовлетворено. И така $\lim a=a$.

Упражнение. За всяка от дадените редици докажете, че е сходяща, и намерете границата ѝ:

а) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2n-1},\ \ldots;$

б) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\ \frac{1}{2n},\ \ldots;$

в) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \ldots;$

г) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$

§ 3. Свойства на сходящите редици

Нека спрем още веднъж вниманието си върху дефиницията за сходяща редица. Както казахме, ние наричаме едно число a граница на дадена редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

ако за всяко положително число ε съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме

$$|a_n-a|<\varepsilon. \tag{2}$$

Числото ν, както вече изтъкнахме, зависи от избора на числото ε. Не трябва да се мисли обаче, че на всяко положително число ε съответствува едно единствено число ν. Наистина, ако вземем някое число ν такова, че при $n>\nu$ да бъде изпълнено неравенството (2), то всяко друго число ν_1, което е по-голямо от ν, ще притежава същото свойство, т. е. същото неравенство (2) ще бъде изпълнено и при $n>\nu_1$.

Друга особеност, на която желаем да обърнем внимание, е следната: В дефиницията за сходимост се изисква неравенството (2) да бъде изпълнено само за онези членове a_n на дадената редица, чиито номера n са по-големи от някое число ν. За членовете с по-малки номера не се изисква нищо, те могат да бъдат каквито и да е. Всичко това ни дава основание да изкажем следното твърдение:

Ако в една сходяща редица променим стойностите на краен брой нейни членове, то сходимостта на редицата няма да се наруши и границата ѝ няма да се промени.

Това е така, тъй като съгласно направените забележки винаги можем да считаме, че сме взели числото ν толкова голямо, че направените промени в членовете на редицата да не се отразяват на верността на неравенството (2) при $n>\nu$.

С подобни разсъждения можем да се убедим и във верността на следното твърдение:

Ако от една сходяща редица премахнем краен брой членове или пък прибавим краен брой нови членове към нея, то получената редица е също сходяща и има същата граница.

За да формулираме кратко друго едно просто свойство на сходящите редици, ще въведем следното понятие: Ако премахнем някои членове (краен брой или пък безбройно много) от дадена редица (1)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

но така, че да останат все пак безбройно много членове, и ако останалите членове вземем в същия ред, в който те са били в редицата (1), ще получим нова безкрайна редица

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \tag{3}$$

която се нарича **подредица** на редицата (1). Тук n_k е номерът на члена a_{n_k} в редицата (1), а числото k е номерът на a_{n_k}, разглеждан вече като член на редицата (3). Ясно е, че

$$(4) \qquad n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Лесно се вижда валидността на следното твърдение:

Ако една редица е сходяща и клони към числото a, то всяка нейна подредица е също сходяща и клони също към a.

И наистина, ако редицата (1) е сходяща и $\lim a_n = a$ и ако за дадено положително число ε неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

е изпълнено при $n > \nu$, то при $k > \nu$ ще бъде изпълнено и неравенството

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Това е така, понеже от неравенствата (4) е ясно, че $n_k \geqq k$, и следователно при $k > \nu$ ще имаме и $n_k > \nu$.

Всичко това означава, че $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Едно основно свойство на сходящите редици се дава със следната

Теорема 1. *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Доказателство. Нека е дадена сходящата редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

с граница a. Да вземем числото $\varepsilon = 1$. От сходимостта на редицата следва, че ще съществува такова число ν, че при $n > \nu$ да имаме

$$|a_n - a| < 1$$

или, което е все едно,

$$a - 1 < a_n < a + 1.$$

Последните неравенства показват, че всички членове от дадената редица, чиито номера са по-големи от ν, се намират в интервала $(a-1, a+1)$. Ако има такива членове a_n, които лежат извън този интервал, то техните номера няма да надминават числото ν и следователно те ще бъдат краен брой. Ясно е тогава, че ще можем да намерим един такъв краен интервал $[\alpha, \beta]$, който да съдържа в себе си както целия интервал $(a-1, a+1)$, така и всички онии членове a_n на редицата, които лежат вън от този интервал. Тогава интервалът $[\alpha, \beta]$ ще съдържа всички членове от разглежданата редица. А това означава, че тази редица е ограничена.

Следствие. *Ако една редица е неограничена, тя е разходяща.*

Сега лесно можем да покажем, че съществуват разходящи редици. И наистина въз основа на горното следствие можем да заключим, че например редиците (1), (2), (7), (9) и (11) от § 1 са разходящи, тъй като всички те са неограничени.

Не всички разходящи редици обаче са неограничени. Съществуват редици, които са ограничени и разходящи.

Такава е например редицата

(5) $$1, 0, 1, 0 \dots$$

Тя е очевидно ограничена. Ако допуснем обаче, че е сходяща, и означим нейната граница с l, то и двете ѝ подредици

$$1, 1, \dots, 1, \dots,$$

$$0, 0, \dots, 0, \dots$$

(първата от които е образувана от членовете ѝ с нечетни номера, а втората — от членовете ѝ с четни номера) ще трябва да клонят към l. Но ние знаем, че първата от тях клони към 1, а втората — към 0. Получаваме противоречие, което показва, че редицата (5) е разходяща.

Следващите няколко теореми изразяват други важни свойства на сходящите редици.

Теорема 2. *Ако са дадени две сходящи редици*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

и

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

при което $\lim a_n = a$ *и* $\lim b_n = b$, *и ако за всяко* n *имаме* $a_n \leqq b_n$, *то* $a \leqq b$.

Доказателство. Да допуснем, че $a > b$. Тъй като числото $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ ще бъде в такъв случай положително, ще можем да намерим такова число ν_1, че при $n > \nu_1$ да имаме $|a_n - a| < \varepsilon$, и също тъй такова ν_2, че при $n > \nu_2$ да имаме $|b_n - b| < \varepsilon$. Ако означим с ν по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2, то при $n > \nu$ ще бъдат изпълнени и двете неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$, които могат да се напишат още така:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Но

$$a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon.$$

Тогава при $n > \nu$ ще получим $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$, т. е. $b_n < a_n$, противно на условието, според което $a_n \leqq b_n$ за всяко n. Полученото противоречие ни показва, че неравенството $a > b$ е невъзможно, т. е. че $a \leqq b$.

Следствие. *Ако редицата*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

е сходяща и $\lim a_n = a$ *и ако за всяко* n *имаме* $a_n \leqq l$, *където* l *е някакво реално число, то и* $a \leqq l$.

Действително, ако заедно с дадената редица разгледаме и редицата

$$l, l, \dots, l, \dots,$$

която, както знаем, е сходяща и клони към l, то, като приложим току-що доказаната теорема към тези две редици, ще получим желаното твърдение.

Разбира се, по същия начин можем да се убедим, че от $\lim a_n = a$ и $a_n \geqq l$ следва $a \geqq l$.

Теорема 3. *Ако редицата*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

е сходяща и клони към a *и ако* $a<l$, *то съществува такова число* ν, *че при* $n>\nu$ *е изпълнено неравенството* $a_n<l$.

Доказателство. Нека $\varepsilon = l - a$ и нека числото ν е взето така, че при $n>\nu$ да имаме $|a_n - a| < \varepsilon$ — това е възможно, тъй като a е границата на редицата (1). От последното неравенство получаваме

$$a_n < a + \varepsilon = a + l - a = l,$$

т. е. $a_n < l$ при $n > \nu$. С това теоремата е доказана.

Аналогично се доказва, че ако $\lim a_n = a$ и $a > l$, то за достатъчно големи стойности на n, т. е. за стойности на n, по-големи от някое число ν, ще бъде изпълнено неравенството $a_n > l$.

Теорема 4. *Нека са дадени трите редици*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{6}$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, \tag{7}$$

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \tag{8}$$

и нека $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ *за всяко* n. *Ако редиците* (6) *и* (7) *са сходящи и имат обща граница* l, *то и редицата* (8) *е също сходяща и клони към* l.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Поради сходимостта на редиците (6) и (7) ние можем да намерим такова число ν_1, че при $n>\nu_1$ да имаме

$$|a_n - l| < \varepsilon, \tag{9}$$

и такова число ν_2, че при $n>\nu_2$ да имаме

$$|b_n - l| < \varepsilon. \tag{10}$$

Ако ν е число, по-голямо както от ν_1, така и от ν_2, то при $n>\nu$ ще бъдат удовлетворени и двете неравенства (9) и (10). Тези неравенства са равносилни с неравенствата

$$l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon, \quad l-\varepsilon < b_n < l+\varepsilon.$$

Но тогава при $n>\nu$ ще имаме

$$l-\varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < l+\varepsilon,$$

т. е. $l-\varepsilon < c_n < l+\varepsilon$ или, което е все едно, $|c_n - l| < \varepsilon$. С това е установено, че $\lim c_n = l$.

Теорема 5. *Ако редицата*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

е сходяща и клони към a, то редицата

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|,\ \ldots$$

е също сходяща и клони към $|a|$.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Съществува такова число ν, че при $n>\nu$ имаме $|a_n-a|<\varepsilon$. Но от неравенствата

$$|a_n|-|a|\leqq|a_n-a|$$

и

$$|a|-|a_n|\leqq|a_n-a|$$

следва неравенството

$$|\,|a_n|-|a|\,|\leqq|a_n-a|.$$

Оттук заключаваме, че при $n>\nu$ имаме също

$$|\,|a_n|-|a|\,|<\varepsilon,$$

с което теоремата е доказана.

Теорема 6. *Ако една от двете редици*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|,\ \ldots$$

клони към 0, *то и другата също клони към* 0.

Доказателство. Наистина нека ε е произволно положително число. Неравенствата $|a_n-0|<\varepsilon$ и $|\,|a_n|-0|<\varepsilon$ са очевидно равносилни. Следователно, ако съществува такова число ν, че при $n>\nu$ е изпълнено едното от тях, то при същите стойности на n ще бъде изпълнено и другото.

Като използуваме тази теорема, можем да видим например, че разглежданата в предишния параграф геометрична прогресия

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots$$

представлява сходяща редица с граница 0, когато $-1<q<1$ (а не само когато $0<q<1$). И наистина при $q=0$ това е очевидно, а при $-1<q<0$ от неравенството $|q|<1$ следва (както знаем от предишния параграф), че $\lim|q|^n=0$. Оттук заключаваме, че и $\lim q^n=0$.

Особено полезна се оказва следната

Теорема 7 (теорема за действия със сходящите редици). *Ако редиците*

(11) $$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

(12) $$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

са сходящи и $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$, *то редиците*

(13) $$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots,\ a_n+b_n,\ \ldots,$$

(14) $$a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \ldots,\ a_n-b_n,\ \ldots,$$

(15) $$a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_nb_n,\ \ldots$$

са също сходящи. В случая, когато $b_n \neq 0$ за всяко n и $b \neq 0$, сходяща е също тъй и редицата

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots \tag{16}$$

При това

$$\lim(a_n+b_n)=a+b,\ \lim(a_n-b_n)=a-b,\ \lim a_nb_n=ab,\ \lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\cdot$$

Доказателство. а) Да разгледаме най-напред редицата (13). Нека ε е едно произволно положително число. Да вземем още едно положително число ε', за което по-късно ще уточним как именно сме го избрали. Поради сходимостта на редиците (11) и (12) можем да намерим такива числа ν_1 и ν_2, че да имаме $|a_n-a|<\varepsilon'$ при $n>\nu_1$ и $|b_n-b|<\varepsilon'$ при $n>\nu_2$. Тогава, ако ν е число, по-голямо както от ν_1, така и от ν_2, при $n>\nu$ ще имаме

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a+b)|&=|(a_n-a)+(b_n-b)|\\ &\leqq|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon'+\varepsilon'=2\varepsilon'.\end{aligned} \tag{17}$$

Ясно е, че ако вземем $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$, неравенството (17) при $n>\nu$ ще ни даде

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon.$$

С това е установено, че редицата (13) е сходяща и че

$$\lim(a_n+b_n)=a+b.$$

б) Доказателството за сходимостта на редицата (14) и на равенството $\lim(a_n-b_n)=a-b$ се извършва по същия начин, като обаче вместо веригата от равенства и неравенства (17) се използува следната:

$$\begin{aligned}|(a_n-b_n)-(a-b)|&=|(a_n-a)+(b-b_n)|\\ &\leqq|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon'+\varepsilon'=2\varepsilon'.\end{aligned}$$

в) Да разгледаме сега редицата (15). Преди всичко ще отбележим, че от сходимостта на редицата (11) следва сходимостта и на редицата

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|,\ \ldots$$

Тъй като всяка сходяща редица, както знаем, е ограничена, ще съществува такова положително число A, за което $|a_n|<A$ при всяко n. Нека сега ε е произволно положително число. Да вземем още и положителното число ε', за което си запазваме свободата да определим по-късно как сме го избрали. Като вземем пред вид сходимостта на редиците (11) и (12), можем да намерим такива числа ν_1 и ν_2, че при $n>\nu_1$ да бъде изпълнено неравенството $|a_n-a|<\varepsilon'$, а при $n>\nu_2$ — неравенството $|b_n-b|<\varepsilon'$. Тогава, ако ν е число, по-голямо и от ν_1, и от ν_2, ще имаме при $n>\nu$

$$|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|=|a_n(b_n-b)+b(a_n-a)|$$

$$\leq|a_n|\,.\,|b_n-b|+|b|\,.\,|a_n-a|<A\,.\,\varepsilon'+|b|\,.\,\varepsilon'=\varepsilon'(A+|b|).$$

Ако вземем $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{A+|b|}$, то ще получим при $n>\nu$

$$|a_nb_n-ab|<\varepsilon.$$

С това е доказана сходимостта на редицата (15), а също и равенството $\lim a_nb_n=ab$.

г) Най-сетне нека е дадено, че $b_n\neq 0$ за всяко n и че $b\neq 0$. Да разгледаме редицата (16). Нека изберем едно произволно положително число ε, а след това още едно положително число ε', което ще зависи от ε, но стойността на което ще уточним по-късно. Поради сходимостта на редиците (11) и (12) ще съществуват такива числа ν_1 и ν_2, че да имаме $|a_n-a|<\varepsilon'$ при $n>\nu_1$ и $|b_n-b|<\varepsilon'$ при $n>\nu_2$. Тъй като числото $\frac{|b|}{2}$ е също положително, то отново поради сходимостта на редицата (12) ще съществува и такова число ν_3, че при $n>\nu_3$ да имаме $|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$, откъдето $|b|-|b_n|<\frac{|b|}{2}$ или $|b_n|>\frac{|b|}{2}$. Тогава, ако ν е число, по-голямо от трите числа ν_1, ν_2, ν_3, при $n>\nu$ ще имаме

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|a_nb-ab_n|}{|b_nb|}=\frac{|a_nb-ab+ab-ab_n|}{|b_n|\,.\,|b|}$$

$$=\frac{|(a_n-a)b+(b-b_n)a|}{|b_n|\,.\,|b|}\leq\frac{2}{|b|}\,\frac{1}{|b|}\,(|a_n-a|\,.\,|b|+|b_n-b|\,.\,|a|)$$

$$<\frac{2}{b^2}(\varepsilon'|b|+\varepsilon'|a|)=\frac{2}{b^2}(|a|+|b|)\varepsilon'.$$

Виждаме, че ако вземем $\varepsilon'=\frac{b^2}{|a|+|b|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, то при $n>\nu$ ще имаме

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|<\varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε това означава, че редицата (16) е сходяща и че $\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

Теоремата за действия със сходящите редици е едно удобно средство за намиране границите на някои редици. Да разгледаме например редицата с общ член

$$a_n=\frac{2n^2-5n+3}{3n^2+1}.$$

Като разделим числителя и знаменателя с n^2, получаваме

$$a_n=\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}.$$

Както знаем от § 2, $\lim\frac{1}{n}=0$. Тогава

$$\lim\left(2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\lim 2-\lim 5\,.\,\lim\frac{1}{n}+\lim 3\,.\,\lim\frac{1}{n}\cdot\lim\frac{1}{n}=2,$$

$$\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=\lim 3+\lim\frac{1}{n}\cdot\lim\frac{1}{n}=3,$$

откъдето

$$\lim a_n=\frac{3}{2}.$$

Теорема 8. *Ако двете редици*

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots,$$

$$b_1,\ b_2,\ldots,b_n,\ldots$$

са сходящи и клонят към една и съща граница l, редицата

$$(18)\qquad a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ldots,a_n,\ b_n,\ldots,$$

получена от тяхното алтернативно комбиниране, е също сходяща и клони към същата граница.

Доказателство. Да запишем редицата (18) във вида

$$c_1,\ c_2,\ldots,c_m,\ldots$$

Тогава $c_{2n-1}=a_n$ и $c_{2n}=b_n$ за $n=1,\ 2,\ldots$ За всяко положително число ε съществува такова ν_1, че при $n>\nu_1$ да имаме $|a_n-l|<\varepsilon$, както и такова ν_2, че при $n>\nu_2$ да имаме $|b_n-l|<\varepsilon$. Нека ν' е по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2 и нека $\nu=2\nu'$. Ако сега $m>\nu$, както при $m=2n-1$, тъй и при $m=2n$ ще имаме $n>\nu'$ и следователно ще бъдат изпълнени неравенствата $|a_n-l|<\varepsilon$ и $|b_n-l|<\varepsilon$, т. е. неравенството $|c_m-l|<\varepsilon$. С това теоремата е доказана.

Упражнения. Докажете сходимостта и намерете границите на следните редици:

1. $a_n=\frac{8n^2-n+2}{2n^2+3n+3}$. 2. $a_n=\frac{3n^3+2n+5}{3n^3+n^2+1}$.

3. $a_n=\frac{2n}{n^2+1}$. 4. $a_n=\frac{n^2+5n+2}{7n^3-2n^2+1}$. 5. $a_n=\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

6. $a_n=\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$. Упътване: използвайте равенството

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

7. $a_n=\frac{\sin n\alpha}{n}$ (α е реално число). Упътване: използвайте, че $-1\leq\sin n\alpha\leq 1$, и приложете теорема 3.

8. $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$. Упътване: използувайте теорема 4.

9. $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{3n^2}$. Упътване: използувайте формулата за сума на аритметична прогресия.

§ 4. Монотонни редици. Теорема на Кантор

Една редица

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

се нарича **растяща**, ако за всяко n е изпълнено неравенството $a_n \leqq a_{n+1}$. Ако пък $a_n \geqq a_{n+1}$ за всяко n, то тя се нарича **намаляваща**. Растящите и намаляващите редици образуват фамилията на така наречените **монотонни** редици. Ако се върнем отново към примерите от § 1, ще видим, че редиците (1), (2) и (3) са растящи, а редиците (3) и (4) — намаляващи (редицата (3) е едновременно и растяща, и намаляваща). Редиците (5), (6), (7) и (8) от § 1 не са нито растящи, нито намаляващи — те не са монотонни.

Всяка растяща редица е сигурно ограничена отдолу, тъй като нейният първи член се явява същевременно и нейна долна граница. Една растяща редица обаче може да бъде неограничена отгоре. Аналогично една намаляваща редица е винаги ограничена отгоре, но не винаги отдолу.

Както видяхме, една редица може да бъде ограничена, без да бъде сходяща. При монотонните редици обаче това е невъзможно.

Теорема. *Всяка ограничена монотонна редица е сходяща. При това, ако е растяща, тя клони към своята точна горна граница, а ако е намаляваща — към точната си долна граница.*

Доказателство. Нека редицата

(1) $$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

е растяща и ограничена (случаят на намаляваща редица се третира аналогично) и нека l е нейната точна горна граница. Да изберем едно произволно положително число ε. Тъй като l е най-малката горна граница на редицата (1), то числото $l-\varepsilon$, като по-малко от l, не може да бъде горна граница на тази редица. А това значи, че съществува някакъв член a_{n_0} от редицата, такъв, че $a_{n_0} > l-\varepsilon$. Но от монотонността на редицата следва, че при $n > n_0$ ще имаме $a_n \geqq a_{n_0}$, откъдето

$$l-\varepsilon < a_{n_0} \leqq a_n \leqq l < l+\varepsilon.$$

И така при $n > n_0$ са изпълнени неравенствата $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$, които са равносилни с неравенството

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε това означава, че редицата (1) е сходяща и $\lim a_n = l$. С това теоремата е доказана.

Като първо приложение на теоремата за монотонните редици ще установим известната теорема на Кантор, отнасяща се до редици от затворени интервали.

Теорема на Кантор. *Нека е дадена една безкрайна редица от затворени интервали*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

удовлетворяващи следните две условия:

а) *всеки интервал от тази редица съдържа следващия;*

б) *редицата от дължините на интервалите клони към* 0.

Тогава съществува, и то една единствена точка ξ, *съдържаща се във всичките интервали.*

Доказателство. Съгласно условието на теоремата интервалът $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ е подинтервал на интервала $[a_n, b_n]$. Оттук следват неравенствата

(2) $$a_n \leqq a_{n+1} \quad \text{и} \quad b_{n+1} \leqq b_n.$$

Освен това ясно е, че интервалът $[a_1, b_1]$ съдържа всички интервали от дадената редица, и следователно за всяко n имаме

(3) $$a_1 \leqq a_n < b_n \leqq b_1.$$

Да разгледаме сега двете числови редици

(4) $$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

(5) $$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

първата от които е образувана от левите краища на дадените интервали, а втората — от техните десни краища. Неравенствата (2) показват, че тези две редици са монотонни — първата е растяща, а втората — намаляваща. От неравенствата (3) пък се вижда, че те са и ограничени. Следователно те са сходящи. Нека $\lim a_n = \alpha$, $\lim b_n = \beta$. От неравенствата $a_n < b_n$ получаваме $\alpha \leqq \beta$. Тогава за всяко n ще имаме

(6) $$a_n \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b_n,$$

откъдето

$$0 \leqq \beta - \alpha \leqq b_n - a_n.$$

От друга страна обаче, съгласно условието б) на теоремата имаме $\lim (b_n - a_n) = 0$. Оттук следва, че $\beta - \alpha = 0$, или $\alpha = \beta$, т. е. че редиците (4) и (5) клонят към една и съща граница. Ако означим тази обща граница с ξ, то неравенствата (6) ще преминат в неравенствата

(7) $$a_n \leqq \xi \leqq b_n,$$

които са изпълнени за всяко n и които следователно показват, че точката ξ лежи във всичките интервали $[a_n, b_n]$.

Най-сетне лесно се вижда, че точката ξ е единствената точка с това свойство. Ако допуснем, че някоя друга точка ξ', различна от точката ξ, също така удовлетворява неравенствата

$$a_n \leqq \xi' \leqq b_n,$$

то от неравенството $|\xi - \xi'| \leqq b_n - a_n$ и от условието $\lim(b_n - a_n) = 0$ би следвало, че $|\xi - \xi'| = 0$, или $\xi = \xi'$, т. е. бихме стигнали до противоречие. И така теоремата е доказана.

С оглед приложението на теоремата на Кантор при доказателството на някои други теореми ще отбележим още следното:

Каквато и околност $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ на намерената по-горе точка ξ да вземем, всички интервали $[a_n, b_n]$ от редицата (2) с достатъчно големи номера ще се съдържат в тази околност. И наистина, тъй като $\lim(b_n - a_n) = 0$, ще съществува някое ν, такова, че при $n > \nu$ да имаме $b_n - a_n < \delta$. От неравенствата (7) получаваме

$$\xi - a_n \leqq b_n - a_n, \qquad b_n - \xi \leqq b_n - a_n.$$

Тогава при $n > \nu$ ще имаме

$$\xi - a_n < \delta, \qquad b_n - \xi < \delta,$$

откъдето

$$\xi - \delta < a_n \quad \text{и} \quad b_n < \xi + \delta.$$

А тези неравенства именно показват, че затвореният интервал $[a_n, b_n]$ се съдържа изцяло в отворения интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Упражнения. 1. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

е сходяща.

Упътване: Покажете, че $a_n < a_{n+1}$ и $a_n < 1$.

2. Да се докаже, че редицата, чиито членове са зададени с помощта на равенствата

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4},$$

е сходяща и да се намери границата ѝ.

Упътване: Покажете, че редицата е растяща и че $a_n \leqq 2$ (неравенството установете чрез метода на математическата индукция). Границата намерете, като използвате равенството, свързващо a_{n+1} и a_n.

§ 5. Числото e

В този параграф ще се запознаем с една забележителна редица — редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

и ще покажем, че тя е сходяща. Границата на тази редица играе важна роля в математиката. Като използуваме биномната формула на Нютон, получаваме

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{n-n+1}{n},$$

откъдето

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Като заместим в последното равенство n с $n+1$, получаваме

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Но при $k=2, 3, \dots, n$ имаме

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

т. е. всяко от събираемите, участвуващи в израза за a_n, не надминава съответното събираемо в израза за a_{n+1}. Последното събираемо в израза за a_{n+1}, което не съответствува на никое от събираемите в израза за a_n, е положително. Следователно $a_n<a_{n+1}$, т. е. редицата е растяща.

От неравенствата

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\quad (k=2,\ 3, \dots,\ n)$$

пък следва, че

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{2.3\dots n}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

И така за всяко n имаме $a_n<3$, т. е. редицата е ограничена отгоре. Тя е ограничена, разбира се, и отдолу, тъй като е растяща. Както знаем обаче, всяка монотонна редица, която е ограничена, е сходяща.

Границата на редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ се нарича неперово* число и се бележи с буквата e. Може да се покаже, че това число е ирационално. Ето първите няколко негови десетични знака:

$$e=2{,}7182818284\ldots$$

Числото e се взема за основа на така наречената естествена (натурална) логаритмична система. Прието е естествените логаритми на числата вместо с $\log_e x$ да се означават с $\ln x$:

Упражнения. 1. Намерете границите на редиците със следните общи членове:

а) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$; б) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$; в) $\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{2n}$.

2. Докажете, че за всяко цяло число k имаме $\lim \left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$.

Упътване: Най-напред установете твърдението за положителни стойности на k, като си послужите с пълната математична индукция, проведена по отношение на k. За целта се възползувайте от равенствата

$$1+\frac{k+1}{n}=\frac{n+k+1}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+k+1}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n+1}\right).$$

След това докажете твърдението за цели отрицателни стойности на k, като положите $k=-s$ (където s е положително число) и използувате при $n>s$ равенствата

$$1-\frac{s}{n}=\frac{n-s}{n}=\frac{1}{\frac{n}{n-s}}=\frac{1}{\frac{n-s+s}{n-s}}=\frac{1}{1+\frac{s}{n-s}}.$$

3. Намерете границите на редиците със следните общи членове:

а) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$; б) $\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^n$; в) $\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n$; г) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

Упътване: Използувайте зад. 2.

§ 6*. Теорема на Болцано—Вайерщрас

Ограничените редици, както знаем, не са непременно сходящи. Въпреки това ограничените редици притежават едно свойство, което е свързано със свойството сходимост. То е изказано в следната

---

* Дж. Непер (1550—1617) е шотландски математик, който пръв е въвел логаритмите в математиката.

Теорема на Болцано—Вайерщрас. *Всяка ограничена редица притежава поне една сходяща подредица.*

Доказателство. Нека редицата

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

е ограничена и нека $[\alpha, \beta]$ е един интервал, съдържащ всички нейни членове. Да разделим този интервал на две равни части и да означим с $[\alpha_1, \beta_1]$ един от така получените негови подинтервали, при това такъв,който съдържа безбройно много членове на дадената редица — поне един от двата интервала има това свойство, иначе би излязло, че цялата редица се състои от краен брой членове. Да вземем след това един член a_{n_1} от редицата (1), който се съдържа в интервала $[\alpha_1, \beta_1]$. След това да разделим $[\alpha_1, \beta_1]$ на два равни по големина подинтервала, да означим с $[\alpha_2, \beta_2]$ единия от тях, избран така, че да съдържа безбройно много членове от редицата (1), и да означим с a_{n_2} един член от тази редица, който се съдържа в $[\alpha_2, \beta_2]$ и чийто номер n_2 удовлетворява неравенството $n_2 > n_1$ (член с такъв номер сигурно ще се намери в интервала $[\alpha_2, \beta_2]$, щом като този интервал съдържа безбройно много членове от редицата (1)). Продължавайки по този начин неограничено, ние ще получим една безкрайна редица от затворени интервали

(2) $$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_k, \beta_k], \ldots$$

и една редица

(3) $$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots,$$

съставена от членове на редицата (1), такива, че $a_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$ и

(4) $$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Неравенствата (4) показват, че редицата (3) е подредица на редицата (1). Що се отнася до редицата (2) от интервалите $[\alpha_k, \beta_k]$, тя, както веднага се вижда, удовлетворява условията на теоремата на Кантор. Следователно ще съществува една точка ξ, принадлежаща на всички тези интервали. Съгласно бележката от края на § 4 за всяко положително число ε можем да намерим такова число ν, че при $k > \nu$ всички интервали $[\alpha_k, \beta_k]$ да се съдържат в интервала $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Оттук следва, че и всички a_{n_k} при $k > \nu$ се съдържат в този отворен интервал и следователно удовлетворяват неравенството

$$|a_{n_k} - \xi| < \varepsilon.$$

Това пък означава, че редицата (3), която беше една подредица на редицата (1), е сходяща и клони към ξ. С това теоремата е доказана.

§ 7*. Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на редици

Когато искаме, излизайки от дефиницията за сходимост, да установим, че дадена редица е сходяща, ние се сблъскваме със следното неудобство — за да проверим условието на дефиницията, трябва предварително да познаваме границата на разглежданата редица. Ето защо интересно е да разполагаме с такова необходимо и достатъчно условие за сходимост на една редица, в което да не става дума за нейната граница. Такова е т. нар. условие на Коши, съдържащо се в следната

Теорема на Коши. *За да бъде редицата*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \tag{1}$$

сходяща, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε *да съществува такова число* ν, *че при* $m>\nu$ *и* $n>\nu$ *да бъде изпълнено неравенството*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Доказателство. Да установим най-напред необходимостта на условието. Нека редицата (1) е сходяща и a е нейната граница. Можем да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава при $m>\nu$ и $n>\nu$ е изпълнено

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

С това необходимостта на условието е доказана.

Да докажем сега неговата достатъчност. Ще допуснем, че условието на Коши, изказано във формулировката на теоремата, е изпълнено. Да приложим това условие при $\varepsilon = 1$. Ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ и $m>\nu$ да имаме

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Ако сега фиксираме един член a_m, чийто номер m е по-голям от ν, то от последното неравенство ще получим

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1$$

при $n>\nu$. Това означава, че всички членове на редицата (1) с номера, по-големи от ν, се намират в интервала $(a_m - 1, a_m + 1)$. А тъй като членовете с номера, по-малки от ν, са краен брой, то ще можем да намерим такъв краен интервал $[\alpha, \beta]$, който съдържа всички членове на редицата (1). Следователно тази редица е ограничена. Съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас тя ще притежава тогава поне една сходяща подредица

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots \tag{2}$$

чиято граница нека означим с a.

Ще покажем, че редицата (1) е сходяща и клони също към a. За целта да вземем едно произволно положително число ε. Поради сходимостта на редицата (2) можем да намерим такова число ν_1, че при $k>\nu_1$

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

От друга страна, съгласно условието на Коши, което предполагаме за изпълнено, ще съществува и такова ν, че

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

при $n>\nu$, $m>\nu$. Нека сега $n>\nu$. Да изберем номера k толкова голям, че да са изпълнени неравенствата $k>\nu_1$ и $n_k>\nu$. Тогава въз основа на неравенствата (3) и (4) ще получим

$$|a_n-a|=|a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-a|\leqq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

И така при $n>\nu$ е изпълнено неравенството

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Това означава, че редицата (1) е сходяща и има граница a. С това теоремата е доказана.

§ 8. Редици, клонящи към безкрайност

Понякога думата клони се употребява и по отношение на някои редици, които са разходящи. А именно оказва се удобно да се въведе следната

Дефиниция. *Ще казваме, че редицата*

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

клони към безкрайност, и ще бележим това така:

$$\lim a_n=\infty \quad \text{или} \quad a_n\to\infty,$$

когато при всеки избор на положителното число A може да се намери такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $a_n>A$.

За да поясним смисъла на тази дефиниция, нека отбележим, че числото A се взема произволно и следователно може да бъде избрано колкото искаме голямо. Така че в дефиницията в същност се иска членовете на редицата да могат да станат по-големи от всяко положително число колкото и голямо да е то, стига номерата на тези членове да станат достатъчно големи.

Аналогично: *казваме, че редицата* (1) *клони към минус безкрайност, и записваме това така:*

$$\lim a_n=-\infty \quad \text{или} \quad a_n\to-\infty,$$

ако за всяко отрицателно число B съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $a_n<B$.

Лесно се вижда например, че редиците

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

клонят към ∞, а редицата

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

клони към $-\infty$.

Ще покажем, че е валидна следната

Теорема 1. *Нека е дадена редицата*

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и нека $a_n>0$ *за всяко* n. *Да образуваме редицата*

$$(2)\qquad \frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\dots,\ \frac{1}{a_n},\dots$$

Ако $\lim a_n=0$, *то* $\lim\frac{1}{a_n}=\infty$ *и, обратно, ако* $\lim a_n=\infty$, *то* $\lim\frac{1}{a_n}=0$.

Доказателство. Нека $\lim a_n=0$. Да си изберем едно произволно положително число A. Ако $\varepsilon=\frac{1}{A}$, то съгласно дефиницията за сходяща редица ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ ще имаме $|a_n-0|<\varepsilon$ или, което е все едно, $a_n<\frac{1}{A}$. Оттук ще получим $\frac{1}{a_n}>A$ при $n>\nu$. Това означава, че $\lim\frac{1}{a_n}=\infty$.

Нека сега пък $\lim a_n=\infty$. Да вземем произволно положително число ε и да си образуваме числото $A=\frac{1}{\varepsilon}$. Съгласно дефиницията за редица, клоняща към безкрайност, можем да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $a_n>A$, т. е. $a_n>\frac{1}{\varepsilon}$, откъдето получаваме $\frac{1}{a_n}<\varepsilon$ или $|\frac{1}{a_n}-0|<\varepsilon$.

Следователно $\lim\frac{1}{a_n}=0$.

Пример. Ако $q>1$, то за геометричната прогресия

$$q,\ q^2,\dots,q^n,\dots$$

имаме $\lim q^n=\infty$. Наистина в такъв случай редицата

$$\frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2},\dots,\ \frac{1}{q^n},\dots$$

е геометрична прогресия с частно $\frac{1}{q}$, удовлетворяващо неравенствата $0<\frac{1}{q}<1$. Следователно $\lim\frac{1}{q^n}=0$, откъдето $\lim q^n=\infty$.

Лесно се доказват също следните теореми:

Теорема 2. *Нека редицата*

$$a_1,\ a_2,\dots,a_n,\dots$$

е сходяща, т. е. нека $\lim a_n=a$, *където* a *е някакво реално число. Ако за редицата*

$$b_1,\ b_2,\dots,b_n,\dots$$

имаме $\lim b_n=\infty$, *то*

$$\lim(a_n+b_n)=\infty.$$

Ако пък $\lim b_n=-\infty$, *то*

$$\lim(a_n+b_n)=-\infty.$$

Теорема 3. *Нека за редицата*

$$a_1,\ a_2,\dots,a_n,\dots$$

е дадено, че $\lim a_n = a$ *и нека* $a \neq 0$. *Ако за редицата*

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

имаме $\lim b_n = \infty$, *то при* $a > 0$ *имаме*

$$\lim a_n b_n = \infty,$$

а при $a < 0$

$$\lim a_n b_n = -\infty.$$

Като частен случай на тази теорема се явява твърдението: Ако редицата

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

клони към ∞, то редицата

$$-c_1, -c_2, \dots, -c_n, \dots$$

клони към $-\infty$ и обратно.

Теорема 4. *Ако за редиците*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

имаме $\lim a_n = \infty$ и $\lim b_n = \infty$, *то* $\lim (a_n + b_n) = \infty$ и $\lim a_n b_n = \infty$.

Ако пък $\lim a_n = -\infty$ и $\lim b_n = -\infty$, *то* $\lim (a_n + b_n) = -\infty$ и $\lim a_n b_n = \infty$.

Най-сетне, ако $\lim a_n = \infty$ и $\lim b_n = -\infty$, *то* $\lim a_n b_n = -\infty$.

Упражнения. 1. Докажете, че $\lim \sqrt{n} = \infty$.

2. Намерете: а) $\lim \frac{n^2}{n+1}$; б) $\lim \frac{n^3 - 5}{2n + 3}$; в) $\lim \frac{1 - n^2}{3 + n}$;

г) $\lim \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$; д) $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$.

3. Покажете, че редицата, зададена с равенствата $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, клони към ∞.

Упътване: С помощта на принципа за математическата индукция покажете, че $a_n \geqq n + 1$.

ГЛАВА II

БЕЗКРАЙНИ РЕДОВЕ

Тази глава е посветена на изучаването на понятието **безкраен ред** от реални числа и неговите свойства — едно понятие, тясно свързано с понятието безкрайна редица, но играещо твърде голяма самостоятелна роля в математическия анализ.

§ 9. Сходящи и разходящи редове

Нека е дадена една редица от реални числа

(1) $$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Ако започнем да събираме последователно членовете на тази редица, ще получим следните суми:

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

и т. н.

Да разгледаме редицата

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

Ако тази редица е сходяща и ако S е нейната граница, то ние сме склонни да разглеждаме числото S като число, което се е получило като че ли в резултат от последователно събиране на всички членове от редицата (1) — една операция, сама по себе си невъзможна. Такъв възглед прави естествена следната

Дефиниция. *Израз от вида*

(2) $$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

където $u_1, u_2, \dots$ *са реални числа, се нарича* ***безкраен ред*** *от реални числа или по-кратко* ***ред****. Числата* $u_1, u_2, \dots$ *се наричат* ***членове*** *на този ред. Сумата*

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

се нарича n-та частична (парциална) сума на реда. Най-сетне, ако редицата от частичните му суми

(3) $$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

е сходяща и клони към S, то редът се нарича сходящ, а числото S — негова сума.

Фактът, че числото S е сума на реда (2), се записва с помощта на равенството

(4) $$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

Ако редицата (3) от частичните суми на един ред е разходяща, то и самият ред се нарича разходящ.

Нека подчертаем, че понятието сума на ред се дефинира само за сходящите редове. Разходящите редове не притежават сума. Ясно е тогава, че изразът (2) може, както показва равенството (4), да се схваща като число само когато той представлява сходящ ред. В противен случай той не представлява никакво число.

Изразът (2) се записва за краткост още и по следния начин:

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Лесно се вижда, че съществуват разходящи редове. Така например редът

(6) $$1+1+\cdots+1+\cdots,$$

всички членове на който са равни на 1, е разходящ, тъй като редицата от неговите частични суми

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

както знаем, е разходяща.

За да покажем пък, че съществуват и сходящи редове, ще разгледаме следния важен пример: Реда

(7) $$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots$$

ще наричаме геометрична прогресия (т. е. ще употребим същото наименование, което бяхме използували вече за редицата с общ член q^{n-1}). Ще покажем, че когато числото q удовлетворява неравенствата $-1<q<1$, редът геометрична прогресия (7) е сходящ. За целта да си образуваме неговата n-та частична сума:

$$S_n=1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Както знаем от § 3, $\lim q^n=0$, когато $-1<q<1$. Следователно за такива стойности на q ще имаме

$$\lim S_n=\lim\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim q^n=\frac{1}{1-q}.$$

И така виждаме, че при $-1<q<1$, т. е. при $|q|<1$, редът (7) е сходящ и неговата сума е $\frac{1}{1-q}$, т. е. можем да напишем равенството

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots$$

Нека отбележим някои най-прости свойства на сходящите редове, които следват непосредствено от самата дефиниция за сходимост на ред:

Ако всички членове на един сходящ ред

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{8}$$

умножим с едно и също число a, то полученият ред

$$au_1+au_2+\cdots+au_n+\cdots \tag{9}$$

е също сходящ и ако S е сумата на реда (8), *то сумата на реда* (9) *е aS.*

Наистина, ако

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

$$\sigma_n=au_1+au_2+\cdots+au_n,$$

то $\sigma_n=aS_n$ и от $\lim S_n=S$ получаваме $\lim\sigma_n=aS$.

Ако са дадени два сходящи реда, съответно със суми S′ и S″, т. е. ако

$$S'=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$S''=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

то редовете

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots$$

и

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\cdots+(u_n-v_n)+\cdots$$

са също сходящи и сумата на първия от тях е S′+S″, а на втория S′—S″.

И наистина, ако

$$S'_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

$$S_n''=v_1+v_2+\cdots+v_n,$$

$$\sigma_n=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n),$$

$$\rho_n=(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\cdots+(u_n-v_n),$$

то $\sigma_n=S'_n+S_n''$, $\rho_n=S'_n-S_n''$ и от $\lim S'_n=S'$, $\lim S_n''=S''$ получаваме $\lim\sigma_n=S'+S''$, $\lim\rho_n=S'-S''$.

Лесно се доказва също и следното свойство:

Ако към членовете на един сходящ ред прибавим краен брой нови членове или пък премахнем краен брой от неговите членове, получаваме винаги пак сходящ ред.

Ще докажем сега едно важно свойство на сходящите редове.

Теорема. *Ако редът*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{10}$$

е сходящ, то редицата от неговите членове

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{11}$$

клони към нула.

Доказателство. От равенствата

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

$$S_{n+1}=u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}$$

получаваме

$$S_{n+1}-S_n=u_{n+1}. \tag{12}$$

Ако редът (10) е сходящ и ако S е неговата сума, ще имаме $\lim S_n=S$ и също така $\lim S_{n+1}=S$. Оттук $\lim (S_{n+1}-S_n)=0$, което поради равенството (12) означава, че $\lim u_{n+1}=0$. Това пък показва, че редицата (11) е сходяща и клони към нула.

От доказаната теорема следва, че ако редицата от членовете на един безкраен ред не клони към нула, то той е разходящ.

Като вземем пред вид тази теорема, бихме могли сега още веднъж да се убедим, че редът (6) е разходящ, без да прибягваме към редицата от неговите частични суми, а само като забележим, че редицата от неговите членове

$$1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

не клони към нула.

Друг по-интересен случай, когато можем да използуваме същата теорема, е следният. Да разгледаме отново геометричната прогресия

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots \tag{7}$$

и да се занимаем с въпроса за сходимостта на този ред, когато $|q|\geqq 1$. Редицата от членовете на реда

$$1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$$

в този случай не клони към нула, защото, ако бихме имали $\lim q^{n-1}=0$, то щяхме да имаме също и $\lim |q|^{n-1}=0$. А това е невъзможно поради неравенството $|q|^{n-1}\geqq 1$, изпълнено за всяко n. Следователно при $|q|\geqq 1$ редът (7) е разходящ. И така установихме, че геометричната прогресия (7) представлява сходящ ред само когато $|q|<1$.

Доказаната в този параграф теорема може да се изкаже още и така: *за да бъде един ред сходящ, необходимо е редицата от неговите членове да клони към нула.*

Възниква въпросът, дали това условие е и достатъчно, т. е. можем ли от това, че редицата от членовете на един ред клони към нула, да заключим, че той е сходящ. Отговорът на този въпрос е отрицателен. За да се убедим в това, ще разгледаме следния важен пример: Редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

1, 1 1

(14)

Да

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right).$$

Тогава ще имаме

$$S_{2^m}\geqq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{m-1}\frac{1}{2^m}=1+m\frac{1}{2}>A.$$

И така получаваме $S_{2^m}>A$, което показва, че произволно взетото положително число A не е горна граница на редицата (14), т. е. че тази редица е неограничена. Следователно тя не е сходяща, което означава, че редът (13) е разходящ.

§ 10. Редове с неотрицателни членове

Ако всички членове на един ред

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

са неотрицателни числа, то редицата от неговите частични суми

$$S_1,\ S_2,\ldots,\ S_n,\ldots$$

е растяща. Действително от равенството

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$$

и от това, че $u_{n+1}\geqq 0$, следва неравенството

$$S_n\leqq S_{n+1}$$

за всяко n.

Както знаем, една растяща редица е сходяща винаги когато е ограничена. Ето защо, *за да установим, че един ред с неотрицателни членове е сходящ, достатъчно е да покажем, че редицата от неговите частични суми е ограничена.* Тази забележка ни дава възможност лесно да установим следната важна

Теорема (принцип за сравняване на редове с неотрицателни членове). *Нека са дадени два реда с неотрицателни членове*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

и

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{2}$$

и нека за всяко n е изпълнено неравенството $u_n\leqq v_n$. Тогава, ако редът (2) *е сходящ, то и редът* (1) *е сходящ.*

Доказателство. Нека

$$S'_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$
$$S_n''=v_1+v_2+\cdots+v_n.$$

Ясно е, че $S_n'\leqq S_n''$. Тъй като редът (2) е сходящ, то редицата

$$S_1'',\ S_2'',\ldots,\ S_n'',\ldots$$

е сходяща и следователно — ограничена. Ако A е такова число, че $S_n''<A$ за всяко n, то също така за всяко n ще имаме $S'_n<A$, т. е. редицата от частичните суми

$$S_1',\ S_2',\ldots,\ S_n',\ldots$$

на реда (1) е ограничена отгоре. Тя обаче, както знаем, е растяща и следователно ще бъде и сходяща. С това теоремата е доказана.

Нека се убедим чрез някои примери в ползата от току-що доказания принцип за сравняване. Да разгледаме реда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots \tag{3}$$

Членовете на този ред са по-малки от съответните членове на реда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots,$$

който обаче е геометрична прогресия с частно $q=\frac{1}{2}$ и следователно е сходящ. Въз основа на принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове заключаваме, че и редът (3) е сходящ.

Да вземем друг пример — да разгледаме реда

$$(4)\qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\dots$$

Ако допуснем, че този ред е сходящ, то като умножим всичките му членове с числото 2, ще получим също така сходящия ред

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\dots+\frac{2}{2n-1}+\dots,$$

членовете на който са по-големи от съответните членове на хармоничния ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

От принципа за сравняване тогава ще следва, че и хармоничният ред е сходящ, което, както знаем, не е вярно. Това показва, че нашето допускане за сходимостта на реда (4) е било погрешно и че следователно той е разходящ.

Като се използува принципът за сравняване на редове с неотрицателни членове, могат да се докажат няколко достатъчни условия за сходимост и разходимост, известни под названието критерии за редове с положителни членове. Ние ще посочим три такива критерия. Навсякъде при тяхната формулировка ще се предполага, че е даден един ред

$$(5)\qquad u_1+u_2+\dots+u_n+\dots,$$

всичките членове на който са положителни числа.

I. Критерий на Даламбер. *Нека редицата*

$$\frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2},\ \dots,\ \frac{u_{n+1}}{u_n},\ \dots$$

е сходяща и нека $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. *Тогава*:

ако $l<1$, *редът* (5) *е сходящ;*
ако $l>1$, *редът* (5) *е разходящ.*

Доказателство. Нека $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$. Да вземем такова число q, което удовлетворява неравенствата $l<q<1$. Както знаем от една теорема за редиците (теорема 3 от § 3), ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$. Нека $n_0>\nu$. От неравенствата

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}<q,\quad \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}<q,\ \dots,\ \frac{u_{n_0+k}}{u_{n_0+k-1}}<q,$$

където k е произволно естествено число, получаваме (чрез почленно умножаване и съкращаване) $\frac{u_{n_0+k}}{u_{n_0}}<q^k$, или

$$u_{n_0+k}<u_{n_0}q^k.$$

Това показва, че членовете на реда

$$(6)\qquad u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\dots+u_{n_0+k}+\dots$$

са по-малки от съответните членове на реда

$$u_{n_0}q+u_{n_0}q^2+\dots+u_{n_0}q^k+\dots,$$

който е геометрична прогресия, умножена с постоянното число u_{n_0}. Тъй като $0<q<1$, тази прогресия е сходящ ред. Оттук въз основа на принципа за сравняване заключаваме, че редът (6), а следователно и редът (5) е сходящ.

Нека сега $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=l>1$. Тогава ще съществува такова число ν, че $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ при $n>\nu$. Ако $n_0>\nu$, ще имаме $u_{n+1}>u_n$ при $n\geq n_0$. И тъй редицата

$$u_{n_0},\ u_{n_0+1}, \dots, u_{n_0+k}, \dots$$

е растяща и следователно (тъй като първият ѝ член е положителен) не клони към нула. Значи и редицата от членовете на дадения ред (5) не клони към нула. Следователно този ред е разходящ.

II. Критерий на Коши. *Нека предположим, че редицата*

$$u_1,\ \sqrt{u_2},\ \sqrt[3]{u_3}, \dots, \sqrt[n]{u_n}, \dots$$

е сходяща и че $\lim \sqrt[n]{u_n}=l$. *Тогава:*

ако $l<1$, *редът* (5) *е сходящ;*
ако $l>1$, *редът* (5) *е разходящ.*

Доказателство. Ако $\lim \sqrt[n]{u_n}=l<1$ и ако $l<q<1$, то съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $\sqrt[n]{u_n}<q$ или $u_n<q^n$. Това показва, че за достатъчно големи (по-големи от ν) номера n членовете на реда (5) са по-малки от съответните членове на една сходяща геометрична прогресия. Следователно редът (5) съгласно принципа за сравняване е сходящ.

Ако пък $\lim \sqrt[n]{u_n}=l>1$, за достатъчно големи номера n ще имаме $\sqrt[n]{u_n}>1$, т. е. $u_n>1$. Оттук виждаме, че редицата от членовете на реда (5) не клони към нула и значи той е разходящ.

III. Критерий на Раабе — Дюамел. *Да определим числата* α_n *от равенството*

$$(7)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n}$$

и да образуваме след това редицата

$$\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ 3\alpha_3, \dots, n\alpha_n, \dots$$

Нека тази редица е сходяща и нека $\lim n\alpha_n = l$. *Тогава:*

ако $l > 1$, редът (5) *е сходящ;*

ако $l < 1$, *редът* (5) *е разходящ.*

Доказателство. От равенството (7) получаваме

$$\alpha_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}.$$

Нека $\lim n\alpha_n = l > 1$ и нека μ е число, удовлетворяващо неравенствата $l > \mu > 1$. За достатъчно големи номера n, по-точно за $n > \nu$, където ν е подходящо избрано число, ще имаме $n\alpha_n > \mu$, откъдето получаваме

$$nu_n - nu_{n+1} > \mu u_{n+1},$$

а оттук

$$nu_n - (n+1)\, u_{n+1} > (\mu - 1)\, u_{n+1}.$$

Нека $n_0 > \nu$. От неравенствата

$$n_0 u_{n_0} - (n_0 + 1)\, u_{n_0+1} > (\mu - 1)\, u_{n_0+1},$$

$$(n_0 + 1)\, u_{n_0+1} - (n_0 + 2)\, u_{n_0+2} > (\mu - 1)\, u_{n_0+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n_0 + k)\, u_{n_0+k} - (n_0 + k + 1)\, u_{n_0+k+1} > (\mu - 1)\, u_{n_0+k},$$

където k е произволно естествено число, чрез почленно събиране получаваме

$$n_0 u_{n_0} - (n_0 + k + 1)\, u_{n_0+k-1} > (\mu - 1)(u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+k}),$$

откъдето

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+k} < \frac{n_0 u_{n_0}}{\mu - 1}.$$

Виждаме, че всички частични суми на реда

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+k} + \cdots$$

не надминават едно постоянно число, т. е. редицата от тези частични суми е ограничена отгоре. Това показва, че този ред, който е с положителни членове, е сходящ. А тогава сходящ ще бъде и редът (5).

Нека сега $\lim n\alpha_n = l < 1$. Тогава ще съществува такова ν че при $n > \nu$ да имаме $n\alpha_n < 1$, значи

$$nu_n - nu_{n+1} < u_{n+1},$$

или

$$nu_n < (n+1) u_{n+1}.$$

Да вземем $n_0 > \nu$. От неравенствата

$$n_0 u_{n_0} < (n_0 + 1)\, u_{n_0+1} < \cdots < (n_0 + k)\, u_{n_0+k},$$

валидни за всяко естествено число k, получаваме

$$u_{n_0+k} > n_0 u_{n_0} \frac{1}{n_0 + k}.$$

Оттук виждаме, че членовете на реда

$$(8)\qquad u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\dots+u_{n_0+k}+\dots$$

са по-големи от съответните членове на реда

$$\frac{n_0 u_{n_0}}{n_0+1}+\frac{n_0 u_{n_0}}{n_0+2}+\dots+\frac{n_0 u_{n_0}}{n_0+k}+\dots$$

Последният ред обаче е получен чрез премахване на първите n_0 на брой членове на разходящия хармоничен ред и умножаване на всички останали негови членове с постоянното число $n_0u_{n_0}$ — значи той също е разходящ. От принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове заключаваме, че редът (8), а значи и редът (5) е разходящ.

И така трите критерия за сходимост и разходимост на редове с положителни членове са доказани.

Нека отбележим изрично следното: Ако при прилагането на който и да било от изказаните три критерия установим, че границата l е равна на 1, то този критерий не ни дава нищо и въпросът за сходимостта на реда (5) остава открит.

Най-сетне заслужава да обърнем внимание на факта, че при прилагането на критерия на Раабе—Дюамел излизаме от израза $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ — същия, който участвува и в критерия на Даламбер. Ето защо към критерия на Раабе—Дюамел прибягваме обикновено, когато критерият на Даламбер не може да ни помогне, например, когато $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

Пример 1. Да разгледаме реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Тогава ще имаме

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!}=\lim\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

Но $\frac{1}{e}<1$ и оттук заключаваме въз основа на критерия на Даламбер, че разглежданият ред е сходящ.

Пример 2. Разглеждаме реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$. Тъй като

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\frac{2}{n}=0<1,$$

то този ред е сходящ съгласно критерия на Коши.

Пример 3. Да разгледаме реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. За този ред получаваме

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{n^2}{n^2+2n+1}.$$

Тук $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, така че критерият на Даламбер не ни дава резултат. Прилагаме критерия на Раабе—Дюамел. За целта от равенството

$$\frac{n^2}{n^2+2n+1}=\frac{1}{1+\alpha_n}$$

определяме α_n. Получаваме $\alpha_n=\frac{2n+1}{n^2}$. Тогава

$$\lim n\,\alpha_n=\lim\frac{2n+1}{n}=2.$$

Тъй като $2>1$, то редът е сходящ.

Упражнения. Да се изследва дали са сходящи или разходящи следните редове:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{3^n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,2n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{n}$.
12. За кои стойности на цялото положително число k е сходящ и за кои е разходящ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,\frac{k^n}{n^n}$?

§ 11. Критерий на Лайбниц

Критерият на Лайбниц се отнася за редове, чиито членове си сменят последователно знака. Той гласи:

Ако редицата от положителните числа

(1) $$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

е намаляваща и клони към нула, то редът

(2) $$u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

е сходящ.

Доказателство. Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (2). При направените предположения за редицата (1) ще имаме

$$S_{2n+1}-S_{2n-1}=-(u_{2n}-u_{2n+1})\leqq 0,$$
$$S_{2n+2}-S_{2n}=u_{2n+1}-u_{2n+2}\geqq 0,$$
$$S_{2n+2}-S_{2n+1}=-u_{2n+2}<0.$$

Оттук получаваме

$$S_{2n-1}\geqq S_{2n+1}>S_{2n+2}\geqq S_{2n}.$$

Първото заключение, което можем да направим от тези неравенства, е, че редицата

(3) $$S_1,\ S_3,\ \dots,\ S_{2n-1},\ \dots$$

е намаляваща, а редицата

(4) $$S_2,\ S_4,\ \dots,\ S_{2n},\ \dots$$

е растяща. По-нататък от очевидните неравенства

$$S_2\leqq S_{2n}<S_{2n-1}\leqq S_1$$

заключаваме, че тези две редици са ограничени и следователно са сходящи. Ако редицата (3) клони към S', а редицата (4) — към S'', то поради неравенството $S_{2n}<S_{2n-1}$ ще имаме $S''\leqq S'$. А като вземем пред вид монотонността на редиците (3) и (4), ще заключим, че

$$S_{2n}\leqq S''\leqq S'\leqq S_{2n-1}.$$

Тогава за всяко n ще бъдат в сила неравенствата

$$0\leqq S'-S''\leqq S_{2n-1}-S_{2n}\quad\text{или}\quad 0\leqq S'-S''\leqq u_{2n}.$$

Тъй като редицата (1) клони по условие към нула, от последните неравенства следва, че $S'=S''$, т. е. че редиците (3) и (4) клонят към една и съща граница. Но тогава и редицата

$$S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_n,\ \dots$$

от частичните суми на реда (2), която е получена от комбинирането на редиците (3) и (4), ще бъде сходяща. С това е доказана и сходимостта на реда (2).

Нека забележим, че от извършеното доказателство можем да извлечем още едно заключение. А именно ако S е сумата на реда (2), то от неравенствата $S_{2n}\leqq S\leqq S_{2n-1}$ ще получим

(5) $$0\leqq S_{2n-1}-S\leqq S_{2n-1}-S_{2n}=u_{2n},$$

а от неравенствата $S_{2n}\leqq S\leqq S_{2n+1}$ ще имаме

(6) $$0\leqq S-S_{2n}\leqq S_{2n+1}-S_{2n}=u_{2n+1}.$$

Това можем да резюмираме по следния начин: *Ако*

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$$

е един ред, удовлетворяващ условията на критерия на Лайбниц, то за неговата сума S и неговата частична сума S_n имаме

$$|S-S_n|\leqq|u_{n+1}|.$$

Наистина неравенството (5) ни дава горното неравенство за нечетни, а неравенството (6) — за четни стойности на n.

С помощта на критерия на Лайбниц можем например да покажем, че редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

е сходящ. Наистина всички условия на критерия тук са изпълнени, което се проверява непосредствено.

Упражнения. Покажете дали са сходящи или разходящи следните редове:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\frac{n+1}{n}$.

§ 12. Абсолютно сходящи редове

Както знаем, сумата на краен брой числа не се променя, когато разместим по произволен начин събираемите — в това се състои така нареченият комутативен закон на събирането. Този закон обаче не е валиден при безкрайните редове. За да поясним това, да разгледаме следния пример. Редът

$$(1)\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots;$$

както видяхме, е сходящ. Да означим с S_n неговата n-та частична сума, а с S — неговата сума. Нека сега разместим членовете му по следния начин: да вземем най-напред първите два положителни члена, след това — първия отрицателен, после — следващите два положителни, след това — следващия отрицателен и т. н. Ще получим реда

$$(2)\qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ако σ_n е n-тата частична сума на този ред, за частичните му суми от вида σ_{3n} ще имаме

$$\sigma_{3n}=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Да разместим събираемите в първата скоба, а всеки от изразите в останалите скоби да намалим, като използуваме, че

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}=\frac{2(4k-2)}{(4k-3)(4k-1)}>\frac{2(4k-2)}{(4k-2)^2}=\frac{1}{2k-1}.$$

Ще получим неравенството

$$\sigma_{3n} > \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

което може да се запише така:

$$\sigma_{3n} > \frac{1}{3} + S_{2n}.$$

Без да изследваме въобще въпроса, сходящ ли е редът (2), или е разходящ, ясно е, че ако той е сходящ и неговата сума е σ, последното неравенство ще ни даде

$$\sigma \geqq \frac{1}{3} + S. \tag{3}$$

И така редът (2), получен чрез разместване на членовете на реда (1), или е разходящ, или е сходящ със сума, различна от тази на реда (1).

Този пример ни показва, че като разместваме членовете на един сходящ безкраен ред, ние рискуваме да променим с това неговата сума. Нещо повече, може да се покаже даже че има случаи, когато членовете на един сходящ ред могат да бъдат разместени по такъв начин, че новополученият ред да бъде разходящ.

Има една важна категория сходящи редове обаче, при които можем да разместваме по произволен начин членовете им, без с това да променяме сумите им. Това са т. нар. абсолютно сходящи редове.

Дефиниция. *Един безкраен ред*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

се нарича абсолютно сходящ, ако редът

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots, \tag{5}$$

съставен от абсолютните стойности на неговите членове, е сходящ.

Нека отбележим, че в тази дефиниция не се говори нищо за сходимостта на реда (4). Ето защо ще установим следната

Теорема 1. *Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.*

Доказателство. Нека е дадено, че редът (4) е абсолютно сходящ. Ще положим

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

Лесно се вижда, че

$$0 \leqq v_n \leqq |u_n| \quad \text{и} \quad 0 \leqq w_n \leqq |u_n|.$$

Да разгледаме редовете

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{6}$$

и

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots \tag{7}$$

Това са два реда с неотрицателни членове. При това n-тият член на всеки от тях не надминава n-тия член на реда (5), който по условие е сходящ.

Съгласно принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове редовете (6) и (7) ще бъдат също сходящи.

Но от равенството

$$u_n = v_n - w_n$$

е ясно, че редът

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

се получава чрез почленно изваждане от редовете (6) и (7), и следователно и той ще бъде сходящ, което искахме да докажем.

Всеки сходящ ред с неотрицателни членове е абсолютно сходящ. Не е трудно да посочим и по-интересни примери. Така например редът

(8) $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

е абсолютно сходящ, тъй като редът, образуван от абсолютните стойности на членовете му, както видяхме в § 10 (пример 3), е сходящ.

Съществуват обаче сходящи редове, които не са абсолютно сходящи. Такъв е например редът

(9) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

Съгласно критерия на Лайбниц той е сходящ, но редът от абсолютните стойности на членовете му е хармоничният ред, който, както знаем, е разходящ.

Нека обърнем внимание на това, че извършвайки доказателството на теорема 1, ние установихме следното твърдение:

Всеки абсолютно сходящ ред може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове.

Именно това обстоятелство ще използуваме при доказателството на следната теорема, която изразява едно характерно свойство на абсолютно сходящите редове.

Теорема 2. *При абсолютно сходящите редове е в сила комутативният закон.*

Доказателство. Нека редът

(10) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

е абсолютно сходящ и има сума S. Трябва да покажем, че ако редът

(11) $$u_{n_1} + u_{n_2} + \cdots + u_{n_k} + \cdots$$

е получен от реда (10) чрез произволно разместване на членовете му, то той е също абсолютно сходящ и има сума S.

Преди всичко нека уточним: когато казваме, че редът (11) е получен от реда (10) посредством разместване на членовете му, ние разбираме следното: редът (11) е съставен от членовете на реда (10), като всеки член на реда (10) участвува, и то само веднъж, в реда (11). (Нека подчертаем, че редицата от членовете на реда (11) не е подредица на редицата от членовете на реда (10) — k-тият член на реда (11) е n_k-ти член на реда (10), но неравенствата $n_{k-1}<n_k$, които бяха задължителни при образуването на подредица, тук не са изпълнени.)

Преминавайки към самото доказателство на теоремата, ще разгледаме най-напред случая, когато даденият ред (10) е ред с неотрицателни членове. Нека k е произволно естествено число и σ_k е k-тата частична сума на реда (11). Ясно е, че ако вземем естественото число m достатъчно голямо, то m-тата частична сума S_m на реда (10) ще съдържа всички членове на сумата σ_k. Тъй като всички членове на сумата S_m са неотрицателни, то ще имаме $\sigma_k \leqq S_m$. От друга страна, редицата от частичните суми на реда (10) е растяща, поради което имаме $S_m \leqq S$. Следователно $\sigma_k \leqq S$. Това показва, че редицата от частичните суми на реда (11) е ограничена отгоре. Понеже тази редица също е растяща, тя ще бъде сходяща. При това, ако нейната граница, т. е. сумата на реда (11), е σ, то ще имаме $\sigma \leqq S$.

Ние можем обаче да разглеждаме и реда (10) като получен от реда (11) чрез разместване на неговите членове. Тогава горните разсъждения ще ни доведат до неравенството $S \leqq \sigma$. Оттук заключаваме, че е в сила равенството $\sigma = S$. По този начин теоремата е доказана за случая на редове с неотрицателни членове.

Нека сега редът (10) е произволен абсолютно сходящ ред. Тогава ще съществуват два сходящи реда с неотрицателни членове

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{12}$$

и

$$w_1+w_2+\cdots+w_n+\cdots \tag{13}$$

такива, че $u_n=v_n-w_n$. Ако S' и S'' са съответно сумите на редовете (12) и (13), то $S=S'-S''$. Съгласно доказаното редовете

$$v_{n_1}+v_{n_2}+\ldots+v_{n_k}+\ldots \tag{14}$$

и

$$w_{n_1}+w_{n_2}+\ldots+w_{n_k}+\ldots \tag{15}$$

ще бъдат също сходящи и също ще имат суми съответно S' и S''. Оттук следва, че редът (11), явяващ се разлика на редовете (14) и (15), ще бъде сходящ и неговата сума ще бъде равна на $S'-S''=S$. Що се отнася до неговата абсолютна сходимост, тя се вижда от неравенството $|u_{n_k}| \leqq$ $\leqq v_{n_k}+w_{n_k}$ и от сходимостта на редовете (14) и (15). С това теоремата е доказана докрай.

Ще отбележим накрая, че е в сила и следната

Теорема 3. *Ако редът*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

е абсолютно сходящ, то неговата сума удовлетворява неравенството

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Доказателството на тази теорема е съвсем просто и може да бъде предоставено на читателя.

Упражнения. Посочете кои от редовете, написани по-долу, са абсолютно сходящи, кои са сходящи, но не абсолютно, и кои са разходящи.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{n^n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$.

§ 13*. Умножаване на редове

Нека са дадени два безкрайни реда

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

и

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{2}$$

Редът

$$w_1+w_2+\cdots+w_n+\cdots, \tag{3}$$

където

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1,$$

по дефиниция се нарича *ред, получен от умножаването на редовете* (1) *и* (2) *по правилото на Коши*. Както се вижда, n-тият член на реда (3) представлява сума от всички произведения от вида u_iv_j, за които $i+j=n+1$. По-подробно записан, редът (3) следователно изглежда така:

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)$$
$$+\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)+\cdots$$

Предмет на настоящия параграф е следната теорема, която в известен смисъл оправдава дадената по-горе дефиниция.

Теорема на Коши. *Ако редовете* (1) *и* (2) *са абсолютно сходящи и имат суми съответно* S' *и* S'', *то и редът* (3), *получен от тяхното умножаване, е абсолютно сходящ и сумата му е* $S'S''$.

Доказателство. По условие двата реда

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{4}$$

и

$$|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|+\cdots \tag{5}$$

са сходящи. Ето защо, ако означим n-тата частична сума на реда (4) със σ_n', а на реда (5) — със σ_n'', ще можем да намерим такова число K, че за всяко n да имаме $\sigma_n'<K$ и $\sigma_n''<K$. Да разгледаме сега реда

$$(6) \qquad |w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|+\cdots$$

Ако със σ_n означим неговата n-та частична сума, ще имаме

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|w_k|=\sum_{k=1}^{n}|u_1 v_k+u_2 v_{k-1}+\cdots+u_k v_1|$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}(|u_1||v_k|+|u_2||v_{k-1}|+\cdots+|u_k||v_1|)$$

$$\leqq(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|)(|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|)=\sigma_n'\sigma_n''<K^2.$$

Виждаме, че редицата от частичните суми на реда (6) е ограничена отгоре. Следователно тя е сходяща, значи и редът (6) е сходящ. Това пък означава, че редът (3) е абсолютно сходящ.

Остава да се занимаем с въпроса за сумата S на реда (3). Да означим с S_n' n-тата частична сума на реда (1), с S_n'' — на реда (2) и с S_n — на реда (3).

В случай че редовете (1) и (2) са с неотрицателни членове, лесно се проверяват неравенствата

$$S_n\leqq S_n' S_n''\leqq S_{2n}.$$

От тези неравенства заключаваме, че $S\leqq S'S''\leqq S$ и следователно $S=$ $=S'S''$.

В общия случай нека образуваме реда

$$(7) \qquad w_1^*+w_2^*+\cdots+w_n^*+\cdots,$$

получен чрез умножаване на редовете (4) и (5). Тъй като това са редове с неотрицателни членове, съгласно това, което току-що видяхме, сумата от реда (7) ще бъде равна на произведението на техните суми. Така че, ако σ_n^* е n-тата частична сума на реда (7), то

$$(8) \qquad \lim\sigma_n^*=\lim\sigma_n'\sigma_n'',$$

където σ_n' и σ_n'' са, както и по-рано, n-тите частични суми на редовете (4) и (5).

Да разгледаме разликата $S_n-S_n'S_n''$. Ще имаме

$$|S_n-S_n'S_n''|=|u_2 v_n+u_3(v_{n-1}+v_n)+\cdots+u_n(v_2+v_3+\cdots+v_n)|$$

$$\leqq|u_2||v_n|+|u_3|(|v_{n-1}|+|v_n|)+\cdots+|u_n|(|v_2|+|v_3|+\cdots+|v_n|)$$

$$=\sigma_n'\sigma_n''-\sigma_n^*.$$

Оттук поради (8) заключаваме, че $\lim(S_n-S_n'S_n'')=0$, т. е. че $\lim S_n=$ $=\lim S_n'S_n''$. И така $S=S'S''$. С това теоремата е доказана.

Упражнение. Покажете, че чрез умножаване на редовете

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}+\cdots$$

и

$$1+\frac{\beta}{1!}+\frac{\beta^2}{2!}+\cdots+\frac{\beta^n}{n!}+\cdots,$$

където α и β са две реални числа, стигаме до реда

$$1+\frac{\alpha+\beta}{1!}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}+\cdots$$

Докажете също, че тези редове са абсолютно сходящи.

ЧАСТ II

ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ. ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

Понятието функционална зависимост е едно от най-основните в математиката. То е и едно от онези понятия, които играят главна роля в нейните приложения. В тази глава, след като разгледаме подробно дефиницията на понятието функция и след като се спрем на някои специални категории функции, ще въведем и подробно ще изучим важното понятие граница на функция, лежащо в основата на голяма част от нашата по-нататъшна работа.

§ 14. Функции

Понятието функция с течение на вековете е изменяло своето съдържание. Съгласно съвременното схващане считаме, че ни е дадена една функция, когато на всяко число x от едно числово множество M е съпоставено с помощта на някакво правило по едно реално число $f(x)$. Множеството M се нарича *дефиниционно множество* или *дефиниционна област* на дадената функция. То най-често е един интервал или пък е съставено от два или повече интервала, но може да има и по-сложен вид.

Понякога се пише още $y=f(x)$, където x е *аргумент* или *независима променлива*, която „се мени" в M и на всяка стойност на която отговаря една функционална стойност на *зависимата променлива* y.

И така, когато се дефинира една функция, трябва да бъдат дадени: първо, множеството M, в което тя е дефинирана (т. е. нейната дефиниционна област), и, второ, правилото, според което на всяко число x от M е съпоставено някакво число $f(x)$. Много често обаче дадена функция се записва с помощта на някой математически израз, без да се споменава изрично коя е нейната дефиниционна област. В такъв случай се подразбира, че тази функция е дефинирана за всички реални числа x, за които има смисъл написаният израз.

Така например функцията

$$f(x)=x^2 \tag{1}$$

е дефинирана за всички реални числа x, т. е. нейната дефиниционна област е интервалът $(-\infty, \infty)$. Същото се отнася за функцията

$$(2)\qquad f(x)=\sin x\,;$$

тя също е дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$. Функцията пък

$$(3)\qquad f(x)=\sqrt{x}$$

е дефинирана само за неотрицателни стойности на x, т. е. нейната дефиниционна област е интервалът $[0, \infty)$.

Ако разгледаме функцията

$$(4)\qquad f(x)=\frac{1}{x},$$

то тя не е дефинирана при $x=0$. Следователно нейната дефиниционна област е съставена от двата отворени интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Дефиниционната област пък на функцията

$$(5)\qquad f(x)=\frac{x^3+5}{x^2-x-2}$$

е съставена от отворените интервали $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ и $(2, \infty)$. Тя не е дефинирана за числата -1 и 2, тъй като за тези стойности на x знаменателят на написания израз става равен на нула.

Във всички посочени примери правилото за пресмятане на функционалната стойност $f(x)$ при дадено x е записано с помощта на някакъв математически израз. То може обаче да бъде зададено и по по-сложен начин, като се използуват два или повече математически изрази или пък по някакъв друг начин. Така е например при функцията

$$(6)\qquad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqq -1, \\ 1 & \text{при } x<-1, \end{cases}$$

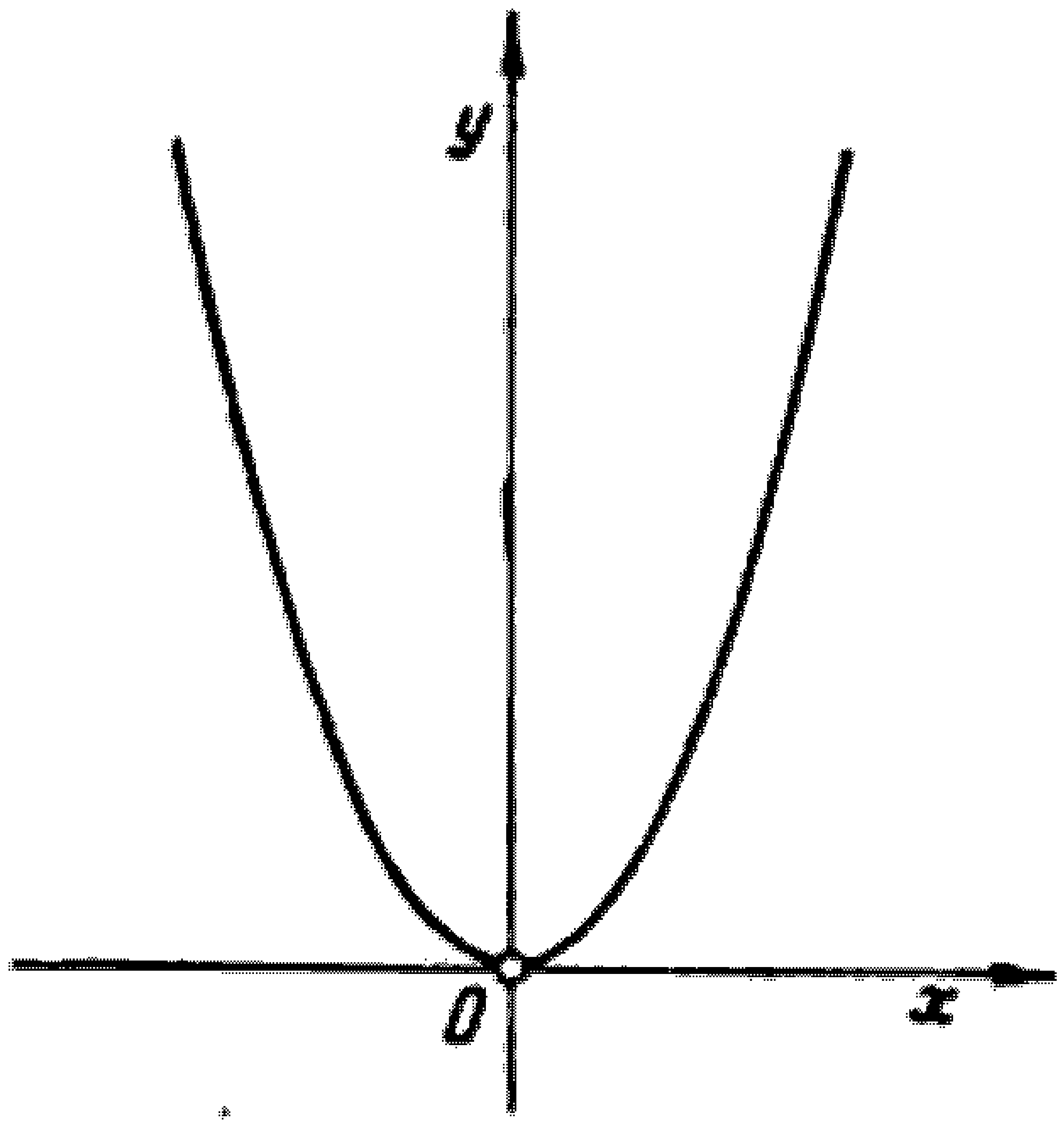
дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$, или при функцията

$$(7)\qquad f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leqq x<0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ 1 & \text{при } 0<x \leqq 1, \end{cases}$$

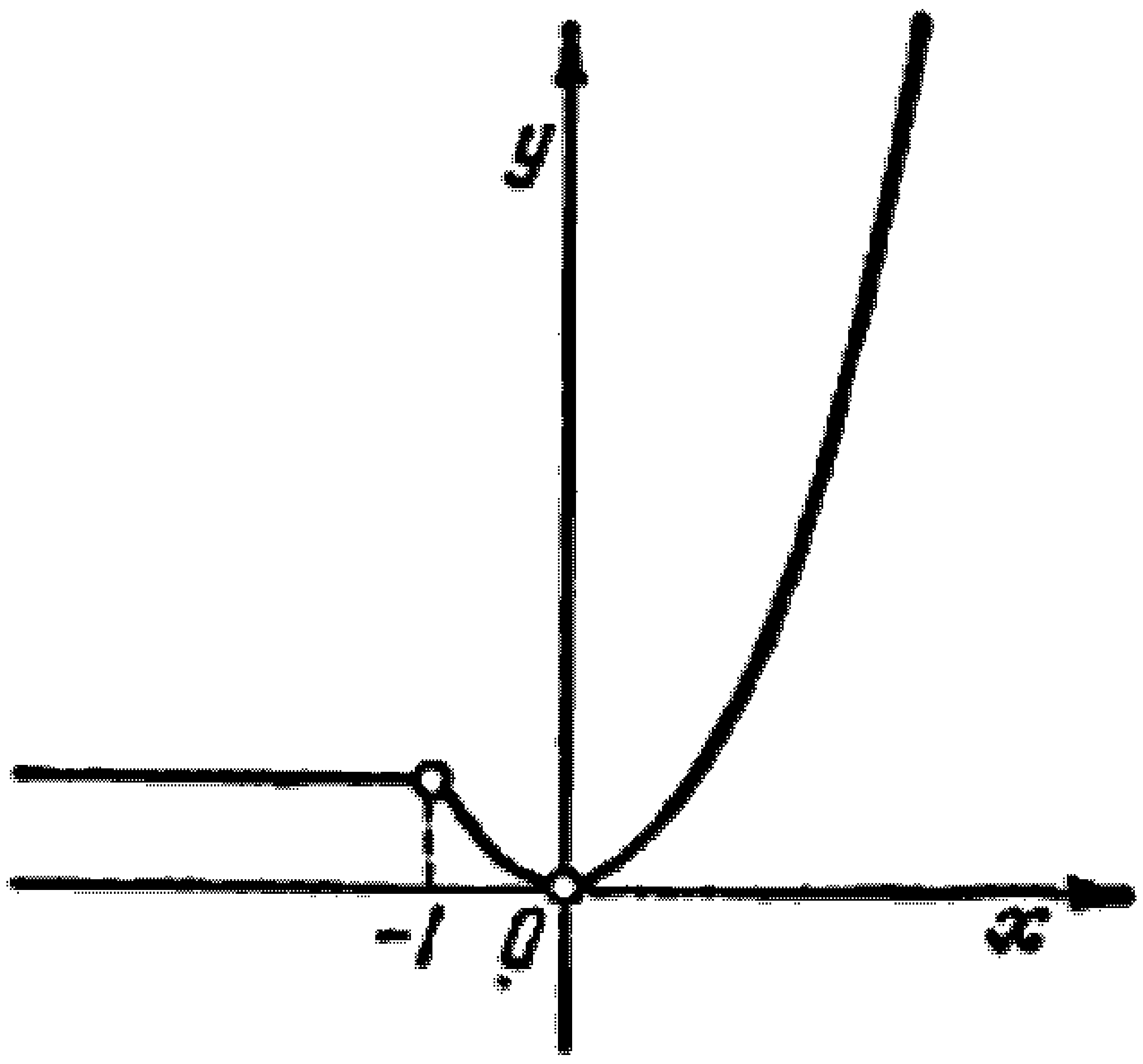
дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$.

Най-сетне правилото, с помощта на което се задава една функция, може да бъде и такова, че на всяко x от дефиниционната област M да съпоставя едно и също число C, т. е. да се записва с равенството $f(x)=C$ за всяко x от M. Такава функция се нарича константа.

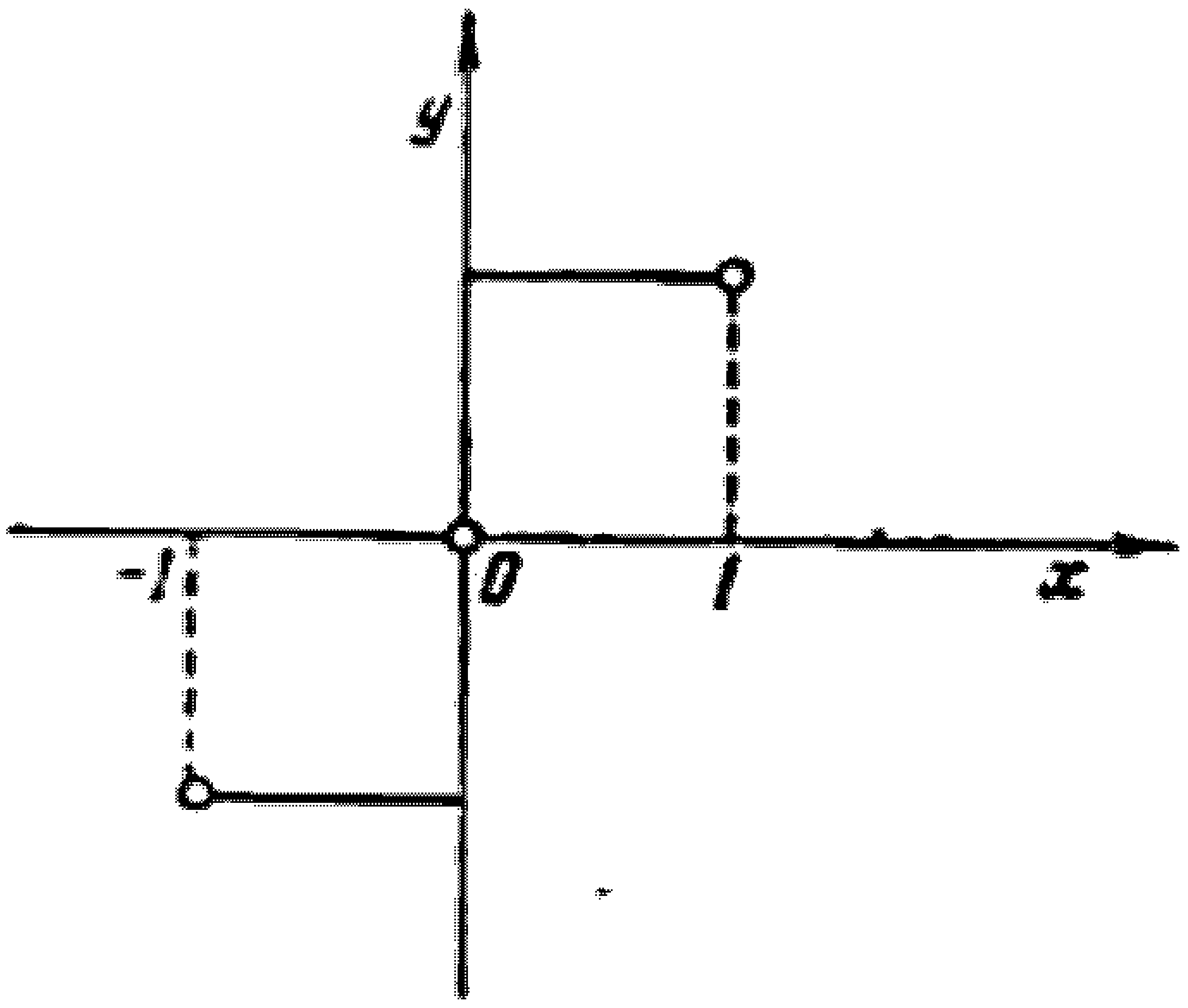
Понякога е особено удобно т. нар. графично представяне на функциите, при което дадената функция се изобразява с помощта на крива, лежаща в една равнина. (Тук думата крива трябва да се схваща в достатъчно широк смисъл.) Това изобразяване става по следния начин: Нека е дадена една функция $f(x)$ с дефиниционна област M. Да разгледаме една равнина с правоъгълна координатна система Oxy в нея. На всяко число x от M можем да съпоставим една точка от равнината, именно точката P с абсциса x и ордината $y=f(x)$. Когато x описва множеството M, точката P ще опише в равнината друго множество (една „крива“), което ние наричаме графика на дадената функция. На черт. 3 е показана графиката на функцията $f(x)=x^2$, на черт. 4 — графиката на функцията, дадена с равенството (6), а на черт. 5 — графиката на функцията, дефинирана с равенството (7). (По-точно на чертежи 3 и 4 са построени само части от съответните графики, тъй като самите графики се простират в същност до безкрайност.)



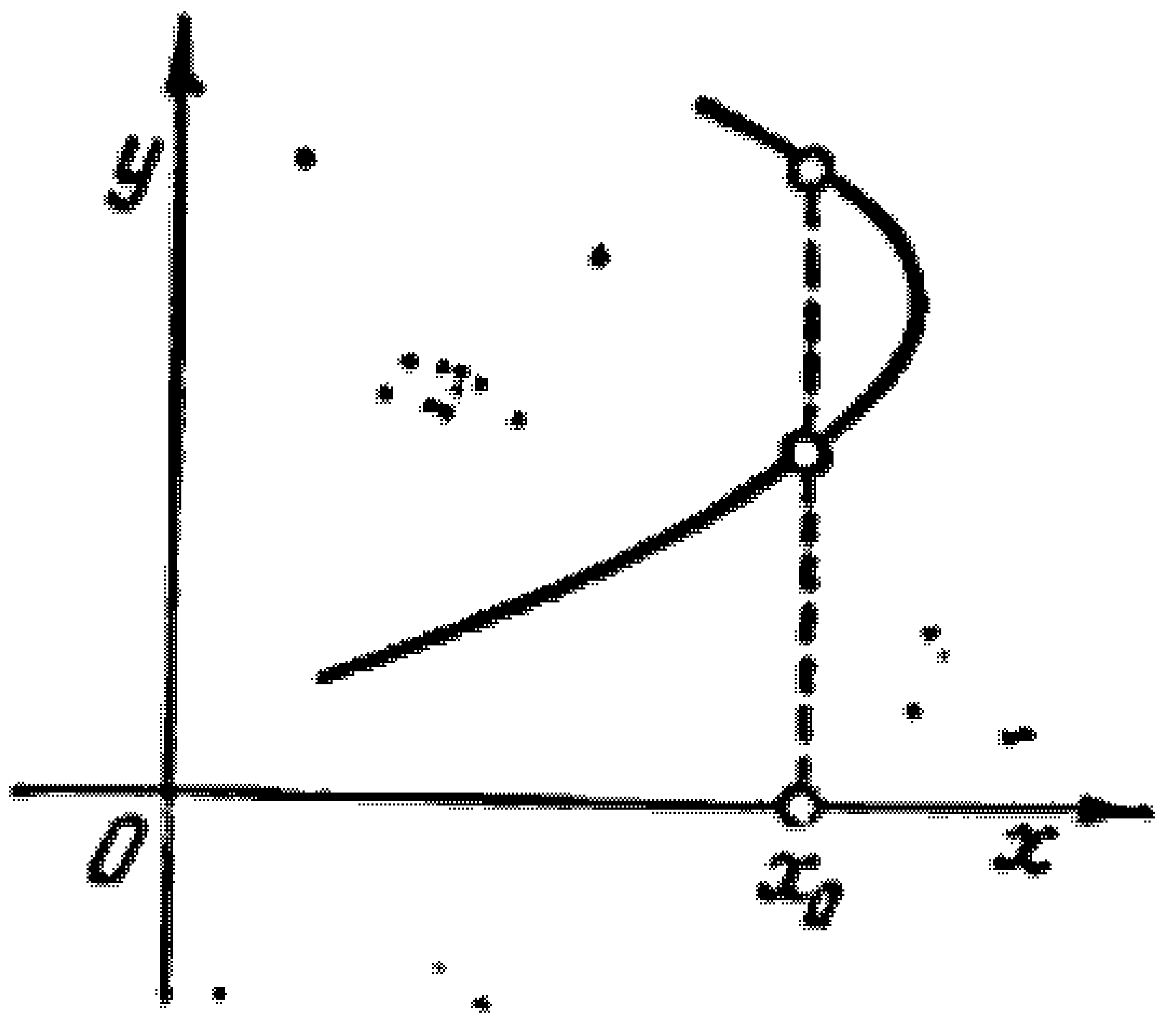
Черт. 3



Черт. 4



Черт. 5



Черт. 6

Нека отбележим, че не всяка линия в равнината може да се разглежда като графика на някоя функция. Така например линията, която е показана на черт. 6, не е графика на никаква функция, тъй като евентуалната функция, която тя би представяла, би съпоставяла например на точката x_0 две различни функционални стойности — нещо, което противоречи на самата дефиниция на понятието функция. За да бъде една линия графика на някаква функция, необходимо е тя да притежава следното свойство: да не съдържа различни точки с еднакви абсциси. Това свойство може да се изкаже още и така: ако една права, успоредна на оста Oy, пресича дадената линия, то тя я пресича само в една точка. Лесно е впрочем да се види, че това свойство е не само необходимо, но и достатъчно, т. е. че всяка линия, притежаваща това свойство, се явява графика на някаква функция.

§ 15. Ограничени функции. Монотонни функции

Казваме, че една функция $f(x)$, дефинирана в някакво множество M, е ограничена отгоре, ако множеството от нейните функционални стойности, разглеждано като множество от реални числа, е ограничено отгоре. Всяка горна граница на това множество се нарича горна граница на дадената функция, а неговата точна горна граница — точна горна граница на функцията. Аналогично се въвежда понятието функция, ограничена отдолу, както и понятието долна граница и точна долна граница на функция. Когато една функция е ограничена както отгоре, така и отдолу, ние я наричаме накратко ограничена.

И така една функция $f(x)$ с дефиниционна област M е ограничена, когато съществуват такива числа A и B, че за всяко x от M да са изпълнени неравенствата $A \leqq f(x) \leqq B$.

Всяка функция, която не е ограничена, се нарича неограничена.

Ето някои примери. Функцията $f(x) = \sin x$, дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$, е ограничена, тъй като $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ за всяко x. Функцията пък $f(x) = x^2$, дефинирана в същата област, е неограничена (по-точно тя не е ограничена отгоре). Да отбележим впрочем, че функция, която е неограничена в една област, може да се окаже ограничена, когато я разгледаме в някоя по-малка област. Така функцията $f(x) = x^2$, която е неограничена в интервала $(-\infty, \infty)$, е ограничена например в интервала $[0, 3]$ — числото 0 е нейна долна граница, а числото 9 — нейна горна граница в този интервал.

Една функция $f(x)$ се нарича растяща в дадена област M, ако при $x_1 < x_2$, където x_1 и x_2 са две числа от M, имаме винаги $f(x_1) \leqq f(x_2)$. Когато пък от неравенството $x_1 < x_2$ следва строгото неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, функцията се нарича строго растяща в M.

Аналогично една функция $f(x)$ се нарича намаляваща в M, ако от $x_1 \in M$, $x_2 \in M$ и $x_1 < x_2$ следва, че $f(x_1) \geqq f(x_2)$, и съответно строго намаляваща, когато от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) > f(x_2)$.

Растящите и намаляващите функции се наричат с общото име монотонни функции.

Примери. Покажете, че функцията $f(x)=x^2$ е строго растяща в интервала $[0, \infty)$, а функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е строго намаляваща в интервала $(0, \infty)$.

Лесно е да се види, че степенната функция $f(x)=x^\alpha$, дефинирана в интервала $(0, \infty)$, е строго растяща в този интервал, когато $\alpha>0$. Наистина нека $0<x_1<x_2$. Тогава от неравенството $\frac{x_2}{x_1}>1$ следва неравенството $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha>1$, откъдето $x_1^\alpha<x_2^\alpha$.

Аналогично се убеждаваме, че функцията $f(x)=x^\alpha$ е строго намаляваща в интервала $(0, \infty)$ при $\alpha<0$.

Също така лесно се проверява, че показателната функция $f(x)=a^x$ при $a>1$ е строго растяща в интервала $(-\infty, \infty)$. Действително, ако $x_1<x_2$, то от неравенствата $a>1$ и $x_2-x_1>0$ следва $a^{x_2-x_1}>1$. Оттук получаваме $a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$, т. е. $a^{x_1}<a^{x_2}$.

Аналогично се вижда, че функцията $f(x)=a^x$ при $0<a<1$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, \infty)$.

Функцията $f(x)=\sin x$, където ъгълът x е измерен в радиани, е строго растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Наистина, ако

$-\frac{\pi}{2}\leqq x_1<x_2\leqq\frac{\pi}{2}$, лесно се вижда, че

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Но тогава от равенството

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$$

заключаваме, че $\sin x_2-\sin x_1>0$ или $\sin x_1<\sin x_2$.

Функцията $f(x)=\cos x$ е строго намаляваща, когато я разгледаме в интервала $[0, \pi]$. Наистина от неравенствата $0\leqq x_1<x_2\leqq\pi$ се получават неравенствата

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi \quad \text{и} \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\pi.$$

Тогава

$$\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}<0,$$

т. е. $\cos x_2<\cos x_1$.

Също така лесно се вижда, че функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ е строго растяща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Именно, ако $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, то $0<x_2-x_1<\pi$ и тогава ще имаме

$$\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2\cos x_1-\sin x_1\cos x_2}{\cos x_1\cos x_2}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}>0,$$

откъдето $\operatorname{tg} x_1<\operatorname{tg} x_2$.

Най-сетне функцията $f(x)=\operatorname{cotg} x$ пък е строго намаляваща, когато я разглеждаме в интервала $(0, \pi)$. Това се вижда от равенствата

$$\operatorname{cotg} x_2-\operatorname{cotg} x_1=\frac{\cos x_2}{\sin x_2}-\frac{\cos x_1}{\sin x_1}=\frac{\cos x_2 \sin x_1-\cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}=-\frac{\sin (x_2-x_1)}{\sin x_1 \sin x_2}.$$

Ясно е, че при $0<x_1<x_2<\pi$ ще имаме $0<x_2-x_1<\pi$, откъдето $\operatorname{cotg} x_2-\operatorname{cotg} x_1<0$, т. е. $\operatorname{cotg} x_2<\operatorname{cotg} x_1$.

Упражнения. 1. Покажете, че функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е неограничена в интервала $(0, 1)$.

2. Посочете една долна и една горна граница на функцията $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+2}$ в интервала $[1, 3]$.

3. Монотонна ли е функцията $f(x)=\sin x$ в интервала $[0, \pi]$?

4. Покажете, че функцията $f(x)=\sin^2 x$ е строго растяща в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$

§ 16. Обратни функции

Една функция $f(x)$, дефинирана в някое множество M, се нарича обратима, ако за различни стойности на x от M приема различни стойности, т. е. когато от $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$. Това условие, разбира се, не винаги е изпълнено. Ясно е обаче, че то ще бъде удовлетворено, ако функцията $f(x)$ е строго растяща или пък строго намаляваща в множеството M. И така всяка строго растяща, както и всяка строго намаляваща функция, е обратима.

Нека $f(x)$ е една обратима функция с дефиниционна област M и нека N е множеството от нейните функционални стойности. Да си вземем едно число y_0 от N. Съществува, и то едно единствено число x_0 от M, за което $f(x_0)=y_0$. И наистина, ако допуснем, че има и друго число x_1 от M, различно от x_0, за което $f(x_1)=y_0$, ще получим $f(x_0)=f(x_1)$, което е невъзможно. И така на всяко число y от N можем да съпоставим по едно число x от M, удовлетворяващо равенството $f(x)=y$. Това число x зависи, разбира се, от y и поради това можем да го означим с $\varphi(y)$. По този начин дефинираме в N една функция. Тази функция се нарича обратна на функцията $f(x)$. Множеството N от функционалните стойности на $f(x)$ служи за дефиниционна област на обратната функция $\varphi(y)$, докато пък дефиниционната област M на $f(x)$ се явява множество от функционалните стойности за $\varphi(y)$.

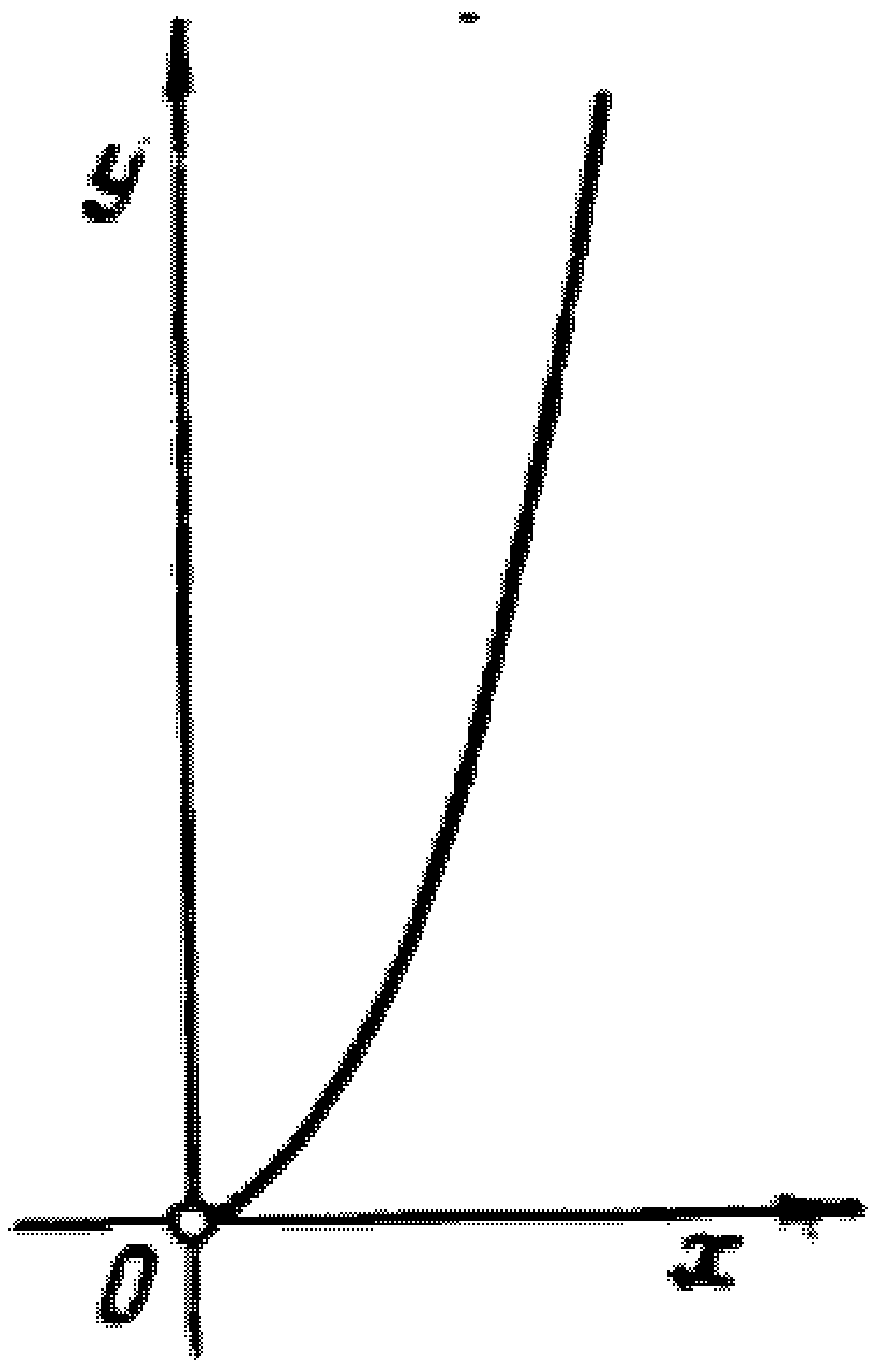
От дефиницията за обратна функция е ясно, че за всяко y от N е изпълнено равенството

$$f[\varphi(y)]=y,$$

т. е. числото $\varphi(y)$ се явява решение на уравнението $f(x)=y$ относно x. От друга страна, ако x принадлежи на M и ако $f(x)=y$, то ще имаме $\varphi(y)=x$, т. е. за всяко x от M ще бъде изпълнено равенството

$$\varphi[f(x)]=x.$$

Пример. Да разгледаме функцията $f(x)=x^2$ в интервала [0, ∞). Тъй като тя е строго растяща в този интервал, тя е и обратима в него. Коя е нейната обратна функция? Лесно е да се види, че това е функцията $\varphi(y)=\sqrt{y}$, дефинирана в областта [0, ∞). И наистина множеството N от функционалните стойности на функцията $f(x)=x^2$ е интервалът [0, ∞) и за всяко число y от този интервал имаме $(\sqrt{y})^2=y$.



Черт. 7

Черт. 8

Ясно е, че ако функцията $f(x)$ е обратима и $\varphi(y)$ е нейната обратна функция, то $\varphi(y)$ от своя страна е също обратима и нейната обратна е функцията $f(x)$.

Както вече отбелязахме, всяка строго растяща функция $f(x)$ е обратима. Лесно е да се види при това, че нейната обратна функция $\varphi(y)$ е също строго растяща. Наистина нека $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ и нека $y_1<y_2$. Тогава $\varphi(y_1)=x_1$ и $\varphi(y_2)=x_2$. Ако допуснем, че $x_1\geqq x_2$, то бихме получили $f(x_1)\geqq f(x_2)$, т. е. $y_1\geqq y_2$, което не е вярно. Следователно $x_1<x_2$, т. е. $\varphi(y_1)<\varphi(y_2)$. И така функцията $\varphi(y)$ е строго растяща.

Аналогично се установява, че обратната функция на една строго намаляваща функция е също строго намаляваща.

Да отбележим още, че ако $\varphi(y)$ е обратната функция на дадена функция $f(x)$, то очевидно графиката на $\varphi(y)$ ще получим, като вземем графиката на $f(x)$ и разменим ролите на осите Ox и Oy. (Това ще постигнем, като завъртим координатната система Oxy на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ в посока, противна на тая на часовниковата стрелка, и вземем огледален образ на графиката относно ординатната ос.) На черт. 7 е показана графиката на функцията $f(x)=x^2$ при $x\geqq 0$, а на черт. 8 — графиката на нейната обратна функция $\varphi(x)=\sqrt{x}$.

В § 15 видяхме, че функцията $f(x)=a^x$ е строго растяща при $a>1$ и строго намаляваща при $0<a<1$. Следователно винаги когато $a>0$ и $a\neq 1$, функцията a^x е обратима. Нейната обратна функция е функцията $\varphi(x)=\log_a x$. Тя очевидно е дефинирана само в интервала (0, ∞), тъй като функцията $f(x)=a^x$ има, както знаем, само положителни стойности. От свойствата на обратните функции получаваме равенствата

$$a^{\log_a x}=x \text{ при } x>0,$$

$$\log_a a^x=x \text{ за всяко } x.$$

Освен това непосредствено получаваме и заключението, че функцията $\varphi(x)=\log_a x$ е строго растяща, когато $a>1$, и строго намаляваща, когато $0<a<1$.

Видяхме също, че функцията $f(x)=\sin x$, където ъгълът x е измерен в радиани, е строго растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следователно тя е обратима в този интервал. Нейната обратна функция се нарича „аркус синус от x" и се бележи така: $\arcsin x$. Като си спомним дефиницията на понятието обратна функция, можем да кажем: $\arcsin x$ е онзи ъгъл (той е единствен), който, измерен в радиани, се намира в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и който има синус, равен на x. (Както знаем от геометрията, такъв ъгъл сигурно съществува при $|x|\leqq 1$.) Като вземаме пред вид свойствата на обратните функции, идваме до следните заключения за функцията $\arcsin x$:

1) тя е дефинирана в интервала $[-1, 1]$;

2) нейните функционални стойности се намират в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

3) тя е строго растяща;

4) валидни са равенствата

$$\sin(\arcsin x)=x \text{ при } -1\leqq x\leqq 1,$$

$$\arcsin(\sin x)=x \text{ при } -\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Функцията $f(x)=\cos x$, както видяхме, е строго намаляваща и следователно обратима в интервала $[0, \pi]$. Нейната обратна функция се нарича „аркус косинус от x" и се записва така: $\arccos x$. Следователно $\arccos x$ е ъгъл, който, измерен в радиани, се намира в интервала $[0, \pi]$ и който има косинус, равен на x. (Такъв ъгъл сигурно съществува при $|x|\leqq 1$ и той е единствен.) Ясно е, че:

1) функцията $\arccos x$ е дефинирана в интервала $[-1, 1]$;
2) нейните функционални стойности се намират в интервала $[0, \pi]$;
3) тя е строго намаляваща;
4) валидни са равенствата:

$$\cos(\arccos x)=x \text{ при } -1\leqq x\leqq 1,$$

$$\arccos(\cos x)=x \text{ при } 0\leqq x\leqq\pi.$$

Аналогично се въвежда и функцията $\operatorname{arc\,tg} x$, обратна на функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а също така и функцията $\operatorname{arc\,cotg} x$, обратна на функцията $\operatorname{cotg} x$ в интервала $(0, \pi)$. При това се вижда, че:

1) функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$;

2) нейните функционални стойности се намират в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) тя е строго растяща;

4) изпълнени са равенствата

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \text{ за всяко } x,$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

За функцията пък $\operatorname{arc\,cotg} x$ имаме:

1) тя е дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$;

2) функционалните ѝ стойности се намират в интервала $(0, \pi)$;

3) тя е строго намаляваща;

4) валидни са равенствата

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,cotg} x) = x \text{ за всяко } x,$$

$$\operatorname{arc\,cotg}(\operatorname{cotg} x) = x \text{ при } 0 < x < \pi.$$

Упражнения. 1. Обратима ли е функцията $f(x) = \frac{1}{x}$, дефинирана при $x \neq 0$, и ако е обратима, то коя е нейната обратна функция?

2. Пресметнете в (радиани): $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin 1$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos 1$, $\arccos 0$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,tg}(-1)$, $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$, $\operatorname{arc\,tg} 0$, $\operatorname{arc\,cotg} 0$, $\operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\arcsin(\sin\pi)$, $\arccos(\cos 2\pi)$, $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg} 3\frac{\pi}{4}\right)$, $\arccos\left(\cos 3\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,cotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,cotg}\left(\operatorname{cotg} 3\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Да се изразят посредством x:

а) $\sin(\arccos x)$;

Решение. а) Полагам: $\arccos x = \alpha$. Тогава $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ и $\cos\alpha = x$. Имаме $\sin(\arccos x) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - x^2}$.

б) $\sin(2\arccos x)$;

в) $\cos(2\arcsin x)$;

г) $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)$;

д) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)$;

е) $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)$;

ж) $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x)$.

4. Да се докаже тъждеството

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \text{ при } -1 < x < 1.$$

Решение. Полагаме $\operatorname{arc\,sin} x = \alpha$. Тогава $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = x$. От $x \neq 1, -1$, следва $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Имаме $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} \alpha) = \alpha = \operatorname{arc\,sin} x$.

5. Докажете тъждеството

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{при всяко } x.$$

6. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \geq 0 \\ -2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Полагаме $\operatorname{arc\,tg} x = \alpha$. Тогава $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha = x$.

а) Ако $x \geq 0$, то $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$ и $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq 2\alpha < \pi$. Тогава имаме

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{arc\,cos} (\cos 2\alpha) = 2\alpha.$$

б) Ако $x \leq 0$, то $\operatorname{tg} \alpha \leq 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$, $0 \leq -2\alpha < \pi$. Тогава

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \operatorname{arc\,cos} (\cos 2\alpha) = \operatorname{arc\,cos} (\cos (-2\alpha)) = -2\alpha.$$

7. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \geq 1 \\ 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$$

8. Докажете равенството

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

9. Докажете, че ако $a > 0$, $a \neq 1$, $b < 0, b \neq 1$, то

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

10. Решете уравнението

$$\log_2 x \log_2 2x = \log_2 16x.$$

§ 17. Елементарни функции

Някои от функциите, които често срещаме, са добре изучени отдавна и поради това е прието да се отделят в категорията на т. нар. **елементарни функции**. Тук спадат преди всичко **рационалните функции**.

Към класа на рационалните функции се причисляват най-напред всички функции-константи и функцията $f(x)=x$, а след това всички функции, които могат да се получат от тези два вида функции (константите и функцията x) посредством неколкократно прилагане на действията събиране, изваждане и умножение — това са **целите рационални функции**, или **полиномите**. Лесно е да се съобрази, че всеки полином има вида

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Числата $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ се наричат коефициенти на дадения полином (a_0 се нарича още и свободен член). Ако $a_n \neq 0$, то полиномът е от n-та степен.

Константите се разглеждат като частен случай от полиномите, а именно като полиноми от нулева степен. Основание за това ни дава обстоятелството, че всяко число C може да се напише още и във вида Cx^0 (където x е произволно число, различно от 0).

Най-сетне ще получим всички рационални функции, ако тръгвайки от функцията $f(x)=x$ и константите, позволим да бъдат извършени не само действията събиране, изваждане и умножение, но и действието деление. Ясно е тогава, че всяка рационална функция има вида

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}, \tag{1}$$

т. е. тя е частно на два полинома. Когато полиномът, който е в знаменателя на тази дроб, е най-малко от първа степен, т. е. когато той не е константа, функцията (1) се нарича **дробна рационална функция**.

Ако пък, тръгвайки отново от функцията $f(x)=x$ и константите, допуснем освен четирите аритметични действия (събиране, изваждане, умножение и деление) да бъде извършено и действието коренуване (или, което е все едно, действието повдигане на дробен степенен показател), ще получим фамилията на **ирационалните функции**. Ето някои примери за ирационални функции:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{при} \quad x>0;$$

$$f(x)=2x^2+1+5\sqrt[3]{x+1} \quad \text{при} \quad x>-1;$$

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{2+x^2} \quad \text{при} \quad x>0;$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \quad \text{при} \quad x<-1 \quad \text{и} \quad x\geqq 1.$$

Ирационалните функции също се причисляват към категорията на елементарните функции. Рационалните и ирационалните функции представляват частни случаи от т. нар. **алгебрични функции**[*] (те не изчерпват обаче класа на алгебричните функции).

Към категорията на елементарните функции се причисляват също и следните функции:

показателната (експоненциалната) функция a^x, където $a>0$ и $a \neq 1$, която е дефинирана за всяко x;

нейната обратна — логаритмичната функция $\log_a x$, където $a>0$, $a \neq 1$, дефинирана при $x>0$;

тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$;

техните обратни функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,cotg} x$.

Както ще видим по-нататък, всички елементарни функции притежават някои твърде „хубави" свойства, които ги правят удобни за работа.

§ 18. Граници на функции

Нека разгледаме функцията $f(x)=x \sin \frac{1}{x}$. Тя не е дефинирана при $x=0$. Да си зададем обаче въпроса, какво става с нейните функционални стойности, когато даваме на x значения, все по-близки и по-близки до числото 0. Тъй като произведението $x \sin \frac{1}{x}$ се състои от два множителя, първият от които е x, а вторият получава стойности между -1 и 1, ясно е, че за всяко x (което е различно от 0) функционалната стойност $f(x)$ ще се намира между $-x$ и x. Геометрически това означава, че графиката на тази функция ще се намира между правите с уравнения $y=-x$ и $y=x$ (по-точно в ъглите, образувани от тези две прави и съдържащи оста Ox — вж. черт. 9). Ясно е тогава, че като даваме на x стойности, все по-близки до нула, на тях ще отговарят такива точки от графиката, които се приближават все повече до началото на координатната система. Графиката като че ли „се стреми" към тази точка. Функционалните стойности $f(x)$ пък „се стремят" към числото 0. Ние ще дадем на тези разсъждения строга форма, като въведем понятието граница на функция.

Преди всичко нека обърнем внимание на обстоятелството, че макар точката $x_0=0$ и да не принадлежи към дефиниционната област на разглежданата функция $f(x)=x \sin \frac{1}{x}$ (която се състои от двата отворени интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$), ние можем да оставим x да се приближава

---

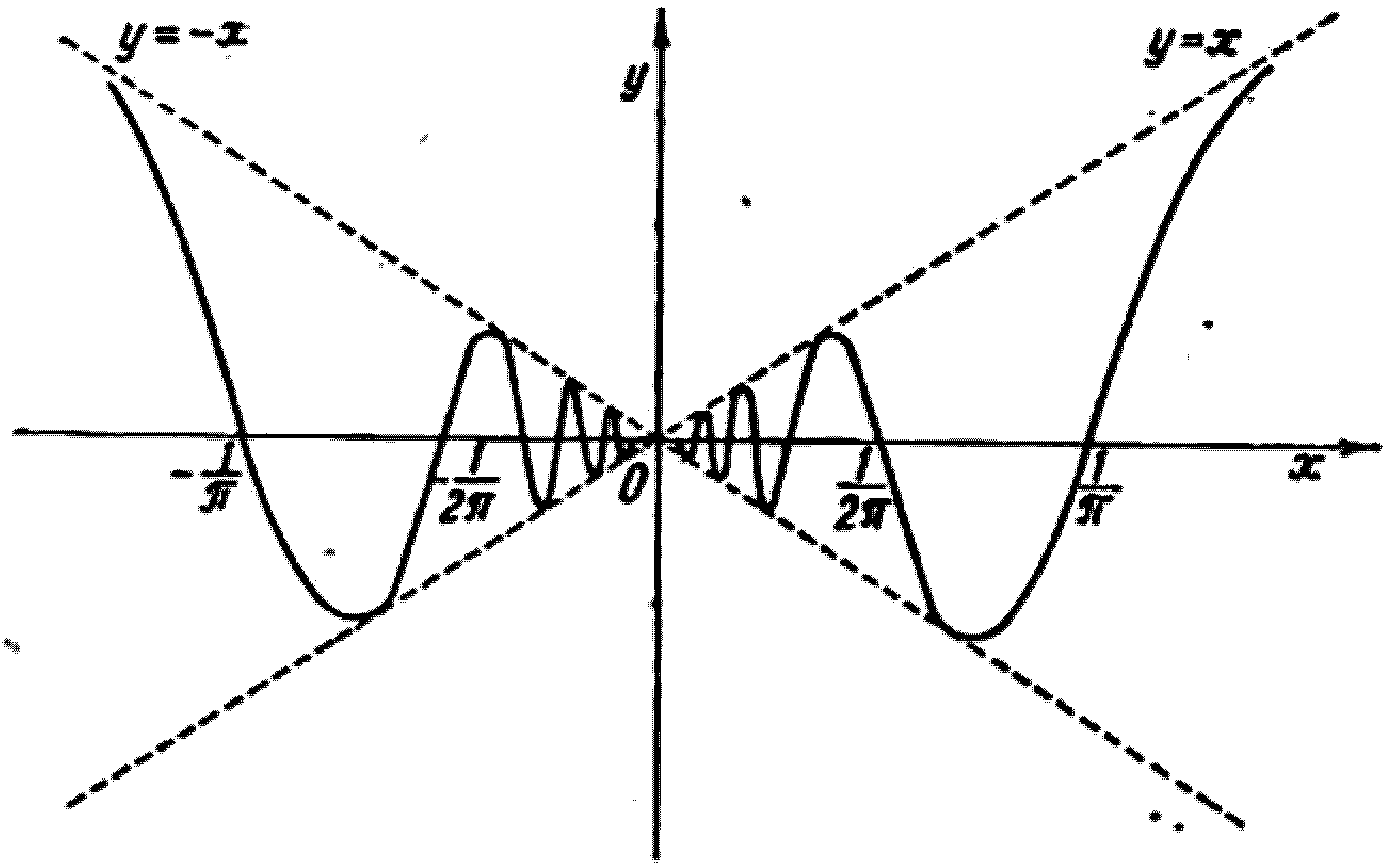
[*] Алгебрична се нарича такава функция $y=f(x)$, която удовлетворява някое уравнение относно y от вида

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+P_0(x)=0,$$

където $P_n(x)$, $P_{n-1}(x), \ldots, P_0(x)$ са полиноми на x с цели коефициенти, т. е. такава функция, която, поставена на мястото на y в това уравнение, го превръща в тъждество.

Всяка функция, която не е алгебрична, се нарича **трансцендентна**.

към тази точка. Това е така, тъй като точката $x_0=0$ има свойството, състоящо се, казано накратко и немного точно, в това, че съществуват точки от дефиниционната област на $f(x)$, намиращи се произволно близко до x_0. Ние изразяваме това свойство на точката x_0, като казваме, че тя се явява точка на сгъстяване за дефиниционната област на $f(x)$. Точното съдържание на това понятие се дава със следната



Черт. 9

Дефиниция. *Едно число x_0 ще наричаме точка на сгъстяване за дадено числово множество M, когато във всяка негова околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ се съдържат точки от M, различни от x_0.*

Да отбележим, че самата точка x_0 може да принадлежи, а може и да не принадлежи на множеството M. Така например, ако множеството M е отвореният интервал (a, b), то точката a, също както и точката b, ще бъде точка на сгъстяване за това множество, въпреки че тя не се съдържа в него. След тези предварителни бележки ще дадем следната

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е една функция с дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че числото l е граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към x_0 (или че $f(x)$ клони към l, когато x клони към x_0) и ще записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l,$$

ако при всеки избор на положителното число ε *може да се намери такова число* $\delta > 0$*, че от условията* $x \in M$, $x \neq x_0$ *и* $|x - x_0| < \delta$ *да следва неравенството*

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Тъй като числото ε е произволно, дадената дефиниция изисква, грубо казано, разликата между стойностите на функцията $f(x)$ и числото l да може да стане колкото искаме малка (по абсолютна стойност), стига да вземаме такива значения на x от M, които се намират достатъчно близко до x_0 — колко близко, това именно се определя от числото δ. (Разбира се, δ зависи от ε.)

Ясно е при това, че числото δ, за което се говори в тази дефиниция, когато то съществува при дадено $\varepsilon > 0$, не е единствено. Ако намерим едно такова число δ, всяко друго положително и по-малко от него число ще има същото свойство.

Възниква веднага въпросът, възможно ли е две различни числа l_1 и l_2 да удовлетворяват разглежданата дефиниция, т. е. да бъдат и двете граници на $f(x)$ при x, клонящо към x_0. Да допуснем, че това е възможно. Тогава, вземайки $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$, ще намерим такива положителни числа δ_1 и δ_2, че при $x \in M$ и $x \neq x_0$ от неравенството $|x - x_0| < \delta_1$ да следва неравенството

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon,$$

а от неравенството $|x - x_0| < \delta_2$ да следва неравенството

$$|f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

Тогава, ако $x \neq x_0$ е такава точка от M, за която имаме едновременно $|x - x_0| < \delta_1$ и $|x - x_0| < \delta_2$, то ще имаме

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leqq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|.$$

Получаваме противоречивото неравенство $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$, което показва, че нашето допускане за съществуване на две различни граници на $f(x)$ е било погрешно.

И така една функция $f(x)$ не може да притежава две различни граници при x, клонящо към x_0 (където x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област на $f(x)$) — тя или клони към една единствена граница l, или въобще не клони към никаква граница.

Сега можем да покажем, че наистина функцията $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, дефинирана за всяко $x \neq 0$, която разгледахме преди, клони към 0, когато x клони към 0, според дадената от нас дефиниция. (Очевидно точката $x_0 = 0$, макар и непринадлежаща на дефиниционната област на разглежданата функция, се явява точка на сгъстяване за тази област.) За да установим, че $\lim\limits_{x \to x_0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$, трябва да покажем, че ако $\varepsilon > 0$, то съществува такова положително число δ, че от неравенството $|x| < \delta$ да следва при $x \neq 0$ неравенството $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Но целта ни ще бъде постигната, ако вземем $\delta = \varepsilon$, защото при $|x| < \varepsilon$ имаме

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqq |x| < \varepsilon.$$

Да вземем друг пример — да разгледаме функцията $f(x) = \cos x$ и да покажем, че тя притежава граница, когато x клони към 0, и че тази граница е 1. Наистина да вземем едно произволно положително число ε. Веригата от равенства и неравенства*

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left|\sin \frac{x}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x}{2}\right| \leqq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x|}{2} = |x|$$

ни показва, че ако изберем $\delta = \varepsilon$, то при $|x| < \delta$, т. е. при $|x| < \varepsilon$, ще бъде изпълнено неравенството $|\cos x - 1| < \varepsilon$. С това е доказано, че

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

В току-що разгледания пример точката $x_0 = 0$, към която клонеше x, принадлежи на дефиниционната област на функцията $f(x) = \cos x$ (тази дефиниционна област е множеството на всички реални числа). Нещо повече, читателят навярно е забелязал, че числото 1, явяващо се граница на тази функция при x, клонящо към 0, не е нищо друго освен стойността на функцията $\cos x$ при $x = 0$. До същото число бихме достигнали, ако вместо да търсим тази граница, просто бяхме заместили x с 0 в израза $\cos x$. Нека веднага да отбележим обаче, че нещата не винаги са така прости — не винаги границата на една функция, когато x клони към някоя точка x_0 от нейната дефиниционна област, може да се получи по такъв лесен начин. Така например, ако вземем функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

дефинирана за всяко x, виждаме, че $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ докато, от друга страна имаме $f(0) = 1$. Следователно $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

Нека към тези първоначални бележки относно понятието граница на функция да добавим още и следното: Ако функцията $f(x)$ е константа, т. е. ако имаме $f(x) = C$ за всяко x (където C е някакво число), то веднага се вижда, че за всяка точка x_0 ще бъде изпълнено $\lim_{x \to x_0} f(x) = C$, т. е. $\lim_{x \to x_0} C = C$.

По-нататък ще ни бъдат много полезни следните две теореми:

Теорема 1. *Нека $f(x)$ е дадена функция с дефиниционна област M,*

---

* Тук използуваме познатото ни неравенство $\sin \alpha \leqq \alpha$, валидно за всяко α, когато ъгълът α е измерен в радиани.

нека x_0 *е точка на сгъстяване за* M *и нека* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. *Ако редицата*

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

се състои от числа, принадлежащи на M *и различни от* x_0, *и ако тя клони към* x_0, *то редицата*

$$(2) \qquad f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\ \dots$$

е също сходяща и клони към l.

Доказателство. За да докажем, че $f(x_n)\to l$, трябва, като изберем произволно положително число ε, да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $|f(x_n)-l|<\varepsilon$. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, ние можем да намерим най-напред някакво положително число δ, за което при $x\in M$ и $x\neq x_0$ от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$. От друга страна, от сходимостта на редицата (1) пък следва, че съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $|x_n-x_0|<\delta$. Тогава е ясно, че при $n>\nu$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|f(x_n)-l|<\varepsilon,$$

т. е. намереното число ν има желаното свойство. С това е установено, че редицата (2) клони към l.

Валидна е също така следната теорема, която в известен смисъл е обратна на току-що доказаната.

Теорема 2. *Нека* $f(x)$ *е функция с дефиниционна област* M *и нека* x_0 *е точка на сгъстяване за* M. *Ако за всяка редица*

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots,$$

която се състои от числа, принадлежащи на M *и различни от* x_0, *и която клони към* x_0, *съответната редица от функционални стойности*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\ \dots$$

е сходяща и клони към l, *то границата* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *съществува и е равна на* l.

Доказателство. Да вземем произволно положително число ε. Трябва да покажем, че съществува положително число δ, такова, че при $x\in M$ и $x\neq x_0$ от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$. Да допуснем, че такова число δ не съществува, т. е. че никое положително число не притежава това свойство. Няма да притежава това свойство тогава и числото 1 и следователно ще съществува поне едно число x_1 от M, различно от x_0, което удовлетворява неравенството $|x_1-x_0|<1$, но за което $|f(x_1)-l|>\varepsilon$. Аналогично ще съществува някое x_2 от M, $x_2\neq x_0$, за което имаме едновременно $|x_2-x_0|<\frac{1}{2}$ и $|f(x_2)-l|\geqq\varepsilon$. Изобщо за всяко n (където n е цяло положително число) ще съществува такова x_n от M, удовлетворяващо неравенствата $x_n\neq x_0$ и $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, за което $|f(x_n)-l|\geqq\varepsilon$. Да разгледаме сега редицата

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

От неравенствата $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ е ясно, че тя клони към x_0. Тъй като освен това имаме $x_n \in M$ и $x_n \neq x_0$ за всяко n, то от условията на теоремата следва, че редицата

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

клони към l. Но това е невъзможно, тъй като неравенството $|f(x_n) - l| \geqq \varepsilon$, изпълнено за всички членове на тази редица, противоречи на дефиницията за граница на редица. И така направеното допускане, че не съществува число δ с желаното свойство, е било погрешно. С това теоремата е доказана.

Тези две теореми ни показват в същност, че за понятието граница на функция можем да дадем още и следната

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница, равна на l, при x, клонящо към x_0, когато при всеки избор на редицата*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

състояща се от точки, принадлежащи на M и различни от x_0, която клони към x_0, съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

е сходяща и клони към l.

Ясно е от изложеното, че тази нова дефиниция на понятието граница на функция, която ще наричаме дефиниция на Хайне, е еквивалентна на първоначалната дефиниция, която ще наричаме дефиниция на Коши.*

Като използуваме дефиницията на Хайне, лесно можем сега да посочим пример за функция, която не притежава граница. Да разгледаме функцията $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (черт. 10) и да се запитаме има ли тя граница, когато x клони към 0. Да допуснем, че тази граница съществува и че е равна на някакво число l. Тогава, като образуваме редицата

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \ldots, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \ldots,$$

която очевидно клони към 0, ще заключим, че редицата от съответните функционални стойности

$$\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \ldots, \sin\frac{(2n-1)\pi}{2}, \ldots$$

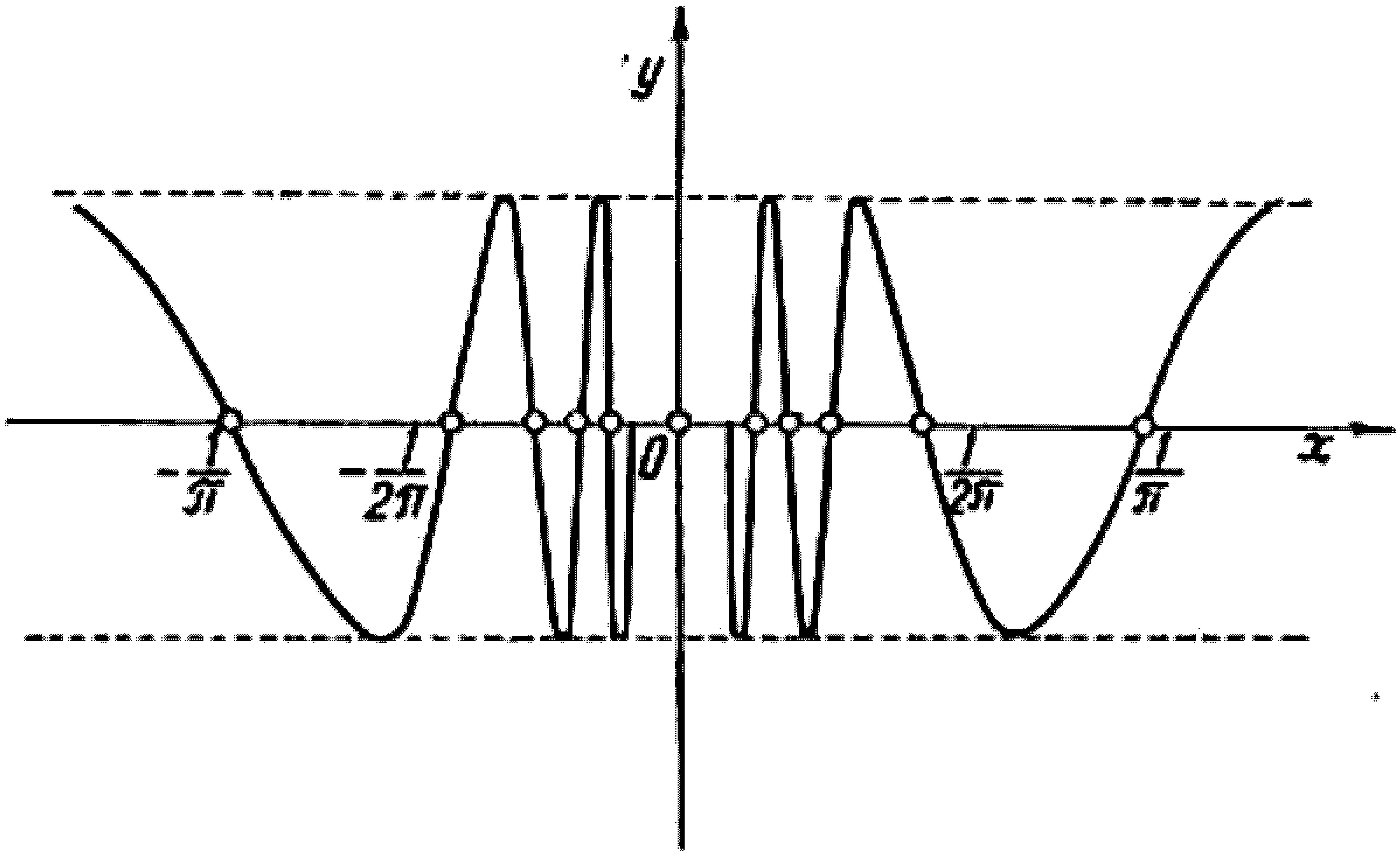
---

* Коши (1789—1857) и Хайне (1821—1881) са известни математици, имащи големи заслуги за изграждането на съвременните понятия на математическия анализ

е сходяща и клони към l. Но тази редица е в същност редицата

$$1, -1, 1, -1, \dots,$$

която, както знаем, е разходяща. И така достигнахме до противоречие. Следователно $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ не съществува.



Черт. 10

Дефиницията на Хайне за граница на функция ни позволява лесно да установим верността на следната теорема, която многократно ще използваме по-нататък.

Теорема 3. *Нека са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, които имат една и съща дефиниционна област M, и нека x_0 е точка на сгъстяване за множеството M. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат граници, когато x клони към x_0, то функциите $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ също притежават граница при x, клонящо към x_0. Същото се отнася и за функцията $\frac{f(x)}{g(x)}$ в случая, когато $g(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$. Освен това, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, то валидни са следните равенства*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = l+m,$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)-g(x)] = l-m,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=lm,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}.$$

Наистина да разгледаме например случая на сумата $f(x)+g(x)$. Да вземем произволна редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

състояща се от точки, принадлежащи на M и различни от x_0, която клони към x_0. Тъй като $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$, то двете редици

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

$$g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$$

са сходящи и при това първата от тях клони към l, а втората — към m. Тогава редицата

$$f(x_1)+g(x_1), f(x_2)+g(x_2), \ldots, f(x_n)+g(x_n), \ldots$$

ще бъде сходяща и ще клони към $l+m$. А това означава, че

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=l+m.$$

Аналогично се третират и останалите случаи на теоремата.

Също така просто се установяват, като се използува пак дефиницията на Хайне, и следните две теореми:

Теорема 4. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат една и съща дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ако за всяко x от M е изпълнено неравенството $f(x)\leqq g(x)$ и ако границите $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ съществуват, то*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 5. *Нека трите функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ имат една и съща дефиниционна област M и нека за всяко x от M имаме*

$$f(x)\leqq g(x)\leqq h(x).$$

Ако x_0 е точка на сгъстяване за M и ако границите $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0} h(x)$ съществуват, като при това имаме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l,$$

то съществува и границата $\lim_{x\to x_0} g(x)$, за която също имаме

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=l.$$

Нека добавим още една полезна

Теорема 6. *Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции с обща дефиниционна област M, а x_0 е точка на сгъстяване за M и ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, а функцията $g(x)$ е ограничена в някоя околност на x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)=0$.*

Доказателство. Преди всичко нека уточним, че когато говорим за ограниченост на функцията $g(x)$ в някоя околност на точката x_0, ние имаме пред вид, разбира се, само ония точки от тая околност, които принадлежат на нейната дефиниционна област. Ето защо условието за ограниченост на $g(x)$ тук означава, че съществува такова положително число δ_1, щото при $x\in M$ и $|x-x_0|<\delta_1$ е изпълнено неравенството $|g(x)|\leqq K$, където K е някаква положителна константа. Да вземем едно произволно положително число ε. Тогава числото $\frac{\varepsilon}{K}$ е също положително. Тъй като $\lim f(x)=0$, то съществува число $\delta_2>0$, такова, че от неравенството $|x-x_0|<\delta_2$ и от условията $x\in M$ и $x\neq x_0$ да следва неравенството $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{K}$. Ако δ е по-малкото от числата δ_1 и δ_2, то при $x\in M$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$ ще имаме

$$|f(x)g(x)|=|f(x)|.|g(x)|<\frac{\varepsilon}{K}\,K=\varepsilon.$$

Тъй като ε беше произволно взето положително число, оттук следва, че

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0.$$

Пример. С помощта на тази теорема лесно се установява например, че $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{x}{x^2+1}=0$. Наистина, от една страна, $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, а, от друга страна, за всяко x имаме $|\sin\frac{x}{x^2+1}|\leqq 1$.

Ще завършим този параграф със следната

Теорема 7. *Ако $f(x)$ има граница, когато x клони към дадена точка x_0, то функцията $f(x)$ е ограничена в някоя околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на точката x_0.*

Доказателство. Нека M е дефиниционната област на $f(x)$ и нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Да вземем числото $\varepsilon=1$. Можем да намерим такова положително число δ, че когато $x\in M$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$, да имаме $|f(x)-l|<1$. Но тогава за всички стойности на x от отворения интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, които принадлежат на M и са различни от x_0, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$l-1<f(x)<l+1,$$

които показват, че функцията $f(x)$ е ограничена в тоя интервал.*

---

* Тук, както и при теорема 6, имаме пред вид само онези точки от интервала, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$.

Като следствие от тази теорема можем да заключим, че ако една функция не е ограничена в никоя околност на дадена точка x_0, то тя сигурно не притежава граница, когато x клони към x_0. Такова например е поведението на функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ около точката $x_0=0$.

Упражнения. 1. Докажете, че при всяко x_0 имаме $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$. (Оттук ще следва, че за всяко цяло положително число n имаме $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$.)

2. Докажете, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и ако $l>0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$. Упътване: използувайте, че

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{l}|=\frac{|f(x)-l|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{l}}\leqq\frac{1}{\sqrt{l}}|f(x)-l|.$$

3. Подобно на задача 2 докажете по-общото твърдение: Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и ако $l>0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$ за всяко цяло положително число n. Упътване: използувайте равенството

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

4. Намерете границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2}{2x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

§ 19. Разширение на понятието граница на функция

С оглед на по-удобни пресмятания се оказва целесъобразно да разширим понятието граница на функция, като в някои случаи говорим за граница и когато тя не съществува в смисъл на дадената в предишния параграф дефиниция.

Ще започнем със следната

Дефиниция. *Нека е дадена функцията $f(x)$ с дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Казваме, че функцията $f(x)$ клони към безкрайност при x, клонящо към x_0, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

ако при всеки избор на положителното число A може да се намери такова положително число δ, че при $x\in M$ от неравенствата $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $f(x)>A$.

Тъй като числото A може да се вземе произволно голямо, тази дефиниция изисква, накратко казано, стойностите на функцията $f(x)$ да могат да станат колкото пожелаем големи, стига да вземаме такива стойности x, които са достатъчно близки до точката x_0.

Аналогично: *ще казваме, че $f(x)$ клони към минус безкрайност при x, клонящо към x_0 (където x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област на $f(x)$), и ще записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

ако за всяко отрицателно число B съществува такова число $\delta>0$, че при $x\in M$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$ да имаме $f(x)<B$.

Пример 1. Да установим, че $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$. За целта да изберем произволно положително число A. Ако вземем след това $\delta=\frac{1}{\sqrt{A}}$, то при $|x|<\delta$, т. е. при $|x|<\frac{1}{\sqrt{A}}$, ще имаме $x^2<\frac{1}{A}$, откъдето $\frac{1}{x^2}>A$.

Пример 2. Да покажем, че $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$ при $a>1$. Ако B е произволно отрицателно число, да си образуваме числото $\delta=a^B$. Както знаем, функцията $\log_a x$ (когато $a>1$) е дефинирана и строго растяща в интервала $(0, \infty)$. Тогава от неравенството $|x|<\delta$, което в случая (понеже x трябва да бъде положително) се превръща в неравенствата $0<$ $<x<\delta$, следва неравенството $\log_a x<\log_a a^B=B$.

Лесно се вижда верността на следната теорема, чието доказателство може да бъде предоставено на читателя.

Теорема 1. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат една и съща дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Тогава:*

а) *ако $f(x)$ е ограничена в някоя околност на точката x_0, то*

$$\text{при} \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty \quad \text{имаме} \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty;$$

$$\text{при} \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty \quad \text{имаме} \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=-\infty;$$

б) *ако* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, *то*

$$\text{при } a>0 \text{ имаме } \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty,$$

$$\text{при } a<0 \text{ имаме } \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=-\infty;$$

в) *ако* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty \quad и \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

Пример 3. Имаме $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\ln x)=-\infty$. Това се вижда от равенствата $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

Пример 4. Имаме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}=\infty$. Наистина знаем, че $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

До друго разширение на понятието граница на функция достигаме с помощта на следната

Дефиниция. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в някой интервал от вида (a, ∞). Казваме, че $f(x)$ клони към числото l, когато x клони към безкрайност, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l,$$

ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова число K, че за $x>K$ да е изпълнено неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Ясно е, че смисълът на тази дефиниция е такъв: стойностите на функцията $f(x)$ ще станат колкото пожелаем близки до числото l (тъй като ε можем да вземем колкото поискаме малко), стига да вземем стойностите на аргумента x достатъчно големи — колко именно големи, това се определя от числото K (което число естествено ще зависи от избора на ε). Другояче казано, стойностите на $f(x)$ се приближават все повече към числото l, когато x става все по-голямо, т. е. когато x „клони към безкрайност".

Аналогично: *казваме, че функцията $f(x)$, дефинирана в някой интервал от вида $(-\infty, a)$, клони към l при x, клонящо към минус безкрайност, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=l,$$

ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова число N, че при $x<N$ да имаме $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Пример 5. Ще покажем, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Нека ε е произволно положително число и нека $K=\frac{1}{\varepsilon}$. Тогава при $x>K$, т. е. при $x>\frac{1}{\varepsilon}$, ще имаме $\frac{1}{x}<\varepsilon$, което може да се напише още така: $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$.

Пример 6. Ако $a>1$, то $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x=0$. Наистина нека $\varepsilon>0$ и нека си образуваме числото $N=\log_a \varepsilon$. Тогава при $x<N$ поради монотонността на функцията a^x ще имаме $0<a^x<a^N=a^{\log_a \varepsilon}=\varepsilon$. Следователно при $x<N$ е изпълнено неравенството $|a^x-0|<\varepsilon$.

Пример 7. Да покажем, че $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$. Нека $\varepsilon>0$ и нека си образуваме числото $K=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$. Ако $x>K$, то поради това, че функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е растяща, ще имаме $\operatorname{arc\,tg} x>\operatorname{arc\,tg} K=\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]=$

$= \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. От друга страна, имаме и $\operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$. Следователно $0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x < \varepsilon$ при $x > K$.

По подобен начин се установява, че $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Естествена се явява по-нататък и следната

Дефиниция. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал от вида (a, ∞). Ще казваме, че $f(x)$ клони към безкрайност при x, клонящо към безкрайност, и ще записваме това така:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

ако за всяко положително число A може да се намери такова число K, че от неравенството $x > K$ да следва неравенството $f(x) > A$.

Аналогично се дефинират равенствата

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Пример 8. Ако $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$. Действително да вземем произволно положително число A и да си образуваме след това числото $K = \log_a A$. Поради монотонността на функцията a^x от неравенството $x > K$ ще следва $a^x > a^K = a^{\log_a A} = A$.

Пример 9. Ако $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$. И наистина нека A е произволно положително число и нека $K = A^{\frac{1}{\alpha}}$. Както знаем, функцията x^α е строго растяща в интервала $(0, \infty)$, когато $\alpha > 0$. Ето защо при $x > K$ ще имаме $x^\alpha > K^\alpha = (A^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = A$.

Пример 10. Ако $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$. За да се убедим в това, да вземем произволно положително число A и да си образуваме числото $K = a^A$. Поради монотонността на функцията $\log_a x$, когато е изпълнено неравенството $x > K$, ще бъде изпълнено и неравенството $\log_a x > \log_a K = \log_a a^A = A$.

Важно е да отбележим, че теорема 3 от предния параграф, отнасяща се до границите на сума, разлика, произведение и частно на две функции, остава в сила, когато границите, за които се говори в нея, вместо при x, клонящо към една точка x_0, се вземат при x, клонящо към ∞ (или пък към $-\infty$). Същото се отнася и до следващата теорема 4, а теорема 5 не само остава валидна, когато границите в нея се вземат при $x\to\infty$ (или $x\to-\infty$), но също и когато самите тези граници са равни на ∞ или на $-\infty$. Най-сетне теореми 6 и 7, както и теорема 1 от настоящия параграф, запазват своята валидност при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$, след като в тяхната формулировка изискването за ограниченост на $f(x)$ в някоя околност на точката x_0 се замени с изискването $f(x)$ да бъде ограничена в някой интервал от вида (p, ∞) за случая $x\to\infty$, съответно от вида $(-\infty, q)$ за случая $x\to-\infty$.

Всички тези забележки, както и очевидните равенства $\lim_{x\to\infty} C = \lim_{x\to-\infty} C = C$, където C е една константа, разширяват възможностите за използуване на споменатите теореми при решаването на конкретни задачи.

Пример 11. Да се намери границата $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}$. Като вземем пред вид теорема 3 от § 18 и пример 5 от този параграф, получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{3+5\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}.$$

Пример* 12. Покажете, че $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, като използувате теорема 6 от § 18 (отнесена за случая $x\to\infty$) и пример 5 от този параграф.

Пример 13. Нека $f(x)>0$ и нека $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. Покажете, че $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$. Покажете също, че ако $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, то $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

Пример 14. Покажете, че ако $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ и също така, че ако $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, то $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

Понякога се интересуваме какво е поведението на дадена функция $f(x)$, когато x клони към дадена точка x_0, оставайки обаче винаги по-голямо от x_0, или, както казваме още, когато клони към x_0 отдясно. С оглед на това даваме следната

Дефиниция. *Казваме, че $f(x)$ клони към числото l, когато x клони отдясно към x_0, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)=l,$$

ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че от неравенствата $x_0<x<x_0+\delta$ да следва неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Аналогично: *казваме, че $f(x)$ клони към l при x, клонящо отляво към x_0, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=l,$$

ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при $x_0-\delta<x<x_0$ да имаме $|f(x)-l|<\varepsilon$.

По подобен начин се въвеждат и равенствата

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)=-\infty.$$

Пример 15. Да покажем, че $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \frac{1}{x}=\infty$. Наистина нека A е произволно положително число. Да вземем $\delta=\frac{1}{A}$. Ясно е, че при $0<x<\delta$ т. е. при $0<x<\frac{1}{A}$, ще имаме $\frac{1}{x}>A$, с което желаното равенство е доказано.

По подобен начин се установява, че $\lim\limits_{x\to 0,\, x<0} \frac{1}{x}=-\infty$.

Ясно е, че ако за някоя функция $f(x)$ съществува границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то ще съществуват и границите $\lim\limits_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)$, като при това ще имаме

$$(1)\qquad \lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Обратно, ако двете граници $\lim\limits_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)$ съществуват и са равни помежду си, то оттук следва съществуването и на границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, като, разбира се, равенството (1) ще бъде също изпълнено.

Възможно е обаче границите $\lim\limits_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)$ да съществуват, без да бъдат равни помежду си. В такъв случай границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не съществува. Такъв е например случаят с функцията

$$f(x)=x+\frac{|x|}{x},$$

дефинирана при $x\neq 0$, за която, както лесно се вижда, имаме

$$\lim_{x\to 0,\, x<0} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to 0,\, x>0} f(x)=1.$$

Като се върнем отново към доказаните в предния параграф теореми за граници на функции, ще отбележим, че след съответни естествени изменения във формулировките, които читателят сам може да извърши, те остават валидни, когато навсякъде в тях вместо x, клонящо към x_0, вземем x, клонящо към x_0 отдясно (или пък x, клонящо към x_0 отляво).

В края на този параграф ще се спрем на няколко теореми, отнасящи се до монотонни функции, които напомнят (както по своята формулировка, така и по самото си доказателство) теоремата от § 4 за монотонните редици.

Теорема 2. *Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отгоре в отворения интервал (a, b), то тя притежава граница, когато x клони* *отляво към b, и тази граница е равна на нейната точна горна граница в интервала* (a, b).

Доказателство. Нека L е точната горна граница на $f(x)$ в интервала (a, b). Да си вземем произволно положително число ε. Числото $L-\varepsilon$ е по-малко от най-малката горна граница и вече не е горна граница на функцията $f(x)$. Ще съществува следователно поне една точка x_1 от интервала (a, b), за която $f(x_1)>L-\varepsilon$. Нека сега $\delta=b-x_1$. Ясно е, че $\delta>0$. От друга страна, от монотонността на $f(x)$ е ясно, че при $x_1<x<b$ ще имаме $f(x_1)\leqq f(x)$. И така, когато x удовлетворява неравенствата $x_1<x<b$ или, което е все едно, неравенствата $b-\delta<x<b$, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$L-\varepsilon<f(x_1)\leqq f(x)\leqq L<L+\varepsilon,$$

откъдето

$$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon,$$

или $|f(x)-L|<\varepsilon$. Следователно $\lim\limits_{x\to b,\ x<b} f(x)=L$.

По подобен начин се доказва и следната теорема:

Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отдолу в отворения интервал (a, b), то тя има граница при x, клоняща отдясно към a, и тази граница е равна на нейната точна долна граница в дадения интервал.

По-нататък, като разсъждаваме аналогично, можем да установим и следните две теореми:

Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отгоре в някой интервал от вида (a, ∞) и ако L е нейната точна горна граница, то границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ съществува и е равна на L.

Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отдолу в някой интервал от вида $(-\infty, a)$ и ако l е нейната точна долна граница, то границата $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ съществува и е равна на l.

Читателят лесно ще формулира сам теореми, аналогични на последните четири, но отнасящи се до намаляваща функция $f(x)$.

Упражнения. Намерете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1,\ x<1}\frac{x^2}{x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1,\ x>1}\frac{x^2}{x^2-1}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. 6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. 9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

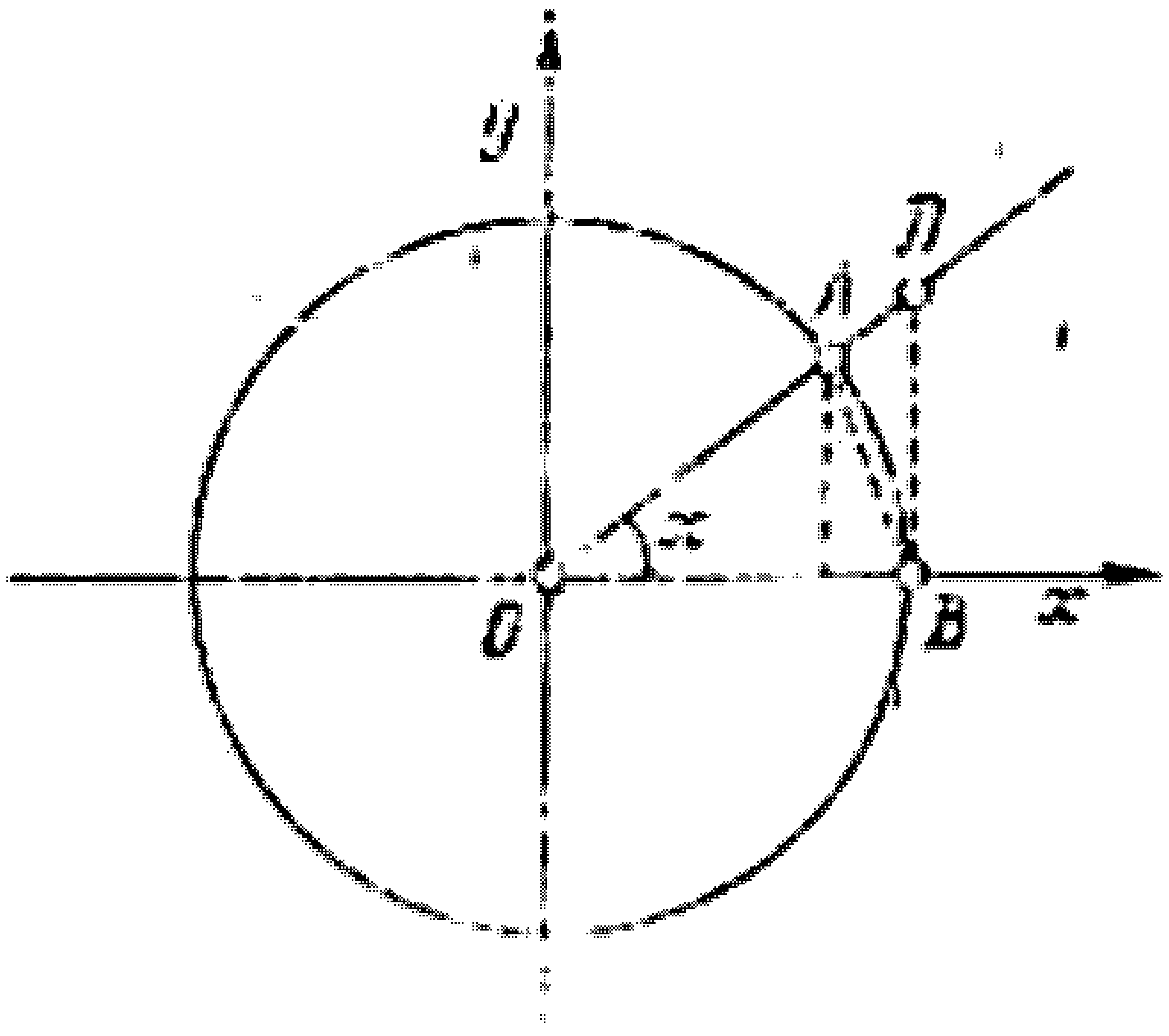
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^2+x+1}$. 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+3x+2}$. 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x^2-x+2}$.

13. Като използувате понятието редица, клоняща към $+\infty$ (или към $-\infty$), дайте дефиниции за равенствата (1)—(6) в духа на дефиницията на Хайне от § 18 за равенството $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Във всеки от разглежданите случаи обмислете какви изменения във формулировките и доказателствата на теореми 1 и 2 от § 18 са необходими, за да установите, че всяка от дадените от вас дефиниции е еквивалентна на съответната дефиниция от настоящия параграф.

§ 20. Две забележителни граници

В този параграф ще се занимаем с намирането на две граници, играещи важна роля в голям брой задачи от анализа.

Най-напред ще покажем, че функцията $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, дефинирана при $x \neq 0$, има граница, когато x клони към 0, и тази граница е числото 1



Черт. 11

За целта нека предположим на първо време, че $0<x<\frac{\pi}{2}$, и нека разгледаме черт. 11, където $\sphericalangle AOB=x$. Ясно е, че

лицето на $\triangle OAB<$лицето на сект. $OAB<$лицето на $\triangle OBD$.

Ако означим с r радиуса на окръжността на черт. 11, ще имаме

$$\frac{1}{2} r \, . \, r \sin x<\frac{1}{2} r^2 x< \frac{1}{2} r \, . \, r \operatorname{tg} x,$$

откъдето получаваме последователно

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x,$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

и най-сетне

(1)
$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Неравенствата (1) ние получихме при $0<x<\frac{\pi}{2}$, но тъй като $\sin(-x) = -\sin x$, а $\cos(-x)=\cos x$, то веднага се вижда, че те ще бъдат изпълнени и при $-\frac{\pi}{2}<x<0$. И така неравенствата (1) са валидни за всяко

$x \neq 0$, което принадлежи на интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Това е достатъчно, за да извършим нашите по-нататъшни разсъждения. Наистина, както знаем в § 18, имаме $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Остава да използуваме теорема 5 от § 18, за да заключим, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

А сега ще потърсим границата на функцията $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при x, клонящо към ∞, и ще покажем, че тя съществува и е равна на числото e. Това впрочем е за очакване, тъй като това твърдение е естествено обобщение на известния ни факт, че редицата с общ член $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща и клони към e.

Нека вземем едно произволно положително число ε и нека покажем, че съществува такова положително число A, че при $x > A$ да имаме

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

Преди всичко, като вземем пред вид, че редиците $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и $c_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ са сходящи и клонят и двете към e, можем да намерим такова положително число ν, че при $n > \nu$ да са изпълнени неравенствата

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon$$

или, което е все същото, неравенствата

(2) $$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon, \qquad e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < e + \varepsilon.$$

Нека сега $A = \nu + 1$ и нека x е някое число, удовлетворяващо неравенството $x > A$. Да изберем след това цялото положително число n по такъв начин, че да имаме $n \leqq x < n + 1$. (Ясно е, че това винаги е възможно.) Тогава ще получим последователно следните неравенства:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{n},$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqq 1 + \frac{1}{n},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

От друга страна, тъй като $x>A$, то $n+1>\nu+1$, или $n>\nu$. Като вземем пред вид неравенствата (2), изпълнени за всяко $x>A$, ще получим

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e+\varepsilon.$$

И така за всяко $x>A$ имаме $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$. С това доказахме, че

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Не е трудно да се уверим, че имаме също $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. И наистина, ако положим $x=-t$, получаваме

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{t-1}{t}\right)^t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e.$$

Упражнения. Намерете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+1}{x^3}$.
10. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{(x-2)^2}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ (k — цяло число).
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$.
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x$.
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

ГЛАВА IV

НЕПРЕКЪСНАТОСТ

Понятието непрекъснатост на функция е едно от най-характерните понятия на математическия анализ. Макар че до неговата съвременна дефиниция се е дошло едва след изминаването на дълъг път, в една или друга форма то винаги е играло важна роля в математиката. Непрекъснатите функции притежават редица свойства, които ги правят твърде удобни за работа.

§ 21. Непрекъснати функции

Въвеждайки понятието граница на функция и дефинирайки символа $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ние предполагахме, че x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област M на $f(x)$, но не изисквахме непременно тази точка да принадлежи на M. Нека сега спрем вниманието си именно на случая, когато точката x_0 е точка от множеството M. В този случай съществува функционалната стойност $f(x_0)$ и естествено възниква въпросът, дали тази стойност съвпада със стойността на $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ при условие, че тази граница съществува. Когато тези две стойности съвпадат (а както знаем от § 18, това не винаги е така), казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Така например доказаното в § 18 равенство $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ изразява непрекъснатостта на функцията $\cos x$ в точката $x_0=0$.

И тъй ние въвеждаме следната

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област M и нека x_0 е точка от M. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако тя притежава граница при x, клонящо към x_0, и ако при това е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Разбира се, тази дефиниция има смисъл само когато точката x_0, съдържайки се в M, се явява същевременно и точка на сгъстяване за множеството M (в противен случай няма да можем да говорим за границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$). Възможно е обаче (макар че ние рядко ще срещаме подобни случаи) една точка да принадлежи на дадено множество M, без да бъде негова точка на сгъстяване. Такава точка се нарича **изолирана точка** на множеството M.

Ако дефиниционната област M на една функция $f(x)$ притежава изолирани точки, приема се, че $f(x)$ е непрекъсната във всяка от тези точки. Допълнената по този начин дефиниция за непрекъснатост ни позволява вече да поставим въпроса за непрекъснатостта на дадена функция $f(x)$ във всяка точка от нейната дефиниционна област.

Като си спомним дефинициите на Коши и на Хайне за понятието граница на функция, лесно съобразяваме, че дефиницията за непрекъснатост на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0 може да се изкаже още и по следните два начина:

Функцията $f(x)$ с дефиниционна област M е непрекъсната в точката x_0 от M, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $x\in M$ от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (**дефиниция на Коши**).

Или: *Функцията $f(x)$, дефинирана в областта M, е непрекъснатa в точката x_0 от M, ако за всяка редица от числа*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

принадлежащи на M, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$ (**дефиниция на Хайне**).

Последните две формулировки на дефиницията на понятието непрекъснатост имат това предимство, че обхващат, както лесно се вижда, не само случая, когато x_0 е точка на сгъстяване, но и случая, когато тя е изолирана точка за множеството M.

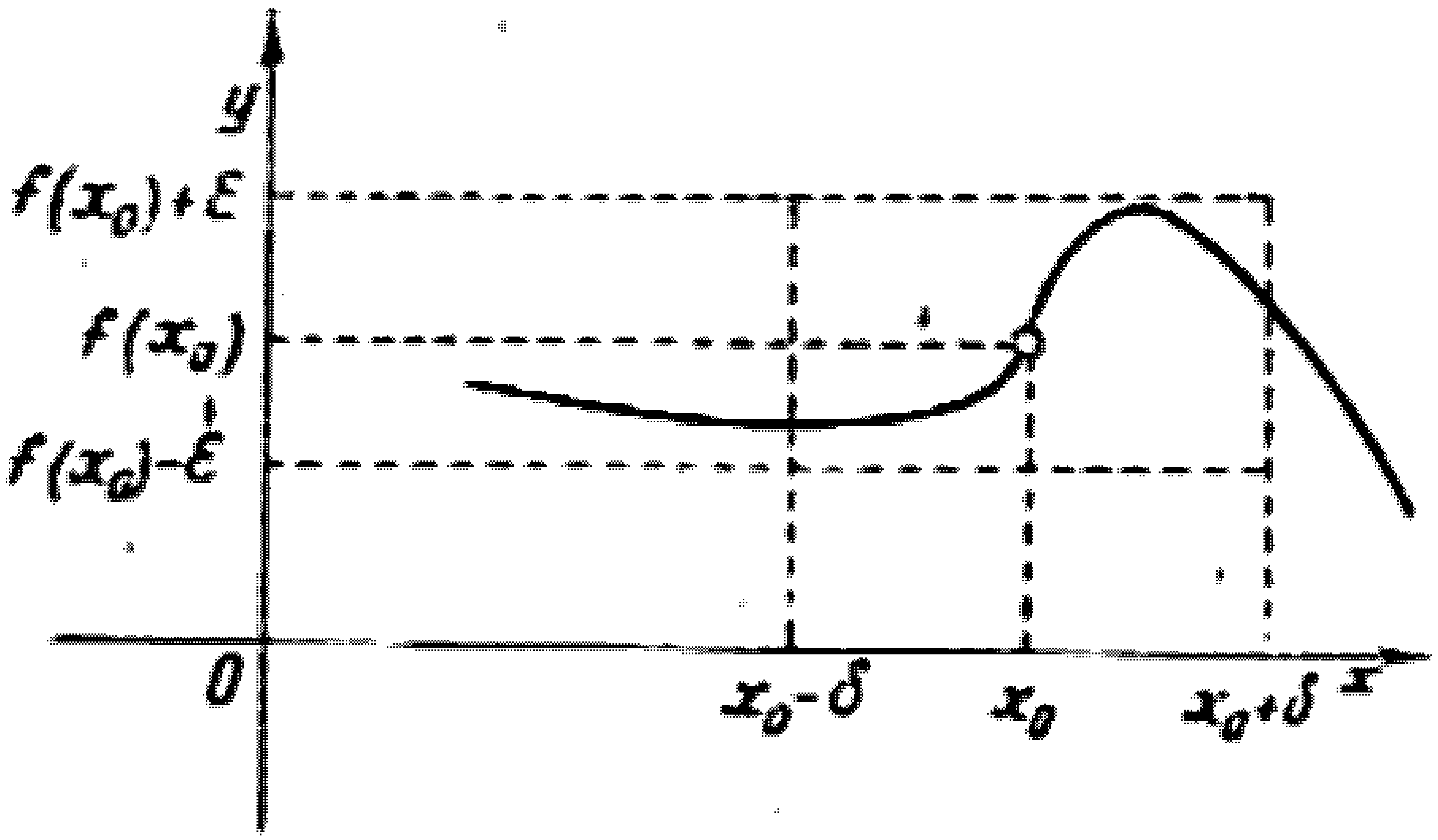
Дефиницията на Коши позволява да се даде просто геометрично тълкуване на понятието непрекъснатост. Наистина нека $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и нека ε е едно положително число. Тогава съгласно тази дефиниция неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, което е еквивалентно с неравенствата

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

е изпълнено за всички точки x, удовлетворяващи неравенството $|x-x_0|<\delta$, т. е. за всички точки x от дефиниционната област на $f(x)$, които принадлежат на отворения интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Геометрически това означава, че онази част от графиката на функцията $f(x)$, която съответствува на този интервал, се намира в хоризонталната ивица, заключена между правите с уравнения $y=f(x_0)-\varepsilon$ и $y=f(x_0)+\varepsilon$ (черт. 12). Тази ивица е толкова по-тясна, колкото по-малко е числото ε. Числото δ, определящо интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, зависи, разбира се от ε — когато ε е твърде малко, δ също може да бъде много малко.

Когато една функция $f(x)$ не е непрекъсната в някоя точка x_0 от своята дефиниционна област, казваме, че тя **се прекъсва** или че е **прекъсната** в тази точка.

Ясно е, че една функция $f(x)$ с дефиниционна област M ще бъде прекъсната в дадена точка x_0 от M, когато x_0 е точка на сгъстяване за M



Черт. 12

и когато границата $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или не съществува, или пък съществува, но е различна от $f(x_0)$.

Както вече отбелязахме, в § 18 бе показано, че функцията $f(x)=\cos x$ е непрекъсната в точката $x_0=0$. Ако искаме да посочим пример за функция, която е прекъсната в някоя точка от своята дефиниционна област, достатъчно ще бъде да си припомним функцията

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x=0, \end{cases}$$

която вече разгледахме и за която имаме $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ — тя е прекъсната в точката $x_0=0$.

Понякога се налага да решим следната задача: Дадена е функцията $f(x)$ с дефиниционна област M и точка x_0, непринадлежаща на M, но явяваща се точка на сгъстяване за M. Искаме да дефинираме функцията $f(x)$ допълнително в точката x_0, и то по такъв начин, че да получим функция, непрекъсната в тази точка. Ясно е, че това е възможно само когато съществува границата $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и че в такъв случай нашата цел ще бъде постигната, ако дефинираме $f(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Така например, ако функцията $f(x)=x \sin \frac{1}{x}$, дефинирана само при $x \neq 0$, дефинираме допълнително при $x_0=0$ с равенството $f(0)=0$, ще получим функция, дефинирана вече за всяко x, която при това е непрекъсната в точката $x_0=0$. Това е така, защото, както знаем (вж. § 18), $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}=0$.

Ако обаче разгледаме функцията $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, дефинирана също така само при $x\neq 0$, то каквато и стойност да ѝ припишем за точката $x_0=0$, тя ще бъде прекъсната в тази точка, тъй като границата $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, както видяхме, не съществува.

Една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната отляво в дадена точка x_0 от своята дефиниционна област, ако тя притежава граница при x, клонящо отляво към точката x_0, и ако $\lim\limits_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=f(x_0)$.

Аналогично $f(x)$ се нарича непрекъсната отдясно в точката x_0, ако притежава граница, когато x клони отдясно към x_0, и ако $\lim\limits_{x\to 0,\ x>x_0} f(x)=f(x_0)$.

Ясно е, че ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в дадена точка x_0, то тя е непрекъсната и отляво, и отдясно в тази точка и че, обратно, ако тя е непрекъсната както отляво, така и отдясно в точката x_0, то тя е непрекъсната в нея.

Една функция може обаче да бъде непрекъсната и само отляво или пък само отдясно в някоя точка. Така например, като вземем пред вид това, което знаем от § 18 за функцията $x+\frac{|x|}{x}$, заключаваме, че функцията

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ -1 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

е непрекъсната отляво, но не и отдясно в точката $x_0=0$, а функцията

$$g(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ 1 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

е непрекъсната само отдясно, но не и отляво при $x_0=0$. Функцията пък

$$h(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

не е непрекъсната нито отляво, нито отдясно в точката $x_0=0$. И трит тези функции са прекъснати при $x_0=0$.

§ 22. Основни свойства на непрекъснатите функции

Едно просто, но твърде често използувано свойство на непрекъснатите функции се дава със следната

Теорема 1. *Ако $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и ако $f(x_0)\neq 0$, то съществува такава околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на тази точка, в която функцията $f(x)$ не си мени знака.*

Доказателство. Нека $f(x_0)>0$. Да си образуваме положително число $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$. От непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката x_0 следва, че можем да намерим такова число $\delta>0$, че при $|x-x_0|<\delta$ да имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}.$$

От последното неравенство получаваме

$$-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0),$$

откъдето

$$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}.$$

Следователно при $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ имаме $f(x)>0$. И така функцията $f(x)$ остава положителна за всички стойности на x от интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

Аналогично се разсъждава в случая, когато $f(x_0)<0$.

Като вземем пред вид дефиницията на понятието непрекъснатост на функция, от една страна, и като си спомним, от друга страна, теорема 3 от § 18, веднага получаваме следната

Теорема 2. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в дадена точка x_0, то функциите $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, а в случая, когато $g(x_0)\neq 0$, и функцията $\frac{f(x)}{g(x)}$ са също така непрекъснати в тази точка.*

Накратко казано, тази теорема твърди, че сумата, разликата, произведението и частното на две непрекъснати функции са също непрекъснати функции.

Следващото свойство на непрекъснатите функции, на което ще се спрем, се отнася до т. нар. съставни функции. Преди всичко необходимо е да изясним понятието съставна функция.

Нека $F(x)$ е една функция с дефиниционна област M, а $f(t)$ е някоя друга функция с дефиниционна област N. Ако всички функционални стойности на функцията $f(t)$ са числа, принадлежащи на множеството M, то за всяко t от N можем да си образуваме $F[f(t)]$. Така получаваме очевидно една функция на t с дефиниционна област N. Тя се нарича **съставна функция** или още **функция от функция**.

Така например, ако $F(x)=\sin x$ за всяко x, а $f(t)=\frac{1}{t}$ при $t\neq 0$, то $F[f(t)]=\sin\frac{1}{t}$ при $t\neq 0$. Ако $F(x)=\sqrt{x}$ при $x\in[0, \infty)$, а $f(t)=t^2$ при $t\in(-\infty, \infty)$, то $F[f(t)]=\sqrt{t^2}=|t|$ за всяко t.

Относно съставните функции е в сила следната

Теорема 3. *Ако функцията $F(x)$ е непрекъсната в точка x_0, а функцията $f(t)$ е непрекъсната в точка t_0 и ако $f(t_0)=x_0$, то съставната функция $\varphi(t)=F[f(t)]$ е непрекъсната в точката t_0.*

Доказателство. Нека разгледаме произволна редица от точки

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots, \tag{1}$$

принадлежащи на дефиниционната област на $f(t)$, която клони към t_0. Поради непрекъснатостта на функцията $f(t)$ в точката t_0, редицата от съответните функционални стойности

$$f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n), \ldots \tag{2}$$

ще бъде сходяща и ще клони към $f(t_0)$. Ние можем обаче да разгледаме редицата (2) като съставена от числа, принадлежащи на дефиниционната област на функцията $F(x)$. При това тази редица клони към x_0, тъй като по условие имаме $f(t_0)=x_0$. Тогава поради непрекъснатостта на функцията $F(x)$ в точката x_0 редицата

$$F[f(t_1)], F[f(t_2)], \ldots, F[f(t_n)], \ldots \tag{3}$$

ще бъде сходяща и ще клони към $F(x_0)$. Редицата (3) обаче може да се напише още така:

$$\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n), \ldots$$

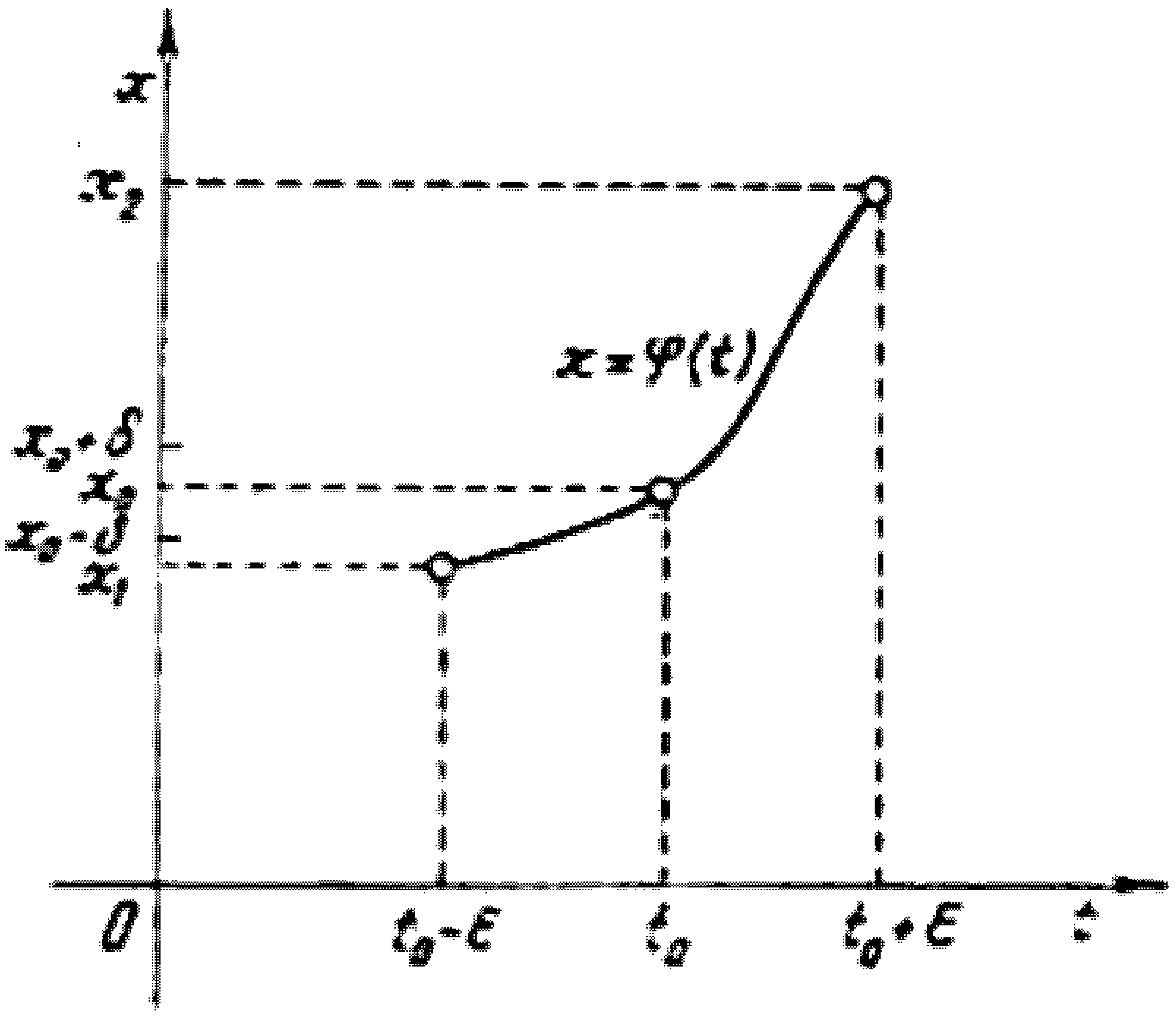
Нейната граница при това е равна на $\varphi(t_0)$, понеже $\varphi(t_0)=F[f(t_0)]=F(x_0)$. Това именно означава съгласно дефиницията на Хайне, че съставната функция $\varphi(t)$ е непрекъсната в точката t_0.

Накратко доказаната теорема се изказва така: *Непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната функция.*

Следващата теорема третира въпроса за непрекъснатостта на обратните функции.

Теорема 4. *Ако функцията $f(t)$, дефинирана в един интервал D, е строго растяща (или пък строго намаляваща) в този интервал, то нейната обратна функция $\varphi(x)$ е непрекъсната във всички точки от своята дефиниционна област.*

Доказателство. Нека $f(t)$ е строго растяща функция. (Случаят, когато $f(t)$ е строго намаляваща, е аналогичен.) Да напомним, че всяка строго растяща функция е обратима и че нейната обратна функция $\varphi(x)$ е също строго растяща. Да означим с N множеството от функционалните стойности на функцията $f(t)$, което се явява дефиниционна област на функцията $\varphi(x)$. Нека x_0 е произволна точка от N и нека $\varphi(x_0)=t_0$. Ще разгледаме случая, когато точката t_0 е вътрешна за интервала D. (Случаят, когато t_0 е крайна точка за този интервал, се разглежда по същия начин с несъществени изменения.) Да си вземем произволно положително число ε. Можем да считаме, че ε е толкова малко, че точките $t_0-\varepsilon$ и $t_0+\varepsilon$ принадлежат също на интервала D. Нека $f(t_0-\varepsilon)=x_1$ и $f(t_0+\varepsilon)=x_2$. Ясно е, че $x_1<x_0<x_2$. Да изберем след това едно положително число δ, толкова малко, че интервалът $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ да се съдържа изцяло в интервала (x_1, x_2) (черт. 13). Ако сега $x\in N$ и $|x-x_0|<\delta$, то ще бъдат изпълнени неравенствата $x_1<x<x_2$. Оттук поради монотонността на функцията $\varphi(x)$ ще получим $\varphi(x_1)<\varphi(x)<\varphi(x_2)$. Но



Черт. 13

$$\varphi(x_1)=t_0-\varepsilon=\varphi(x_0)-\varepsilon, \quad \varphi(x_2)=t_0+\varepsilon=\varphi(x_0)+\varepsilon.$$

И така получаваме, че при $x\in N$ и $|x-x_0|<\delta$ имаме

$$\varphi(x_0)-\varepsilon<\varphi(x)<\varphi(x_0)+\varepsilon,$$

откъдет

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

С това е установена непрекъснатостта на функцията $\varphi(x)$ в произволно взетата точка x_0 от нейната дефиниционна област.

§ 23. Непрекъснатост на елементарните функции

Както ще видим в този параграф, оказва се, че всички елементарни функции са непрекъснати. По-точно казано, всяка от тях е непрекъсната във всяка точка от своята дефиниционна област.

Преди всичко лесно се установява непрекъснатостта на рационалните функции. Най-напред всяка функция-константа $f(x)=C$ е непрекъсната за всяка точка x. Наистина, каквото и да бъде положителното число ε, неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, което сега се превръща в очевидното неравенство $|C-C|<\varepsilon$, е изпълнено за всяко x. Ясно е тогава, че както и да вземем положителното число δ, то ще удовлетворява изискванията на дефиницията на Коши.

По-нататък също така лесно се вижда непрекъснатостта на функцията $f(x)=x$ за всяко x. Действително, ако x_0 е произволна точка върху реалната права, а ε е произволно положително число, то достатъчно е да вземем $\delta=\varepsilon$, за да видим, че когато $|x-x_0|<\delta$, ще имаме

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

откъдето следва, че функцията $f(x)=x$ е непрекъсната в точката x_0.

Като вземем сега пред вид теорема 1 от § 22, утвърждаваща непрекъснатостта на сумата, разликата, произведението и частното на две непрекъснати функции, можем да заключим най-напред, че при всяко цяло положително число n функцията $f(x)=x^n$ като произведение от непрекъснати функции е също непрекъсната за всяко x. След това, като си спомним, че общият вид на полиномите е

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0,$$

виждаме, че всеки полином е непрекъсната функция за всяко x. Най-сетне всяка рационална функция като частно на два полинома е също непрекъсната във всяка точка от своята дефиниционна област, т. е. във всяка точка, за която не става нула полиномът, намиращ се в знаменателя.

Преминаваме към показателната (експоненциалната) функция $f(x)=a^x$ (където $a>0$). Ще покажем на първо място, че

$$\lim_{x\to 0} a^x=1. \tag{1}$$

Нека най-напред $a>1$. Да вземем едно произволно положително число ε. Разбира се, можем да считаме, че $\varepsilon<1$. Да си образуваме след това числата $\log_a(1-\varepsilon)$ и $\log_a(1+\varepsilon)$. Като вземем пред вид, че при $a>1$ функцията a^x е строго растяща, ще заключим, че при

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon) \tag{2}$$

имаме

$$1-\varepsilon<a^x<1-\varepsilon. \tag{3}$$

Първото от числата $\log_a(1-\varepsilon)$ и $\log_a(1+\varepsilon)$ е отрицателно, а второто — положително. Поради това е ясно, че ако δ е по-малкото от числата $|\log_a(1-\varepsilon)|$ и $\log_a(1+\varepsilon)$, то от неравенството $|x|<\delta$ ще следват неравенствата (2), а оттам — и неравенствата (3), които пък са равносилни с неравенството

$$|a^x-1|<\varepsilon.$$

С това равенството (1) е установено при $a>1$.

Случаят, когато $0<a<1$, се свежда към току-що разгледания, като се използува равенството

$$a^x=\frac{1}{(a^{-1})^x}$$

и като се вземе пред вид, че в този случай $a^{-1}>1$. Когато $a=1$, равенството (1) е очевидно.

Доказаното равенство (1) в същност ни показва, че функцията $f(x)=a^x$ е непрекъсната в точката $x_0=0$, тъй като $a^0=1$. Но оттук лесно можем да установим нейната непрекъснатост в произволна точка x_0. Наистина това се вижда от равенствата

$$\lim_{x\to x_0} a^x=\lim_{x\to x_0} a^{x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

Функцията $\log_a x$, където $a>0$ и $a\neq 1$, дефинирана при $x>0$, е обратна на строго растящата функция a^x с дефиниционен интервал $(-\infty, \infty)$ и е също непрекъсната съгласно теорема 4 от § 22 във всяка точка от своята дефиниционна област.

Сега вече е твърде лесно да се покаже непрекъснатостта на степенната функция $f(x)=x^\alpha$ при произволен степенен показател α, дефинирана при $x>0$. (Досега ние сме доказали нейната непрекъснатост само когато α е цяло число.) Наистина, ако a е някое положително число, различно от единица, в сила е равенството $x^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$, от което непрекъснатостта на функцията $f(x)=x^\alpha$ следва въз основа на теоремата за непрекъснатост на съставни функции. Оттук пък непосредствено се получава непрекъснатостта на всички ирационални функции — достатъчно е да се използува непрекъснатостта на рационалните функции и на функцията $f(x)=x^\alpha$ при дробен степенен показател и най-сетне теоремата за непрекъснатостта на съставните функции.

За да изчерпим всички елементарни функции, остава да се занимаем още с четирите тригонометрични функции и техните обратни.

Да разгледаме функцията $\sin x$ и да вземем произволна точка x_0. Лесно се вижда верността на следната верига от равенства и неравенства:

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqq 2\,.\,1\cdot\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|.$$

Ясно е тогава, че ако ε е произволно положително число, то достатъчно е да вземем $\delta=\varepsilon$, за да имаме $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$. С това е установена непрекъснатостта на функцията $\sin x$ в произволно взетата точка x_0.

По аналогичен начин се вижда, че и функцията $\cos x$ е непрекъсната за всяко x. Що се отнася до функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$, то всяка от тях е непрекъсната за всяко x от своята дефиниционна област. Това се вижда от равенствата $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ въз основа на теоремата за непрекъснатостта на частното на две непрекъснати функции.

Най-сетне функциите $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$ като обратни на строго растящи функции, всяка от които е взета в някакъв интервал, ще бъдат също така непрекъснати за всяко x от своята дефиниционна област.

§ 24. Четири теореми за непрекъснатите функции

Когато една функция $f(x)$ е непрекъсната във всички точки на дадено множество M от реални числа, накратко казваме, че тя е непрекъсната в множеството M. От непрекъснатостта на една функция следват редица свойства. Особено важни заключения за свойствата на една функция могат да се направят, когато тя е непрекъсната в краен и затворен интервал.

Така например, макар между непрекъснатите функции да се срещат както ограничени, така и неограничени, оказва се, че е в сила следната

Теорема 1 (теорема за ограниченост). *Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена в този интервал.*

За да си изясним по-добре смисъла на това твърдение, нека посочим някои съвсем прости примери, от които се вижда, че заключението на теоремата може да не бъде вярно, ако са нарушени някои от нейните условия. Функцията $f(x)=\frac{1}{x}$, макар и непрекъсната в интервала $(0, 1]$ е неограничена в него. Функцията пък, дефинирана с равенството

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x=0, \end{cases}$$

е неограничена даже в затворения интервал $[0, 1]$.

Тези примери, разбира се, не противоречат на теорема 1, тъй като в първия от тях интервалът $(0, 1]$ не е затворен, а във втория функцията $g(x)$ е прекъсната в точката $x_0=0$.

Преди да формулираме следващата теорема, да разгледаме още някои примери. Когато ни е дадена една функция $f(x)$, естествено възниква въпросът, притежава ли тя най-голяма (максимална), съответно най-малка (минимална) стойност. Разбира се, ако функцията не е ограничена отгоре, тя не може да има максимална стойност. Но тя може даже не притежава най-голяма стойност даже и когато е ограничена.

И наистина функцията $f(x)=1-\frac{1}{x}$ например е ограничена отгоре в безкрайния интервал $(1, \infty)$, тъй като всички нейни стойности са по-малки от 1. Тя обаче не притежава максимална стойност, тъй като е строго растяща в този интервал, което се проверява непосредствено.

Такава ситуация може да бъде налице даже и в краен интервал. Да разгледаме например функцията $g(x)=x^2$ в интервала $[0, 2)$. Тя е очевидно ограничена, тъй като всички нейни стойности са по-малки от 4. Но тя също не притежава максимална стойност, защото, както и да изберем точката x_1 от интервала $[0, 2)$, винаги можем да намерим друга точка x_2, такава, че $0 \leqq x_1 < x_2 < 2$, откъдето $x_1^2 < x_2^2$, или $g(x_1) < g(x_2)$.

По същия начин можем да се убедим, че и функцията

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при} \quad 0 \leqq x < 2 \\ 0 & \text{при} \quad x=2, \end{cases}$$

дефинирана в затворения интервал $[0, 2]$, не притежава най-голяма стойност.

Разбира се, аналогични забележки, придружени със съответни примери, могат да бъдат направени и по въпроса за съществуването на най-малка стойност на дадена функция.

След всичко това е очевидна важността на следната

Теорема 2 (теорема на Вайерщрас). *Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя притежава една най-голяма и една най-малка стойност.*

Както знаем от теорема 1, щом функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена. Това ще рече, че множеството от нейните функционални стойности е ограничено. Като си спомним една от забележките, които направихме при въвеждането на понятието точна горна граница на множество от реални числа, заключаваме, че най-голямата стойност на $f(x)$, ако съществува такава, трябва да съвпада с точната горна граница на тази функция. Аналогично, ако функцията $f(x)$ притежава най-малка стойност, тя трябва да съвпада с нейната точна долна граница.

Ето защо теоремата на Вайерщрас може да се изкаже и по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя достига в този интервал както своята точна горна граница, така и своята точна долна граница.

Друго важно свойство на непрекъснатите функции се дава със следната

Теорема 3 (теорема на Болцано). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$ и ако $f(a) \neq f(b)$, а λ е число, намиращо се между $f(a)$ и $f(b)$, то съществува поне една точка α в интервала (a, b), за която $f(\alpha)=\lambda$.*

Другояче казано, функцията $f(x)$ трябва да получи поне веднъж всяка стойност, намираща се между $f(a)$ и $f(b)$. По-специално, когато $f(a)$ и $f(b)$ са две числа с противни знаци (т. е. когато едното от тях е положително, а другото — отрицателно), функцията $f(x)$ трябва да стане равна на нула най-малко за една стойност на x между a и b.

С помощта на формулираните дотук теореми можем лесно да направим важни заключения, отнасящи се до множеството от функционалните стойности на една непрекъсната функция. Нека най-напред вземем една функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната в някой краен и затворен интервал $[a, b]$ и не е константа в него. Тя ще бъде ограничена, както знаем от теорема 1. Ако L и l са съответно нейната точна горна и нейната точна долна граница, то съгласно теорема 2 ще съществуват две точки x_1 и x_2 от интервала $[a, b]$, за които ще имаме $f(x_1)=l$ и $f(x_2)=L$. Тези две точки са различни, защото, ако те съвпадаха, бихме получили $l=L$, т. е. $f(x)$ би била константа. Да разгледаме сега точките x_1 и x_2 като краища на един краен и затворен интервал. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в този интервал и тъй като тя получава в краищата му стойностите l и L, то съгласно теорема 3 тя ще взема и всяка стойност, намираща се между тези две числа. А тъй като, от друга страна, никоя стойност на функцията $f(x)$ не може да бъде по-малка от l или по-голяма от L, то заключаваме, че множеството от функционалните стойности на $f(x)$ трябва да съвпада със затворения интервал $[l, L]$. И така, ако една функция е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал и не е константа, то множеството от нейните функционални стойности представлява също краен и затворен интервал.

Като разсъждаваме по подобен начин, макар и малко по-сложно, можем да се убедим, че изобщо, когато една функция е дефинирана и непрекъсната в интервал от произволен вид и не е константа, множеството от нейните функционални стойности е също интервал.

За да формулираме по-кратко следващото важно свойство на непрекъснатите функции, ще въведем предварително един нов термин. Ако функцията $f(x)$ е ограничена в дадено множество M и ако L е нейната точна горна граница, а l — нейната точна долна граница, когато x се мени в M, то числото $L-l$ ще наречем **осцилация** на функцията $f(x)$ в множеството M.

Ползата от въвеждането на този термин, както и от теоремата, която предстои да формулираме, ще се види едва по-нататък, когато се запознаем с дефиницията на понятието определен интеграл. Нека отбележим само, че ако $f(x)$ е функция, дефинирана в някое множество M, и ако x' и x'' са две точки от M, то стойността на израза $|f(x')-f(x'')|$ не надминава осцилацията на $f(x)$ в M. И наистина, ако l е точната долна, а L — точната горна граница на $f(x)$ в M и ако от двете числа $f(x')$ и $f(x'')$ първото например е по-малко или равно на второто, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$l \leqq f(x') \leqq f(x'') \leqq L,$$

откъдето

$$|f(x')-f(x'')|=f(x'')-f(x') \leqq L-l.$$

Последната теорема, на която ще се спрем в този параграф, е следната:

Теорема 4 (теорема за равномерната непрекъснатост). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$ и ако* ε

е положително число, то интервалът $[a, b]$ *може да бъде разделен на краен брой подинтервали по такъв начин, че във всеки от тях осцилацията на* $f(x)$ *да бъде по-малка от* ε.

Тази теорема може да бъде изказана още и така:

Ако функцията $f(x)$ *е непрекъсната в крайния и затворен интервал* $[a, b]$, *то за всяко положително число* ε *съществува такова положително число* δ, *че във всеки подинтервал на* $[a, b]$ *с дължина, по-малка от* δ, *осцилацията на* $f(x)$ *да е по-малка от* ε.

Наистина нека сме си избрали едно произволно положително число ε и нека след това сме разделили интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали по такъв начин, че във всеки от тях осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от положителното число $\frac{\varepsilon}{2}$. Да означим с δ дължината на най-малкия от тези подинтервали и да си вземем след това произволен подинтервал $[\alpha, \beta]$ на интервала $[a, b]$, но такъв, че неговата дължина $\beta—\alpha$ да бъде по-малка от δ. Съгласно теоремата на Вайерщрас, ако L и l са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[\alpha, \beta]$, то ще съществуват в този интервал две точки x' и x'', такива, че $f(x')=L$ и $f(x'')=l$. Тъй като разстоянието между точките x' и x'' е по-малко от δ, те или лежат в един и същ подинтервал от онези, на които сме разделили интервала $[a, b]$, или пък се намират в два съседни подинтервала. В първия случай числото $|f(x')—f(x'')|$ няма да надминава осцилацията на $f(x)$ в съответния подинтервал, която е по-малка от $\frac{\varepsilon}{2}$. Във втория случай, като означим с $[p, q]$ и $[q, r]$ двата съседни подинтервала, съдържащи точките x' и x'', и предположим, че например $x'\in[p, q]$, $x''\in[q, r]$, ще имаме

$$|f(x')-f(x'')| = |f(x')-f(q)+f(q)-f(x'')|$$

$$\leq |f(x')-f(q)| + |f(q)-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

И така и в двата случая $L—l=f(x')—f(x'')<\varepsilon$.

Нека сега, обратно, като изберем едно произволно положително число ε, знаем, че съществува такова число δ, че осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от ε във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина, по-малка от δ. Да разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали така, че дължината на всеки от тях да бъде по-малка от δ. Това лесно може да бъде постигнато. Достатъчно е например да разделим $[a, b]$ на n равни части, като вземем n толкова голямо, че да е изпълнено неравенството $\frac{b-a}{n}<\delta$. Тогава във всеки от така получените подинтервали осцилацията на $f(x)$ ще бъде по-малка от ε.

По този начин се убеждаваме, че дадените по-горе две формулировки на теорема 4 са наистина еквивалентни. Използувайки втората от тях, лесно получаваме следното твърдение (което впрочем също е еквивалентно на теорема 4):

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $x' \in [a, b]$ и $x'' \in [a, b]$ от неравенството $|x'-x''| < \delta$ следва неравенството $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$.

Доказателствата на формулираните в този параграф теореми за непрекъснатите функции са изложени в следващия параграф.

Упражнения. 1. В трите примера от стр. 106—107, поясняващи съдържанието на теоремата на Вайерщрас, нито една от функциите $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ не притежава най-голяма стойност. Посочете кое от условията на теоремата е нарушено във всеки от тези примери.

2. Определете осцилацията на функцията $f(x)=\sin x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Също в интервалите $[0, \pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Разделете интервала $[0, \pi]$ на подинтервали така, че осцилацията на функцията $f(x)=\cos x$ във всеки от тях да бъде по-малка от $\frac{1}{2}$.

§ 25*. Доказателства на теоремите от § 24

Тук ще изложим доказателствата на формулираните в предишния параграф четири теореми. Във всички тези доказателства, както читателят ще види, основна роля играе теоремата на Кантор, която установихме в § 4.

За да не повтаряме всеки път, нека напомним, че и четирите теореми, които предстои да докажем, бяха изказани при едно и също предположение — дадена е една функция $f(x)$, непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$.

И така, без да повтаряме самите формулировки на теоремите, пристъпваме към излагане на техните доказателства.

Доказателство на теоремата за ограниченост. Трябва да докажем, че функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$. Да допуснем противното — че тя не е ограничена в него. Да разделим този интервал на две равни части с помощта на точката c, която е средата му. Ясно е, че ако функцията $f(x)$ би била ограничена в двата затворени интервала $[a, c]$ и $[c, b]$, то тя щеше да бъде ограничена и в интервала $[a, b]$. Следователно тя е неограничена поне в един от тези два интервала, който ще означим за удобство с $[a_1, b_1]$. Ако сега разделим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части, то също така поне в едната от неговите две половини, която ще означим с $[a_2, b_2]$, $f(x)$ ще бъде неограничена. По-нататък ние можем да разделим и $[a_2, b_2]$ на две равни части и т. н. По такъв начин получаваме една редица от затворени интервали

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

всеки от които съдържа следващия и във всеки от които функцията $f(x)$ е неограничена. Освен това $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$ и следователно $\lim(b_n-a_n)=$

$=0$. Според теоремата на Кантор ще съществува една точка ξ, принадлежаща на всички тези интервали. Но ξ е точка от интервала $[a, b]$, така че функцията $f(x)$ е непрекъсната в тази точка. Съгласно дефиницията на Коши за непрекъснатост, като вземем числото $\varepsilon=1$, ние можем да намерим такова положително число δ, че при $|x-\xi|<\delta$ да бъде изпълнено неравенството $|f(x)-f(\xi)|<1$. Това ще рече, за всяка точка x от интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ имаме

$$f(\xi)-1<f(x)<f(\xi)+1.$$

Тези неравенства показват, че функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. За достатъчно големи стойности на n обаче съгласно бележката, която направихме в края на § 4, интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ и следователно $f(x)$ ще бъде ограничена и в интервала $[a_n, b_n]$. Това обаче противоречи на начина, по който построихме тези интервали. Полученото противоречие показва, че нашето допускане за неограничеността на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ е било погрешно. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теоремата на Вайерщрас. Ще докажем, че функцията $f(x)$ притежава най-голяма стойност, което, както видяхме, е равносилно с това да покажем, че тя достига своята точна горна граница. Аналогично се доказва, че $f(x)$ достига и точната си долна граница.

И така нека L е точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[a,b]$. Да разделим този интервал на две равни части $[a, c]$ и $[c, b]$. Ясно е, че L е горна граница на функцията $f(x)$ както в интервала $[a, c]$, така и в интервала $[c, b]$. Поради това, ако L_1 е нейната точна горна граница в $[a, c]$, а L_2 — точната ѝ горна граница в $[c, b]$, то нито едно от тези две числа няма да надминава L. Ако и двете обаче биха били по-малки от L, то по-голямото от тях би представлявало горна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, при това такава горна граница, която е по-малка от най-малката горна граница. Това е невъзможно. Следователно поне едно от числата L_1 и L_2 е равно на L, т. е. числото L е точна горна граница на $f(x)$ не само в интервала $[a, b]$, но също и в поне един от двата интервала $[a, c]$ и $[c, b]$, който ще означим с $[a_1, b_1]$. Ако сега разделим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части, то отново ще видим, че поне в една от двете негови половинки, която ще означим с $[a_2, b_2]$, числото L се явява точна горна граница на $f(x)$. Разделяме след това $[a_2, b_2]$ на две равни части и т. н. Получаваме една редица от затворени интервали

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

във всеки от които точната горна граница на функцията $f(x)$ е равна на L. Веднага се вижда, че тази редица удовлетворява условията на теоремата на Кантор. Следователно съществува една точка ξ, съдържаща се във всичките интервали $[a_n, b_n]$. Ще покажем, че $f(\xi)=L$. Разбира се, ние знаем, че $f(\xi)\leqq L$. Да допуснем, че $f(\xi)<L$. Можем тогава да вземем такова число L', което да удовлетворява неравенствата $f(\xi)<L'<L$.

Ако разгледаме сега функцията $\varphi(x)=L'-f(x)$, то тази функция е непрекъсната в точката ξ и освен това има в тази точка положителна стойност, понеже $\varphi(\xi)=L'-f(\xi)>0$. Тогава съгласно теорема 1 от § 22 ще съществува такава околност $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ на точката ξ, във всички точки на която ще имаме $\varphi(x)>0$, т. е. $L'-f(x)>0$, или $f(x)<L'$. Това показва, че числото L' е горна граница на $f(x)$ в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. Но при достатъчно големи стойности на n интервалът $[a_n, b_n]$ се съдържа изцяло в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, поради което L' ще бъде горна граница на $f(x)$ и в интервала $[a_n, b_n]$. Това обаче е невъзможно, тъй като $L'<L$, а L беше точната, т. е. най-малката, горна граница на $f(x)$ в $[a_n, b_n]$. Полученото противоречие показва, че нашето допускане $f(\xi)<L$ е погрешно. Следователно $f(\xi)=L$. И така $f(x)$ достига своята точна горна граница L.

Доказателство на теоремата на Болцано. Нека $f(a)\neq f(b)$ и λ е число, намиращо се между $f(a)$ и $f(b)$. Трябва да покажем, че съществува точка α от (a, b), за която $f(\alpha)=\lambda$. Нека разгледаме най-напред случая, когато $f(a)<0$ и $f(b)>0$. В този случай ще покажем, че в интервала (a, b) има точка α, за която $f(\alpha)=0$. Да допуснем, че такава точка не съществува. Тогава, ако разделим интервала $[a, b]$ на два равни подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$, то единият от тях ще притежава свойството функцията $f(x)$ да получава в краищата му стойности с противни знаци. И наистина, ако $f(c)>0$, то това ще бъде интервалът $[a, c]$, ако ли пък $f(c)<0$, такъв ще бъде интервалът $[c, b]$. (Случаят $f(c)=0$ е изключен, тъй като допуснахме, че $f(x)$ не става никога равна на нула в интервала $[a, b]$.) Интервала с това свойство да означим с $[a_1, b_1]$. Ако и него разделим на два равни подинтервала, то отново единият от тях ще бъде такъв, че функцията $f(x)$ ще получава стойности с противни знаци в неговите краища. Този подинтервал ще означим с $[a_2, b_2]$, ще разделим след това и него на две равни части и т. н. Получаваме една редица от такива затворени интервали

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

че в краищата на всеки от тях $f(x)$ получава стойности с противни знаци. Тази редица удовлетворява условията на теоремата на Кантор и следователно определя една точка ξ, съдържаща се във всички тези интервали. Тъй като функцията съгласно нашето допускане не е равна на 0 за никоя точка от интервала $[a, b]$, то $f(\xi)\neq 0$, т. е. $f(\xi)>0$ или $f(\xi)<0$. Да разгледаме случая $f(\xi)>0$. (В случай че $f(\xi)<0$, разсъжденията са аналогични.) От непрекъснатостта на $f(x)$ в точката ξ и от неравенството $f(\xi)>0$ следва, че съществува такъв интервал $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, в който за всяко x имаме $f(x)>0$. Тъй като $[a_n, b_n]$ се съдържа изцяло в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, когато n е достатъчно голямо, то за такива стойности на n ще имаме едновременно $f(a_n)>0$ и $f(b_n)>0$. Но ние бяхме избрали интервалите $[a_n, b_n]$ така, че функцията $f(x)$ да получава в краищата им стойности с противни знаци. Получихме противоречие, което показва, че нашето първоначално допускане е погрешно, и следователно съществува поне една точка α от (a, b), за която $f(\alpha)=0$.

Остава да разгледаме общия случай на теоремата. Беше дадено, че $f(a)\neq f(b)$. Можем да приемем, че $f(a)<f(b)$. (Случаят $f(a)>f(b)$ е аналогичен.) Тогава $f(a)<\lambda<f(b)$. Разглеждаме функцията $\varphi(x)=f(x)-\lambda$. Тя е очевидно непрекъсната в интервала $[a, b]$. Освен това $\varphi(a)<0$ и $\varphi(b)>0$. Следователно съществува поне една точка α, намираща се между a и b, за която имаме $\varphi(\alpha)=0$. Оттук получаваме $f(\alpha)=\lambda$. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теоремата за равномерната непрекъснатост. Нека ε е произволно положително число. Трябва да установим, че интервалът $[a, b]$ може да бъде разделен на краен брой подинтервали така, че във всеки от тях осцилацията на функцията $f(x)$ да бъде по-малка от ε. Да допуснем,че това е невъзможно. Ако разделим интервала $[a, b]$ на два равни подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$ и ако всеки от тях би могъл да се раздели от своя страна на краен брой подинтервали, във всеки от които $f(x)$ да има осцилация, по-малка от ε, то с това бихме получили едно разделяне на целия интервал $[a, b]$ на части, което има същото свойство. Тъй като допуснахме, че това е невъзможно, то поне един от двата подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$ не може да бъде разделен по казания начин. Да означим този подинтервал с $[a_1, b_1]$ и да разгледаме след това неговите две половини. Поне едната от тях, която ще означим с $[a_2, b_2]$, също така не може да бъде разделена на подинтервали по желания начин. Като разсъждаваме все така, ние ще получим една безкрайна редица от затворени интервали

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

която удовлетворява условията на теоремата на Кантор. При това нито един от интервалите $[a_n, b_n]$ не може да бъде разделен на подинтервали така, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки от тях да бъде по-малка от ε. Оттук следва, разбира се, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от интервалите $[a_n, b_n]$ е по-голяма или равна на ε. Съгласно теоремата на Кантор съществува една точка ξ, съдържаща се във всичките интервали $[a_n, b_n]$. Да си образуваме положителното число $\frac{\varepsilon}{3}$. Поради непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката ξ ще съществува такова число $\delta>0$, че за всяко x от интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ ще имаме $|f(x)-f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$, или

$$f(\xi)-\frac{\varepsilon}{3}<f(x)<f(\xi)+\frac{\varepsilon}{3}.$$

За достатъчно големи стойности на n обаче интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа изцяло в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. Ето защо за такива стойности на n числата $f(\xi)+\frac{\varepsilon}{3}$ и $f(\xi)-\frac{\varepsilon}{3}$ се явяват, както това се вижда от последните неравенства, съответно горна и долна граница на функцията

$f(x)$ в интервала $[a_n, b_n]$. Тогава осцилацията на $f(x)$ в този интервал няма да надминава числото

$$\left(f(\xi)+\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(f(\xi)-\frac{\varepsilon}{3}\right)=\frac{2}{3}\varepsilon$$

и значи ще бъде по-малка от ε. Но във всеки от интервалите $[a_n, b_n]$ осцилацията на $f(x)$ беше по-голяма или равна на ε. Полученото противоречие показва, че нашето първоначално допускане е било погрешно. С това теоремата е доказана.

§ 26.* Равномерна непрекъснатост

Нека една функция $f(x)$ е непрекъсната в едно множество M от реални числа. Ако вземем някое положително число ε, то за всяка точка x_1 от M ще съществува съгласно дефиницията на Коши за непрекъснатост такова положително число δ, че от неравенството $|x-x_1|<\delta$, където $x \in M$, да следва неравенството $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$. Ясно е обаче, че това число δ ще зависи в нашия случай не само от числото ε, но и от точката x_1 — когато избираме по различни начини x_1 в множеството M, δ също може да получава различни стойности. Особено важен е случаят, когато числото δ може да бъде избрано независимо от точката x_1, т. е. когато при произволно избрано $\varepsilon>0$ съществува такова положително число δ, че за всички точки x_1, принадлежащи на M, от $|x-x_1|<\delta$ (при $x \in M$) да следва $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$. В този случай ще казваме, че функцията $f(x)$ *е равномерно непрекъсната* в множеството M. Всичко това може да бъде изказано със следната

Дефиниция. *Една функция $f(x)$ се нарича равномерно непрекъсната в дадено множество M от реални числа, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от M, удовлетворяващи неравенството*

$$|x'-x''|<\delta,$$

е изпълнено неравенството

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Като пример за равномерно непрекъсната функция можем да посочим функцията $f(x)=\sin x$, разгледана в цялата своя дефиниционна област — интервала $(-\infty, \infty)$. Ако ε е произволно положително число, то изискванията на дефиницията за равномерна непрекъснатост ще бъдат удовлетворени при $\delta=\varepsilon$. Наистина, каквито и две числа x' и x'' да си вземем, ще имаме

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x'+x''}{x}\right|\leq 2\frac{|x'-x''|}{2}\cdot 1=|x'-x''|,$$

откъдето виждаме, че от неравенотвото $|x'-x''|<\delta$ или — все едно — от неравенството $|x'-x''|<\varepsilon$ следва неравенството $|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon$. Тук числото δ беше определено от нас в зависимост от ε, но независимо от избора на точките x' и x'', които бяха произволно взети в интервала

$(-\infty, \infty)$. Това показва, че функцията $f(x)=\sin x$ е равномерно непрекъсната в този интервал.

Една функция $f(x)$ може да бъде непрекъсната в някое множество M от реални числа, без да бъде равномерно непрекъсната в него, дори когато това множество е един краен интервал. Наистина, нека вземем следния пример. Да разгледаме функцията $f(x)=\frac{1}{x}$. Тя е непрекъсната в интервала $(0, 1]$. Нека допуснем, че тя е и равномерно непрекъсната в този интервал. Тогава, вземайки си $\varepsilon=1$, ще можем да намерим такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от интервала $(0, 1]$, изпълняващи неравенството $|x'-x''|<\delta$, да имаме $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|<1$. Нека сега x' е такова число, принадлежащо на интервала $(0, 1]$, за което да имаме $x'<\frac{1}{2}$ и $x'<\frac{\delta}{2}$, и нека $x''=x'+\frac{\delta}{2}$. Тогава $|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta$ и следователно трябва да имаме $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|<1$. Това обаче не е така, тъй като

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x'+\frac{\delta}{2}}\right|=\frac{\frac{\delta}{2}}{x'\left(x'+\frac{\delta}{2}\right)}\geqq\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}=1.$$

И така функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1]$, макар и да е непрекъсната в него.

Оказва се обаче, че *всяка функция, непрекъсната в един краен и затворен интервал, е и равномерно непрекъсната в този интервал.*

И наистина точно това е съдържанието на твърдението, формулирано в края на § 24 и получено като следствие от теоремата за осцилациите. Именно поради това тази теорема ние нарекохме още *теорема за равномерната непрекъснатост.*

Упражнения. 1. Покажете директно, т. е. без да се позовавате на теоремата за равномерната непрекъснатост, че функцията $f(x)=x^2$ е равномерно непрекъсната в интервала $[0, 2]$.

2. Покажете, че функцията $f(x)=x^2$ не е равномерно непрекъсната в интервала $[0, \infty)$.

ГЛАВА V

ПРОИЗВОДНИ. ПРАВИЛА ЗА ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

Понятието производна лежи в основата на онази част от математическия анализ, която носи названието диференциално смятане. То е било въведено преди около 300 години от Нютон (1642—1727 г.) и Лайбниц (1646—1716 г.) — създателите на диференциалното и интегралното смятане. Те са дошли до това понятие независимо един от друг и по различни пътища. Лайбниц го е въвел, решавайки задачата за дефиниране на понятието допирателна към графиката на функция. У Нютон пък то се е появило, когато пожелал да въведе понятието моментна скорост на движеща се материална точка.

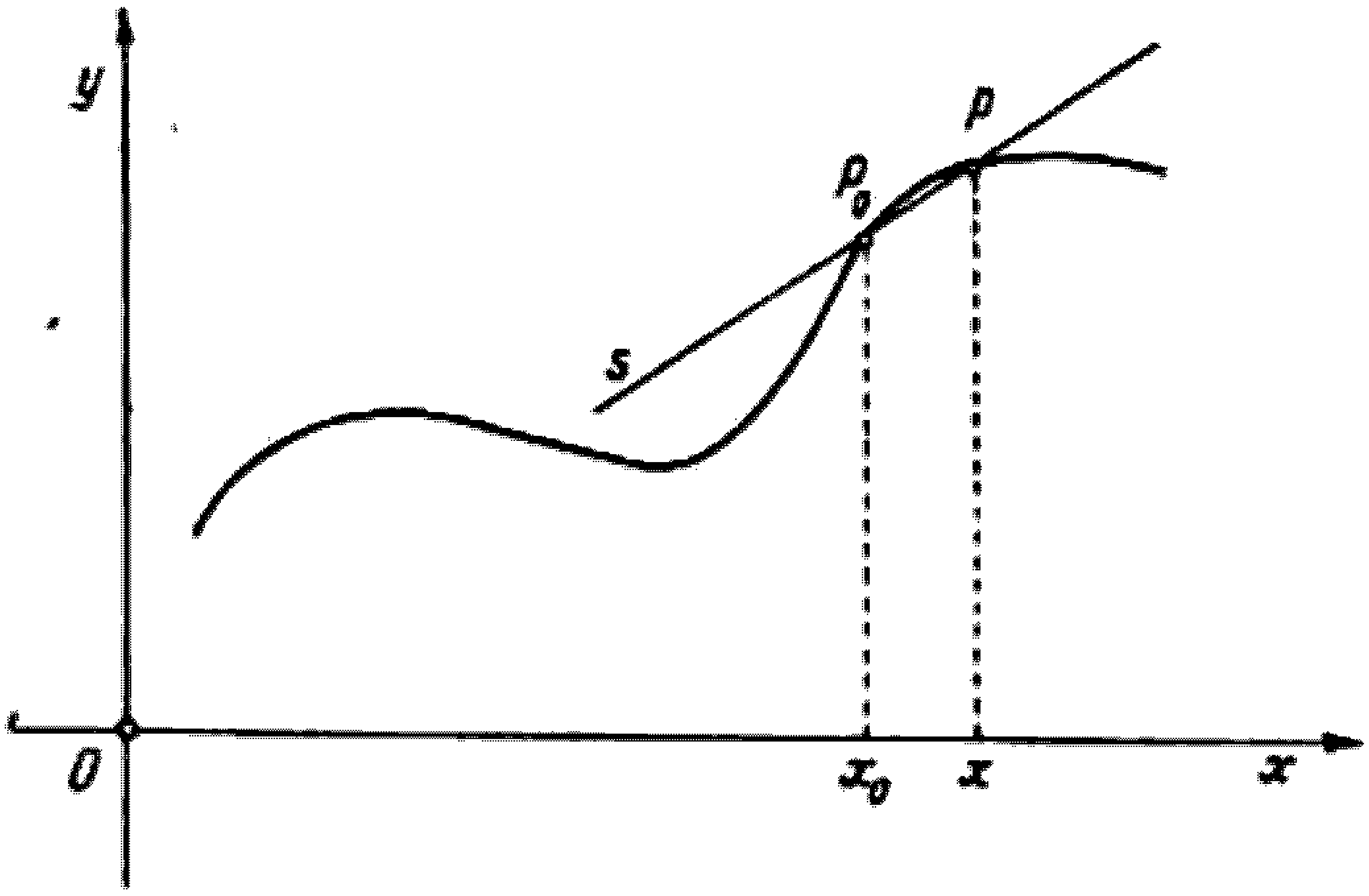
В тази глава ще се запознаем с дефиницията на понятието производна, както и с най-простите свойства на функциите, притежаващи производна. Ще изведем някои основни правила за намирането на производните и ще покажем как може да бъде пресметната производната на всяка елементарна функция.

§ 27. Производна

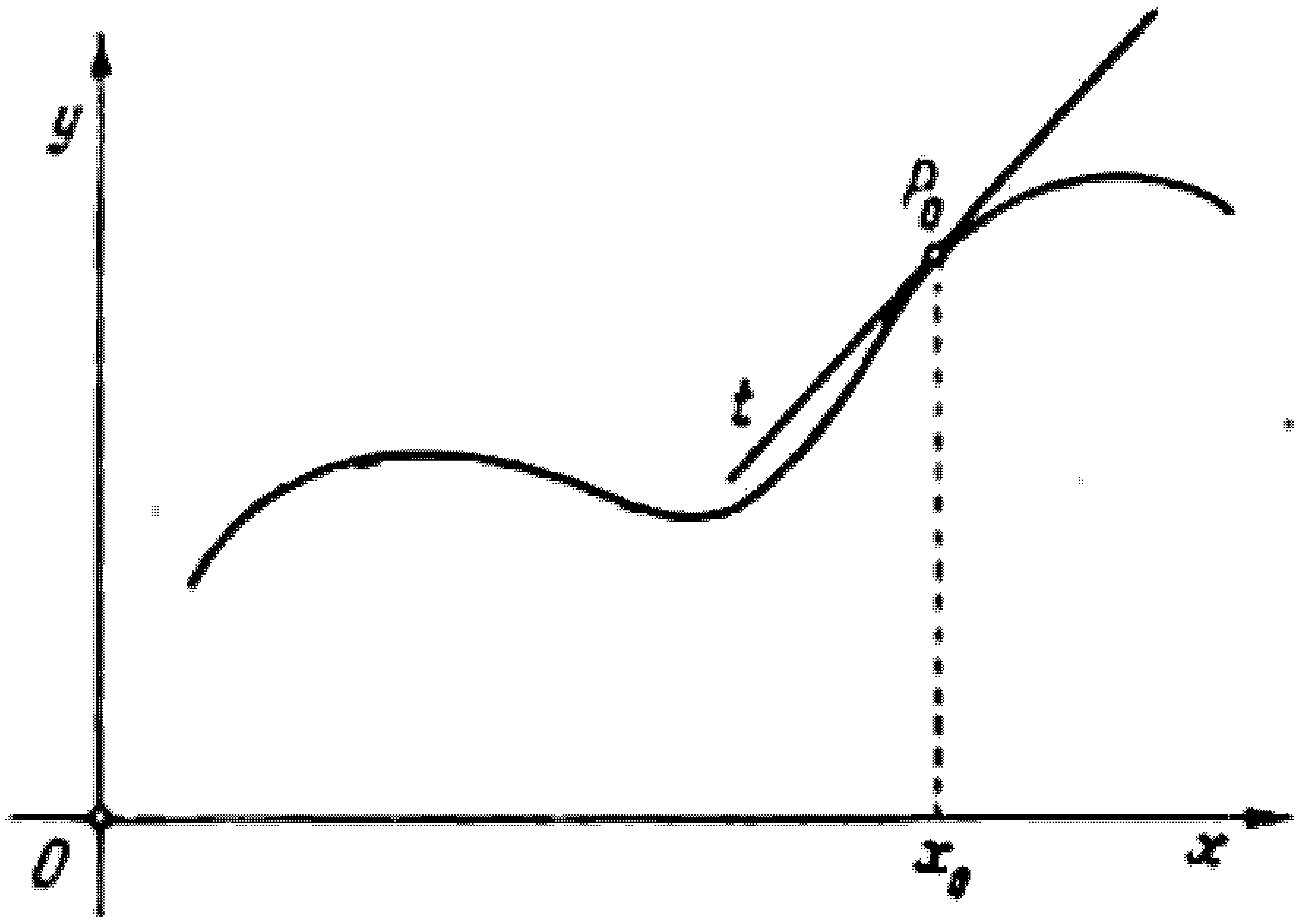
Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в някоя околност на една точка x_0. Това ще рече, че точката x_0 притежава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, съдържаща се изцяло в дефиниционната област M на функцията $f(x)$. Такава точка ще наричаме **вътрешна** за множеството M. Специално, когато M е интервал, всички негови точки с изключение на краищата му са вътрешни съгласно тази дефиниция.

Да разгледаме графиката на функцията $f(x)$ в равнината с координатна система Oxy. На точката x_0 от оста Ox отговаря точката $P_0(x_0, f(x_0))$ от графиката на функцията. Да вземем някоя друга точка x от оста Ox, принадлежаща на дадената околност на точката x_0. На нея отговаря точката $P(x, f(x))$ от графиката. Двете точки P_0 и P определят една права s, секуща на дадената графика (черт. 14). Уравнението на тази секуща, както е известно от аналитичната геометрия, е

$$(1)\qquad \eta - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(\xi - x_0),$$



Черт. 14



Черт. 15

където $k(x)$ и $m(x)$ са функции на x, дефинирани в някоя околност на една точка x_0. Ако дадем на x една фиксирана стойност и разглеждаме ξ и η като текущи координати, то уравнението (2) ще бъде уравнение на права. Когато x се мени, коефициентите в това уравнение ще се изменят, така че и самата права с уравнение (2) ще се мени. Ако двете функции $k(x)$ и $m(x)$ притежават граници при x, клонящо към x_0, и ако $\lim\limits_{x\to x_0} k(x)=k_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} m(x)=m_0$, то естествено е да приемем по дефиниция, че променливата права с уравнение (2) клони към правата с уравнение

$$\eta=k_0\xi+m_0, \tag{3}$$

когато x клони към x_0.

Да се върнем сега към нашата секуща s с уравнение (1). Коефициентите в това уравнение са функции на x. Ако го напишем във вида (2), то ще изглежда така:

$$\eta=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xi+f(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}x_0.$$

Тук имаме

$$k(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad m(x)=f(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}x_0.$$

Ясно е, че функциите $k(x)$ и $m(x)$ ще имат граници при x, клонящо към x_0, когато функцията

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

притежава граница при $x\to x_0$.

Тази граница, когато съществува, играе, както ще видим, важна роля при много въпроси в математиката. В същност ние достигнахме по този начин до основното понятие на диференциалното смятане, което се въвежда със следната

Дефиниция. *Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в дадена вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, когато съществува границата*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{5}$$

Тази граница се нарича производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'(x_0)$.

Следователно графиката на една функция $f(x)$ притежава допирателна в някоя своя точка $P_0(x_0, f(x_0))$, когато функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0. При това уравнението на тази допирателна ще бъде

$$\eta-f(x_0)=f'(x_0)(\xi-x_0). \tag{6}$$

Веднага можем да дадем известно геометрично тълкуване на $f'(x_0)$. Числото $f'(x_0)$ представлява т. нар. ъглов коефициент в уравнението (6) и ще бъде равно, както знаем от аналитичната геометрия, на тангенса на ъгъла, който допирателната сключва с положителната посока на оста Ox.

До понятието производна можем да стигнем и по друг път — при решаването на една задача от механиката, а именно задачата за дефинирането на понятието моментна скорост на точка, движеща се праволинейно. Нека точката P се движи върху една насочена права и нека нейното движение е еднопосочно. Положението на точката P върху правата се определя от разстоянието ѝ OP до една фиксирана точка O. Нека разстоянието OP е известно във всеки момент, т. е. нека то да бъде дадено като известна функция $f(t)$ на времето t. Ако разгледаме два различни момента t_0 и t, то частното

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

представлява отношението на изминатия от точката P път от момента t_0 до момента t към дължината на интервала от време, през който тя се е движела. Това частно се нарича, както знаем, средна скорост на движението за периода от време от момента t_0 до момента t. Естествено е тогава да потърсим границата

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

и ако тя съществува, да я наречем скорост на движението на точката P в момента t_0. Тази граница, както вече знаем, не е нищо друго освен производната $f'(t_0)$.

Нека отбележим още, че частното (4), с помощта на което дефинирахме $f'(x_0)$, често се записва и другояче. Полагаме $h=x-x_0$ и получаваме $x=x_0+h$. При това е ясно, че изискването x да клони към x_0 е равносилно с изискването h да клони към 0. Ето защо производната $f'(x_0)$ може да се дефинира и с равенството

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Ние ще си служим както с единия, тъй и с другия начин на записване.

Нека вземем един пример за пресмятане на производна. Ще покажем, че функцията $f(x)=x^2$ е диференцуема в точката $x_0=3$, и ще пресметнем нейната производна в тази точка. Имаме

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

И така търсената производна съществува и е равна на 6.

Като си спомним дефинициите на границите $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} \varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} \varphi(x)$, естествено идваме до следната

Дефиниция. *Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема отдясно в точката x_0, когато съществува границата*

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ или } \lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Тази граница се нарича дясна производна на $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'_+(x_0)$.

Аналогично: *казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема отляво в точката x_0, когато съществува границата*

$$\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ или } \lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Тази граница се нарича лява производна на $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'_-(x_0)$.

Ясно е, че за да говорим за дясна производна на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0, не е нужно тази точка да бъде вътрешна за дефиниционната област на $f(x)$, т. е. $f(x)$ да бъде дефинирана непременно в някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на тази точка. Достатъчно е тя да бъде дефинирана в някой интервал от вида $[x_0, x_0+\delta)$. Такъв интервал ще наричаме занапред дясна околност на точката x_0. Аналогично за лява производна може да става дума винаги когато функцията $f(x)$ е дефинирана в някоя лява околност на точката x_0, т. е. в някой интервал от вида $(x_0-\delta, x_0]$.

В бъдеще понякога ще твърдим, че дадена функция $f(x)$ е дефинирана и диференцуема в някакъв затворен интервал $[a, b]$. В такива случаи диференцуемостта на $f(x)$ в крайните точки на този интервал трябва да се разбира в смисъл на едностранна (т. е. лява, съответно дясна) диференцуемост. Същото се отнася за диференцуемост на функция в интервал от вида $[a, b)$ или $(a, b]$.

Лесно се разбира, че ако една функция $f(x)$ има производна в дадена точка x_0, то тя притежава също и лява, и дясна производна в тази точка и при това

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0). \tag{7}$$

Обратно, ако функцията $f(x)$ има както лява, така и дясна производна в една точка x_0 и ако тези две производни са равни помежду си, то тя е диференцуема в тази точка, като, разбира се, пак е в сила равенството (7).

Някои функции обаче, както ще видим, може да притежават както лява, тъй и дясна производна в дадена точка x_0, без при това тези две производни да бъдат равни помежду си.

Съществуват ли функции, които в някоя вътрешна точка от своята дефиниционна област не са диференцуеми? Отговорът на този въпрос ще се получи съвсем естествено, след като се запознаем с връзката, която съществува между двете важни понятия — непрекъснатост и диференцуемост. Тази връзка се дава със следната

Теорема. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в дадена точка x_0, то тя е и непрекъсната в тази точка.*

Доказателство. От условието е ясно, че функцията

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

дефинирана при $x \neq x_0$, притежава граница, когато x клони към x_0, и че $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=f'(x_0)$. Тогава от равенството

$$f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0),$$

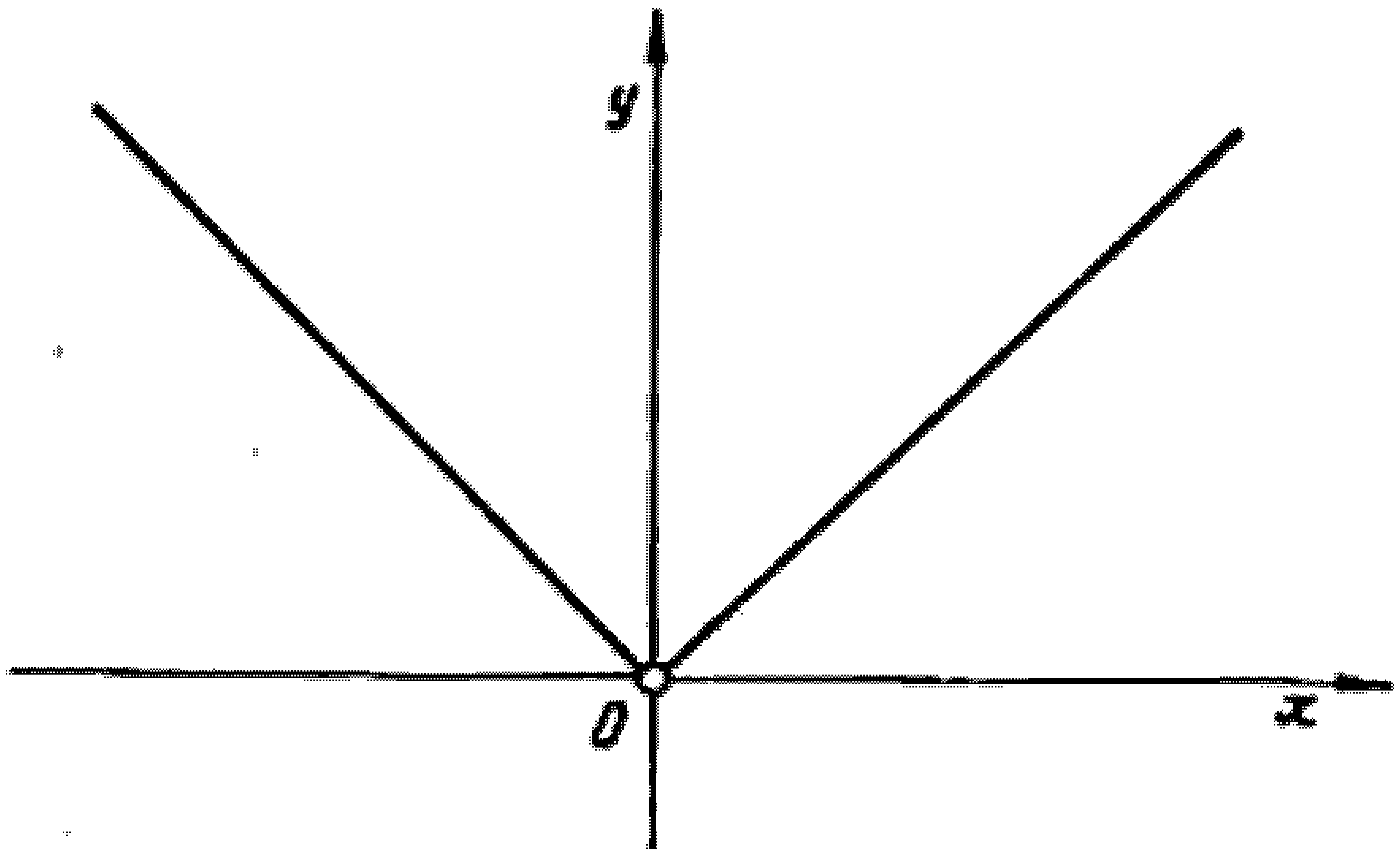
валидно при $x \neq x_0$, получаваме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\,.\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f(x_0),$$

което показва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Аналогично може да се докаже, че от съществуването на лява (съответно дясна) производна на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0 следва, че $f(x)$ е непрекъсната отляво (съответно отдясно) в тази точка.

Ясно е от казаното дотук, че за да бъде една функция $f(x)$ диференцуема в една вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, необходимо е тя да бъде непрекъсната в тази точка. Следователно, ако искаме да получим пример за недиференцуема функция, достатъчно е да вземем функция, която е прекъсната в някоя точка x_0.



Черт. 16

Една функция $f(x)$ обаче може да не притежава производна в дадена точка x_0 и когато е непрекъсната в тази точка. Нека вземем например функцията $f(x)=|x|$ (черт. 16) и нека $x_0=0$. Тогава

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|}{x}.$$

При $x<0$ имаме $\frac{|x|}{x}=-1$, а при $x>0$ получаваме $\frac{|x|}{x}=1$. Ясно е тогава, че дадената функция притежава в точката $x_0=0$ както лява, така и дясна производна, а именно

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0,\ x<0}\frac{|x|}{x}=-1,\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0,\ x>0}\frac{|x|}{x}=1.$$

Тук обаче $f'_-(0)\neq f'_+(0)$. Следователно границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

не съществува, т. е. функцията $f(x)=|x|$ не е диференцуема в точката $x_0=0$, макар и да е непрекъсната в тази точка.

Да вземем друг пример. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x=0, \end{cases}$$

както знаем (вж. § 21, стр. 99—100) е непрекъсната в точката $x_0=0$. За нея при $x_0=0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}.$$

Ние знаем обаче (вж. § 18, стр. 83—84), че функцията $\sin\frac{1}{x}$ не притежава граница при x, клонящо към 0. Следователно функцията $f(x)$ не е диференцуема в точката $x_0=0$. При това тя не притежава в тази точка нито лява, нито дясна производна, тъй като функцията $\sin\frac{1}{x}$, както лесно се вижда, няма граница и когато x клони само отляво или пък само отдясно към 0.

Тези примери показват, че непрекъснатостта на една функция в дадена точка x_0 не е достатъчно условие за нейната диференцуемост. И така изискването за диференцуемост е по-силно от изискването за непрекъснатост.

Накрая в този параграф нека отбележим, че освен чрез знака $f'(x)$ производната на една функция $f(x)$ се бележи още и така:

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{df}{dx},$$

а когато сме положили $y=f(x)$, също и чрез

$$y' \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}.$$

§ 28. Основни формули за диференциране

Ще докажем няколко прости, но важни теореми, които дават редица правила за диференцирането на функциите. Първите четири от тях се отнасят до диференцирането на сумата, разликата, произведението и частното на две диференцуеми функции.

Теорема 1. *Ако функциите* $u(x)$ *и* $v(x)$ *са диференцуеми в точката* x_0, *то функцията* $f(x)=u(x)+v(x)$ *е също диференцуема в тази точка и*

$$f'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0).$$

Доказателство. Наистина

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)+v(x)-[u(x_0)+v(x_0)]}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)+v'(x_0).$$

Теорема 2. *Ако функциите* $u(x)$ *и* $v(x)$ *са диференцуеми в точката* x_0, *то функцията* $f(x)=u(x)-v(x)$ *е също диференцуема в* x_0 *и*

$$f'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0).$$

Доказателство. Имаме

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-v(x)-[u(x_0)-v(x_0)]}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)-v'(x_0).$$

Теорема 3. *Ако функциите* $u(x)$ *и* $v(x)$ *са диференцуеми в точката* x_0, *то функцията* $f(x)=u(x)\,v(x)$ *е също така диференцуема в тази точка и*

$$f'(x_0)=u'(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0).$$

Доказателство. Действително

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}v(x)+u(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}.$$

Функцията $v(x)$, която е диференцуема в точката x_0, ще бъде, както знаем, и непрекъсната в нея. Следователно ще имаме

$$\lim_{x\to x_0} v(x)=v(x_0).$$

Ето защо получаваме

$$f'(x_0)=u'(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0).$$

Теорема 4. *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в точката x_0 и ако освен това $v(x_0)\neq 0$, то функцията $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ е също диференцуема в тази точка и при това*

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Доказателство. Да отбележим най-напред, че функцията $v(x)$, която е в знаменателя, е непрекъсната в точката x_0 (поради това, че е диференцуема в тази точка) и следователно ще бъде различна от нула не само в точката x_0, но и в цяла една околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на тази точка (вж. теорема 1 от § 22). Ето защо частното $\frac{u(x)}{v(x)}$ сигурно ще има смисъл в някоя околност на x_0. Да пресметнем сега производната на тази функция. Имаме

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{v(x)\,.\,v(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{[v(x_0)]^2}\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{[v(x_0)]^2}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\,v(x_0)-\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\,u(x_0)\right]$$

$$=\frac{u'(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Формулите, получени в доказаните четири теореми, обикновено се записват накратко по следния начин:

$$(u+v)'=u'+v',\quad (u-v)'=u'-v',$$

$$(uv)'=u'v+uv',\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Преминаваме към извеждане на важната формула за производна на съставна функция.

Теорема 5. *Ако функцията $F(u)$ е диференцуема в точката u_0, а функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и ако $f(x_0)=u_0$, то съставната функция $\varphi(x)=F[f(x)]$ е диференцуема в точката x_0 и при това*

$$\varphi'(x_0)=F'(u_0)f'(x_0). \tag{1}$$

Доказателство. Да си образуваме функцията

$$\psi(u)=\frac{F(u)-F(u_0)}{u-u_0}, \tag{2}$$

дефинирана при $u\neq u_0$. Понеже $\lim\limits_{u\to u_0}\psi(u)=F'(u_0)$, то като дефинираме допълнително $\psi(u)$ при $u=u_0$ с равенството $\psi(u_0)=F'(u_0)$, ще получим функция, непрекъсната в точката u_0.

От равенството (2) получаваме при $u\neq u_0$ равенството

$$F(u)-F(u_0)=\psi(u)\,(u-u_0). \tag{3}$$

При това с непосредствена проверка се убеждаваме, че то е изпълнено не само при $u\neq u_0$, но и при $u=u_0$.

Да пристъпим сега към пресмятане на производната на съставната функция $\varphi(x)$. Като вземем пред вид равенството (3), ще имаме

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{F[f(x)]-F[f(x_0)]}{x-x_0}=\frac{\psi[f(x)]\,.\,[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}.$$

Оттук

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\psi[f(x)]\,.\,\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Но функцията $\psi[f(x)]$ е съставена с помощта на двете функции $\psi(u)$ и $f(x)$, първата от които е непрекъсната в точката u_0, а втората — в точката x_0 (непрекъснатостта на функцията $f(x)$ следва от нейната диференцуемост). При това $f(x_0)=u_0$. Тогава въз основа на теоремата за непрекъснатост на съставни функции заключаваме, че функцията $\psi[f(x)]$ е непрекъсната в точката x_0 и че следователно

$$\lim_{x\to x_0}\psi[f(x)]=\psi[f(x_0)]=\psi(u_0)=F'(u_0).$$

Окончателно получаваме

$$\varphi'(x_0)=F'(u_0)f'(x_0),$$

което трябваше да се докаже.*

---

* Има един случай, когато доказателството на тази теорема може да се извърши значително по-просто — това е случаят, когато за точките от някоя околност на x_0 е изпълнено неравенството $f(x)\neq f(x_0)$. Този случай е налице например, когато функцията $f(x)$ е обратима — по-специално, когато тя е строго монотонна в някоя околност на точката x_0. Тогава формулата (1) следва непосредствено от очевидното равенство

$$\frac{F[f(x)]-F[f(x_0)]}{x-x_0}=\frac{F[f(x)]-F[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

от условието $f(x_0)=u_0$ и от забележката, че поради непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката x_0 имаме $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

При работа с тази формула обикновено записваме получения резултат по-кратко с помощта на следните равенства:

$$y=F(u),\quad u=f(x),\quad y'=F'(u).u'.$$

Следва една теорема, отнасяща се до пресмятане производната на обратна функция. Тук ще формулираме и докажем тази теорема само за един специален, но важен случай, въпреки че тя е вярна и при по-общи условия.

Теорема 6. *Нека функцията $f(x)$ е строго растяща (или строго намаляваща) в един интервал D. Ако тя е диференцуема в дадена вътрешна точка x_0 на този интервал и ако $f'(x_0)\neq 0$, то нейната обратна функция $\varphi(y)$ е диференцуема в точката $y_0=f(x_0)$, като при това*

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказателство. Нека забележим, че поради строгата си монотонност функцията $f(x)$ е обратима в интервала D. Поради непрекъснатостта пък на $f(x)$ дефиниционното множество на нейната обратна функция $\varphi(y)$ (което съвпада с множеството от функционалните стойности на $f(x)$) е също един интервал D_1. От друга страна, лесно е да съобразим, като използуваме пак строгата монотонност на $f(x)$, че щом точката x_0 е вътрешна за интервала D, точката y_0 ще бъде също вътрешна за интервала D_1. Това ни позволява да разгледаме въпроса за диференцуемостта на функцията $\varphi(y)$ в точката y_0. Знаем, че

$$\varphi'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}.$$

Нашата цел е да покажем, че написаната граница съществува и да я пресметнем. От дефиницията на понятието обратна функция следва, че за всяко y от дефиниционната област на $\varphi(y)$ имаме $y=f[\varphi(y)]$. Ето защо

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{f[\varphi(y)]-f[\varphi(y_0)]}.$$

Функцията $\varphi(y)$ като обратна на една обратима функция е също обратима и следователно при $y\neq y_0$ ще имаме $\varphi(y)\neq\varphi(y_0)$. Това ни дава възможност да напишем последното равенство във вида

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f[\varphi(y)]-f[\varphi(y_0)]}{\varphi(y)-\varphi(y_0)}}.$$

От друга страна, условието за диференцуемост на функцията $f(x)$ в точката x_0 ни дава

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Но функцията $\varphi(y)$, както знаем от теорема 4 на § 22, е непрекъсната в точката y_0. Ето защо

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0).$$

Най-сетне да забележим, че от равенството $y_0=f(x_0)$ получаваме $\varphi(y_0)=x_0$. Поради това ще имаме

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=x_0.$$

Всичко казано дотук ни позволява да получим следната верига от равенства:

$$\varphi'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f[\varphi(y)]-f[\varphi(y_0)]}{\varphi(y)-\varphi(y_0)}}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f[\varphi(y)]-f(x_0)}{\varphi(y)-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

с което теоремата е доказана.

Да отбележим накрая още, че равенството (4) може да се запише и така:

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'[f(x_0)]}.$$

§ 29. Производни на елементарните функции

Сега ще пристъпим към получаването на формули, които ни позволяват да пресмятаме производните на всички елементарни функции.

Най-напред ще покажем, че производната на всяка функция-константа е равна на нула. Наистина нека $f(x)=C$ за всяко x и нека x_0 е една произволна точка от реалната права. Имаме

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0.$$

И така получаваме формулата

$$(1)\qquad (C)'=0.$$

След това нека пресметнем производната на функцията $f(x)=x^n$, където степенният показател n е цяло число. Да разгледаме най-напред случая, когато n е цяло положително число. При произволно x_0 ще имаме

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\cdots+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x_0^{n-1}+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h+\cdots+\binom{n}{n}h^{n-1}\right]=nx_0^{n-1}.$$

И така при цяло положително n за всяко x имаме

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{2}$$

Нека сега n е цяло отрицателно число и $x\neq 0$. Като използуваме правилото за производна на частно и вземем пред вид, че числото $-n$ ще бъде в този случай положително, получаваме

$$(x^n)'=\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)'=\frac{0\,.\,x^{-n}-(-n)\,x^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{n-1}.$$

Най-сетне, ако $n=0$, то при $x\neq 0$ имаме $x^n=x^0=1$, т. е. функцията $f(x)=x^n$ е константа. Следователно тя ще има производна нула, така че и в този случай формулата (2) запазва своята валидност. И така формулата (2) е установена за всички цели значения на степенния показател n и при всяко $x\neq 0$.

Лесно е да се разбере, че с помощта на формулите (1) и (2) и на теоремите за производна на сума, разлика, произведение и частно на диференцуеми функции можем да пресметнем производната на всяка рационална функция.

Да преминем сега към тригонометричните функции. Ако $f(x)=\sin x$, то при произволно x_0 имаме

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x_0.$$

Ако $f(x)=\cos x$, то ще получим

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x_0.$$

И така за всяко x получаваме формулите

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (\cos x)'=-\sin x. \tag{3}$$

С тяхна помощ веднага ще изведем формули за функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$. И наистина

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cotg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Получихме формулите

$$(4)\qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

Сега можем лесно да намерим формули за производните на обратните на тригонометричните функции. За целта ще използуваме теорема 6 от § 28.

Нека $\varphi(x)=\arcsin x$ и нека x_0 е точка, удовлетворяваща неравенствата $-1<x_0<1$. Ако $\arcsin x_0=u_0$, то $x_0=\sin u_0$ и $-\frac{\pi}{2}<u_0<\frac{\pi}{2}$. Като вземем пред вид, че функцията $\varphi(x)=\arcsin x$ е обратна на функцията $f(u)=\sin u$ и че $f'(u_0)=\cos u_0>0$, ще получим

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=\frac{1}{\cos u_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

И така за всяко x от отворения интервал $(-1, 1)$ имаме

$$(5)\qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нека отбележим, че функцията $\arcsin x$ е дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$, но формулата (5) е установена само в отворения интервал $(-1, 1)$. Може да се покаже, че функцията $\arcsin x$ изобщо не е диференцуема в точките $x=-1$ и $x=1$.

Функцията $\varphi(x)=\arccos x$ е обратна на функцията $f(u)=\cos u$. Ако x_0 е отново някоя точка от отворения интервал $(-1, 1)$ и ако $\arccos x_0=u_0$, то $x_0=\cos u_0$ и $0<u_0<\pi$. Тогава $f'(u_0)=-\sin u_0\neq 0$ и поради $\sin u_0>0$ ще имаме

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=-\frac{1}{\sin u_0}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u_0}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

Следователно за всяко x от отворения интервал $(-1, 1)$ е валидна формулата

$$(6)\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

За функцията $\arccos x$, която, както знаем, е дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$, може също да се покаже, че не е диференцуема в точките $x=-1$ и $x=1$.

Функцията $\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ е обратна на функцията $f(u)=\operatorname{tg} u$. Нека x_0 е произволна точка от реалната права и нека $\operatorname{arc\,tg} x_0=u_0$. Тогава $x_0=\operatorname{tg} u_0$ и $-\frac{\pi}{2}<u_0<\frac{\pi}{2}$. Ето защо ще получим

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=\cos^2 u_0=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u_0}=\frac{1}{1+x_0^2}.$$

Следователно за всяко x имаме

$$(7) \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Функцията $\varphi(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$ пък е обратна на функцията $f(u) = \operatorname{cotg} u$. Ако x_0 е произволно реално число и ако $\operatorname{arc\,cotg} x_0 = u_0$, то $x_0 = \operatorname{cotg} u_0$ и $0 < u_0 < \pi$. Тогава ще имаме

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{f'(u_0)} = -\sin^2 u_0 = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 u_0} = -\frac{1}{1+x_0^2}.$$

Получихме за всяко x формулата

$$(8) \qquad (\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Нека сега се занимаем с логаритмичната функция. Най-напред да разгледаме функцията $f(x) = \ln x$ (т. нар. „естествен логаритъм", т. е. логаритъм, чиято основа е числото e). Тя е дефинирана, както знаем, в интервала $(0, \infty)$. При $x_0 > 0$ ще имаме

$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}.$$

Ако сега положим $z = \frac{x_0}{h}$, то ясно е, че при $h > 0$ и $h \to 0$ ще имаме $z \to \infty$, а при $h < 0$ и $h \to 0$ ще имаме $z \to -\infty$. Ще покажем сега, че функцията $f(x) = \ln x$ е диференцуема в точката x_0 както отляво, така и отдясно. Наистина

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0,\, h>0} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{z\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0,\, h<0} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{z\to -\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}.$$

Тъй като дясната и лявата производна се оказаха равни, то следва, че функцията $f(x) = \ln x$ е диференцуема в точката x_0. Но x_0 беше произволно положително число. Следователно за всяко $x > 0$ е установена формулата

$$(9) \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Не е трудно сега да получим формула за производната на функцията $f(x)=\log_a x$ при $a>0$, $a\neq 1$. Достатъчно е да използуваме равенството $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$. Получаваме

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{10}$$

Функцията $\varphi(x)=e^x$ е обратна на функцията $f(u)=\ln u$. Ако x_0 е произволно число от реалната права и ако $e^{x_0}=u_0$, то $u_0>0$ и ще имаме

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=\frac{1}{\frac{1}{u_0}}=u_0=e^{x_0}.$$

И тъй за всяко x имаме

$$(e^x)'=e^x, \tag{11}$$

т. е. функцията e^x се оказа равна на своята производна.

С помощта на формула (11) и на теоремата за производна на съставна функция веднага можем да изведем и формула за производната на функцията $f(x)=a^x$, където $a>0$. За целта ще използуваме равенството $a^x=e^{x\ln a}$. Ще получим

$$(a^x)'=a^x\ln a. \tag{12}$$

Най-сетне нека разгледаме и степенната функция $f(x)=x^n$ при $x>0$ и при произволен степенен показател. Ще видим, че формулата (2), която бяхме извели за цели стойности на степенния показател n, остава валидна при $x>0$ и когато n е произволно реално число. Наистина имаме $x^n=e^{n\ln x}$, откъдето

$$(x^n)'=(e^{n\ln x})'=ne^{n\ln x}(\ln x)'=ne^{n\ln x}\cdot\frac{1}{x}=n\,\frac{x^n}{x}=nx^{n-1}.$$

Като прилагаме формулата (2) при дробни степенни показатели, ние ще можем да пресмятаме производните на всички ирационални функции.

По такъв начин, както виждаме, ние разполагаме с формули, които ни позволяват да намерим производната на всяка елементарна функция, както и на всяка съставна функция, образувана с помощта на елементарни функции.

Ето един преглед на тези формули:

$(C)'=0.$ $\qquad$ $(\cos x)'=-\sin x,$

$(x^n)'=nx^{n-1}.$ $\qquad$ $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$

$(\sin x)'=\cos x.$ $\qquad$ $(\operatorname{cotg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \qquad (\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\cdot$$

$$(e^x)' = e^x. \qquad (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\cdot \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\cdot$$

Ще добавим тук и формулите от § 28:

$$(u+v)' = u' + v'. \qquad (u-v)' = u' - v'.$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\quad v \neq 0.$$

$$y = F(u),\quad u = f(x),\quad y' = F'(u) \cdot u'.$$

Упражнения. Да се намерят производните на следните функции:

1. $y = \dfrac{x}{2}\cdot$
2. $y = 2x^3 + 4x - 7.$
3. $y = \dfrac{1}{x}\cdot$
4. $y = \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$
5. $y = \dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}\cdot$
6. $y = \sqrt{x}.$
7. $y = \sqrt[3]{x}.$
8. $y = \sqrt{2x+3}.$
9. $y = x \sin x.$
10. $y = \sin^2 x.$
11. $y = x^2 \sin x + \sin x^2 + \sin 2x.$
12. $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 x.$
13. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$
14. $y = \ln \cos x_0.$
15. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$
16. $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}\cdot$
17. $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\cdot$
18. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+x}{1-x}\cdot$
19. $y = e^{-x^2}.$
20. $y = \ln[\ln(\ln x)].$
21. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\cdot$

22. $y = x^x$. [Решение: Имаме $\ln y = x \ln x$,

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \frac{1}{x}, \quad y' = x^x (\ln x + 1).]$$

23. $y = (1 + x^2)^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

24. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \dfrac{\sqrt{2 + 2x^2} - x}{\sqrt{2 + 2x^2} + x} + \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

Отг. $y' = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2}$.

25. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$.

Отг. $y' = \dfrac{1}{1 + x^4}$.

26. $y = e^{\arcsin x} (x + \sqrt{1 - x^2})$ при $|x| < 1$.

Отг. $y' = 2 e^{\arcsin x}$,

27. $y = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ при $|x| < 1$.

Отг. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

28. $y = 2 \arcsin \dfrac{1}{2} (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})$ при $|x| < 1$.

Отг. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

29. $y = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

Отг. $y' = \dfrac{1}{x^3 + 1}$.

30. $y = \dfrac{\arccos x}{x} - \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$ при $0 < x < 1$.

Отг. $y' = \dfrac{\arccos x}{x^2}$.

§ 30. Последователни производни

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в един интервал (т. е. във всяка негова точка), то нейната производна $f'(x)$, чиято стойност, разбира се, ще зависи от точката x, се явява също така функция на x, дефинирана в този интервал. Тя от своя страна може също да бъде диференцуема. Нейната производна се нарича **втора производна** на функцията $f(x)$ и се бележи с $f''(x)$ или с $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (когато пишем $y=f(x)$, тя се бележи също и с y'' или с $\frac{d^2y}{dx^2}$). Производната пък на втората производна (ако съществува) се нарича **трета** производна на $f(x)$ и т. н. Изобщо n-**тата производна** на дадена функция $y=f(x)$ се дефинира като производна на нейната $(n-1)$-ва производна и се бележи чрез някой от знаците $f^{(n)}(x)$; $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $y^{(n)}$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$. Производната $f'(x)$ се нарича още **първа производна** на $f(x)$. Понякога се приема самата функция $f(x)$ да се разглежда като своя „нулева" производна, тъй че $f^{(0)}(x)=f(x)$.

В някои случаи с помощта на принципа на пълната математична индукция можем да получим формули, даващи общия вид на последователните производни на една или друга функция. Ето някои примери:

1. Нека $f(x)=e^x$. Имаме $f'(x)=e^x$ и ако $f^{(n)}(x)=e^x$ за някое n, то $f^{(n+1)}(x)=e^x$. Следователно

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad \text{при} \quad n=1,\ 2, \dots,$$

или даже по-общо

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad \text{при} \quad n=0,\ 1,\ 2, \dots$$

2. Нека $f(x)=\ln(1+x)$. Имаме $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ при $x>-1$. Като намерим няколко последователни производни, лесно се досещаме, че общият вид на производните ще бъде

$$(1) \qquad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{при } n=1,\ 2, \dots (x>-1).$$

За да се убедим в правилността на тази формула, допускаме, че тя е вярна за някое n, и чрез диференциране получаваме

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!((1+x)^{-n})'$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Получихме същия резултат, до който щяхме да достигнем, ако във формулата (1) бяхме заместили n с $n+1$. С това тази формула е доказана.

3. Нека $f(x)=\sin x$. Ако диференцираме няколко пъти тази функция, ще видим, че всички намерени производни удовлетворяват равенството

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

По-специално то е вярно при $n=1$, тъй като $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Освен това веднага се проверява, че ако е изпълнено за някое цяло положително число n, то ще бъде вярно и когато заменим n с $n+1$. С това нашата формула е установена за всички цели положителни значения на n. Тя е вярна впрочем и при $n=0$, ако под $f^{(0)}(x)$ разбираме самата функция $f(x)$. И така имаме

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при} \quad n=0,\ 1,\ 2.$$

Упражнения. Намерете формули за n-тите производни на функциите:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$. 2. $f(x)=\sin ax$. 3. $f(x)=\cos ax$. 4. $f(x)=\sin^2 x$.

5. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. 6. $f(x)=a^x$. 7. $f(x)=\log_a x$.

§ 31. Диференциал

Понятието диференциал, което на времето се е считало за едно от основните понятия на диференциалното и интегралното смятане, днес играе второстепенна роля в анализа. В известен смисъл, особено що се отнася до диференциалното смятане на функциите на една променлива, може да се каже, че неговото въвеждане изобщо не е необходимо. Понятието производна се оказва напълно достатъчно, за да бъдат формулирани всички по-съществени резултати от тази част на анализа.

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в някоя околност на дадена точка x. Да вземем някоя друга точка $x+h$, принадлежаща на същата околност. Числото h се нарича нарастване на аргумента и се бележи понякога (макар и немного удачно) с Δx. Разликата пък между функционалните стойности $f(x+h)-f(x)$ се нарича нарастване на функцията и се бележи с $\Delta f(x)$, а ако сме положили $y=f(x)$, също и с Δy. Следователно имаме

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x, то, както знаем, към нейната графика може да се прекара допирателна в точката $P(x, f(x))$. В близост с тази точка графиката на функцията не се отдалечава много от своята допирателна и с известно приближение можем да считаме, че когато нарастването Δx е малко, тя съвпада с нея. Това ще рече да заменим истинската функционална стойност $f(x+\Delta x)$ с една приближена стойност, отговаряща на съответната точка от допирателната. Уравнението на допирателната е

$$\eta-f(x)=f'(x)(\xi-x),$$

където η и ξ са текущите координати. На точката $\xi=x+\Delta x$ от оста Ox отговаря точка от допирателната с ордината $\eta=f(x)+f'(x)\Delta x$. Тази именно стойност на ординатата приемаме за приближена функционална стойност. В такъв случай за нарастването на функцията получаваме следната приближена стойност:

$$f(x)+f'(x)\Delta x-f(x)=f'(x)\Delta x,$$

която наричаме **диференциал** на функцията $f(x)$ в точката x и която бележим с $df(x)$ или с dy. И така имаме

$$df(x)=f'(x)\Delta x, \tag{1}$$

или

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

(На черт. 17 нарастването Δy се дава в отсечката $P'Q$, а диференциалът dy — с отсечката $P'T$.)

Ако вземем функцията $f(x)=x$, то равенството (1) се превръща в

$$dx=\Delta x \tag{3}$$

— един резултат, който е съвсем очевиден и от геометрични съображения, тъй като в този случай графиката на функцията (която е права линия) съвпада със своята допирателна. Това ни дава основание да запишем равенствата (1) и (2) във вида

$$df(x)=f'(x)dx, \tag{4}$$

или

$$dy=f'(x)dx, \tag{5}$$

или най-просто във вида

$$dy=y'dx. \tag{6}$$

Нека отбележим, че оттук за y' получаваме

$$y'=\frac{dy}{dx},$$

което напълно се съгласува с един от приетите по-рано от нас начини за означаване на производната.

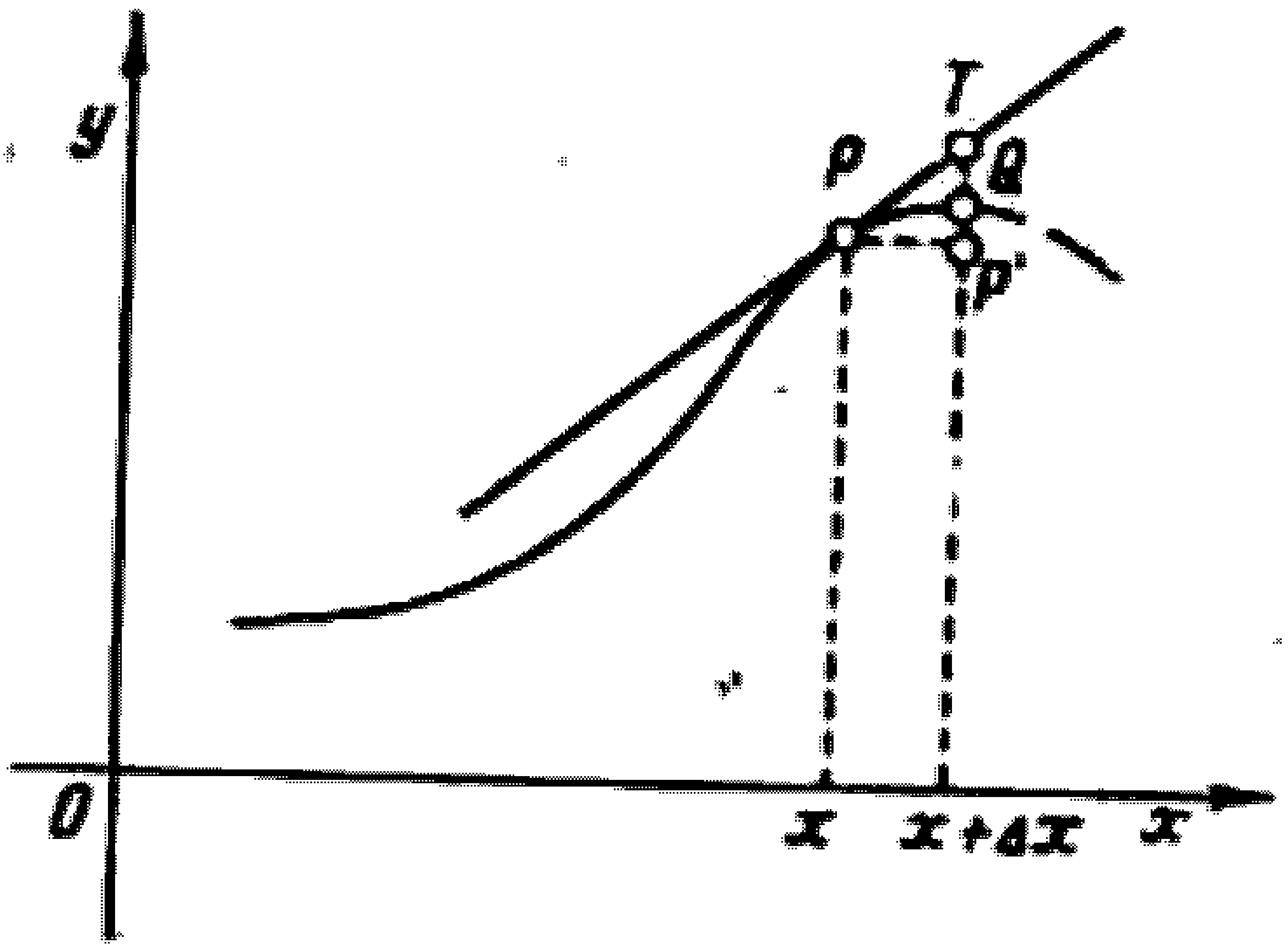
Нека още веднъж подчертаем, че макар Δx и dx да са равни помежду си, Δy и dy в общия случай не съвпадат и ние можем да заместваме Δy с dy само когато работим приближено. Връзката между Δx и Δy, от една страна, и dx и dy, от друга, се дава от дефиницията на понятието производна, която може да бъде записана така:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{7}$$

Това равенство означава, че разликата $\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}$, която е функция на Δx, клони към нула, когато $\Delta x \to 0$. С други думи, за функцията

$$\varphi(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx} \tag{8}$$

имаме $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)=0$.



Черт. 17

От равенството (8), като вземем пред вид, че $dx=\Delta x$, получаваме

$$\Delta y=dy+\Delta x . \varphi(\Delta x). \tag{9}$$

Равенството (9) показва, че когато Δx е малко, Δy наистина твърде малко се различава от dy, тъй като разликата между тях представлява произведение, първият множител на което е Δx, а вторият е функция, която клони към нула при $\Delta x \to 0$.

За диференциалите на функциите са валидни някои формули, аналогични на съответните формули за производните. Така например, ако $u(x)$ и $v(x)$ са две диференцуеми функции, то за тяхната сума имаме

$$d[u(x)+v(x)]=[u(x)+v(x)]'dx=[u'(x)+v'(x)]dx$$
$$=u'(x)dx+v'(x)dx=du(x)+dv(x).$$

Получената формула, записваме кратко така:

$$d(u+v)=du+dv.$$

Аналогично се установяват формулите

$$d(u-v)=du-dv,$$

$$d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Нека сега е дадена съставната функция $y=f[\varphi(x)]$. Ако положим $u=\varphi(x)$, ще имаме

$$dy=y'dx=f'[\varphi(x)].\varphi'(x)dx=f'(u)u'dx,$$

или окончателно

$$dy=f'(u)du$$

— една формула, която по външен вид не се различава от формулата (5), въпреки че тук u не е независима променлива, а функция на x.

Диференциалът dy на една функция $y=f(x)$ се нарича още неин първи диференциал. Неговият диференциал пък се нарича втори диференциал на функцията y и се бележи с d^2y. Аналогично се дефинират диференциалите от по-висок ред, които бележим с d^3y, d^4y и т. н. При това се условяме при намирането на втория диференциал, третия диференциал и т. н. на дадена функция да разглеждаме dx като константа. Така получаваме например

$$d^2y=d(dy)=(dy)'dx=(y'dx)'dx=(y''dx)dx=y''dx^2.$$

(Нека забележим, че изразът $(dx)^2$ се бележи за краткост с dx^2. Той не бива да се смесва с диференциала на функцията x^2, които се бележи с $d(x^2)$. Аналогично $(dx)^3$, $(dx)^4$ и т. н. се бележат съответно с dx^3, dx^4 и т. н.)

С помощта на принципа за математическата индукция лесно се установява следната формула за n-тия диференциал на една функция $y=f(x)$:

$$d^n y=y^{(n)} dx^n.$$

ГЛАВА VI

ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО СМЯТАНЕ

Тази глава е посветена на няколко теореми, играещи основна роля в математическия анализ. Като се запознаем с тези теореми, ние ще се убедим във важността на понятието производна на функция. Така например ще видим как простото познаване на знака на производната (или по-общо на няколко последователни производни) на дадена функция ни дава възможност да направим заключения за характера на изменението на самата функция, за характерните особености на нейната графика. Ще се запознаем също така с формулата на Тейлор, играеща важна роля при много въпроси от анализа, както и с теоремите на Лопитал, представляващи удобно средство за намиране границите на функциите в редица случаи.

§ 32. Локални екстремуми. Теореми на Ферма и Рол

Понятията локален максимум и локален минимум се срещат при много въпроси от анализа и неговите приложения.

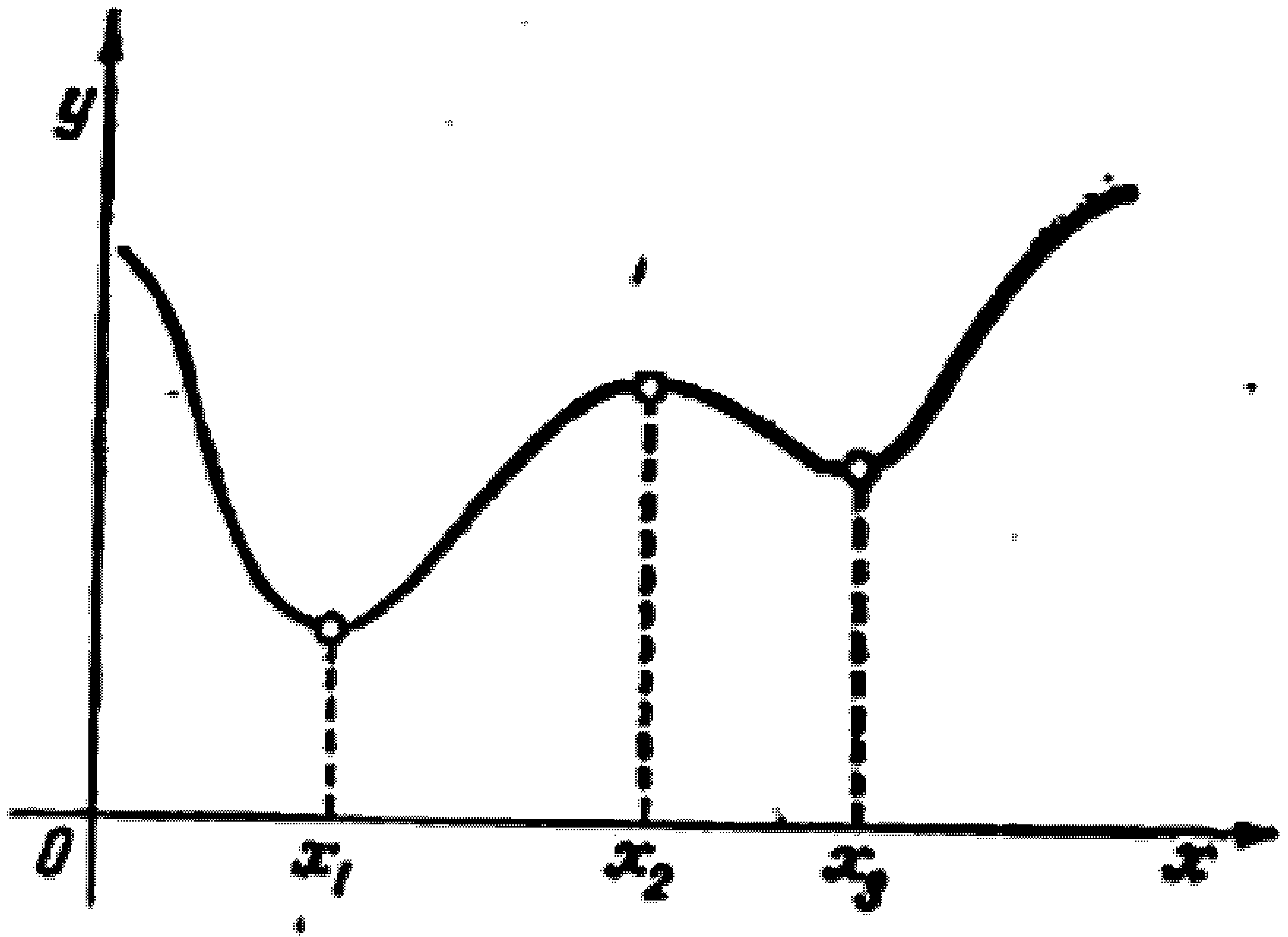
Дефиниция. *Ще казваме, че функцията $f(x)$ има* локален максимум *в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, когато съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на x_0, съдържаща се в дефиниционната област на $f(x)$, че за всяко x от тази околност да имаме $f(x)\leqq f(x_0)$.*

Аналогично $f(x)$ *ще има* локален минимум *в x_0, когато x_0 е вътрешна точка за дефиниционната област на функцията и когато за всяко x от някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0 е изпълнено неравенството $f(x)\geqq f(x_0)$.*

Локалните максимуми и локалните минимуми ще наричаме с общото име *локални екстремуми.*

На черт. 18 е показана графиката на една функция, която има локален максимум в точката x_2 и два локални минимума — в точките x_1 и x_3.

Нека отбележим, че ако една функция $f(x)$ има локален максимум в дадена точка x_0, то стойността ѝ в тази точка е максимална в сравнение със стойностите, които тя приема в точките от някоя околност на x_0, но не непременно в сравнение с всички нейни функционални стойности. Другояче казано, един локален максимум не е непременно най-голямата стойност на разглежданата функция. Аналогична забележка важи и за понятието локален минимум.



Черт. 18

Разбира се, една функция $f(x)$ може да притежава локален екстремум в дадена точка x_0, без да бъде непрекъсната в тази точка. Така например функцията

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

има очевидно локален максимум в точката $x_0=0$, като същевременно е прекъсната в тази точка.

Също така една функция, която е непрекъсната в дадена точка x_0, може да има локален екстремум в тази точка, без да бъде диференцуема в нея. Такъв е случаят например с функцията $f(x)=|x|$, която има локален минимум при $x_0=0$ (черт. 16). Както знаем, тя е непрекъсната, но не е диференцуема в тази точка.

Когато обаче една функция $f(x)$, имаща локален екстремум в някоя точка x_0, е диференцуема в същата точка, нейната производна $f'(x_0)$ не може да бъде произволна. В сила е следната важна

Теорема на Ферма. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в една вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област и ако тя има локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0)=0$.*

Доказателство. Да разгледаме случая, когато $f(x)$ има локален максимум в точката x_0 (случаят, когато тя има локален минимум, се разглежда аналогично). Тогава ще бъде изпълнено неравенството

$$(1) \qquad f(x) \leq f(x_0)$$

за всяко x от някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0. Както знаем, дясната и лявата производна в точката x_0 се дефинират с равенствата

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0,\, x>x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0,\, x<x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ако разгледаме частното

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2}$$

за стойности на x, принадлежащи на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и същевременно по-големи от x_0, ще видим, че числителят е отрицателен или нула поради неравенството (1), а знаменателят е положителен. Оттук заключаваме, че

$$f_+'(x_0)\leqq 0.$$

Да разгледаме сега частното (2) за такива значения на x от интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, които са по-малки от x_0. Числителят е пак отрицателен или нула, но сега и знаменателят е отрицателен. Поради това заключаваме, че

$$f_-'(x_0)\geqq 0.$$

По условие функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0. Следователно $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. И така имаме едновременно $f'(x_0)\leqq 0$ и $f'(x_0)\geqq 0$, откъдето получаваме окончателно $f'(x_0)=0$.

Като си спомним геометричното тълкуване на производната, лесно е да дадем геометрично тълкуване и на твърдението от теоремата на Ферма. Както знаем, допирателната към графиката на една функция $f(x)$, прекарана през точката $P_0(x_0, f(x_0))$, има уравнение

$$\eta-f(x_0)=f'(x_0)(\xi-x_0).$$

Теоремата на Ферма установява следователно, че допирателната, прекарана през точка от графиката на $f(x)$, в която функцията има екстремум, е успоредна на оста Ox (черт. 19) (при условие, разбира се, че тази допирателна съществува, т. е. че функцията $f(x)$ е диференцуема в съответната точка).

Теоремата на Ферма може да се формулира още така:

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0, то за да притежава тя локален екстремум в тази точка, необходимо е производната ѝ $f'(x_0)$ да бъде равна на нула.

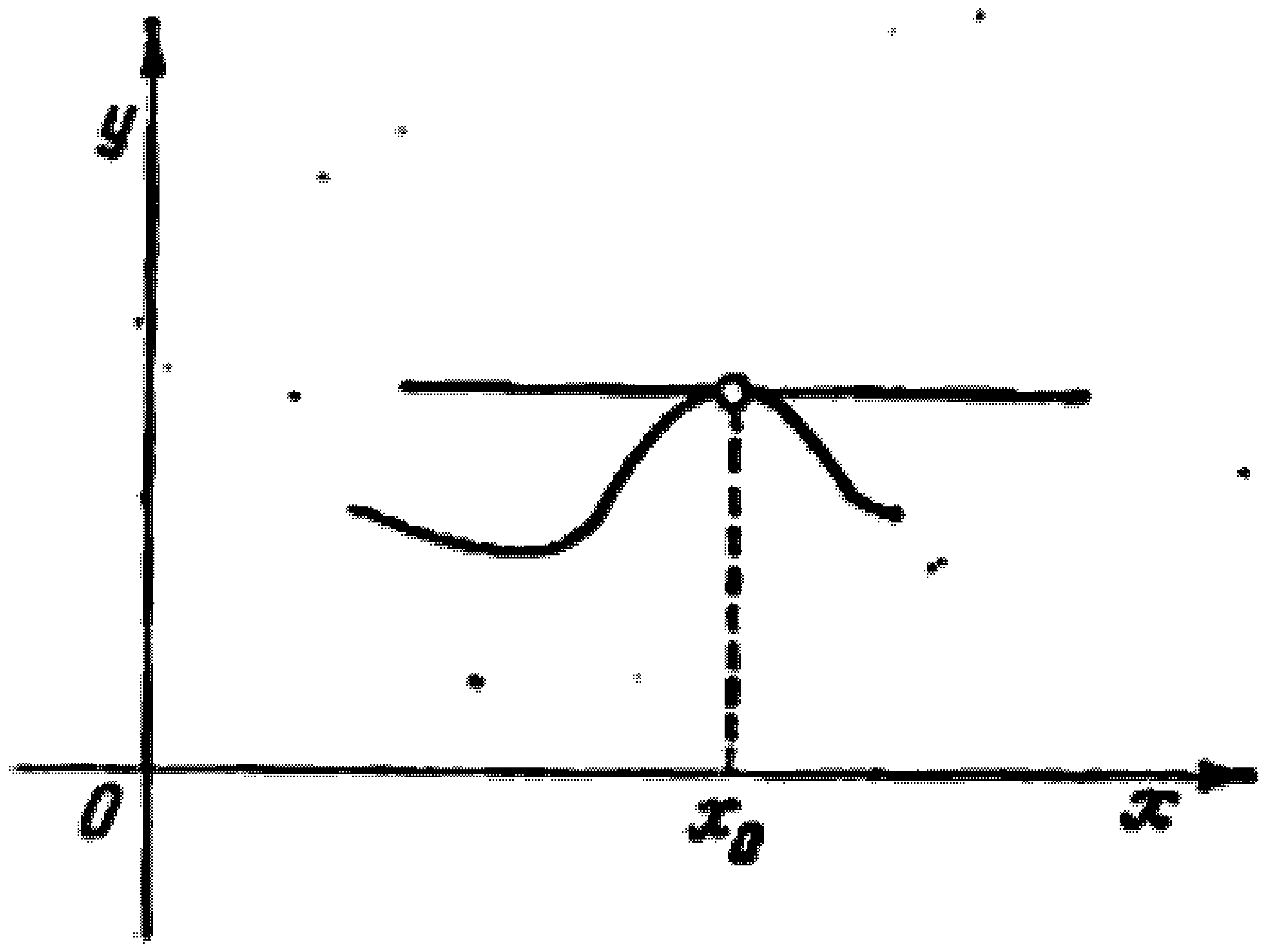
Ето защо, когато искаме да намерим локалните екстремуми на някоя диференцуема функция, ние обикновено най-напред намираме нейната производна и търсим ония точки, в които тази производна е нула. Това са единствените точки, в които е възможно да имаме екстремуми.

Анулирането на първата производна в една точка обаче не е още достатъчно условие за съществуването на локален екстремум. Така например функцията $f(x)=x^3$ има производна, равна на нула при $x_0=0$.

Въпреки това тя не притежава нито максимум, нито минимум в тази точка. Това се вижда от обстоятелството, че във всяка околност на точката $x_0=0$ се намират както положителни, така и отрицателни числа, а, от друга страна, имаме $f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$, докато $f(0)=0$ (черт. 26).

С намирането на достатъчни условия за съществуването на локален екстремум ние ще се занимаем по-нататък.

Друга основна теорема на диференциалното смятане е следната:



Черт. 19

Теорема на Рол. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и е диференцуема в отворения интервал (a, b) и ако освен това $f(a)=f(b)$, то съществува поне една точка ξ, намираща се между a и b, за която $f'(\xi)=0$.*

Доказателство. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал, то тя е ограничена. Да означим съответно с L и l точната й горна и точната й долна граница в интервала $[a, b]$.

Ако $l=L$, то поради неравенствата $l \leqq f(x) \leqq L$, изпълнени за всяко x от интервала $[a, b]$, функцията $f(x)$ ще бъде константа в този интервал. Тогава нейната производна е нула в целия интервал (a, b) и теоремата е доказана.

Остава да разгледаме случая, когато $l<L$. Съгласно теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x_1 и x_2 от интервала $[a, b]$, такива, че $f(x_1)=l$ и $f(x_2)=L$. Поне една от тези две точки е вътрешна за интервала $[a, b]$. И наистина, ако допуснем противното, т. е. ако имаме $x_1=a$, $x_2=b$ или пък $x_1=b$, $x_2=a$, то от условието $f(a)=f(b)$ бихме получили $l=L$. Нека x_1 е вътрешна точка за интервала $[a, b]$. Но $f(x_1)=l$. Тогава функцията $f(x)$ ще има очевидно локален минимум в точката x_1, поради което съгласно теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_1)=0$. Ако пък x_1 е крайна точка за интервала $[a, b]$, то точката x_2 ще бъде вътрешна. В такъв случай това ще бъде една точка на локален максимум и следова-

телно пак по теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_2)=0$. И така във всички случаи съществува точка ξ между a и b, за която $f'(\xi)=0$.

Геометричното тълкуване на теоремата на Рол е същото, както при теоремата на Ферма. То се състои в това, че при направените в условието на теоремата предположения съществува такава точка от графиката на дадената функция, допирателната в която е успоредна на оста Ox.

§ 33. Теорема за крайните нараствания и следствия

С помощта на теоремата на Рол се установява следната теорема, заемаща важно място в диференциалното и интегралното смятане.

Теорема за крайните нараствания. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и е диференцуема в отворения интервал (a, b), то съществува поне една точка ξ между a и b, за която*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1}$$

Доказателство. Да въведем помощната функция

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Тя е също непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцуема в интервала (a, b). Лесно се пресмята при това, че $\varphi(a)=f(a)$ и $\varphi(b)=f(a)$. И така имаме $\varphi(a)=\varphi(b)$. Значи функцията $\varphi(x)$ удовлетворява всички условия на теоремата на Рол и следователно ще съществува поне една точка ξ между a и b, за която $\varphi'(\xi)=0$. Но

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Оттук получаваме

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

или

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

с което теоремата е доказана.

Нека отбележим, че теоремата за крайните нараствания представлява едно обобщение на теоремата на Рол, която се получава веднага в случая, когато е изпълнено равенството $f(a)=f(b)$.

Равенството (1) често се записва и другояче. За целта се полага $h=b-a$ и $\theta=\frac{\xi-a}{b-a}$. Оттук получаваме $\xi-a=\theta(b-a)$, или $\xi=a+\theta h$.

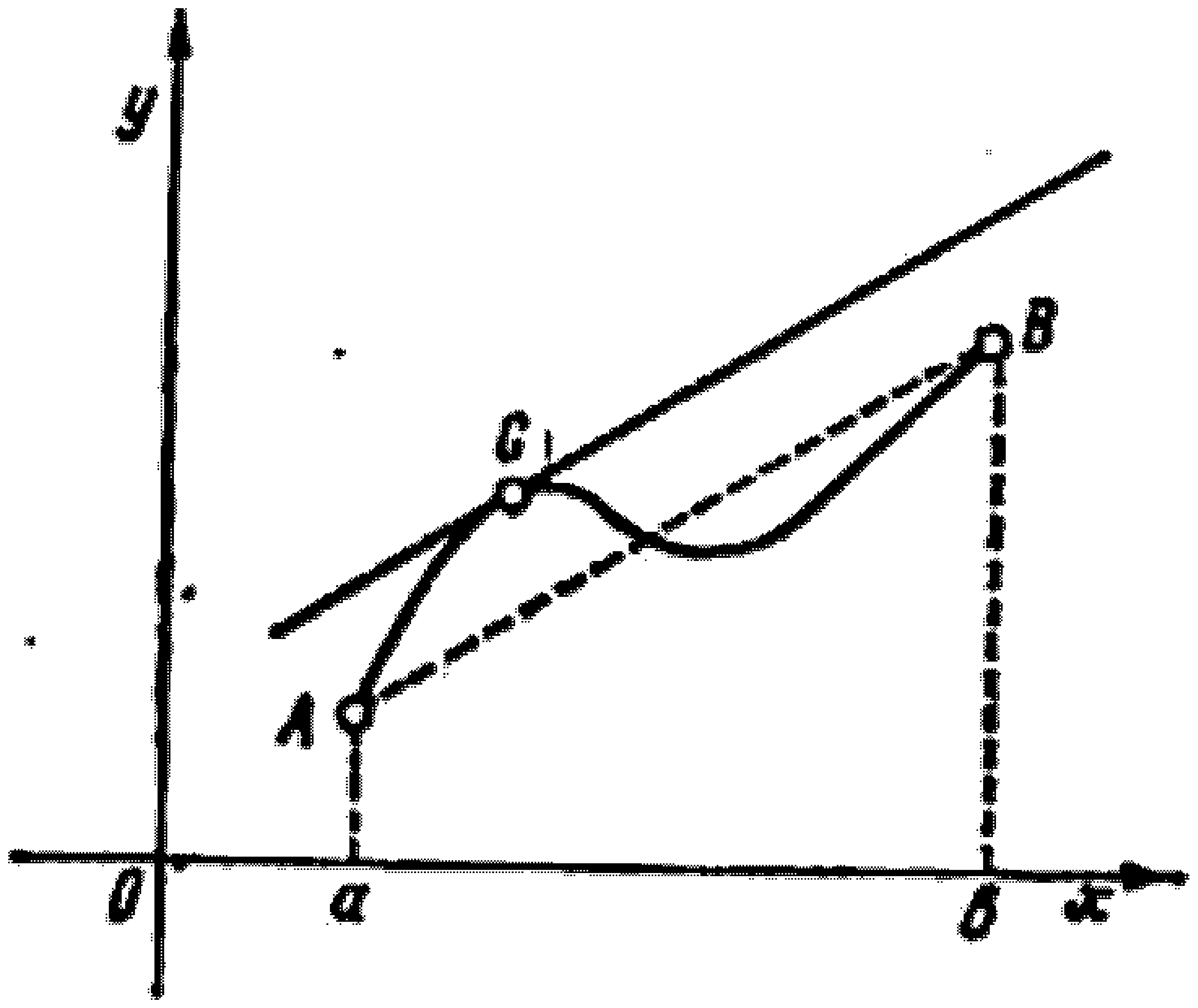
От неравенствата $a<\xi<b$ е ясно, че $0<\theta<1$. Тогава равенството (1) ще се запише така:

$$f'(a+\theta h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

или окончателно

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h), \tag{2}$$

където θ е число, намиращо се между 0 и 1.



Черт. 20

В равенството (2) h е положително число (тъй като имахме $h=b-a$). Лесно е да се убедим обаче, че разликата $f(a+h)-f(a)$ може да се представи по същия начин и когато h е отрицателно (стига, разбира се, функцията $f(x)$ да удовлетворява условията на теоремата в интервала $[a+h, a]$). И наистина да положим в този случай $a+h=a_1$, $a=a_1+h_1$, където $h_1=-h$, и следователно $h_1>0$. Тогава

$$f(a+h)-f(a)=f(a_1)-f(a_1+h_1)=-h_1f'(a_1+\theta h_1)$$

$$=hf'(a+h-\theta h)=hf'[a+(1-\theta)h].$$

Да положим още $1-\theta=\theta'$. Тогава получаваме

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta' h).$$

При това от неравенствата $0<\theta<1$ следва, че $0<\theta'<1$. И така равенството

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),$$

където θ е подходящо подбрано число, удовлетворяващо условието $0<\theta<1$, е валидно винаги когато функцията $f(x)$ е диференцуема във всички точки между a и $a+h$ и освен това е непрекъсната в самите точки a

и $a+h$ независимо от това, дали h е положително или отрицателно число.

Теоремата за крайните нараствания също може да бъде изтълкувана геометрично. Както знаем от аналитичната геометрия, правата, свързваща двете крайни точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ от графиката на функцията $f(x)$ (черт. 20), има уравнение

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

където x и y са текущите координати. От друга страна, допирателната към графиката на $f(x)$, прекарана в точката $C(\xi, f(\xi))$, има уравнение

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi).$$

От равенството (1) се вижда, че тези две прави са успоредни. И така теоремата за крайните нараствания твърди, че съществува поне една точка от графиката на функцията $f(x)$, в която допирателната е успоредна на правата, съединяваща двете крайни точки на графиката.

От теоремата за крайните нараствания могат веднага да се изведат някои твърде важни следствия.

Преди да формулираме първото от тях, нека си припомним, че производната на всяка функция-константа е нула. Сега ще разгледаме въпроса, дали е вярно обратното твърдение и кога, т. е. дали от факта, че някоя функция има производна нула, можем да направим заключение, че тя е константа и кога.

Следствие 1 (основна теорема на интегралното смятане). *Ако функцията $f(x)$ има производна, равна на нула във всички точки на един интервал D, то тя е константа в този интервал.*

И наистина нека x_0 е точка от интервала D. Ако x е произволна друга точка от този интервал, то всички точки между x_0 и x ще лежат също в интервала D. Тогава x_0 и x ще бъдат краища на един интервал, по отношение на който са изпълнени условията на теоремата за крайните нараствания. Следователно ще съществува точка ξ между x_0 и x, за която имаме

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Но $f'(\xi)=0$ по условие, откъдето $f(x)=f(x_0)$. Тъй като точката x беше произволно взета в интервала D, то всички стойности на функцията съвпадат, т. е. тя е константа.

Нека отбележим, че за интервала D тук не направихме никакво ограничение — той може да бъде краен или безкраен, отворен или затворен — твърдението остава вярно. При това е ясно, че ако интервалът D е затворен (или пък полузатворен), то достатъчно е условието $f'(x)=0$ да бъде изпълнено само за вътрешните точки на този интервал, докато за неговите крайни точки изобщо не е необходимо да се изисква диференцуемостта на функцията $f(x)$ — достатъчно е в тези точки тя да бъде само непрекъсната.

Следствие 2. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в един интервал D и ако $f'(x) \geqq 0$ за всяко x от D, то $f(x)$ е растяща в този интервал. Ако $f'(x) > 0$ за всяка вътрешна точка x от D, то $f(x)$ е даже строго растяща.*

И наистина нека x_1 и x_2 са две произволни точки от интервала D и нека $x_1 < x_2$. Като приложим теоремата за крайните нараствания по отношение на интервала $[x_1, x_2]$, получаваме

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

където ξ е точка, намираща се между x_1 и x_2. Верността на нашето твърдение следва непосредствено от това равенство, тъй като от $f'(\xi) \geqq 0$ следва $f(x_1) \leqq f(x_2)$, а от $f'(\xi) > 0$ следва $f(x_1) < f(x_2)$.

Аналогично се доказва, че ако за някоя функция $f(x)$ имаме $f'(x) \leqq 0$ за всяко x от даден интервал D, то $f(x)$ е намаляваща в този интервал, а ако $f'(x) < 0$ за всяка вътрешна точка x на D, то тя е даже строго намаляваща.

Тук също можем да забележим, както и при следствие 1, че когато интервалът D е затворен (или полузатворен), не е необходимо да се изисква функцията $f(x)$ да бъде диференцуема в неговите крайни точки, достатъчно е в тези точки тя да бъде само непрекъсната.

Нека покажем веднага с някои примери как могат да се използуват доказаните две следствия от теоремата за крайните нараствания.

Да разгледаме функцията

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x,$$

дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[-1, 1]$. Тя е диференцуема в отворения интервал $(-1, 1)$ и нейната производна е

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Оттук с помощта на основната теорема на интегралното смятане заключаваме, че $f(x)$ е константа в затворения интервал $[-1, 1]$. За да пресметнем стойността на тази константа, достатъчно е да дадем на x някоя фиксирана стойност от този интервал, например да вземем $x=0$. Получаваме

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

По този начин за всяко x от интервала $[-1, 1]$ доказахме тъждеството

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Следствие 2 пък може да се използува за установяване на някои неравенства. Нека да покажем например, че

$$\operatorname{tg} x > x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

За целта да разгледаме функцията $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Имаме

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Ясно е, че $f'(x) > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Следователно функцията $f(x)$ е строго растяща и за всяко x от отворения интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ще имаме $f(x) > f(0)$, т. е. $\operatorname{tg} x - x > 0$, откъдето получаваме желаното неравенство.

Да вземем още един пример. Да покажем, че

$$e^x \geqq 1 + x \text{ за всяко } x.$$

За целта образуваме функцията $f(x) = e^x - 1 - x$. Имаме $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x$. Тъй като $f''(x) > 0$ за всяко x, то функцията $f'(x)$ е строго растяща в интервала $(-\infty, \infty)$. Но $f'(0) = 0$, следователно имаме $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$. Това пък показва, че функцията $f(x)$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 0]$ и строго растяща в интервала $[0, \infty)$. Следователно тя достига в точката $x = 0$ своята най-малка стойност, която е $f(0) = 0$. И така за всяко $x \neq 0$ имаме $f(x) > 0$, т. е. $e^x - 1 - x > 0$ или $e^x > 1 + x$. При $x = 0$ последното неравенство преминава в равенство. По такъв начин се убеждаваме във валидността на неравенството, което трябваше да установим.

Упражнения. I. Като използувате основната теорема на интегралното смятане, докажете следните тъждества:

1. $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{\pi}{4}$ при $-1 \leqq x < 1$.

2. $\arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}) = \frac{1}{2} \arcsin x$ при $-1 \leqq x \leqq 1$.

3. $\arcsin (2x^2 - 1) = \begin{cases} 2 \arcsin x - \frac{\pi}{2} & \text{при } 0 \leqq x \leqq 1 \\ -2 \arcsin x - \frac{\pi}{2} & \text{при } 1 \leqq x \leqq 0. \end{cases}$

4. Също така с помощта на основната теорема на интегралното смятане докажете отново тъждествата, дадени в задачи 4, 5, 6, 7 от § 16.

II. Докажете следните неравенства:

1. $\cos x \geqq 1 - \frac{x^2}{2}$ за всяко x.

2. $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ при $x \geq 0$.

3. $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

4. $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$ и при произволно цяло положително число n.
5. $(1+x)^n \geq 1+nx$ за всяко x, ако n е четно число.

§ 34. Обобщена теорема за крайните нараствания (теорема на Коши)

Теоремата за крайните нараствания може да бъде обобщена. А именно валидна е следната теорема, от която като частен случай се получава теоремата на крайните нараствания.

Теорема на Коши (обобщена теорема за крайните нараствания). *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и диференцуеми в отворения интервал (a, b) и ако $g'(x) \neq 0$ за всяко x от (a, b), то съществува поне една точка ξ, намираща се между a и b, за която е изпълнено равенството*

$$(1) \qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказателство. Преди всичко нека отбележим, че знаменателят $g(b)-g(a)$ на частното, което е в дясната страна на равенството (1), е сигурно различен от нула. Наистина, ако допуснем, че $g(a)=g(b)$, то функцията $g(x)$ би удовлетворявала условията на теоремата на Рол. Тогава би съществувала някоя точка от отворения интервал (a, b), за която производната $g'(x)$ би била равна на нула, а това противоречи на условието на теоремата.

Да преминем сега към самото доказателство на теоремата, което впрочем по своята идея не се различава много от доказателството на теоремата за крайните нараствания. Да си образуваме помощната функция

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

Веднага се вижда, че тя е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцуема в интервала (a, b). Освен това имаме $\varphi(a)=f(a)$ и $\varphi(b)=f(a)$, т. е. получаваме $\varphi(a)=\varphi(b)$. Функцията $\varphi(x)$ удовлетворява следователно условията на теоремата на Рол. Ще съществува тогава някаква точка ξ от отворения интервал (a, b), за която $\varphi'(\xi)=0$. Но

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

откъдето

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

или най-сетне

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Както вече споменахме, теоремата за крайните нараствания може да се получи като частен случай на току-що доказаната теорема. Наистина нека $f(x)$ е една функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцуема в интервала (a, b). Да разгледаме освен това и функцията $g(x)=x$. Като приложим теоремата на Коши към тези две функции и вземем пред вид, че $g(a)=a$, $g(b)=b$, както и това, че $g'(x)=1$ за всяко x, заключаваме, че съществува точка ξ от интервала (a, b), за която имаме

$$\frac{f'(\xi)}{1}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Но това не е нищо друго освен равенството, което ни дава теоремата за крайните нараствания.

Ще дадем тук и едно следствие от теоремата на Коши, което ще използуваме по-нататък.

Следствие. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и $n+1$ пъти диференцуеми в някоя околност D на една точка a, като при това $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0, \ldots, g^{(n+1)}(x)\neq 0$ при $x\neq a$. Да предположим освен това, че*

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0,$$

$$g(a)=g'(a)=g''(a)=\cdots=g^{(n)}(a)=0.$$

Тогава за всяко x от D, различно от a, имаме

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \tag{2}$$

където ξ е някаква точка, намираща се между a и x.

Наистина, като вземем пред вид, че $f(a)=g(a)=0$, и като приложим теоремата на Коши, ще получим

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)},$$

където ξ_1 е точка, лежаща между a и x. По-нататък поради условието $f'(a)=g'(a)=0$ ще имаме

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{g'(\xi_1)-g'(a)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)},$$

където ξ_2 е подходящо избрана точка, намираща се между точките a и ξ_1 и следователно между a и x.

И така чрез двукратно прилагане на теоремата на Коши получихме

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}.$$

Ако продължим да разсъждаваме по същия начин, след като приложим $n+1$ пъти теоремата на Коши, ще достигнем до равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

където ξ е точка, която се намира между точките a и x.

§ 35. Теореми на Лопитал

Доказаната в предишния параграф теорема на Коши се използува за получаването на няколко теореми, носещи името **теореми на Лопитал.** Това са теореми, отнасящи се до намирането на границата на частното от две функции в случаи, когато не можем да приложим теорема 3 от § 18 било поради това, че функцията в знаменателя има граница нула, било пък поради това, че функциите, които разглеждаме, клонят към плюс или минус безкрайност.

Първа теорема на Лопитал. *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцуеми в някоя околност на една точка* a, *като при това* $g'(x)\neq 0$ *при* $x\neq a$. *Нека освен това* $f(a)=g(a)=0$. *Ако границата* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *съществува, то съществува и границата* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. С разсъждения, аналогични на онези, които извършихме в началото на доказателството на теоремата на Коши от предишния параграф, можем да се убедим, че $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$. Това ни позволява да образуваме частното $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\neq a$.

Нека сега x е точка, принадлежаща на дадената околност на точката a и различна от a. Поради условието $f(a)=g(a)=0$ можем да пишем

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}. \tag{1}$$

От друга страна, като приложим теоремата на Коши към интервала, определен от точките a и x, ще получим

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{2}$$

където ξ е някаква точка, намираща се между a и x. От равенствата (1) и (2) е ясно, че

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Но когато x клони към a, точката ξ също ще клони към a. Ето защо, ако $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то ще имаме $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=l$, а следователно и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. С това теоремата е доказана.

От изложеното доказателство се вижда, че в същност не е необходимо функциите $f(x)$ и $g(x)$ да бъдат диференцуеми в точката a — достатъчно е да са диференцуеми при $x\neq a$, а в точката a да са само непрекъснати. Също така е ясно, че доказателството запазва своята сила и в случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията на теоремата само по отношение на някоя лява или пък дясна околност на точката a. В такъв случай границите, за които се говори в теоремата, трябва да бъдат взети при x, клонящо към a отляво, съответно отдясно.

Ние си служим с първата теорема на Лопитал за намиране границата на частното на две функции в случаите, при които не можем да приложим теорема 3 от § 18, тъй като функцията $g(x)$, която е в знаменателя, клони към нула при x, клонящо към a (това следва от условието $g(a)=0$ и от непрекъснатостта на $g(x)$ в точката a). Числителят $f(x)$ клони също към нула. Ето защо условно казваме, че първата теорема на Лопитал се отнася до неопределени изрази от вида $\frac{0}{0}$.

Втората теорема на Лопитал пък се отнася до неопределени изрази от вида $\frac{\infty}{\infty}$. Нейното доказателство е вече по-сложно.

Втора теорема на Лопитал. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми поне при $x\neq a$ в някоя околност на точката a и нека при $x\neq a$ имаме $g'(x)\neq 0$. Нека освен това* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ (това означава, че всяка от границите $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ може да бъде било ∞, било $-\infty$). *Ако съществува границата* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то съществува и границата* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и тези две граници са равни помежду си*, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Нека

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l. \tag{3}$$

Ще разгледаме най-напред случая, когато x клони едностранно, например отдясно, към точката a. Нека ε е произволно положително число. След това да вземем друго положително число ε', което ще определим по-късно (и което ще зависи от избраното ε). Съществува такова положително число δ_1, че за $a<x<a+\delta_1$ да имаме

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon'.$$

Ако фиксираме точка x_1, удовлетворяваща неравенствата $a<x_1<a+\delta_1$, за всяко x, взето тъй, че $a<x<x_1$, ще имаме въз основа на обобщената теорема на крайните нараствания

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{4}$$

където ξ е точка, лежаща между x и x_1, и за която следователно също така

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|<\varepsilon'. \tag{5}$$

От равенството (4) получаваме

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

или

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}. \tag{6}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$, вторият множител в дясната страна на последното равенство клони към 1, когато (при фиксирано x_1) x клони към a. Ето защо ще съществува такова $\delta>0$ (можем естествено да считаме, че $\delta<\delta_1$), че при $a<x<\delta$ да имаме

$$\left|\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon'. \tag{7}$$

Тогава, като преработим равенството (6) и вземем пред вид (5) и (7), получаваме

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l+l\right)\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}-l\right|$$

$$\leqq\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|\cdot\left|\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}\right|+|l|\cdot\left|\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon'(1+\varepsilon')+|l|\,\varepsilon'.$$

Ако сега приемем, че ε' удовлетворява неравенствата $0<\varepsilon'<1$ и $\varepsilon'<\frac{\varepsilon}{|l|+2}$

(което очевидно е възможно, тъй като по този начин ε' се определя в зависимост единствено от ε), ще получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon'(2+|l|)<\varepsilon$$

при $a<x<a+\delta$. Това означава, че $\lim\limits_{x\to a,\, x>a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. По подобен начин се вижда, че и $\lim\limits_{x\to a,\, x<a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, с което равенството (1) е установено и теоремата е доказана.

От самото доказателство е ясно, че теоремата е вярна и когато нейните условия са изпълнени само по отношение на някоя лява или пък дясна околност на точката a, а в заключението става дума за едностранна (при x клонящо отляво, съответно отдясно към a) граница.

Като следствие от изложените две теореми на Лопитал могат да се получат още две, които ние ще наречем трета и четвърта теорема на Лопитал. При тях става дума за граници на функции при x, клонящо към безкрайност или към минус безкрайност, т. е. фигуративно казано, точката a е заменена с безкрайността. Едната от тези теореми се отнася до неопределени изрази от вида $\frac{0}{0}$, а другата — до неопределени изрази от вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Трета теорема на Лопитал. *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцуеми в някой интервал от вида* (p, ∞), *като* $g(x)\neq 0$ *и* $g'(x)\neq 0$ *в този интервал, и нека*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0. \tag{8}$$

Тогава, ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то ще съществува и границата* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и ще бъде изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Четвърта теорема на Лопитал. *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцуеми в някой интервал от вида* (p, ∞), *като при това* $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ *в този интервал. Нека освен това*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\pm\infty.$$

Ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то ще съществува и границата* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и тези две граници са равни помежду си,* т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Нека покажем например как третата теорема се получава просто с помощта на първата теорема на Лопитал. Да предположим, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$. Полагаме $x=\frac{1}{t}$ и разглеждаме функциите $F(t)$ и $G(t)$, дефинирани така: $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t\neq0$; $F(0)=G(0)=0$. Тъй като при t, клонящо към нула отдясно, $\frac{1}{t}$ клони към ∞, поради условието (8) ще имаме $\lim\limits_{t\to0,\ t>0}F(t)=0=F(0)$ и $\lim\limits_{t\to0,\ t>0}G(t)=0=G(0)$. Това означава, че функциите $F(t)$ и $G(t)$ са непрекъснати в точката 0. От друга страна, при $t\neq0$ имаме

$$F'(t)=f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) \text{ и } G'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

поради което

$$\lim_{t\to0,\ t>0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to0,\ t>0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Тогава въз основа на първата теорема на Лопитал ще имаме $\lim\limits_{t\to0,\ t>0}\frac{F(t)}{G(t)}=l$. Но

$$\lim_{t\to0,\ t>0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to0,\ t>0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

С това теоремата е доказана.

Аналогично с помощта на втората теорема на Лопитал се доказва четвъртата теорема на Лопитал.

Третата и четвъртата теорема на Лопитал остават, разбира се, верни, ако условията им са изпълнени в някой интервал от вида $(-\infty, p)$ и ако навсякъде в тях границите се вземат при x, клонящо към $-\infty$.

Пример 1. Да потърсим границата $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$. Можем да приложим първата теорема на Лопитал:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1.$$

Пример 2. Да намерим границата $\lim\limits_{x\to0,\ x>0}\operatorname{tg} x\ln x$. Представяме произведението $\operatorname{tg} x\ln x$ във вида $\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ и прилагаме втората теорема на Лопитал. Получаваме

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0,\, x>0} \sin x \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Пример 3. Да намерим границата $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}$. Прилагаме третата теорема на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{e^x},$$

след което прилагаме два пъти четвъртата теорема на Лопитал. Имаме

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Когато две функции $f(x)$ и $g(x)$ клонят към безкрайност (при x, клонящо към някоя точка a, или пък при x, клонящо към ∞ или $-\infty$), тяхното частно $\frac{f(x)}{g(x)}$ може да има различно поведение — да притежава или да не притежава граница. Най-сетне самото то може да клони към безкрайност. Това ни дава основание да сравняваме тези две функции по отношение на „скоростта", с която всяка една от тях клони към безкрайност. По-точно даваме следната дефиниция (ще я изкажем за случая $x\to\infty$, очевидно е как трябва да се изкаже тя в случая $x\to a$ или $x\to-\infty$):

Дефиниция. *Ако за двете функции $f(x)$ и $g(x)$ имаме $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, ще казваме, че $f(x)$ клони по-бързо към безкрайност от $g(x)$, ако за тяхното частно имаме*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Както знаем от § 19 (примери 8, 9 и 10), за функциите $\log_a x$ (където $a>1$), x^α (където $\alpha>0$) и a^x (където $a>1$) имаме

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty,$$

Ще покажем сега, че при $x\to\infty$ най-бавно клони към безкрайност първата от тези три функции, а най-бързо — третата. Наистина, като използуваме четвъртата теорема на Лопитал, ще получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha \ln a} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Оттук следва, че

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{\log_a x} = \infty.$$

И така *функцията* x^{α} (където $\alpha>0$) *клони по-бързо към безкрайност от функцията* $\log_a x$ (където $a>1$).

Да сравним сега функцията x^{α} с функцията a^x (където $a>1$). Ако положим $a^x=z$, то ще имаме $x=\log_a z$. При това ясно е, че при $x\to\infty$ ще имаме $z\to\infty$. Ето защо, като използуваме получения вече резултат, ще имаме

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^{\alpha}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(\log_a z)^{\alpha}} = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{\log_a z}\right)^{\alpha} = \infty.$$

С това е показано, че *функцията* a^x (при $a>1$) *клони по-бързо към безкрайност от функцията* x^{α} (при $\alpha>0$).

Упражнения. Намерете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\ln x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x-1)^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1,\, x>1} \ln x \,.\, \ln(x-1)$.
6. $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^x$. (Упътване: Предварително логаритмувайте.)
7. $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$.
8. $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^{\operatorname{tg} x}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)-\ln x^2}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}$.
12. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.
13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right)^x$.

Отговори: 1. 3. 2. $-\frac{1}{6}$. 3. -2. 4. $\frac{1}{6}$. 5. 0. 6. 1. 7. 1. 8. 1. 9. 1. 10. 1. 11. 0. 12. $\frac{1}{2}$. 13. $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

§ 36. Формула на Тейлор

Нека вземем един полином от n-та степен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

Ако диференцираме равенството (1) n пъти, ще получим последователно

$$(2)\quad \begin{cases} f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+2a_2x+1\,.\,a_1, \\ f''(x)=n(n-1)a_n x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\dots+2\,.\,1\,.\,a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x)=n(n-1)\dots3\,.\,2\,.\,a_n x+(n-1)(n-2)\dots2\,.\,1\,.\,a_{n-1}, \\ f^{(n)}(x)=n(n-1)\dots3\,.\,2\,.\,1\,.\,a_n. \end{cases}$$

Като заместим в равенствата (1) и (2) x с 0, ще получим

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=1\,!\,a_1,\ f''(0)=2\,!\,a_2,\dots,\ f^{(n-1)}(0)=(n-1)\,!\,a_{n-1},$$
$$f^{(n)}(0)=n\,!\,a_n.$$

Виждаме, че коефициентите на полинома $f(x)$ се изразяват чрез стойностите на $f(x)$ и на неговите производни в точката 0. Тогава равенството (1) може да бъде записано и по следния начин:

$$(3)\qquad f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1\,!}x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n.$$

Ние можем да обобщим тази формула, като приемем произволна точка a да играе ролята на точката 0. За целта да положим $x=a+h$ и $f(a+h)=\varphi(h)$. Функцията

$$\varphi(h)=a_n(a+h)^n+a_{n-1}(a+h)^{n-1}+\dots+a_1(a+h)+a_0$$

е очевидно полином от n-та степен на променливата h и следователно съгласно формула (3) ще имаме

$$(4)\qquad \varphi(h)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1\,!}h+\frac{\varphi''(0)}{2\,!}h^2+\dots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n\,!}h^n.$$

От друга страна,

$$\varphi(h)=f(a+h),\ \varphi'(h)=f'(a+h),\ \varphi''(h)=f''(a+h),\dots,$$
$$\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(a+h)$$

и следователно

$$\varphi(0)=f(a),\ \varphi'(0)=f'(a),\ \varphi''(0)=f''(a),\dots,\ \varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a).$$

Тогава равенството (4) се написва така:

$$(5)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}h+\frac{f''(a)}{2\,!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}h^n,$$

или, което е все едно, така:

$$(6)\qquad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n.$$

Равенството (5), както и равносилното на него равенство (6), се нарича формула на Тейлор. Интересно е, че тази формула може да бъде видоизменена по такъв начин, че да запази своята сила не само за полиноми, но и за твърде широка категория от функции. По-точно ще видим, че дясната страна на формулата на Тейлор може да бъде допълнена с още едно събираемо, наподобяващо по своя вид останалите, и то така, че новото равенство да бъде валидно за всяка функция, диференцуема $n+1$ пъти в някоя околност на дадена точка a. Наистина в сила е следната

Теорема на Тейлор. *Да предположим, че функцията $f(x)$ притежава първа, втора и т. н. до $(n+1)$-ва производна в някоя околност $(a-\delta, a+\delta)$ на една точка a (тази околност може в частност да съвпада с цялата реална права). Ако x е една точка от тази околност, то валидно е равенството*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{7}$$

където ξ е точка, намираща се между a и x.

Доказателство. Да си образуваме функцията

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Като диференцираме, получаваме последователно

$$\varphi'(x)=f'(x)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

$$\varphi''(x)=f''(x)-f''(a)-\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a).$$

Ясно е тогава, че

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0.$$

Да разгледаме също и функцията $\psi(x)=(x-a)^{n+1}$. За нея имаме

$$\psi'(x)=(n+1)(x-a)^n,\ \psi''(x)=(n+1)n(x-a)^{n-1},\ \ldots,$$

$$\psi^{(n)}(x)=(n+1)!(x-a).$$

Следователно

$$\psi(a)=\psi'(a)=\psi''(a)=\cdots=\psi^{(n)}(a)=0.$$

Като приложим към функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следствието от теоремата на Коши, което доказахме в края на § 34, ще заключим, че съществува точка ξ, намираща се между a и x, за която имаме

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)},$$

или

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}\psi(x).$$

Като вземем пред вид, че $\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ и $\psi^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, получаваме

$$f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

или най-сетне

$$(7)\quad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Равенството (7) се нарича **обща формула на Тейлор** (за разлика от формулата на Тейлор за полиноми). Последното събираемо в дясната страна

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

се нарича **остатъчен член**.

Ясно е, че формулата на Тейлор за полиноми се явява частен случай от общата формула на Тейлор. Наистина, ако $f(x)$ е полином от n-та степен, то $f^{(n+1)}(x)=0$ за всяко x, така че остатъчният член ще изчезне.

Формулата на Тейлор често се записва и другояче. Ако положим $x=a+h$ и $\theta=\frac{\xi-a}{x-a}$, ще имаме $\xi=a+\theta h$, като при това е ясно, че θ ще удовлетворява неравенствата $0<\theta<1$. Получаваме равенството

$$(8)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

което, разбира се, също носи името формула на Тейлор.

В случая, когато $a=0$, формулата на Тейлор придобива вида

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

и се нарича **формула на Маклорен**.

Формулата на Тейлор играе важна роля в анализа. Така например ние ще я използваме при доказателството на теоремите от следващите два параграфа. Освен това тя служи, както ще видим по-нататък, за основа на понятието Тейлоров ред на функция.

§ 37. Достатъчни условия за локален екстремум

Видяхме, че ако една функция, дефинирана в някой интервал, е диференцуема в дадена вътрешна точка от този интервал, то анулирането на нейната първа производна е необходимо условие, за да притежава тя локален екстремум в тази точка. Това условие обаче, както се убедихме, не е достатъчно. Сега ще дадем достатъчно условие за съществуване на локален екстремум.

Теорема 1. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и нека x_0 е вътрешна точка от този интервал. Да предположим, че $f(x)$ притежава първа и втора производна в някоя околност на x_0 и че втората производна $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Ако $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то функцията $f(x)$ притежава локален екстремум в тази точка, който при това е максимум, когато $f''(x_0)<0$, и минимум, когато $f''(x_0)>0$.*

Доказателство. Да приложим към функцията $f(x)$ формулата на Тейлор за точката x_0, като запишем остатъчния член с помощта на втората производна на функцията. Ще имаме

$$(1) \qquad f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

където ξ е някаква точка, намираща се между x_0 и x. Поради условието $f'(x_0)=0$ ще получим

$$(2) \qquad f(x)-f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Имахме по условие $f''(x_0)\neq 0$. Да разгледаме случая, когато $f''(x_0)>0$. Тъй като функцията $f''(x)$ е по условие непрекъсната в точката x_0, тя ще остава положителна в някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на тази точка. Ако сме взели x от тази околност, то ξ като точка, намираща се между x_0 и x, също ще принадлежи на този интервал. Тогава ще имаме $f''(\xi)>0$ и равенството (2) показва, че за всяко x от интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ е изпълнено неравенството

$$f(x)\geqq f(x_0).$$

Това означава, че функцията $f(x)$ има локален минимум в точката x_0.

В случая, когато $f''(x_0)<0$, като разсъждаваме по същия начин, ще стигнем до заключение, че $f(x)$ има локален максимум в x_0.

Тази теорема не може да ни помогне, ако за някоя функция $f(x)$ имаме $f'(x_0)=f''(x_0)=0$. Ето защо ще приведем и следната

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и притежава първа, втора и трета производна в някоя околност на една вътрешна точка x_0, като при това третата ѝ производна $f'''(x)$ е непрекъсната в x_0. Ако $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$, то $f(x)$ не притежава локален екстремум в точката x_0.*

Доказателство. Ще използуваме пак формулата на Тейлор. Имаме

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3,$$

където ξ е точка, лежаща между x_0 и x.

Тъй като $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, получаваме

$$(3) \qquad f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Знаем, че $f'''(x_0)\neq 0$. Нека разгледаме случая, когато $f'''(x_0)>0$ (случаят, когато $f'''(x_0)<0$, се разглежда по същия начин). Като разсъждаваме, както в теорема 1, се убеждаваме, че съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0, че когато x принадлежи на тази околност, да имаме $f'''(\xi)>0$. Да разгледаме сега равенството (3). Когато x принадлежи на интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, но е по-малко от x_0, ще имаме $f(x)<f(x_0)$. Когато пък x, оставайки в същия интервал, е по-голямо от x_0, изпълнено е обратното неравенство $f(x)>f(x_0)$. Това показва, че функцията $f(x)$ няма нито максимум, нито минимум в точката x_0.

Като разгледаме внимателно доказателствата на теоремите 1 и 2, става ясно, че разсъждавайки по посочения начин, можем да установим следната обща

Теорема 3. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и притежава първа, втора и т. н. до n-та производна, включително в някоя околност на една точка x_0, вътрешна за дадения интервал. Нека освен това $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в x_0. Да предположим, че*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

и че $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогава:

ако n е четно, то функцията $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0, който е максимум, когато $f^{(n)}(x_0)<0$, и минимум, когато $f^{(n)}(x_0)>0$;

ако n е нечетно, то функцията $f(x)$ няма локален екстремум в точката x_0.

Пример. Да се намерят всички локални екстремуми на функцията $f(x)=\sin^3 x$. Имаме $f'(x)=3\ \sin^2 x\cos x$. Тъй като $\sin x=0$ при $x=m\pi$ $(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ и $\cos x=0$ при $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$, то точките, в които $f'(x)$ става нула, са всички точки от вида $x=k\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$. Но $f''(x)=6\ \sin x\cos^2 x-3\ \sin^3 x$ и лесно се проверява, че $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=0$ за четни стойности на k и $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ за нечетни стойности на k. При това $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-3$, когато k има вида $k=4s+1$, и $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=3$ за стойности на k от вида $k=4s+3$. Най-сетне $f'''(x)=6\ \cos^3 x-21\ \sin^2 x\cos x$ и $f'''\left(k\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ при четни k. Всичко това ни дава основание да направим следното заключение: функцията $f(x)=\sin^3 x$ има локални екстремуми само в точките от вида

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\quad(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

и тези екстремуми са максимуми при $k=0,\ \pm 2,\ldots$ и минимуми при $k=\pm 1,\ \pm 3,\ldots$ Всички максимуми са равни на 1, всички минимуми са равни на -1.

Нека забележим обаче, че намирането на локалните екстремуми на една функция може да бъде извършено и без помощта на теоремите, изложени в този параграф. Достатъчно е, когато е дадена някоя функция

$f(x)$, дефинирана и диференцуема в един интервал, да изследваме (когато това е удобно) само изменението на знака на нейната първа производна в този интервал, т. е. да определим онези подинтервали, в които тази производна е положителна, и онези, в които е отрицателна. След това остава да си спомним, че знакът на производната на една функция показва кога тази функция е растяща и кога намаляваща. Тогава лесно ще намерим точките, в които функцията има локални екстремуми.

Упражнения. I. Намерете локалните екстремуми на следните функции:

1. $f(x)=2x^3-x^2+1$. 2. $f(x)=\sin 3x-2\sin x$. 3. $f(x)=x^3e^{-x}$.

II.1. От всички правоъгълници с дадено лице S намерете онзи, който има най-малък периметър.

2. На какъв ъгъл трябва да отговаря един сектор от даден кръг с радиус r, щото от този кръгов сектор да може да се направи фуния с възможно най-голяма вместимост?

§ 38. Изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексия

Когато една функция $f(x)$ е диференцуема в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, нейната графика притежава допирателна в точката $P_0(x_0, f(x_0))$. Ще казваме, че $f(x)$ е изпъкнала в точката x_0, ако можем да намерим такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на x_0, че частта от графиката на $f(x)$, отговаряща на точките от тази околност, да лежи над допирателната в P_0. Ще наричаме $f(x)$ вдлъбната в точката x_0, когато съществува такъв интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че частта от графиката на $f(x)$, отговаряща на точките от този интервал, лежи под допирателната в P_0. Най-сетне, ако $f(x)$ не е нито изпъкнала, нито вдлъбната, ще казваме, че тя има инфлексия в точката x_0. Самата точка P_0 ще наричаме в този случай инфлексна точка на графиката на $f(x)$.

На черт. 21 е показана графиката на една функция, която е изпъкнала в точката x_1, вдлъбната в точката x_2 и има инфлексия в точката x_3.

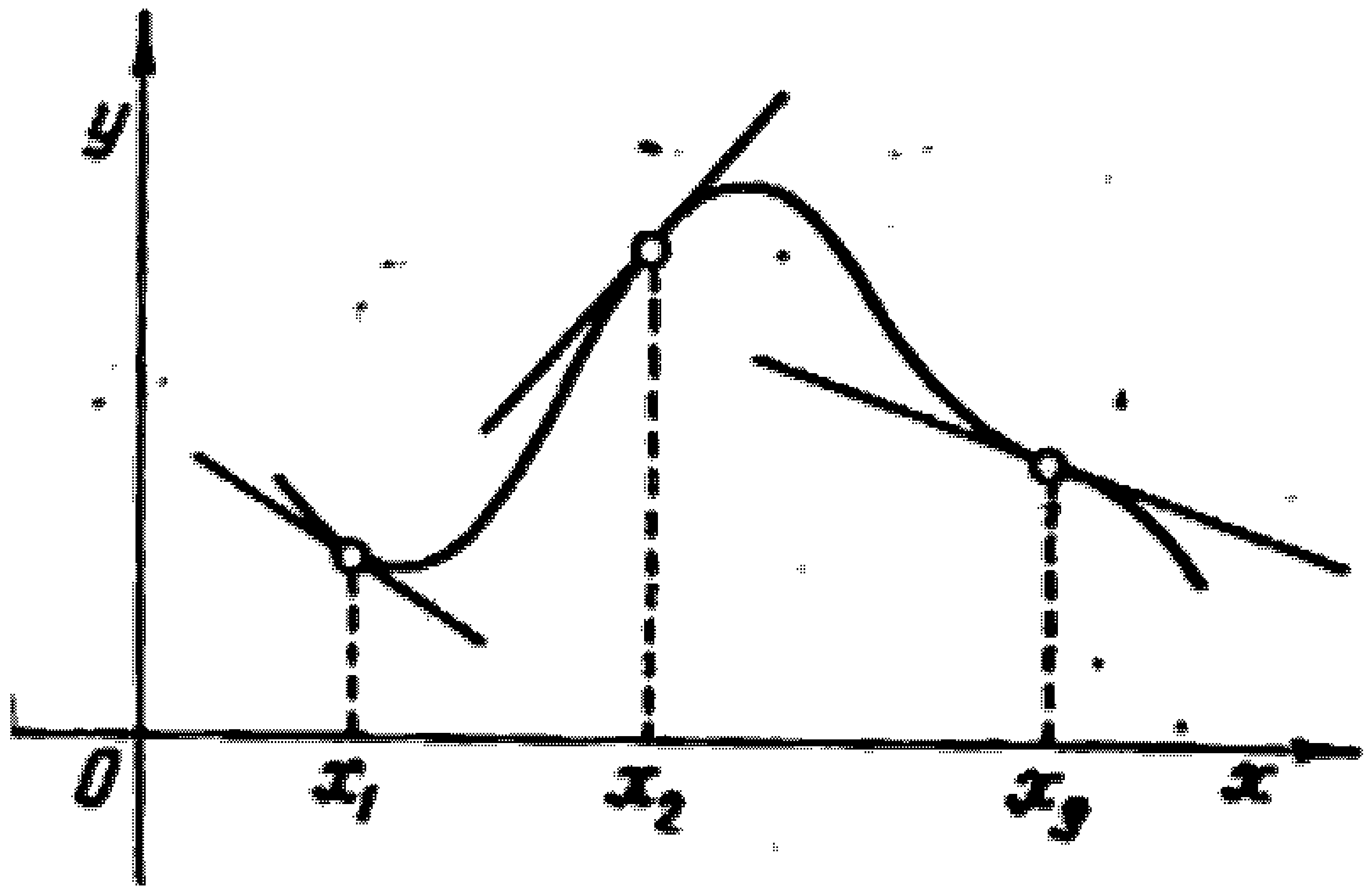
Във връзка с въведените понятия ще докажем две теореми:

Теорема 1. *Нека функцията $f(x)$, дефинирана в един интервал, е диференцуема два пъти в някоя околност на една вътрешна точка x_0 от този интервал и нека $f''(x)$ е непрекъсната в x_0. Ако $f''(x_0)>0$, то $f(x)$ е изпъкнала, а ако $f''(x_0)<0$, тя е вдлъбната в точката x_0.*

Доказателство. Нека $f''(x_0)>0$. Тъй като по условие $f''(x)$ е непрекъсната в x_0, тя ще бъде положителна във всички точки на някой интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Да вземем сега една точка x от този интервал, различна от x_0. Съответната точка P от графиката ще има ордината $f(x)$. Тази ордината ние можем да изразим чрез формулата на Тейлор по следния начин:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2. \tag{1}$$

Тук ξ е число, намиращо се между x_0 и x, и следователно принадлежи също на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. На същата точка x от реалната ос

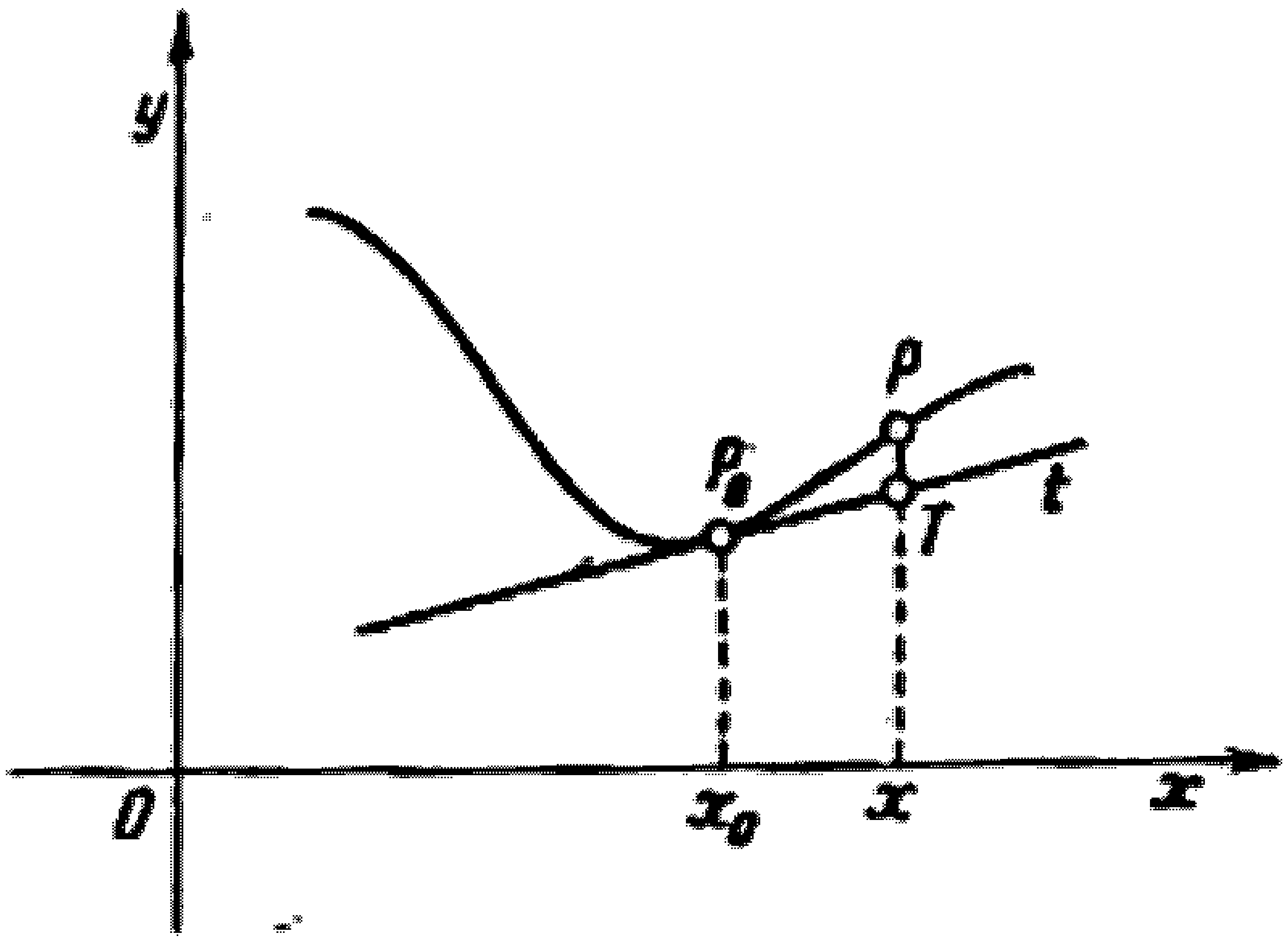


Черт. 21

Като извадим почленно равенствата (1) и (2), получаваме

$$f(x)-y=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Но $f''(\xi)>0$, следователно $f(x)>y$, което показва, че точката P се намира по-високо от точката T. Тъй като P отговаряше на произволно x от интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, заключаваме, че графиката на $f(x)$, отговаряща на този интервал, се намира над допирателната t, т. е. че функцията $f(x)$ е изпъкнала в точката x_0.



Черт. 22

Случаят, когато $f''(x_0)<0$, се разглежда аналогично. В този случай идваме до заключението, че $f(x)$ е вдлъбната в точката x_0.

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и е диференцуема три пъти в една околност на вътрешната за този интервал точка x_0. Нека освен това $f'''(x)$ е непрекъсната в x_0. Ако $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$, то функцията $f(x)$ има инфлексия в точката x_0.*

Доказателство. По условие имаме $f'''(x_0)\neq 0$. Да разгледаме случая, когато $f'''(x_0)>0$. (Случаят, когато $f'''(x_0)<0$, се третира по същия начин.) Поради непрекъснатостта на $f'''(x)$ в точката x_0 ще съществува интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, във всички точки на който $f'''(x)$ е положителна. Ако сега вземем едно x от този интервал, то на него ще отговаря една точка P от графиката на функцията, чиято ордината $f(x)$ можем да изразим посредством формулата на Тейлор така:

$$(3)\qquad f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Тук ξ е число, намиращо се между x_0 и x и следователно принадлежащо също така на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. На x отговаря една точка T от допирателната t, прекарана към графиката в точката $P_0(x_0, f(x_0))$. Ординатата на точката T, пресметната от уравнението на допирателната, ще бъде

$$(4)\qquad y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Като вземем пред вид, че $f''(x_0)=0$, и извадим почленно равенствата (3) и (4), ще получим

$$f(x)-y=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Първият множител от дясната страна на това равенство $\frac{f'''(\xi)}{3!}$ е постоянно положителен, докато вторият $(x-x_0)^3$ си мени знака в зависимост от това, дали имаме $x>x_0$, или $x<x_0$. Това показва, че точката P ще се намира над допирателната t, когато x се намира вдясно от x_0, и под нея, когато x е наляво от x_0. Следователно функцията $f(x)$ има инфлексия в точката x_0.

§ 39. Изследване на функции

Теоремите, с които се запознахме в тази глава, ни предоставят удобни средства за работа, когато искаме да изследваме особеностите на дадена функция $f(x)$, чиято дефиниционна област е един интервал или се състои от няколко интервала. При това ние считаме, че познаваме тези особености, когато сме определили подинтервалите от дефиниционната област на функцията $f(x)$, в които тя е монотонна, когато сме намерили нейните локални екстремуми, когато сме изследвали къде тя е изпъкнала, къде е вдлъбната, в кои точки има инфлексия и пр. Важен момент от изследването на дадена функция $f(x)$ представлява също определянето на нейното поведение при $x\to\infty$ или при $x\to-\infty$ (в случай че тя е дефинирана в безкраен интервал).

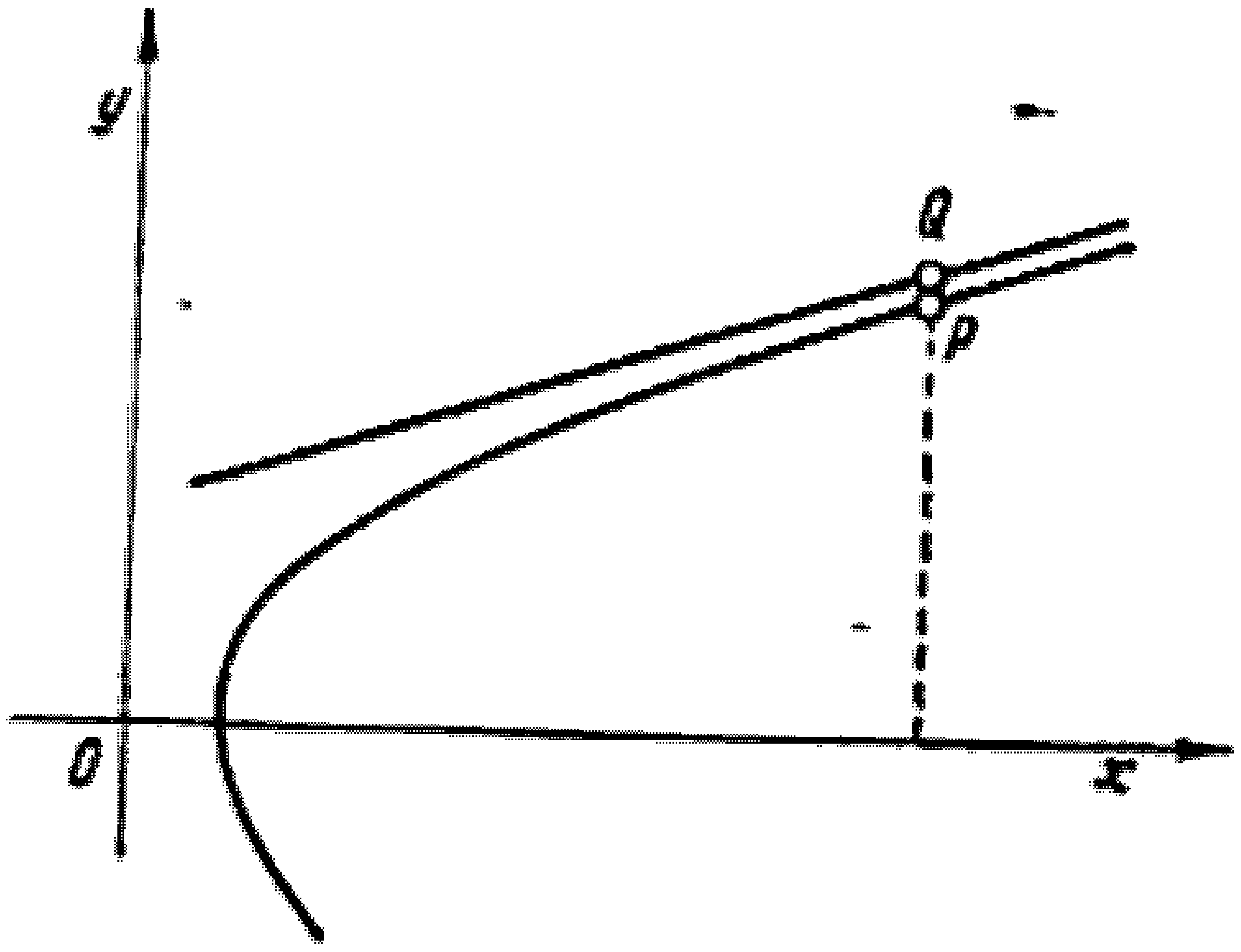
Във връзка с последния въпрос се въвежда следното понятие:

Казваме, че правата с уравнение

$$(1)\qquad y=kx+l$$

е асимптота на графиката на функцията $f(x)$ при $x\to\infty$, ако

$$(2)\qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+l)]=0.$$



Черт. 23

Аналогично *правата с уравнение* (1) *е асимптота на графиката на $f(x)$ при $x\to-\infty$, ако*

$$(3)\qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+l)]=0.$$

Геометрически равенствата (2) и (3) са равносилни с изискването разстоянието PQ (черт. 23) между една подвижна точка P с абсциса x от графиката на функцията $f(x)$ и точката Q със същата абсциса от правата с уравнение (1) да клони към нула при $x\to\infty$ (респективно при $x\to-\infty$).

Специално, когато уравнението (1) има вида

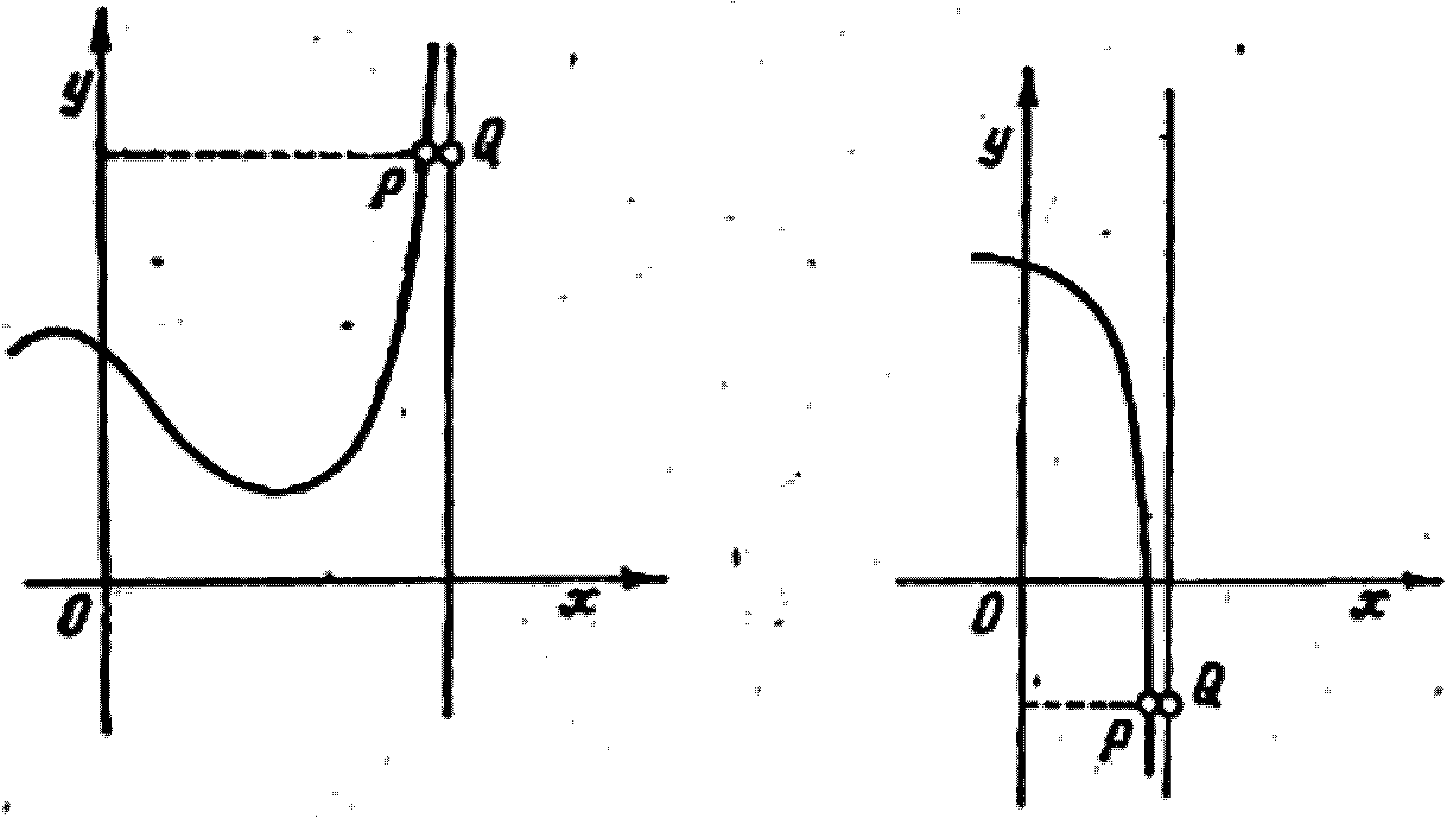
$$y=l,$$

т. е. когато правата, която то представя, е успоредна на оста Ox, говорим за хоризонтална асимптота. В този случай условието (2) или (3) се свежда до изискването да съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, респективно границата $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Графиката на една функция $f(x)$ може да притежава и вертикална асимптота, т. е. да има за асимптота права, успоредна на оста Oy, с уравнение от вида

$$x=m.$$

Това се случва, когато $f(x)$ клони към ∞ или към $-\infty$ при x, клонящо отдясно или пък отляво към точката $x_0=m$. Геометрически ситуацията в случая се изразява в следното: когато абсцисата x на една подвижна точка P от графиката на функцията клони към x_0, точката P се отдалечава все повече от оста Ox (както казваме, „отива в безкрайност“), по-точно нейната ордината клони към ∞ или $-\infty$. При това разстоянието между точката P и съответната точка Q със същата ордината от верти-



Черт. 24

калната асимптота клони, разбира се, към нула (черт. 24), тъй като това разстояние е равно на $|x-x_0|$.

След тези предварителни бележки нека видим с няколко примера как практически се извършва изследването на функциите.

1. **Функцията** $y=x^2$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=2x$. Тъй като $y'<0$ при $x<0$ и $y'>0$ при $x>0$, то функцията y е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$ и строго растяща в интервала $(0, \infty)$. В точката $x_0=0$ тя достига своята минимална стойност $y(0)=0$. Освен това имаме $y'(0)=0$, следователно оста Ox се явява допирателна към графиката на функцията в точката $(0, 0)$. По-нататък виждаме, че $y''=2$. Тъй като $y''>0$ за всяко x, то функцията y е изпъкнала в цялата си дефиниционна област. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=\infty$. Графиката на тази функция е показана* на черт. 25. При чертането на тази графика вземаме пред вид, че функцията $y=x^2$ е четна, т. е. удовлетворява условието $y(-x)=y(x)$. Това показва, че графиката ѝ е симетрична относно оста Oy.

---

* Графиките, дадени на чертежите от този параграф, са построени така, че да се видят по-характерните особености на разглежданите функции, без да са положени специални грижи тези графики да бъдат точни. Последното чисто техническо изискване за точност читателят сам би могъл да осъществи, като изчисли координатите на достатъчно голям брой точки от съответните графики. (Нека обърнем внимание освен това, че за удобство в някои от чертежите, като например черт. 9, 10, 38, 42, са взети различни мащаби върху осите Ox и Oy.)

Забележка. Графиката на функцията $y=x^2$ е парабола. Свойствата на тази крива — една от т. нар. криви от втора степен, се изучават в аналитичната геометрия.

2. Функцията $y=x^3$. Дефиниционната ѝ област е интервалът $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=3x^2$. От неравенството $y'\geqq 0$, изпълнено за всяко x, следва, че функцията y е растяща в целия свой дефиниционен интервал. Освен това $y''=6x$, тъй че $y''<0$ при $x<0$ и $y''>0$ при $x>0$, т. е. функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, 0)$ и изпъкнала в интервала $(0, \infty)$. При $x=0$ имаме $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$. Следователно графиката на функцията минава през точката $(0, 0)$, има в тази точка за своя допирателна оста Ox и притежава инфлексия в същата точка, тъй като $y'''(0)=6\neq 0$. Графиката е симетрична спрямо началото на координатната система, тъй като функцията $y=x^3$ е нечетна, т. е. удовлетворява равенството $y(-x)=-y(x)$. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$. Графиката е показана на черт. 26.

3. Функцията $y=\sqrt{x}$. Дефиниционната ѝ област е $[0, \infty)$. При $x>0$ имаме $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Тъй като $y'>0$ и $y''<0$, то функцията y е строго растяща и вдлъбната. Имаме $y(0)=0$. Когато x клони към 0 отдясно, y' клони към ∞, което показва, че когато се приближаваме по графиката към точката $(0, 0)$, допирателната сключва с оста Ox ъгъл все по-близък до $\frac{\pi}{2}$. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Графиката е показана на черт. 27. Тя представлява част от една парабола — параболата с уравнение $y^2=x$, която е съставена от графиките на функциите $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$.

4. Функцията $y=\sin x$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Тъй като функцията е периодична с период, равен на 2π, достатъчно е да я изследваме например в интервала $[0, 2\pi]$. Имаме $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$. Като вземем пред вид изменението на знаците на производните y' и y'' (т. е. като изследваме кога всяка от тях е положителна и кога отрицателна), заключаваме, че функцията y е растяща в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, намаляваща в интервала $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ и отново растяща в интервала $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, вдлъбната е в интервала $(0, \pi)$ и изпъкнала в интервала $(\pi, 2\pi)$. В точката $x=\frac{\pi}{2}$ функцията има локален максимум, в точката $x=\frac{3\pi}{2}$ — локален минимум, в точките $x=0$, $x=\pi$ и $x=2\pi$ тя има инфлексия. (Последното твърдение проверете, като пресметнете стойностите на y'' и y''' за тези точки.) Стойностите на производната $y'(0)=1$ и $y'(\pi)=-1$ показват, че допирателна към графиката в точката $(0, 0)$ е правата с уравнение $y=x$, а в точката $(\pi, 0)$ — правата с уравнение $y=-x+\pi$. Графиката е показана на черт. 28. Тя се нарича, както е известно, **синусоида**.

Изследването на функцията $\cos x$ не представлява нещо ново, тъй като от равенството $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ е ясно, че нейната графика е същата синусоида, отместена спрямо оста Oy на разстояние, равно на $\frac{\pi}{2}$. Графиката на функцията $\cos x$ е показана на черт. 29.

5. Функцията $y=\operatorname{tg} x$. Дефиниционната област е съставена от всички отворени интервали от вида $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$, където k взема всички цели стойности. Тъй като функцията е периодична с период π, то достатъчно е да я изследваме в кой да е интервал от горния вид, например в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Имаме $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y''=2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Функцията y е растяща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, вдлъбната е в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и изпъкнала в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В точката $(0, 0)$ тя има инфлексия. Допирателната в тази точка е правата с уравнение $y=x$. Освен това знаем, че $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2},\, x>-\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x=\infty$. Следователно графиката има вертикални асимптоти — както при точката $x=-\frac{\pi}{2}$, така и при точката $x=\frac{\pi}{2}$ (а следователно и изобщо при всички точки от вида $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$). Графиката е симетрична относно началото на координатната система, тъй като функцията $\operatorname{tg} x$ е нечетна. Тази графика е показана на черт. 30.

Изследването на функцията $\operatorname{cotg} x$ не съдържа нови моменти, тъй като $\operatorname{cotg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Графиката на функцията $\operatorname{cotg} x$ е показана на черт. 31.

6. Функцията $y=\arcsin x$. Дефиниционната ѝ област е $[-1, 1]$. При $-1<x<1$ имаме $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$. Функцията е растяща. Тя е вдлъбната в интервала $(-1, 0)$ и изпъкнала в интервала $(0, 1)$. В точката $(0, 0)$ графиката ѝ има за допирателна правата с уравнение $y=x$. Функцията $\arcsin x$ е нечетна, следователно нейната графика е симетрична относно началото на координатната система. Тази графика е показана на черт. 32.

Разбира се, изследването на функцията $\arcsin x$ би могло да се извърши и другояче — само въз основа на факта, че тя е обратна на функцията $\sin x$.

Изследването на функцията $\arccos x$ се извършва по подобен начин. Нейната графика е показана на черт. 33.

7. Функцията $y=\operatorname{arc\,tg} x$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$.

Функцията е нечетна, следователно нейната графика е симетрична относно началото на координатната система. Имаме $y'=\frac{1}{1+x^2}$, $y''=$ $=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Функцията е растяща в интервала (—∞, ∞), изпъкнала е в интервала (—∞, 0) и е вдлъбната в интервала (0, ∞). В точката $x=0$ тя има инфлексия. Правата с уравнение $y=x$ е допирателна към графиката в точката (0, 0). Освен това имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\frac{\pi}{2}$. Следователно графиката има две хоризонтални асимптоти — правите с уравнения $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$. Тази графика е показана на черт. 34. (Изследването на функцията arc tg x би могло да бъде направено и само въз основа на това, че тя е обратна на функцията tg x.)

Функцията arc cotg x се изследва по подобен начин. Нейната графика е показана на черт. 35.

8. Функцията $y=e^x$. Дефиниционната ѝ област е (—∞, ∞). Имаме $y'=e^x$, $y''=e^x$. Следователно функцията е винаги положителна, растяща и изпъкнала. При това имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$. Следователно графиката има една хоризонтална асимптота — оста Ox, към която тя се приближава при $x\to-\infty$. Графиката е показана на черт. 36.

9. Функцията $y=\ln x$. Дефиниционната ѝ област е (0, ∞). Имаме $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$. Функцията е растяща и вдлъбната. Тъй като $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} y=-\infty$, графиката има една вертикална асимптота — оста Oy. Имаме освен това $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Графиката е показана на черт. 37. (Функцията е обратна на функцията e^x.)

10. Функцията $y=x^3-3x^2-9x+11$. Дефиниционната ѝ област е (—∞, ∞). Имаме $y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$, $y''=$ $=6(x-1)$. Като изследваме знака на y', заключаваме, че функцията y е растяща в интервала (—∞, —1), намаляваща в интервала (—1, 3) и отново растяща в интервала (3, ∞). Ясно е, че тя ще има локален максимум в точката $x_1=-1$ и локален минимум в точката $x_2=3$. Като разгледаме пък y'', виждаме, че функцията y е вдлъбната в интервала (—∞, 1) и изпъкнала в интервала (1, ∞). Точката $x_3=1$ е инфлексна. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Графиката е показана на черт. 38.

11. Функцията $y=\frac{x+1}{2x-3}$. Дефиниционната ѝ област е съставена от интервалите $(-\infty, \frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2}, \infty)$. Имаме $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2},\ x<\frac{3}{2}} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2},\ x>\frac{3}{2}} y=\infty$.

Следователно правата с уравнение $x=\frac{3}{2}$ е една вертикална асимптота на графиката на функцията. От друга страна, имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=\frac{1}{2}$, което показва, че правата с уравнение $y=\frac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота. По-нататък намираме $y'=\frac{-5}{(2x-3)^2}$, откъдето заключаваме, че функцията y е намаляваща и в двата интервала на своята дефиниционна област. Тъй като имаме $y''=\frac{20}{(2x-3)^3}$, функцията y ще бъде вдлъбната при $x<\frac{3}{2}$ и изпъкнала при $x>\frac{3}{2}$. Графиката е показана на черт. 39.

Забележка. Графиката на разглежданата функция е хипербола. Хиперболите са частен случай от т. нар. криви от втора степен. Техните геометрични свойства се изучават в аналитичната геометрия.

12. Функцията $y=\frac{3x}{x^2+1}$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Намираме $y'=\frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$. Като изследваме знака на y', заключаваме, че функцията y е намаляваща при $x<-1$, растяща при $-1<x<1$ и отново намаляваща при $x>1$. И така тя притежава локален минимум в точката $x_1=-1$ и локален максимум в точката $x_2=1$. По-нататък намираме $y''=6\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^3}=6\frac{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$. Следователно функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, -\sqrt{3})$, изпъкнала в интервала $(-\sqrt{3}, 0)$, отново вдлъбната в интервала $(0; \sqrt{3})$ и отново изпъкнала в интервала $(\sqrt{3}, \infty)$. Освен това имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=0$, следователно оста Ox се явява асимптота на графиката при $x\to-\infty$ и при $x\to\infty$. Забелязваме също, че функцията y е нечетна, следователно графиката ѝ ще бъде симетрична относно началото на координатната система. Тази графика е показана на черт. 40.

13. Функцията $y=\frac{x+1}{x^2}$. Дефиниционната ѝ област е съставена от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Имаме $\lim\limits_{x\to0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=0$. И така оста Oy ще бъде вертикална асимптота, а оста Ox — хоризонтална асимптота на графиката на функцията y. По-нататък намираме $y'=-\frac{x+2}{x^3}$. Като изследваме изменението на знака на y', заключаваме, че функцията y е намаляваща в интервала $(-\infty, -2)$, растяща в интервала $(-2, 0)$ и намаляваща в интервала $(0, \infty)$. В точката $x_1=-2$ тя придобива един локален минимум. Тъй като $y''=2\frac{x+3}{x^4}$, то функцията y е вдлъбната при $x<-3$ и изпъкнала при $x>-3$. Графиката е показана на черт. 41.

14. Функцията $y=\frac{x^3}{x^2-3x+2}$. Дефиниционната ѝ област е съставена от интервалите $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, \infty)$. Имаме

$$y'=\frac{x^2(x^2-6x+6)}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{x^2(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2-3x+2)^2},$$

където $x_1=3-\sqrt{3}$, $x_2=3+\sqrt{3}$. Следователно функцията y е растяща при $x<x_1$, т. е. в интервалите $(-\infty, 1)$ и $(1, x_1)$, намаляваща е при $x_1<x<x_2$, т. е. в интервалите $(x_1, 2)$ и $(2, x_2)$, и отново растяща при $x>x_2$, т. е. в интервала (x_2, ∞). Тя има локален максимум в точката x_1 и локален минимум в точката x_2. Нека обърнем внимание още и на обстоятелството, че $y'(0)=0$, което показва, че при $x=0$, т. е. в точката $(0, 0)$, графиката има за допирателна оста Ox. После намираме $y''=$ $=\frac{2x(7x^2-18x+12)}{(x-1)^3(x-2)^3}$. Тъй като квадратният полином $7x^2-18x+12$ не се анулира за реални стойности на x и следователно е винаги положителен, то заключаваме, че функцията y е вдлъбната в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(1, 2)$ и е изпъкнала в интервалите $(0, 1)$ и $(2, \infty)$. Имаме освен това $\lim\limits_{x\to1,\, x<1} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to1,\, x>1} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x<2} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x>2} y=\infty$. Следователно правите с уравнения $x=1$ и $x=2$ са асимптоти на графиката на функцията y. Имаме също $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Като извършим делението на полиномите, намиращи се в числителя и в знаменателя на функцията y, получаваме

$$y=x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}. \tag{4}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x-6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-6}{x^2-3x+2}=0$, то равенството (4) ни показва, че правата с уравнение $y=x+3$ се явява асимптота на графиката на функцията y при $x\to-\infty$ и при $x\to\infty$. Графиката е показана на черт. 42.

15. Функцията $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=\frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, следователно функцията е растяща. Нейната графика има в точката $(0, 0)$ за допирателна оста Ox, тъй като $y'(0)=0$. Намираме след това

$$y''=4\frac{3x-x^3}{(x^2+1)^3}=-4\frac{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3},$$

откъдето заключаваме, че функцията y е изпъкнала в интервалите $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$ и вдлъбната в интервалите $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, \infty)$. Имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. След като извършим делението в израза $\frac{2x^3}{x^2+1}$, получаваме

$$y=2x-\frac{2x}{x^2+1}. \tag{5}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$, от равенството (5) се вижда, че правата с уравнение $y=2x$ е асимптота на графиката на функцията y. Да отбележим накрая, че графиката е симетрична относно началото на координатната система, тъй като функцията y е нечетна. Тази графика е показана на черт. 43.

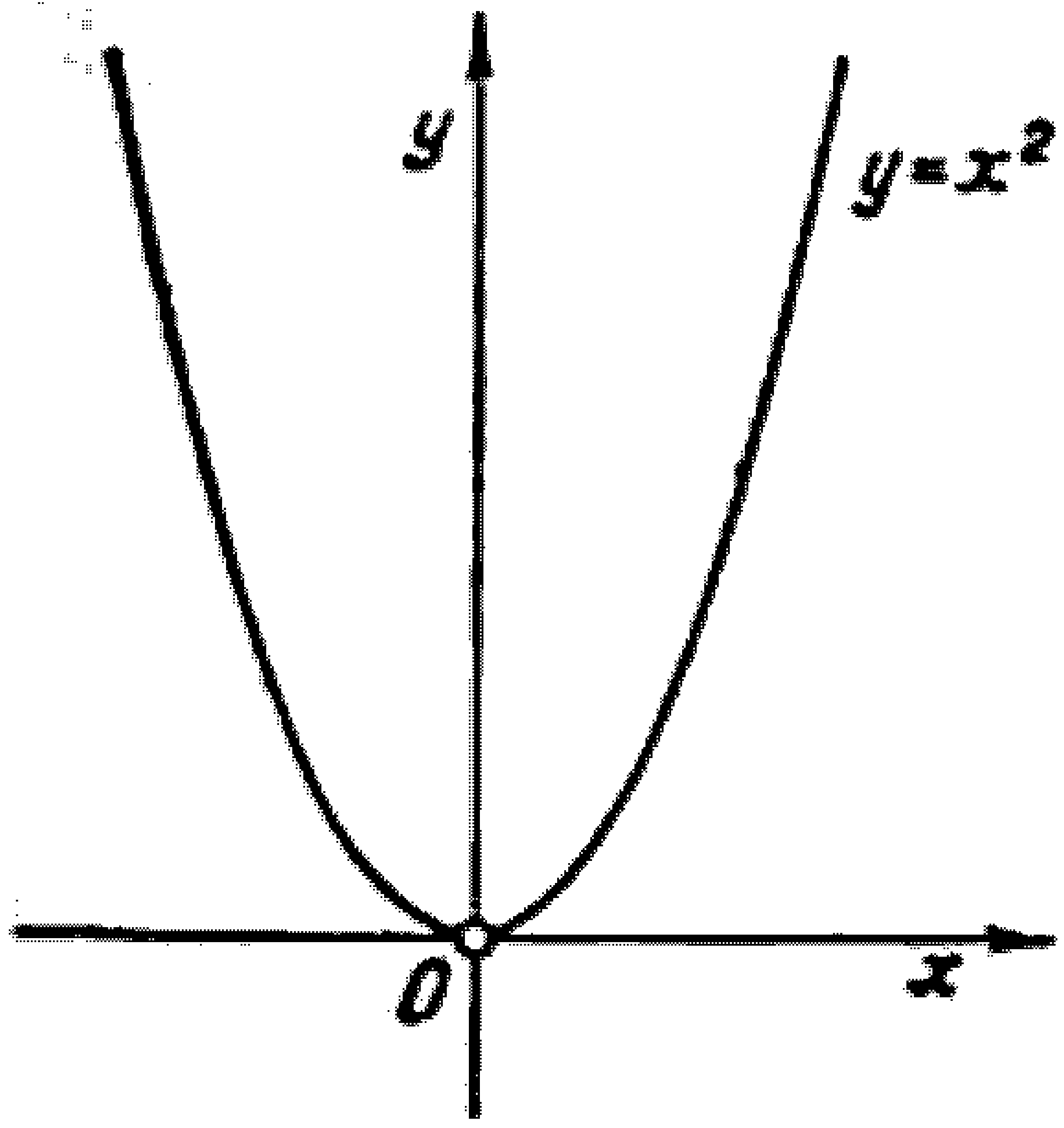
16. Функцията $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=\frac{2x+1}{(x^2+1)^{3/2}}$. Следователно функцията y е намаляваща в интервала $(-\infty, -\frac{1}{2})$ и растяща в интервала $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Тя има един локален минимум — в точката $x=-\frac{1}{2}$. Намираме $y''=-\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{5/2}}=$ $=-\frac{4(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+1)^{5/2}}$, където $x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{8}$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$. Функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, x_1)$, изпъкнала в интервала (x_1, x_2) и отново вдлъбната в интервала (x_2, ∞). По-нататък виждаме, че $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$. Следователно правите с уравнения $y=-1$ и $y=1$ са две хоризонтални асимптоти на графиката на функцията y — първата при $x\to-\infty$, а втората при $x\to\infty$. Графиката е показана на черт. 44.

17. Функцията $y=\frac{e^x}{x-2}$. Дефиниционната ѝ област се състои от интервалите $(-\infty, 2)$ и $(2, \infty)$. Имаме $y'=e^x\frac{x-3}{(x-2)^2}$; следователно функцията y е намаляваща при $x<3$, т. е. в интервалите $(-\infty, 2)$ и $(2, 3)$ и растяща при $x>3$, т. е. в интервала $(3, \infty)$. Намираме $y''=\frac{e^x(x^2-6x+10)}{(x-2)^3}$. Тъй като $e^x>0$ и $x^2-6x+10>0$ за всяко x (последното неравенство следва от това, че квадратният тричлен $x^2-6x+10$ не се анулира за реални значения на x), то знакът на y'' зависи само от знаменателя. Следователно функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, 2)$ и изпъкнала в интервала $(2, \infty)$. Имаме освен това $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x<2} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x>2} y=\infty$. И така оста Ox е хоризонтална асимптота, а правата с уравнение $x=2$ — вертикална асимптота на графиката на функцията y. Графиката е показана на черт. 45.

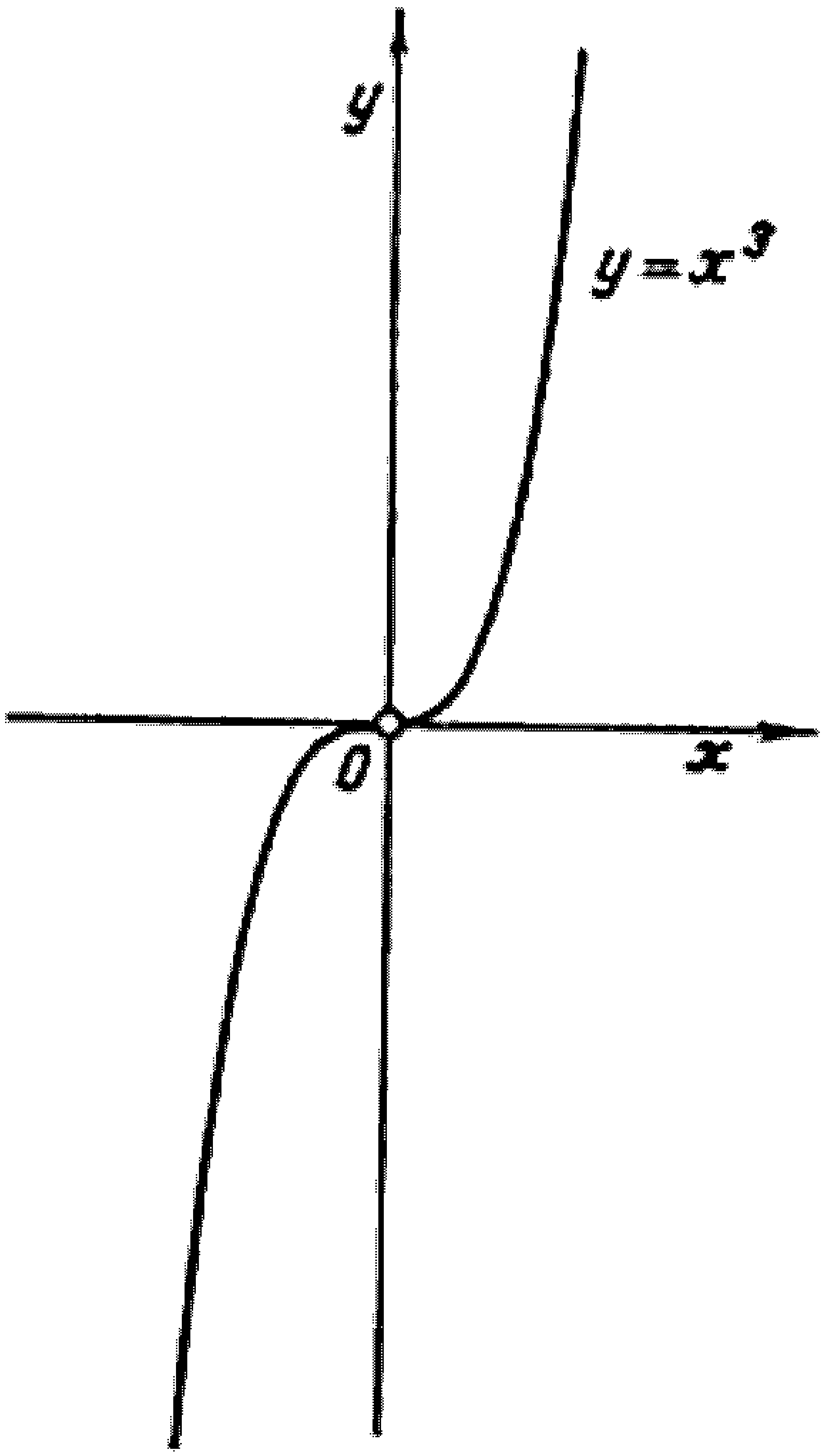
18. Функцията $y=x+\sin x$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=1+\cos x$. Тъй като $y'\geqq0$ за всяко x, то функцията y е растяща. При това $y'(x)=0$ при $x=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \dots)$. В съответните точки графиката ще притежава допирателни, успоредни на оста Ox. По-нататък имаме $y''=-\sin x$. Функцията y ще бъде изпъкнала във всички интервали от вида $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ и вдлъбната във всички интервали от вида $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, където $k=0, \pm1, \pm2, \dots$ Във всички точки от вида $x=n\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2, \dots)$ функцията y ще има инфлексия, тъй като $y''(n\pi)=0$, $y'''(n\pi)\neq0$. Графиката е показана на черт. 46.

Упражнения. Да се изследват функциите:

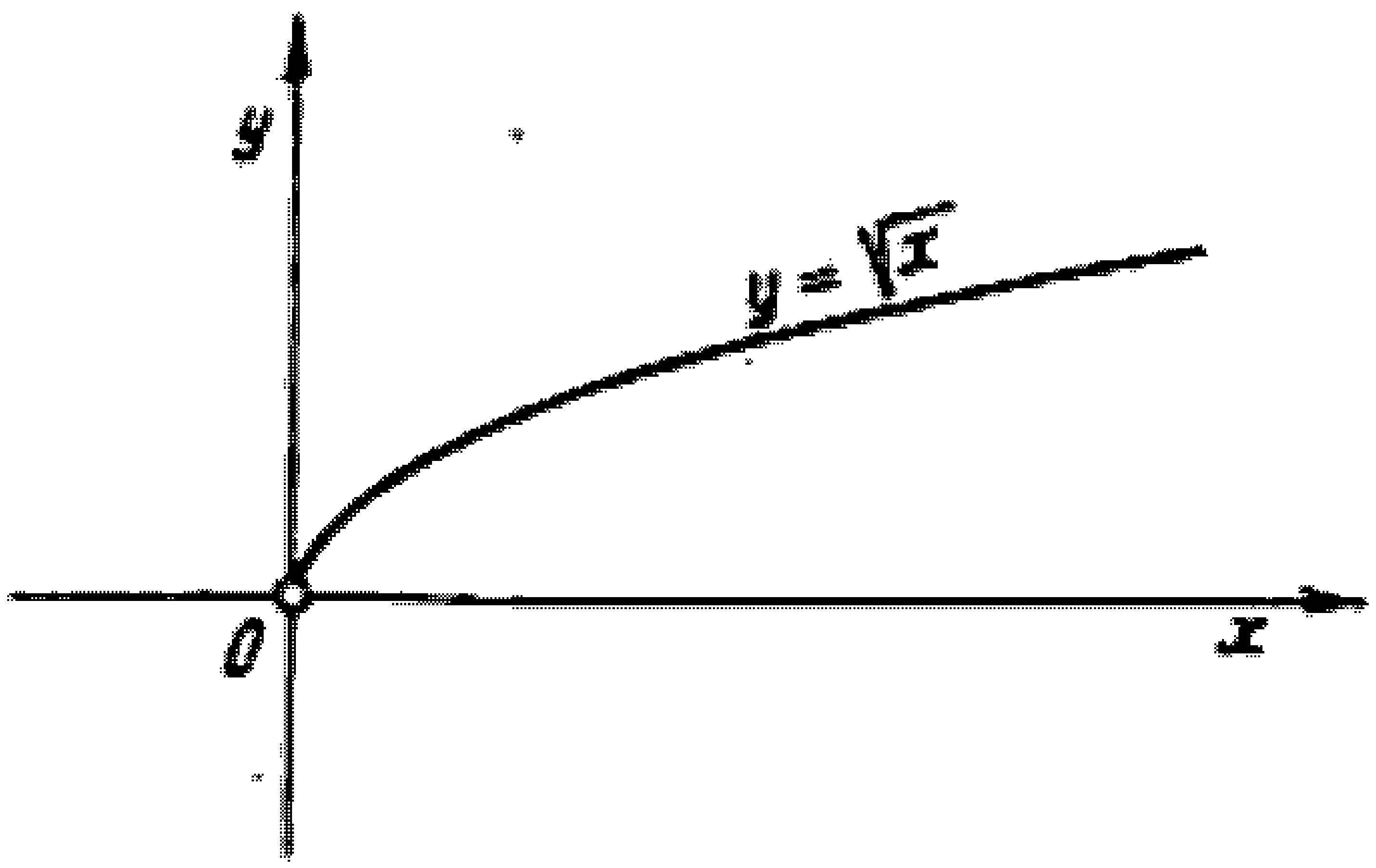
1. $y = x^3 - 3x$.
2. $y = \dfrac{x+3}{2x}$.
3. $y = \dfrac{x+1}{x^2+2}$.
4. $y = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$.
5. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.
6. $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6}$.
7. $y = \sin x + \cos x$.
8. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
9. $y = x + \operatorname{arc\,tg} x$.



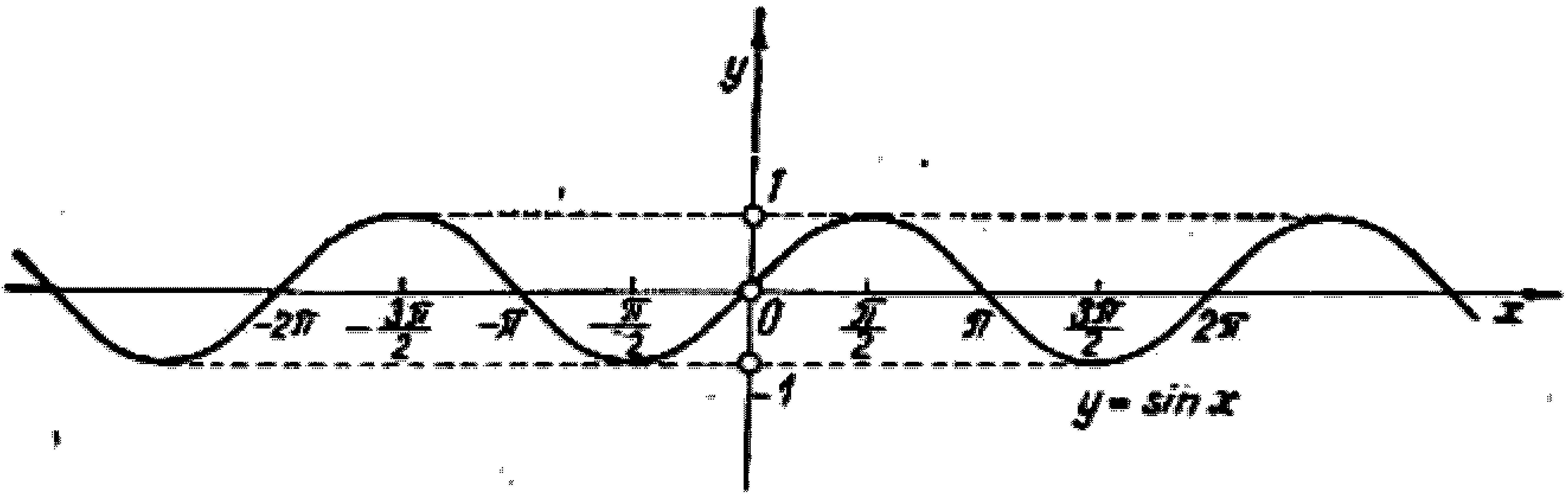
Черт. 25



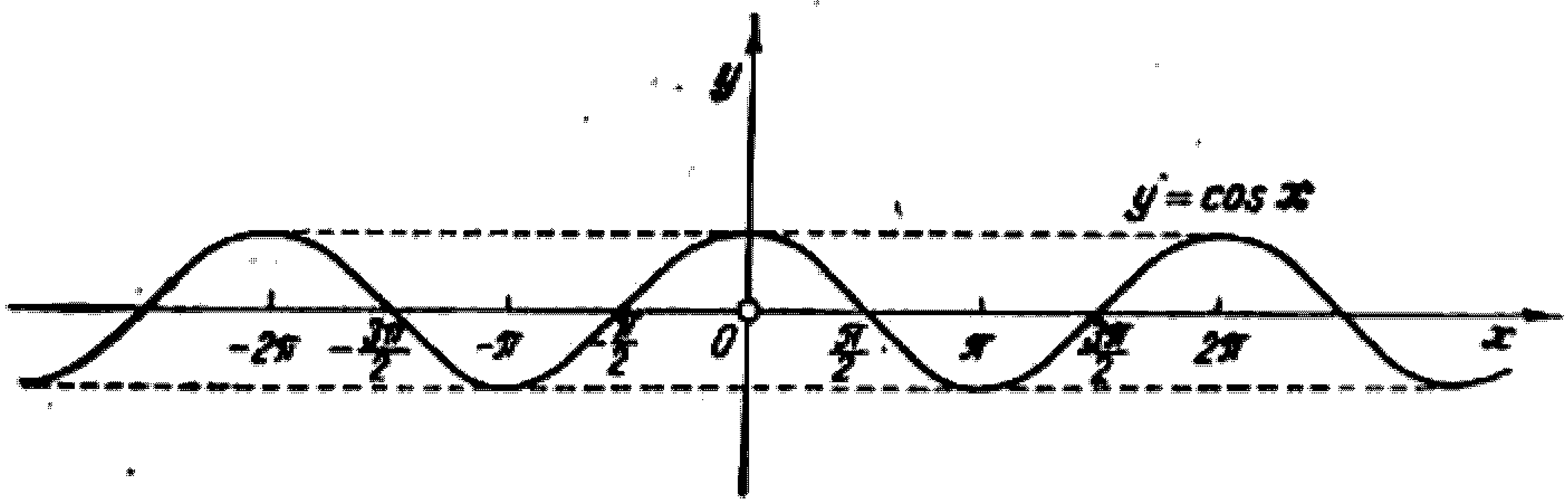
Черт. 26



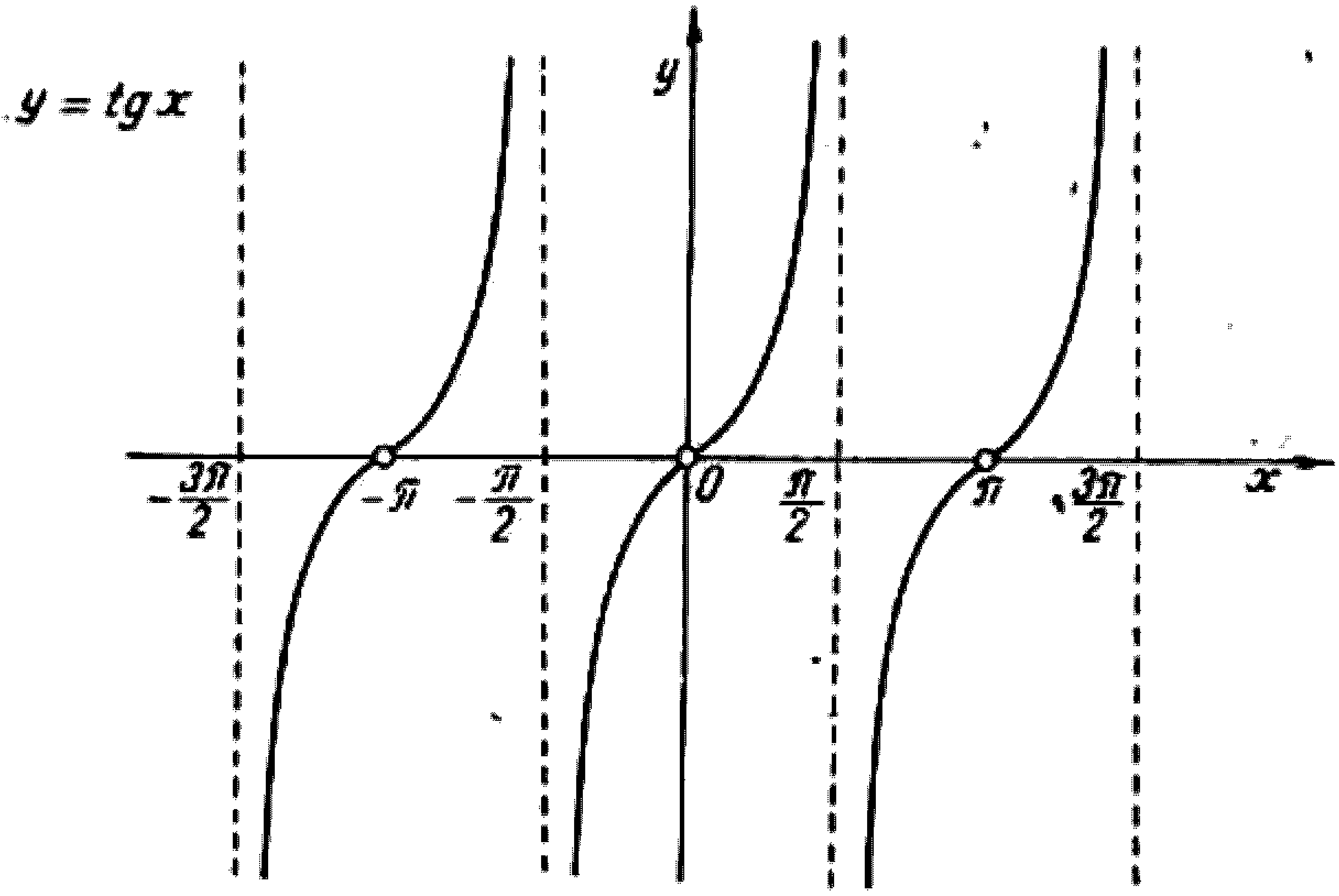
Черт. 27



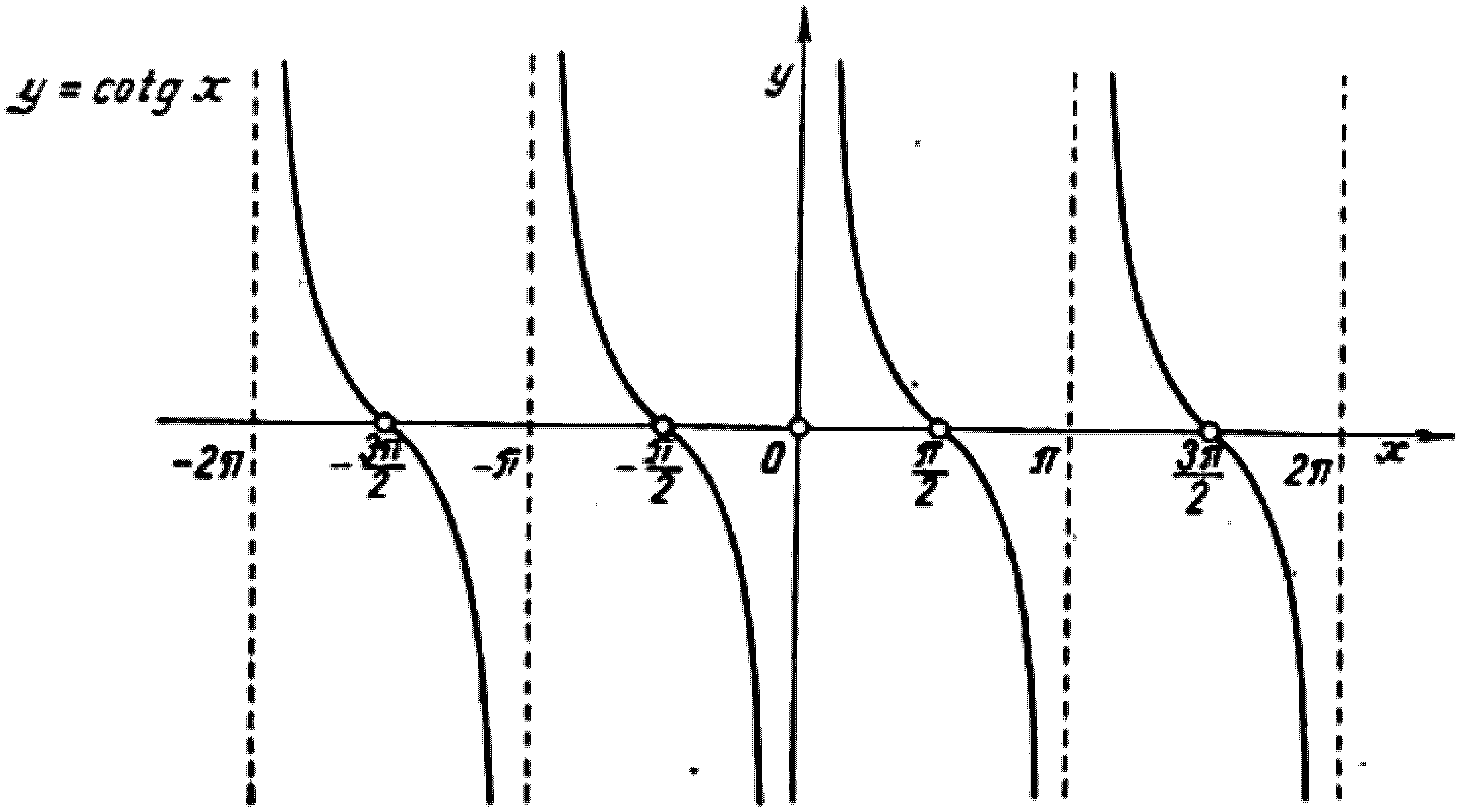
Черт. 28



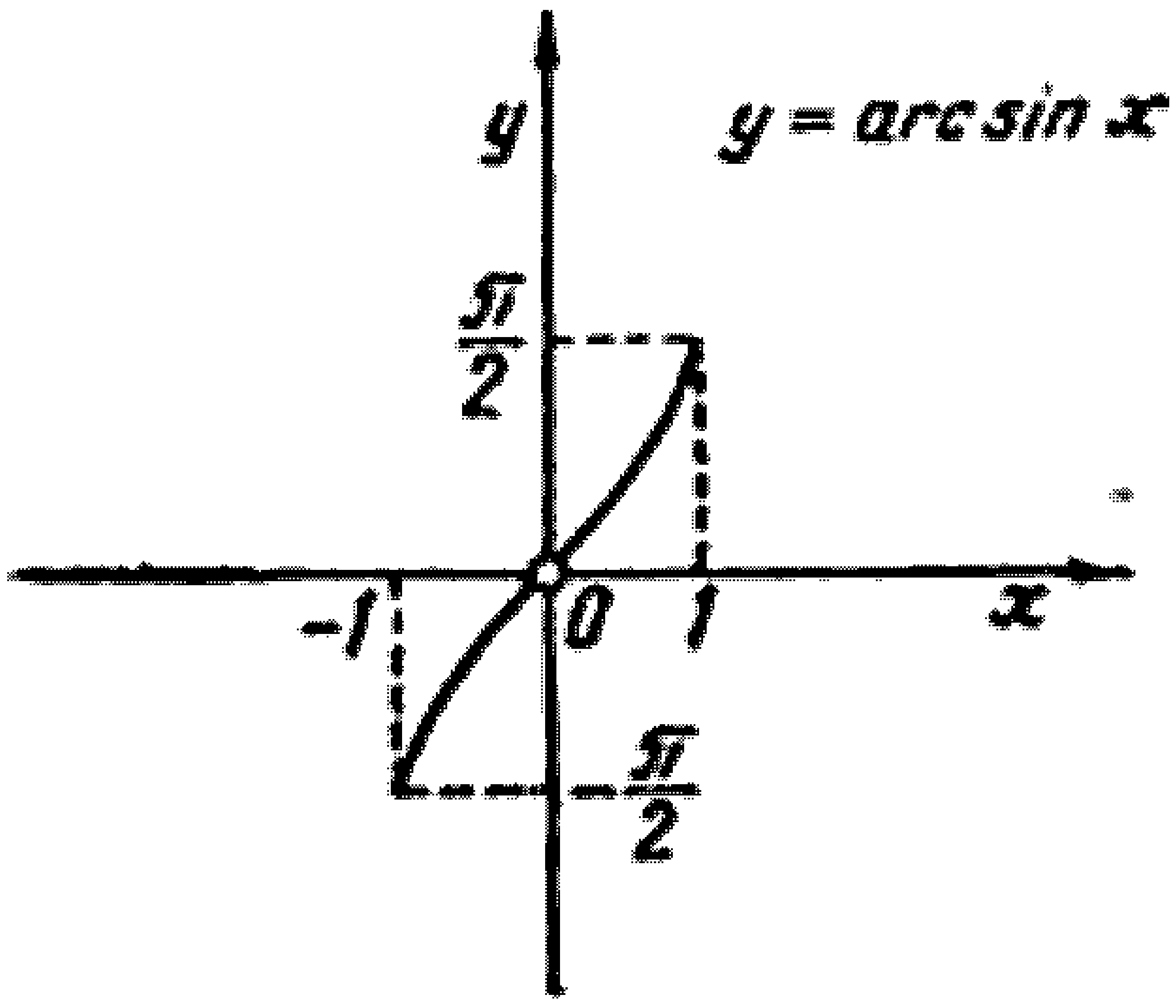
Черт. 29



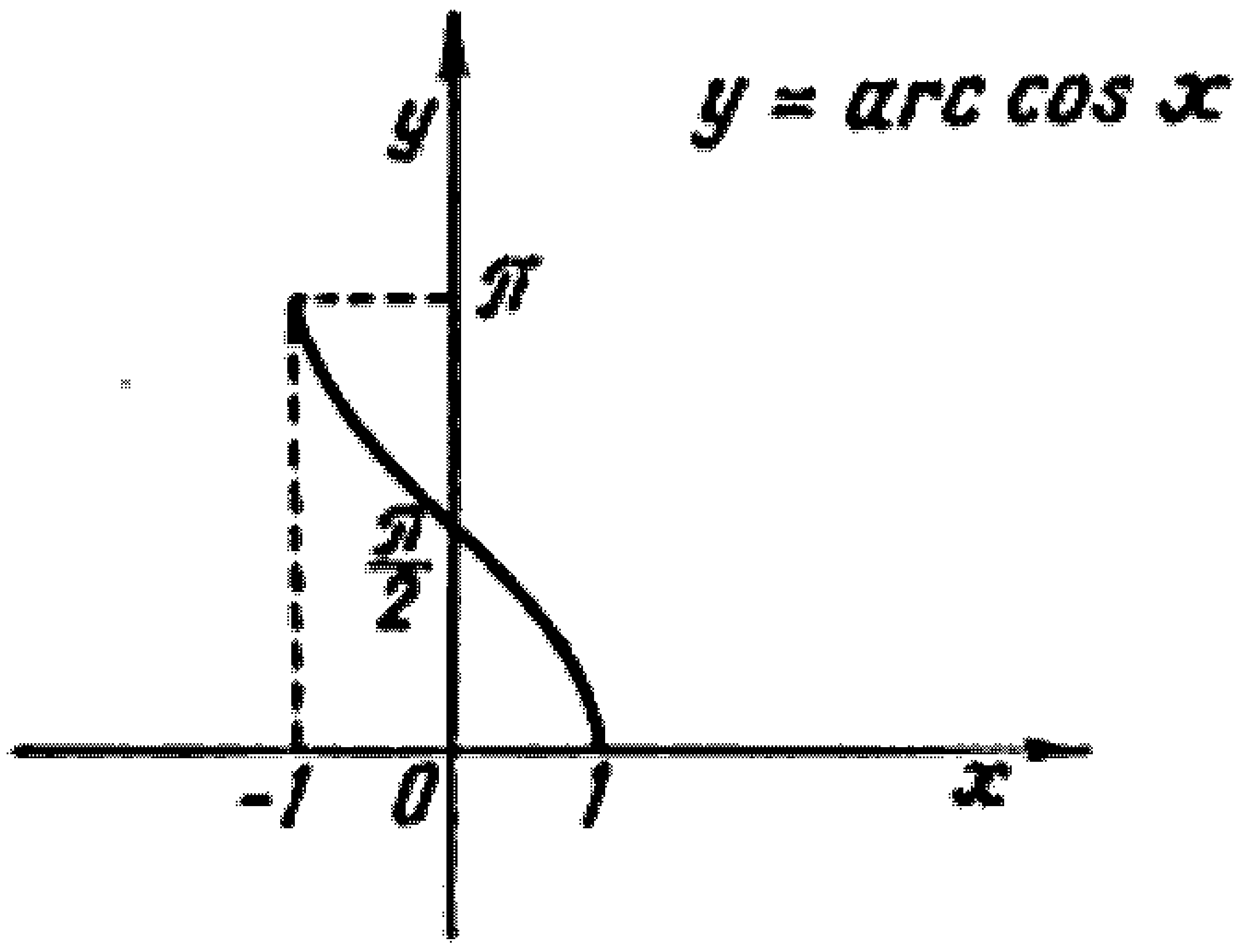
Черт. 30



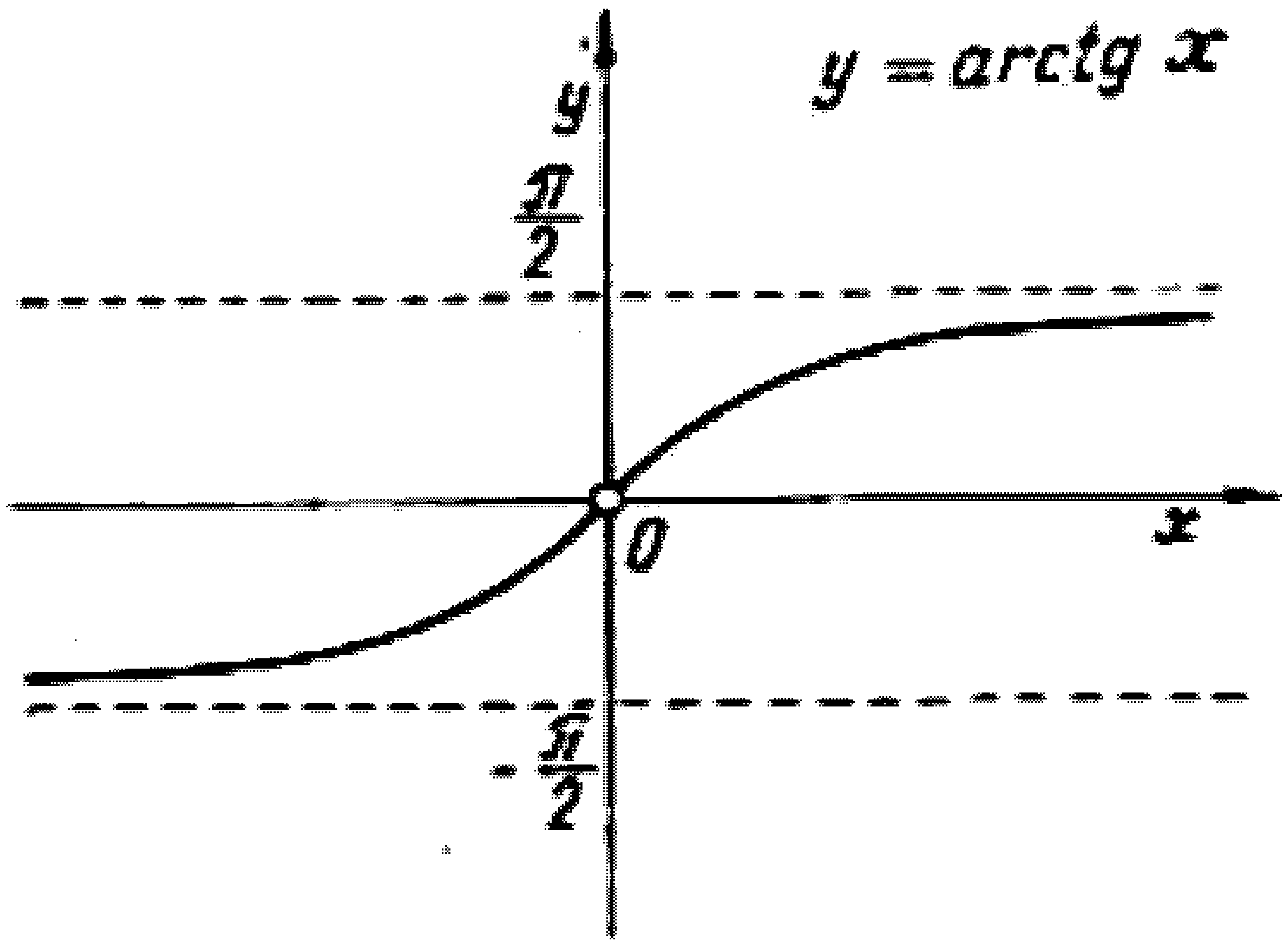
Черт. 31



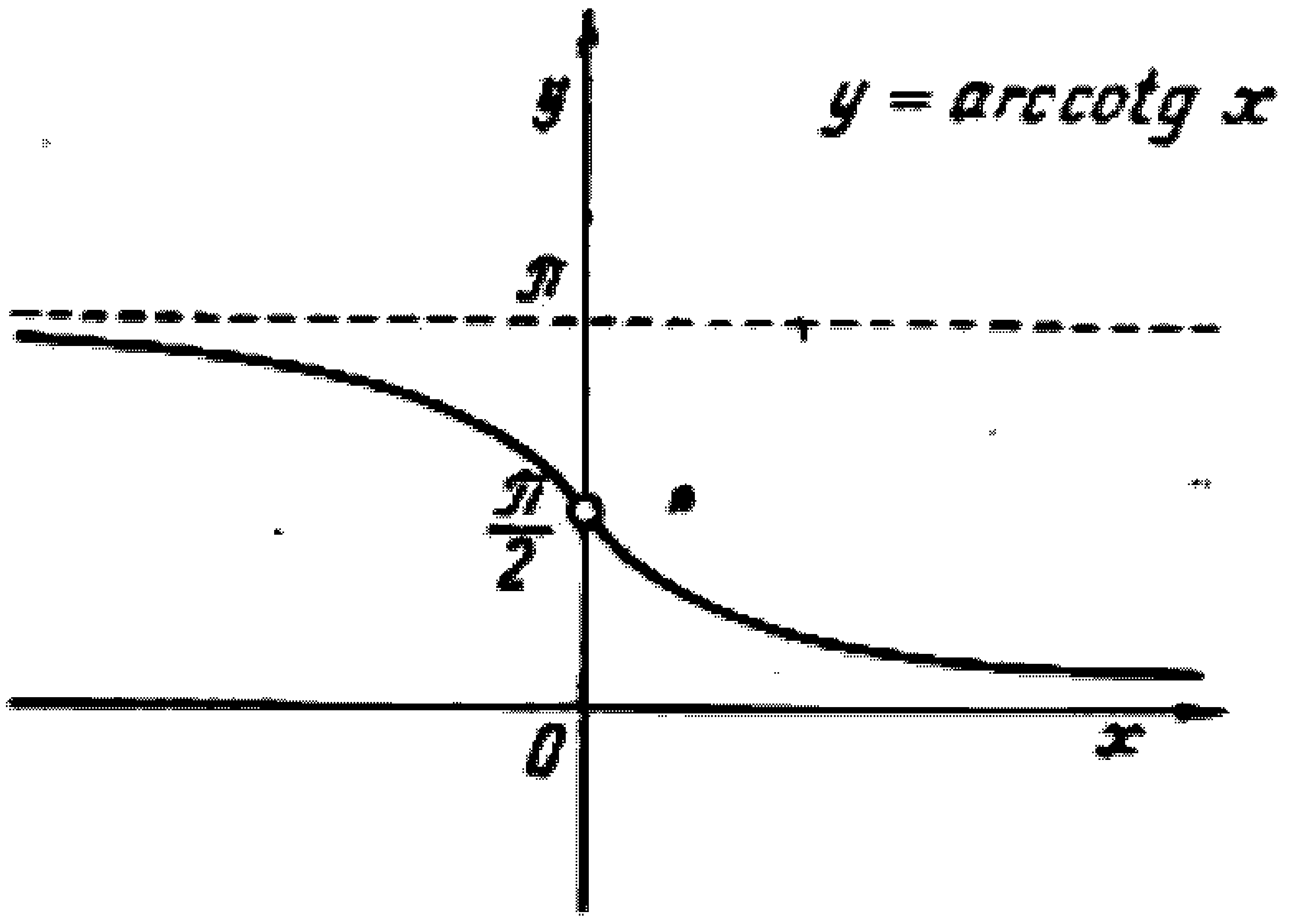
Черт. 32



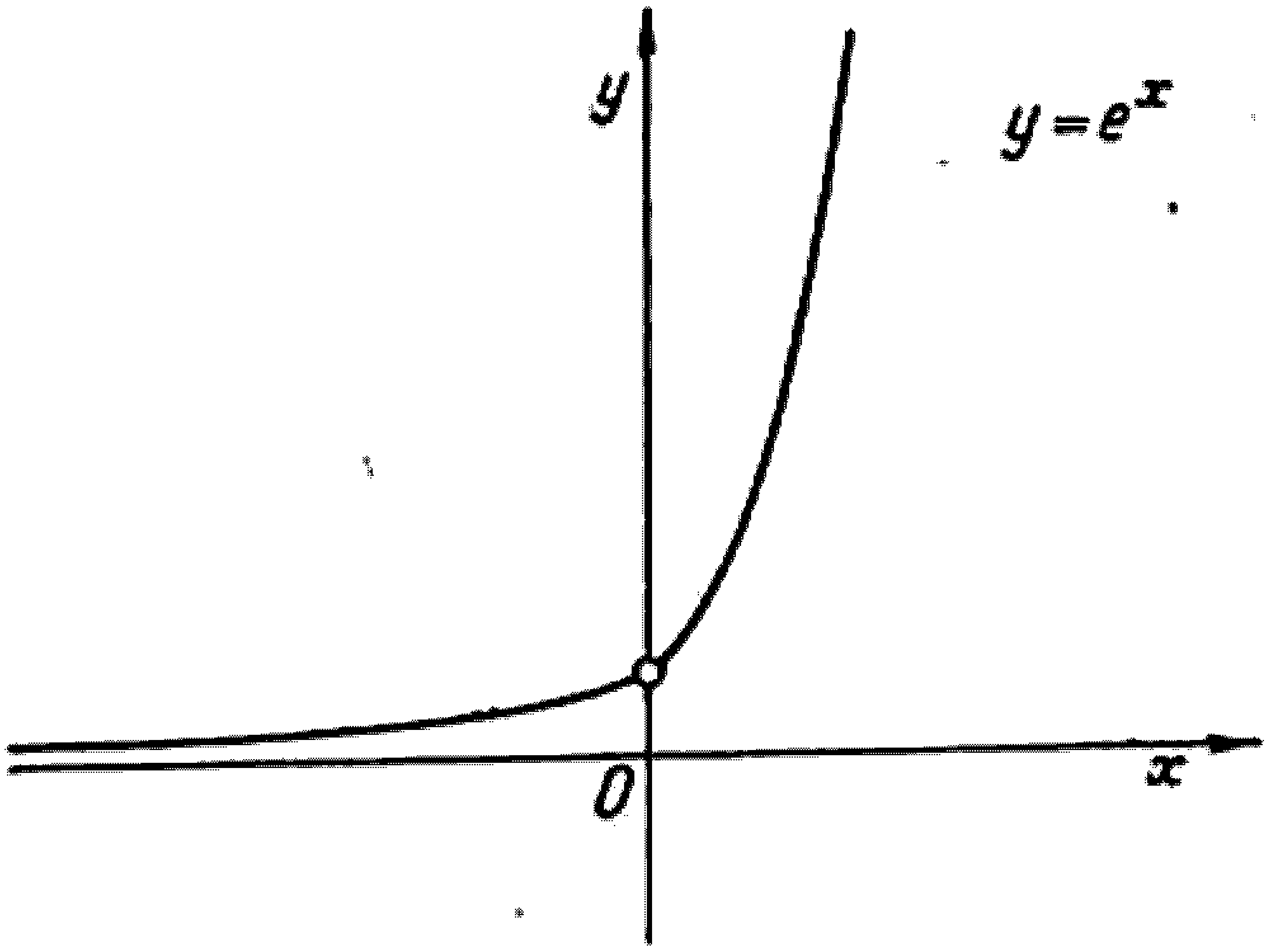
Черт. 33



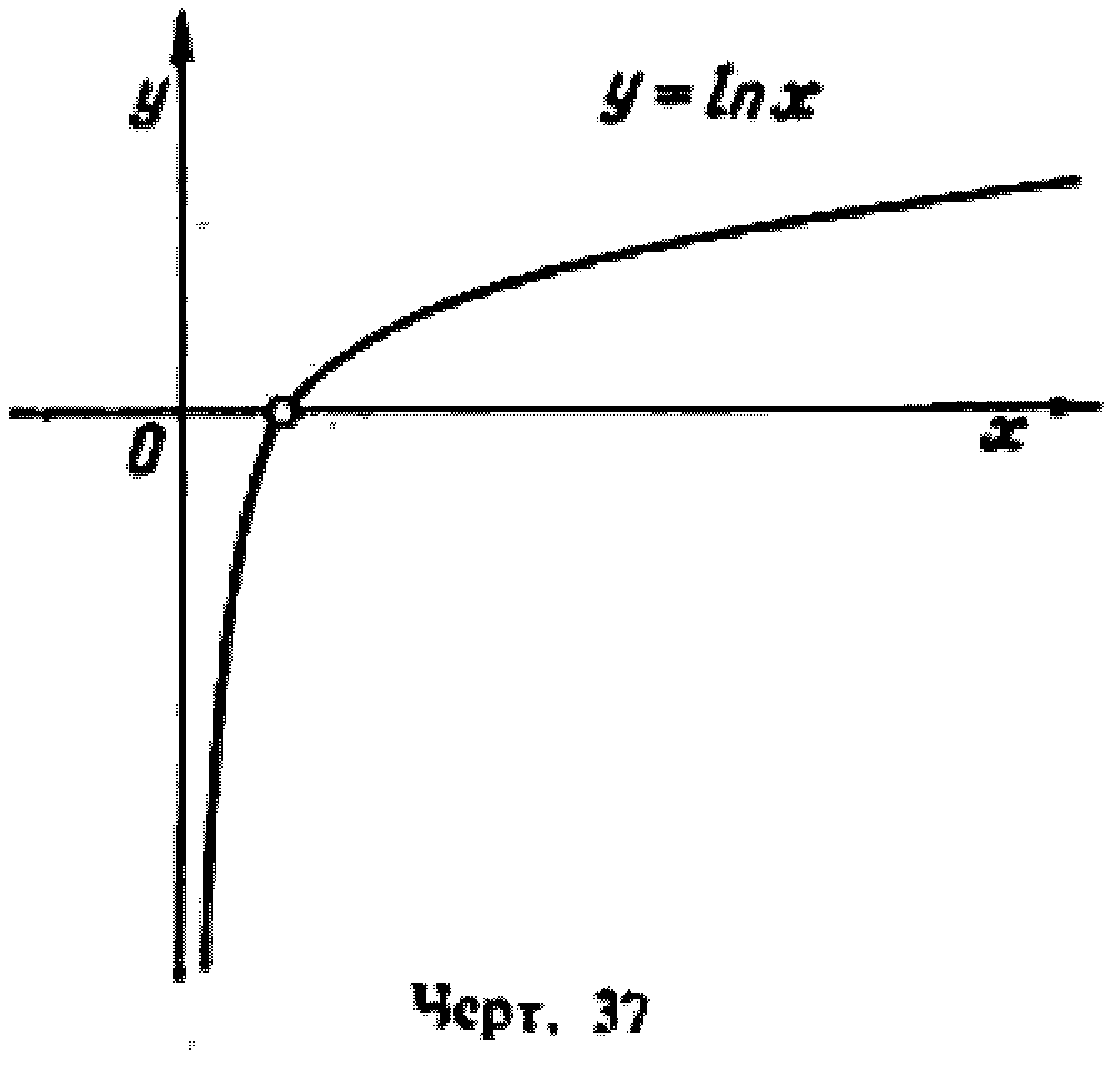
Черт. 34



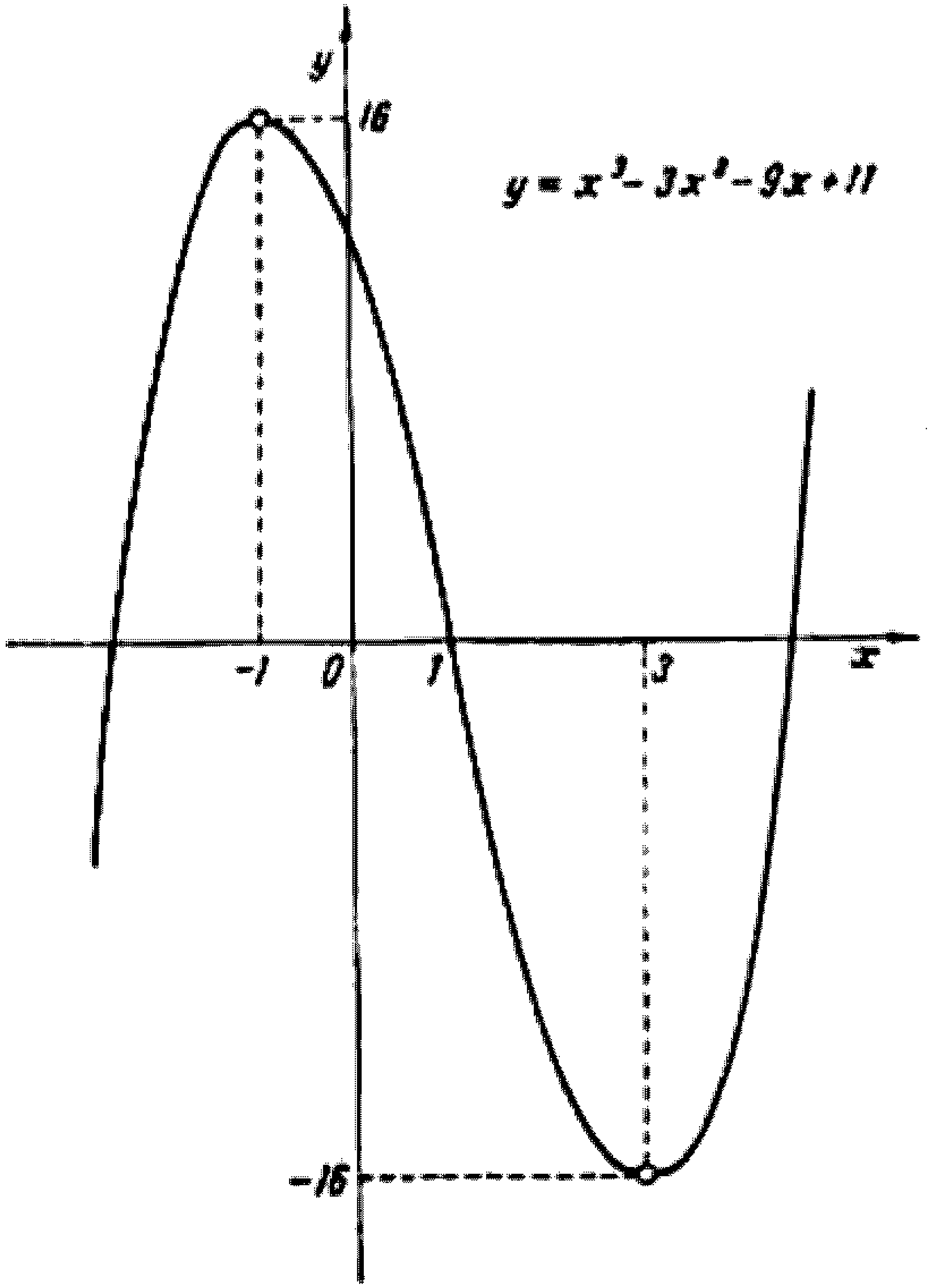
Черт. 35



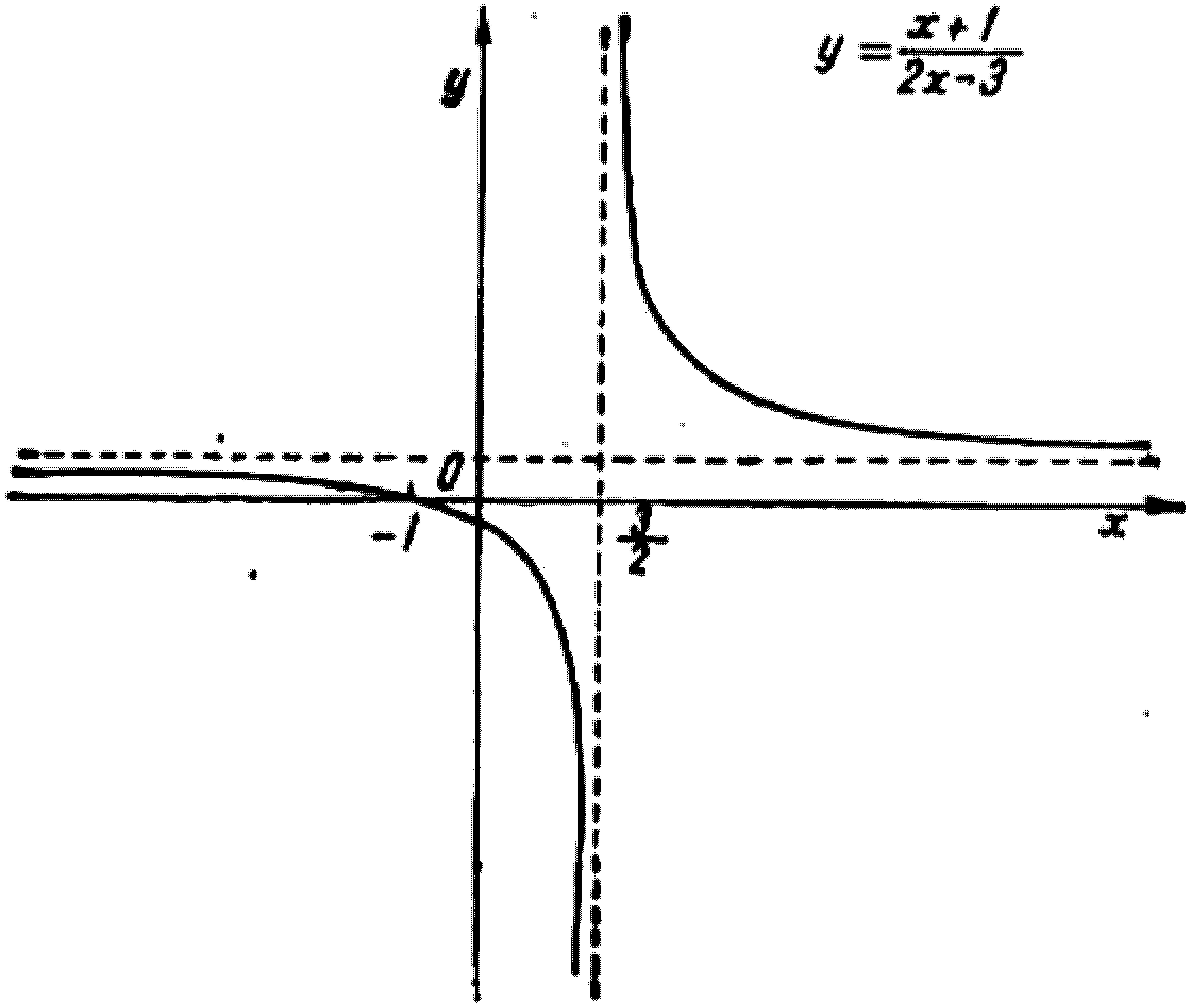
Черт. 36



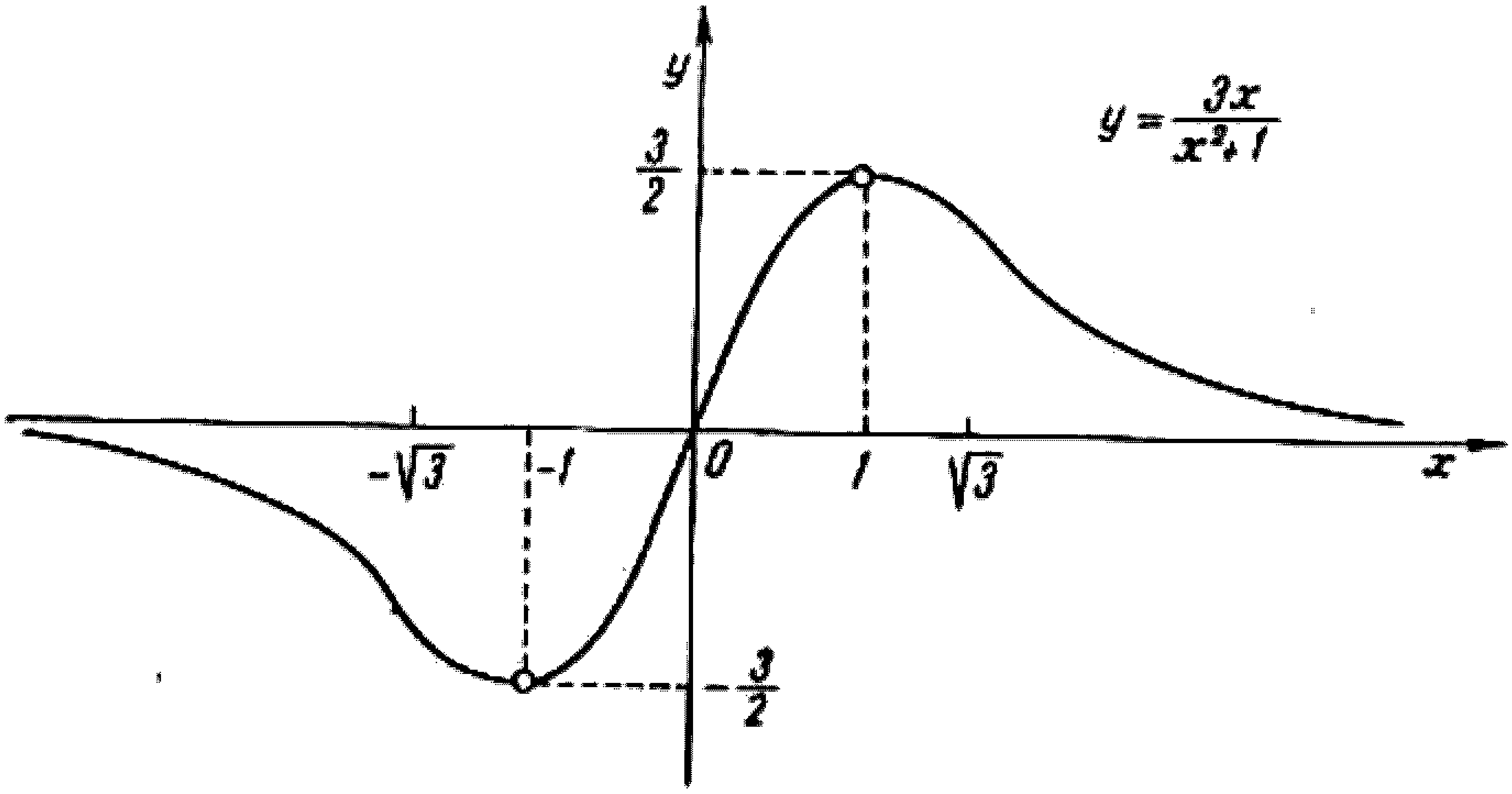
Черт. 37



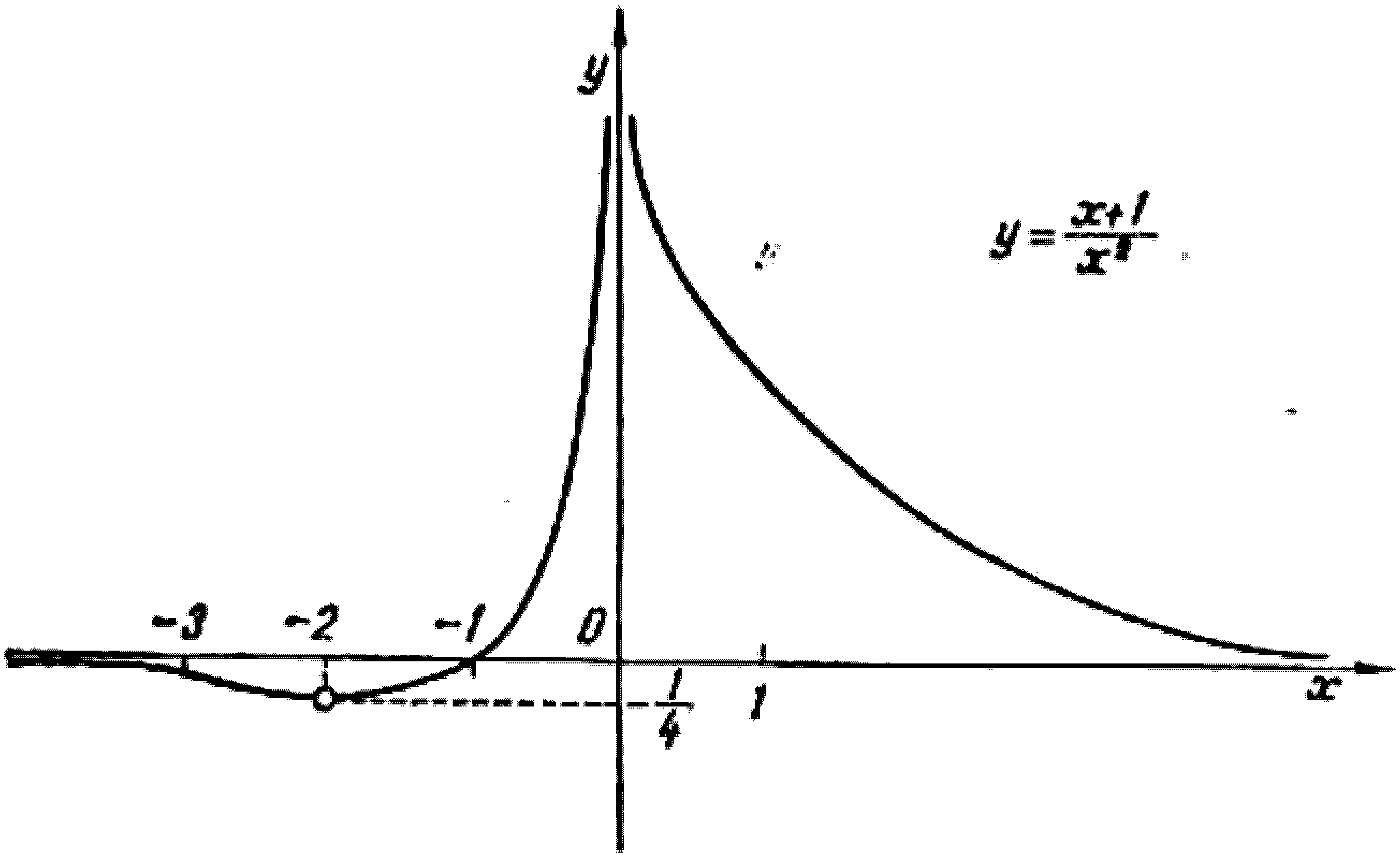
Черт. 38



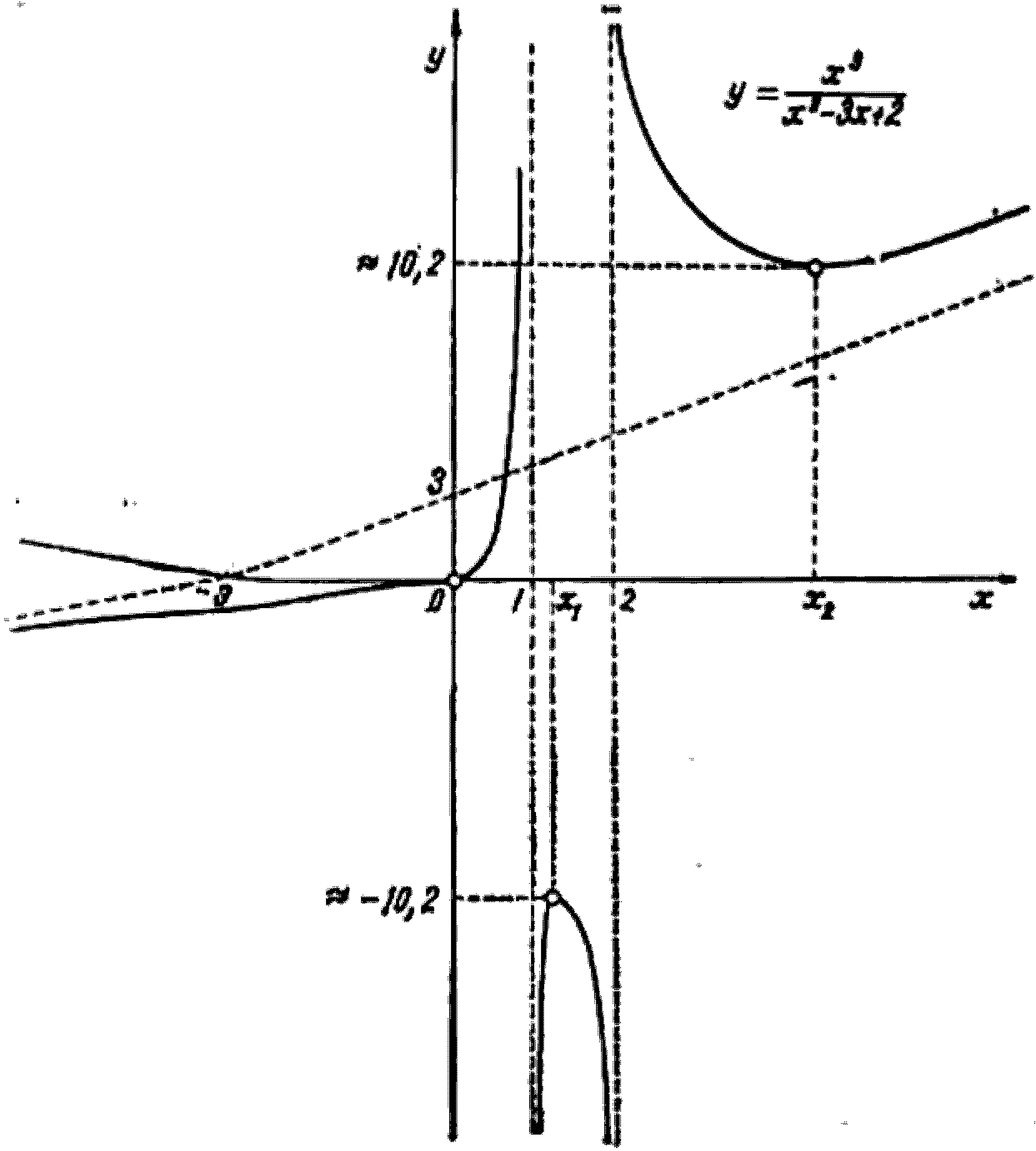
Черт. 39



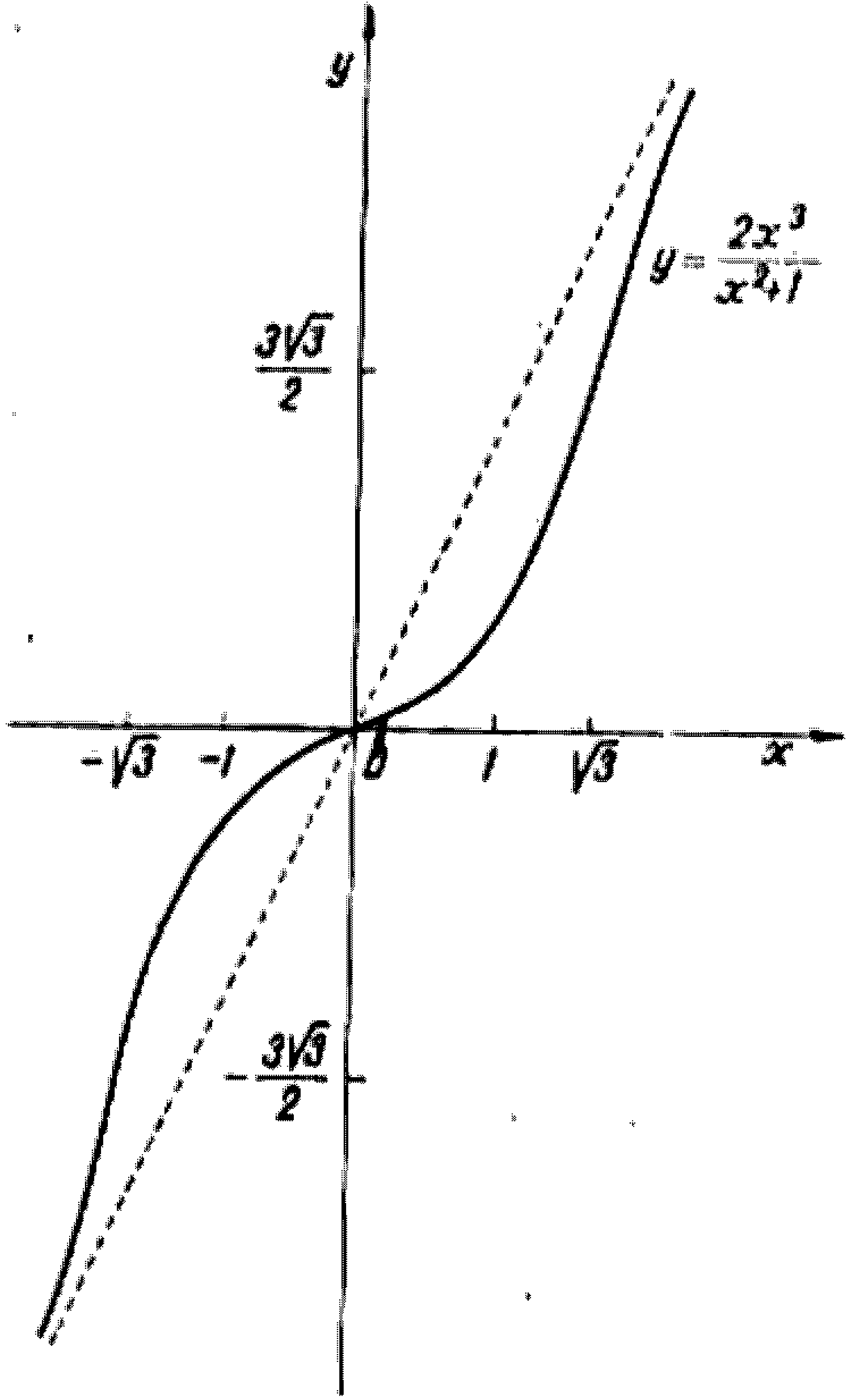
Черт. 40



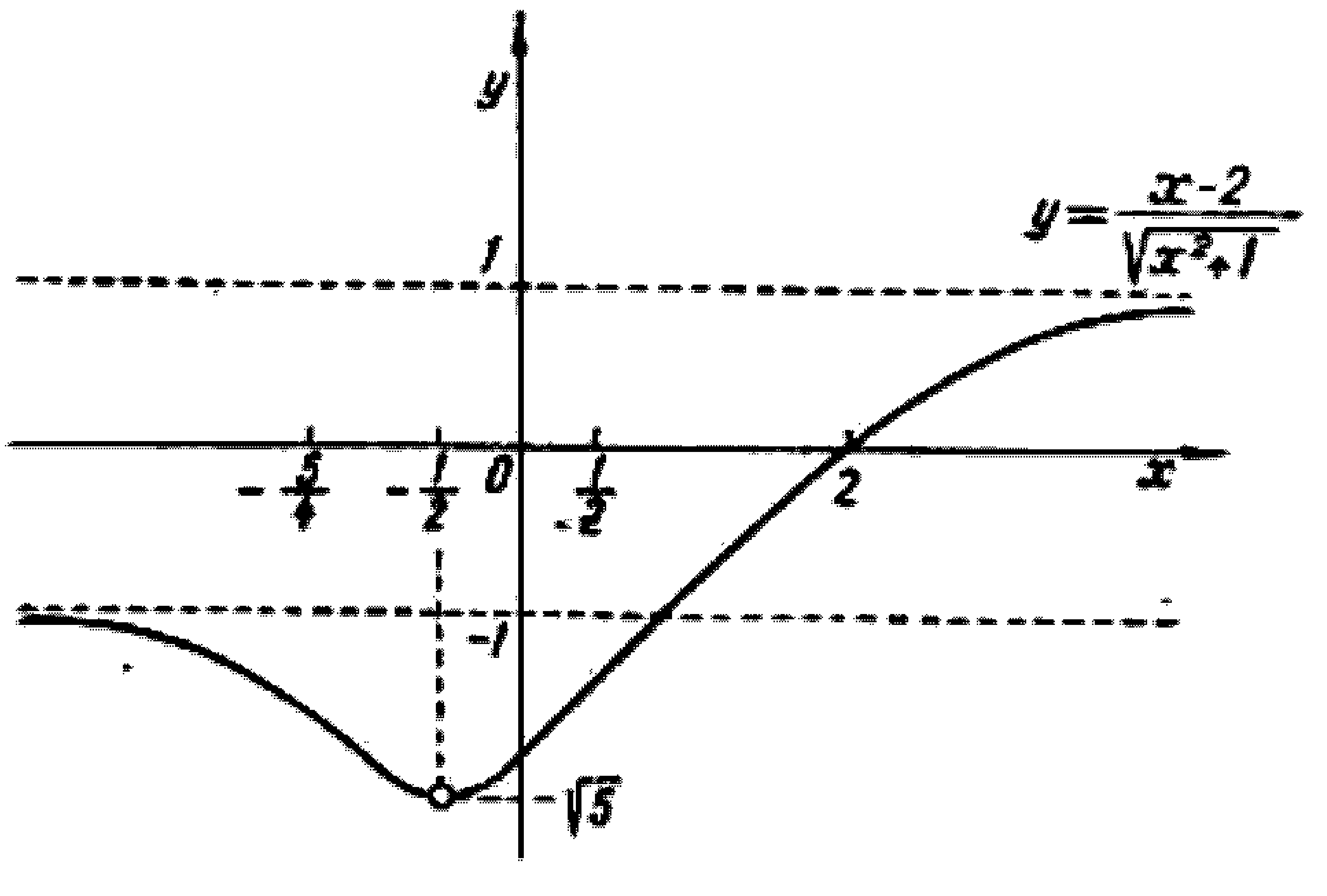
Черт. 41



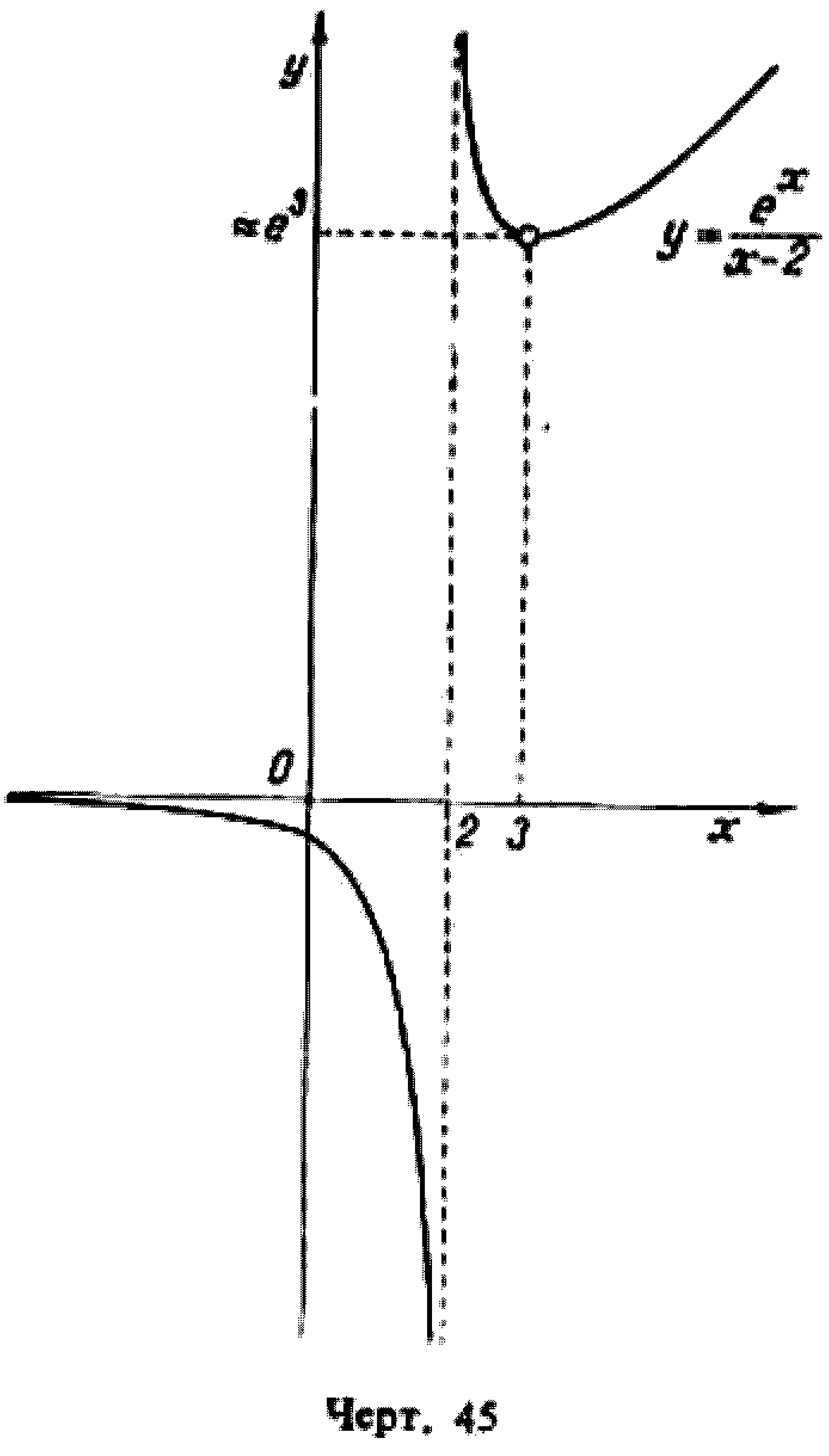
Черт. 42



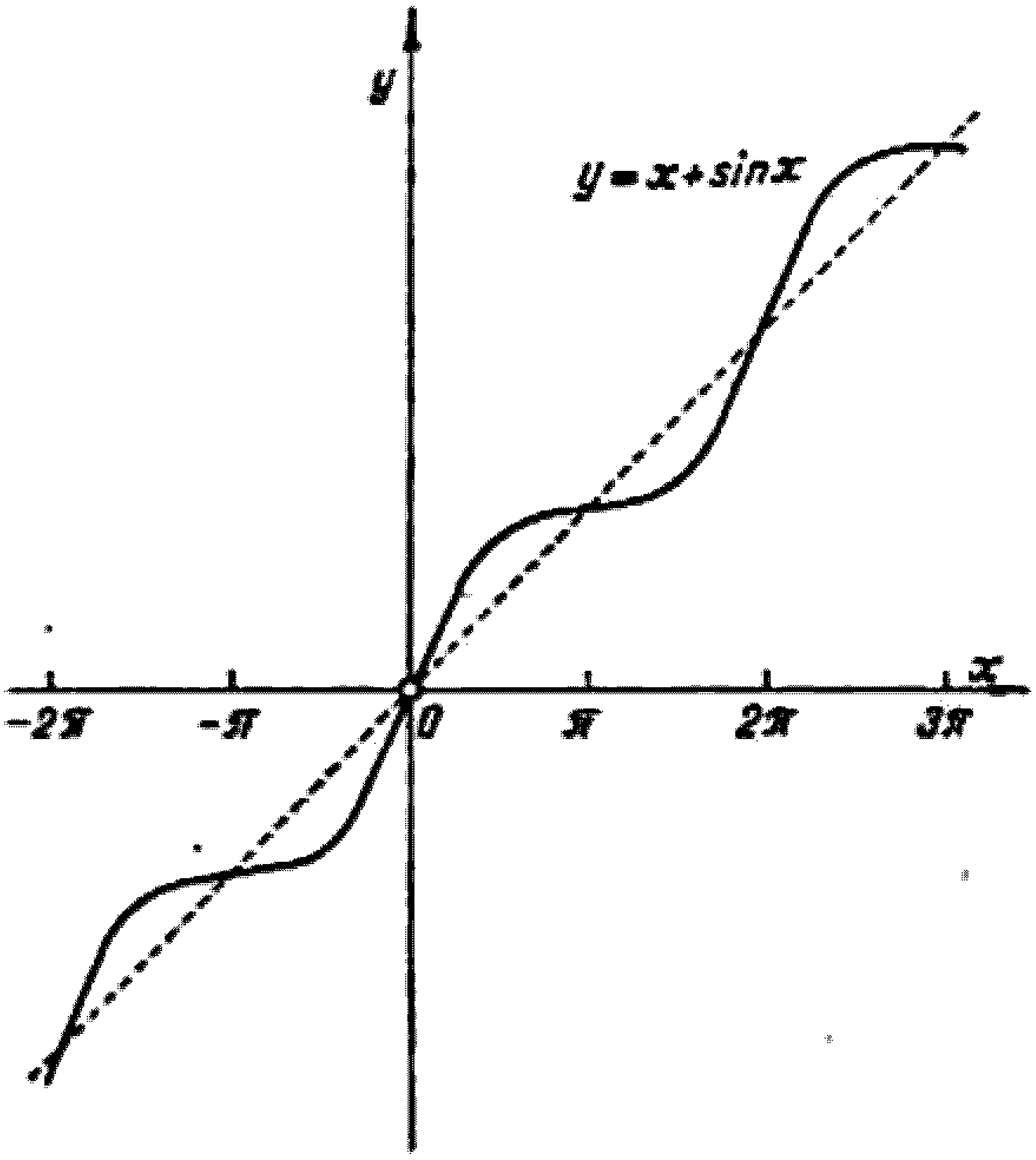
Черт. 43



Черт. 44



Черт. 45



Черт. 46

ГЛАВА VII

НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Понятието неопределен интеграл възниква съвсем естествено, когато си поставим за задача да дефинираме действието, обратно на действието диференциране. Оказва се обаче, че методите за извършването на това действие, което се нарича интегриране и се състои в намирането на една функция, на която познаваме производната, са много по-сложни, отколкото методите за диференциране. Ние ще се запознаем постепенно с различни методи, позволяващи ни да интегрираме някои специални, но все пак достатъчно широки класове от функции.

§ 40. Дефиниция и най-прости свойства на неопределените интеграли

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в един интервал. Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в същия интервал, е *примитивна функция* или *неопределен интеграл* на функцията $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцуема в този интервал и $F'(x)=f(x)$.

Така например функцията $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ е примитивна на функцията $f(x)=x^2$ в интервала $(-\infty, \infty)$. В същия интервал функцията $F(x)=\sin x$ се явява примитивна на функцията $f(x)=\cos x$.

Когато една функция $f(x)$ притежава поне една примитивна $F(x)$ в някой интервал, то тя притежава тогава и безбройно много примитивни в същия интервал, тъй като всяка функция от вида $F(x)+C$, където C е константа, ще бъде също примитивна на $f(x)$. И наистина, ако $F'(x)=f(x)$, то $(F(x)+C)'=f(x)$. Лесно е да се види при това, че други примитивни функции дадената функция $f(x)$ няма. А именно валидна е следната

Теорема. *Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в един интервал, то всяка друга примитивна на $f(x)$ има вида $F(x)+C$, където C е някаква константа.*

Доказателство. И наистина нека $\Phi(x)$ е произволно взета примитивна функция на $f(x)$. Да разгледаме функцията $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$. Имаме $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, т. е. $\varphi'(x)=0$ за всяко x от дадения интервал. Тогава съгласно основната теорема на интегралното смятане функцията $\varphi(x)$ е константа в този интервал, т. е. $\varphi(x)=C$, или $\Phi(x)-F(x)=C$, откъдето $\Phi(x)=F(x)+C$.

За да отбележим, че функцията $F(x)$ е примитивна на дадена функция $f(x)$, пишем

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

При това записване функцията $f(x)$ се нарича **подинтегрална функция**.

По-късно ще покажем, че всяка функция, непрекъсната в един интервал, има примитивна в този интервал и че следователно символът $\int f(x)dx$ има смисъл винаги когато $f(x)$ е непрекъсната.

Тази глава ще бъде посветена на методите за пресмятане на примитивните функции. Във важността на тази задача ще се убедим понататък — когато в следващата глава изучаваме теорията на т. нар. определени интеграли.

Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича **интегриране** на $f(x)$. В основата на интегрирането на функциите или, както ще казваме още, на пресмятането на неопределените интеграли лежи следната таблица:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1). \qquad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \quad (x\neq 0).$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C. \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C. \qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotg} x+C.$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C. \qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C \quad (a\neq 0).$$

Естествено всяка от тези формули може да се прилага за такъв интервал, за който е дефинирана съответната подинтегрална функция.

Доказателството на формулите в таблицата е очевидно. Ще покажем само как се установява втората от тях. Трябва да проверим, че при $x\neq 0$ имаме $(\ln|x|+C)'=\frac{1}{x}$. Наистина в интервала $(0,\infty)$ имаме $\ln(|x|+C)'=(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, а в интервала $(-\infty, 0)$ получаваме $\ln(|x|+C)'=(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$.

Постепенно ще се запознаем с методи за пресмятане на различни видове неопределени интеграли, като във всички случаи ще се стремим да сведем търсения интеграл към един или няколко от табличните интеграли.

Обикновено константата C се изпуска — не се пише, но се подразбира.

Първата формула от таблицата на основните интеграли веднага ни дава възможност да пресметнем редица интеграли. С нейна помощ получаваме например

$$\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4,$$

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}\,dx=-x^{-1}=-\frac{1}{x},$$

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}=\int x^{-\frac{1}{5}}\,dx=\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}.$$

В случая, когато подинтегралната функция е константата 1, с помощта на същата формула или още по-просто чрез непосредствена проверка получаваме

$$\int dx=x.$$

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, притежаващи примитивни функции в някой интервал. Тогава тяхната сума — функцията $f(x)+g(x)$, също притежава примитивна и при това имаме

$$(1)\qquad \int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx.$$

Също така, ако $f(x)$ има примитивна, а k е константа, то функцията $kf(x)$ има също примитивна и е в сила равенството

$$(2)\qquad \int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx.$$

Верността на последните две равенства се установява много просто. Наистина имаме

$$\left(\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\right)'=\left(\int f(x)\,dx\right)'+\left(\int g(x)\,dx\right)'=f(x)+g(x),$$

което показва, че функцията

$$\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

е примитивна на функцията $f(x)+g(x)$. С това е доказано равенството (1). Равенството (2) пък следва от равенствата

$$\left(k\int f(x)\,dx\right)'=k\left(\int f(x)\,dx\right)'=kf(x).$$

Равенствата (1) и (2) вече ни позволяват да пресмятаме някои най-прости неопределени интеграли. Ето някои примери:

$$\begin{aligned}\int(2x+3)^2\,dx&=\int(4x^2+12x+9)\,dx\\&=4\int x^2\,dx+12\int x\,dx+9\int dx\\&=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx&=\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Упражнения. Да се пресметнат следните интеграли:

$$\int\frac{dx}{x^5};\quad\int\sqrt[4]{x}\,dx;\quad\int(x+3)^3\,dx;\quad\int\frac{x^2+2}{x}\,dx;\quad\int\frac{x^3-4x^2+2x+3}{x^2}\,dx.$$

§ 41. Внасяне под знака на диференциала

С оглед на по-голямо удобство при пресмятанията уславяме се за следното:

Ако $\varphi(x)$ е диференцуема функция, ще пишем

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx=\int f(x)\,d\varphi(x). \tag{1}$$

Когато прилагаме това равенство, ще казваме, че внасяме функцията $\varphi'(x)$ под знака на диференциала или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията $\varphi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. С други думи, интегрираме функцията $\varphi'(x)$. Ето защо можем също да пишем

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx=\int f(x)\,d\,[\varphi(x)+C], \tag{2}$$

където C е произволна константа.

Също така ще имаме (въз основа на равенствата (1) и (2))

$$k\int f(x)\,d\varphi(x)=\int kf(x)\,d\varphi(x)=\int f(x)\,dk\varphi(x)=\int f(x)\,d[k\varphi(x)+C],$$

където k и C са константи, а $\varphi(x)$ е диференцуема функция.

Ето няколко примера за внасяне под диференциала:

$$\int\sin x\cos x\,dx=\int\sin x\,d\sin x;$$

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2;$$

$$\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^5 d2x = \frac{1}{2}\int (2x+1)^5 d(2x+1).$$

Нека забележим още следното: За всяка функция, притежаваща примитивна в някой интервал, имаме очевидно

$$d\int f(x) dx = f(x) dx.$$

От друга страна, за всяка диференцуема функция $f(x)$ е изпълнено

$$\int df(x) = f(x).$$

Тези две равенства ни показват, че знаците $\int$ и d взаимно се унищожават.

Ползата от действието внасяне под знака на диференциала се вижда ясно от следната

Теорема. *Нека за някакъв интервал D имаме*

$$\int f(x) dx = F(x). \tag{3}$$

Ако $\varphi(t)$ е диференцуема функция, дефинирана в някой интервал D_1, стойностите на която принадлежат на интервала D, то в интервала D_1 имаме

$$\int f[\varphi(t)] d\varphi(t) = F[\varphi(t)]. \tag{4}$$

Доказателство. Преди всичко интегралът от лявата страна на равенството (4) може да бъде написан така:

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \tag{5}$$

От друга страна, като използваме правилото за диференциране на съставни функции и вземем пред вид, че в интервала D имаме $F'(x) = f(x)$, ще получим равенствата

$$\{F[\varphi(t)]\}' = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

валидни за всяко t от D_1. Виждаме, че производната на функцията $F[\varphi(t)]$, намираща се в дясната страна на равенството (4), е равна на подинтегралната функция на интеграла (5). С това теоремата е доказана.

Тази теорема ни позволява, накратко казано, във всяко равенство от вида (3) да заместим променливата x с произволна диференцуема функция $\varphi(t)$ (стига стойностите на тази функция да принадлежат на интервала, за който е валидно равенството (3)). По-специално всички формули от нашата таблица на основните интеграли запазват своята валидност, ако заменим в тях навсякъде променливата x с някоя диференцуема функция $\varphi(t)$. Тази именно последна забележка заедно с действието внасяне под знака на диференциала ни дава възможност вече да пресмятаме много неопределени интеграли.

Ето някои примери:

1. $\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2}$.

2. $\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x d \sin x = \frac{1}{2}(\sin x)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$.

3. $\int \frac{x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

4. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln(\ln x)$ при $x > 1$.

5. $\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d\, 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

6. $\int (2x+3)^3 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3 d\, 2x = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3 d(2x+3)$

$= \frac{1}{8}(2x+3)^4$.

7. $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\, d\, 2x = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\, d(2x+1)$

$= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

8. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

$(a>0,\ -a<x<a)$.

10. $\int \sin^3 x\, dx = -\int \sin^2 x d \cos x = -\int (1-\cos^2 x) d \cos x$

$= -\int d \cos x + \int \cos^2 x d \cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$.

11. $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \int \cos 2x d 2x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

12. $$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d 2x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

13. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \ln |\operatorname{tg} x| \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

14. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \quad (0 < x < \pi).$$

15. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

От задача 14 получаваме

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Упражнения. Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int x \sqrt{1 + x^2} \, dx.$ 2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx.$ 3. $\int \frac{x dx}{1 + x^4}.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 2}}.$ 5. $\int \frac{dx}{x + 1}.$ 6. $\int e^{-x} dx.$ 7. $\int e^{-x^2} x dx.$

8. $\int \frac{dx}{5 + x^2}.$ 9. $\frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ 10. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2 - x^4}}.$ 11. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2 + x^2}}.$

12. $\int \frac{x^2 dx}{3 + x^3}.$ 13. $\int \cos^3 x \, dx.$ 14. $\int \sin 5x \, dx.$ 15. $\int \sin^2 2x \, dx.$

16. $\int \frac{dx}{\sin 2x}.$ 17. $\int \cos x e^{\sin x} dx..$ 18. $\int \operatorname{tg} x \, dx.$

§ 42. Интегриране по части

Важно средство за пресмятане на неопределените интеграли е т. нар. формула за интегриране по части.

Нека $u(x)$ и $v(x)$ са две функции, диференцуеми в един интервал D. Тогава, както знаем, за всяко x от D имаме

$$[u(x)\,v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Това равенство показва, че функцията $u(x)\,v(x)$ е примитивна на функцията $u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$. Следователно имаме

$$u(x)\,v(x)=\int u'(x)\,v(x)\,dx+\int u(x)\,v'(x)\,dx,$$

което може да се напише още така:

$$u(x)\,v(x)=\int v(x)\,du(x)+\int u(x)\,dv(x),$$

или окончателно

(1) $$\int u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,du(x).$$

Равенството (1) се нарича *формула за интегриране по части*. Ние ще прибягваме към нея, когато желаем да пресметнем интеграла, който е в лявата страна на равенството, но интегралът, написан в дясната му страна, е по-достъпен за пресмятане. Ето някои примери.

1. $$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\,d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x=x(\ln x-1)\qquad (x>0).$$

2. $$\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$$
$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\quad (x>0).$$

3. $$\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x.$$

4. $$\int xe^x\,dx=\int x\,d\,e^x=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x.$$

5. $$\int e^x\sin x\,dx=\int \sin x\,de^x=e^x\sin x-\int e^x\,d\sin x$$
$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int \cos x\,de^x$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x\,d\cos x$$

$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx,$$

откъдето получаваме

$$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x).$$

Аналогично пресмятаме $\int e^x\cos x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$.

6. Формулата за интегриране по части се използва при пресмятането на следните често срещани интеграли:

$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ в интервала $(-\infty,\ \infty)$,

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ в интервала $(-a,\ a)$,

$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ в интервалите $(-\infty,\ -a)$ и $(a,\ \infty)$,

където $a>0$.

Ние ще пресметнем подробно първия от тях (начинът за пресмятането на другите два е аналогичен). Имаме

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=x\sqrt{a^2+x^2}-\int xd\sqrt{a^2+x^2}=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$$

Оттук

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|].$$

7. След като се запознаем с общия метод за интегриране на рационални функции, ще видим, че твърде често при това интегриране се достига до интеграли от вида

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n},$$

където a е някаква константа, а n е цяло положително число. Ето как чрез известни преобразувания, между които и използване на формулата за интегриране по части, пресмятането на този интеграл, който за краткост ще означим с I_n, може да се сведе към пресмятането на интеграла I_{n-1}:

$$I_n=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\, I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x\,(a^2+x^2)^{-n}\,dx^2$$

$$= \frac{1}{a^2}\, I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x\,(a^2+x^2)^{-n}\,d(a^2+x^2)$$

$$= \frac{1}{a^2}\, I_{n-1} - \frac{1}{2(-n+1)\,a^2}\int x\,d\,(a^2+x^2)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{a^2}\, I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)\,a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2n-2}\right) I_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)\,a^2}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,.$$

И така получихме следната рекурентна връзка:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)\,a^2}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,.$$

Като приложим този метод $n-1$ пъти, ние ще изразим I_n в крайна сметка посредством интеграла

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2}\,,$$

който се пресмята непосредствено.

Упражнения. Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int x^3 \ln x\, dx \quad (x > 0)$.
2. $\int x^2 \sin x\, dx$.
3. $\int x^3 e^x\, dx$.
4. $\int \sqrt{x^2-2} \; (x > \sqrt{2})$.
5. $\int \sqrt{5-x^2}\, dx \quad (-\sqrt{5} < x < \sqrt{5})$.
6. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.
7. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.
8. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.
9. $\int \arcsin x\, dx$.
10. $\int x \arcsin x\, dx$.
11. $\int x^2 \arcsin x\, dx$.
12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.
13. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^3}$.
14. $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$.

§ 43. Интеграли от вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

При пресмятане на интегралите

$$(1) \qquad I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

където m и n са произволни цели числа, постъпваме по различен начин в зависимост от разните случаи, които могат да се представят за стойностите на m и n.

Преди всичко ще отбележим, че пресмятането на интеграла $I_{m,n}$ се извършва веднага, ако $m=1$ или $n=1$. Наистина имаме

$$I_{m,1}=\int \sin^m x \cos x\, dx=\int \sin^m x\, d \sin x=$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x & \text{при } m \neq -1 \\ \ln|\sin x| & \text{при } m=-1, \end{cases}$$

$$I_{1,n}=\int \sin x \cos^n x\, dx=-\int \cos^n x\, d \cos x=$$

$$=\begin{cases} -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x & \text{при } n \neq -1 \\ -\ln|\cos x| & \text{при } n=-1. \end{cases}$$

Ако поне един от степенните показатели m и n е нечетно положително число, например $n=2k+1$, където k е цяло положително число, то пресмятането на интеграла $I_{m,n}$ може да се сведе към разгледания вече случай по следния начин:

$$I_{m,2k+1}=\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx=\int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\, dx$$

$$=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k \cos x\, dx.$$

Като развием $(1-\sin^2 x)^k$ по формулата на нютоновия бином, ние ще представим $I_{m,2k+1}$ като сума на интеграли от вида $I_{s,1}$.

Аналогично постъпваме с интегралите от вида $I_{2k+1,n}$ (където k е цяло положително число), които пък представяме като сума на интеграли от вида $I_{1,s}$.

Пример 1. $\int \sin^6 x \cos^5 x\, dx$

$$=\int \sin^6 x \cos^4 x\, d \sin x=\int \sin^6 x(1-\sin^2 x)^2\, d \sin x$$

$$=\int \sin^6 x\, d \sin x-2\int \sin^8 x\, d \sin x+\int \sin^{10} x\, d \sin x$$

$$=\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{2}{9}\sin^9 x+\frac{1}{11}\sin^{11} x.$$

В общия случай пресмятането на интегралите $I_{m,n}$ изисква известни преобразувания. Ние ще посочим начините за получаване на три рекурентни формули, с помощта на които можем да доведем пресмятането на всеки интеграл от вида (1) докрай.

I. При $m \neq -1$, като използуваме формулата за интегриране по части, можем да преобразуваме интерграла $I_{m,n}$ по следния начин:

$$I_{m,n}=\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

$$= \int \sin^m x \cos^{n-1} x \, d \sin x = \frac{1}{m+1} \int \cos^{n-1} x \, d \sin^{m+1} x$$

$$= \frac{1}{m+1} \cos^{n-1} x \sin^{m+1} x - \frac{1}{m+1} \int \sin^{m+1} x \, d \cos^{n-1} x$$

$$= \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

И така получаваме

$$(2) \qquad I_{m,n} = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,\, n-2}.$$

Аналогично при $n \neq -1$ получаваме

$$(3) \qquad I_{m,n} = -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,\, n+2}.$$

II. Винаги можем да преобразуваме $I_{m,n}$ по следния начин:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-2} x (1 - \cos^2 x) \cos^n x \, dx,$$

откъдето получаваме

$$(4) \qquad I_{m,n} = I_{m-2,\, n} - I_{m-2,\, n+2}.$$

Аналогично се получава

$$(5) \qquad I_{m,n} = I_{m,\, n-2} - I_{m+2,\, n-2}.$$

Да отбележим, че като използваме формулите (2), (3), (4) и (5) можем да изразим интеграла $I_{m,n}$ при $m \neq -1$ посредством интеграла $I_{m,n-2}$, а при $n \neq -1$ — чрез интеграла $I_{m-2,n}$.

III. Когато $m \leq 0$ и $n \leq 0$, за препоръчване е (ако изобщо се налага някаква преработка в дадения интеграл) да се започне със следното преобразуване:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^n x (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx,$$

откъдето получаваме

$$(6) \qquad I_{m,n} = I_{m+2,\, n} + I_{m,\, n+2}.$$

Лесно е да се види, че с помощта на формулите (2), (3), (4), (5) и (6) можем да сведем пресмятането на всеки интеграл от вида (1) към пресмятането на един или няколко от следните интеграли:

$$\int \sin x \, dx, \qquad \int \cos x \, dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$\int \sin x \cos x \, dx, \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

$$\int \sin^2 x \, dx, \qquad \int \cos^2 x \, dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x},$$

което вече се извършва непосредствено.

Пример 2. $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

$$= -\int \sin^3 x \cos^2 x \, d \cos x = -\frac{1}{3} \int \sin^3 x \, d \cos^3 x$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{3} \int \cos^3 x \, d \sin^3 x$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx - \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

Оттук получаваме

$$(7) \qquad \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{2} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Остава да пресметнем интеграла

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx,$$

което ще направим отделно. Имаме

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = -\int \sin x \cos^2 x \, d \cos x = -\frac{1}{3} \int \sin x \, d \cos^3 x$$

$$= -\frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{3} \int \cos^3 x \, d \sin x$$

$$= -\frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{3} \int \cos^4 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{3} \int \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{3} \int \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx,$$

откъдето

$$(8) \qquad \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{4} \int \cos^2 x \, dx.$$

Най-сетне

$$(9) \qquad \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

От равенствата (7), (8) и (9) получаваме стойността на търсения интеграл.

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

$$=-\int\frac{\sin x d\cos x}{\cos^4 x}=\frac{1}{3}\int\sin x\,d\cos^{-3}x$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\frac{1}{3}\int\frac{d\sin x}{\cos^3 x}=\frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x.$$

Пример 4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$

$$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx+\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$=-\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}+\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Тъй като пресмятането на интеграла $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ ни е познато (вж. пример 14 от § 41), можем да считаме задачата за решена.

Пример 5. $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx$

$$=\int\frac{\sin^2 x\,(1-\cos^2 x)}{\cos x}\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx-\int\sin^2 x\cos x\,dx$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx-\int\sin^2 x\,d\sin x$$

$$=\int\frac{dx}{\cos x}-\int\cos x\,dx-\frac{1}{3}\sin^3 x=\int\frac{dx}{\cos x}-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Достигнахме до интеграла $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$, който знаем да пресмятаме.

Нека да забележим накрая, че понякога, като използуваме една или друга тригонометрична формула, можем да опростим пресмятанията на даден интеграл от вида (1), без да прибягваме към нито един от посочените методи за преобразуване на този интеграл. Така например интегралът

$$\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx,$$

който ние пресметнахме, когато разглеждахме пример 2, може по-просто да бъде пресметнат така:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x d\, 4x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x.$$

Упражнения. Пресметнете интегралите:

1. $\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx.$ 2. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\, dx.$ 3. $\int \sin^4 x\, dx.$

4. $\int \cos^6 x\, dx.$ 5. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx.$ 6. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}.$

§ 44. Интегриране чрез смяна на променливата

Един метод, който твърде често се използува при пресмятането на неопределените интеграли, е т. нар. интегриране чрез смяна на променливата или интегриране чрез субституция. То се основава на следната

Теорема. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал D, а функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцуема в интервала D_1, като при това производната ѝ $\varphi'(t)$ е строго положителна (или пък строго отрицателна) в този интервал. Да предположим още, че множеството от стойностите на функцията $\varphi(t)$ съвпада с D. Ако за интервала D_1 е изпълнено равенството*

(1)
$$\int f[\varphi(t)]\, d\varphi(t) = F(t),$$

то за интервала D имаме

(2)
$$\int f(x)\, dx = F[\psi(x)],$$

където $\psi(x)$ е обратната функция на функцията $\varphi(t)$.

Доказателство. Преди всичко нека отбележим, че от условието, наложено на $\varphi'(t)$, следва, че функцията $\varphi(t)$ е строго монотонна и следователно обратима в интервала D_1. Да напишем още веднъж равенството (1) в следния вид:

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt = F(t).$$

Така написано, то ни показва, че за всяко t от D_1 имаме

(3)
$$F'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

За да докажем равенството (2), трябва да установим, че функцията $F[\psi(x)]$ е диференцуема в интервала D и че нейната производна е равна на $f(x)$. Като приложим правилото за диференциране на съставни функции и като вземем пред вид равенството (3), получаваме

$$\{F[\psi(x)]\}'=F'[\psi(x)]\psi'(x)=f[\varphi(\psi(x))]\varphi'[\psi(x)]\,\psi'(x).$$

Тъй като $\psi(x)$ е обратна функция на функцията $\varphi(t)$, то, от една страна, ще имаме $\varphi[\psi(x)]=x$, а, от друга страна, съгласно правилото за диференциране на обратни функции ще получим

$$\psi'(x)=\frac{1}{\varphi'[\psi(x)]}.$$

Следователно

$$\{F[\psi(x)]\}'=f(x)\varphi'[\psi(x)]\cdot\frac{1}{\varphi'[\psi(x)]}=f(x).$$

С това теоремата е доказана.

Тази теорема е в известен смисъл обратна на теоремата от § 41. Наистина, докато там видяхме как можем да пресмятаме интеграла

$$\int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t), \tag{4}$$

когато познаваме интеграла

$$\int f(x)\,dx, \tag{5}$$

тук, обратно, получаваме възможност да пресметнем втория от тези два интеграла, когато знаем първия.

Теоремата за смяна на променливата ще използуваме, когато желаем да пресметнем интеграла (5) и когато можем така да подберем функцията $\varphi(t)$, удовлетворяваща условието на теоремата, че интегралът (4), получен чрез заместване на x с $\varphi(t)$, да бъде по-достъпен за третиране. След като пресметнем интеграла (4), връщаме се отново към променливата x, като в получения резултат заместваме t с функцията $\psi(x)$, обратна на функцията $\varphi(t)$. Обикновено при решаване на задачи от този тип казваме, че извършваме субституцията $x=\varphi(t)$.

Пример 1. Нека да решим интеграла

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)\ \text{в интервала}\ (-a,\ a).$$

Да направим субституцията $x=a\sin t$, където t се мени в интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. В този интервал имаме $(a\sin t)'=a\cos t>0$ и се проверява лесно, че условията на теоремата са изпълнени. Тогава ще имаме

$$F(t)=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,d\,a\sin t=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{4}\int\cos 2t\,d\,2t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}.$$

Обратна на функцията $x=a\sin t$ е очевидно функцията $\arcsin\frac{x}{a}$, дефинирана в интервала $(-a, a)$. Ние я получаваме, като решим, така да се каже, равенството $x=a\sin t$ относно t. Ето защо пишем $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и заместваме в получения резултат. Като вземем пред вид, че $\sin t=\frac{x}{a}$, получаваме

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Пример 2. Да пресметнем интеграла

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\quad(a>0)$$

в интервала $(-\infty, \infty)$. Можем да направим субституцията $x=a\operatorname{tg} t$, където t се мени в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тук имаме $(a\operatorname{tg} t)'=\frac{a}{\cos^2 t}>0$. Въз основа на теоремата за смяна на променливата ще получим

$$F(t)=\int\frac{d a\operatorname{tg} t}{(a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{a^3}\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2a^3}t+\frac{1}{4a^3}\sin 2t=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\right).$$

Обратната функция на $x=a\operatorname{tg} t$ е функцията $t=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$, дефинирана за всяко x. Ето защо за целия интервал $(-\infty, \infty)$ ще имаме

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+a\frac{x}{a^2+x^2}\right).$$

С помощта на една проста субституция се пресмятат лесно интегралите от вида

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q},\tag{6}$$

където p и q са константи, удовлетворяващи условието $p^2-4q<0$. (Това е случаят, в който, както е известно, квадратното уравнение $x^2+px+q=0$ няма реални корени.) В този случай можем да направим субституцията

$$x=t-\frac{p}{2},\tag{7}$$

която ни позволява да се освободим от члена от първа степен в знаменателя. Наистина ще имаме

$$\int \frac{d\left(t-\frac{p}{2}\right)}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}=\int \frac{dt}{t^2-\frac{p^2}{4}+q}=\int \frac{dt}{t^2+\frac{4q-p^2}{4}}\,.$$

Тъй като константата $\frac{4q-p^2}{4}$ е положителна, имаме интеграл от вида

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2},$$

който се пресмята непосредствено. Стойността на търсения интеграл (6) ще намерим, като в получения резултат заместим t с $x+\frac{p}{2}$. Това е обратната функция на функцията* $t-\frac{p}{2}$, която намираме просто, като решим равенството (7) относно t.

Пример 3. Да пресметнем интеграла

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+4}\,.$$

Тук $p^2-4q=-7$, следователно интегралът е от разгледания по-горе тип. Правим субституцията $x=t+\frac{3}{2}$ и получаваме

$$\int \frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-3\left(t+\frac{3}{2}\right)+4}=\int \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}=\frac{4}{7}\int \frac{dt}{\frac{4}{7}t^2+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{d\frac{2}{\sqrt{7}}t}{\left(\frac{2t}{\sqrt{7}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\,.$$

Тъй като $t=x-\frac{3}{2}$, то получаваме окончателно

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+4}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}\,.$$

Субституцията (7) ни позволява да извършим пресмятането и на интеграли от вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}\,. \tag{8}$$

При това тук тази субституция ни довежда винаги до резултат, т. е. тук не е необходимо да се правят някакви предположения за p и q (освен онези, които осигуряват подкоренният израз да бъде положителен в даден интервал).

Пример 4. Нека пресметнем интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} \quad \text{при} \quad x>1.$$

Правим субституцията $x=t-1$ и получаваме

$$\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+2(t-1)-3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} = \ln|t+\sqrt{t^2-4}\,|.$$

Но $t=x+1$, поради което получаваме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-8}\,|.$$

Упражнения. Пресметнете интегралите:

1. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ при $-b<x<a$.
2. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.
3. $\int \frac{dx}{x^2+x+5}$.
4. $\int \frac{dx}{2x^2-x+3}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

§ 45. Интегриране на рационални функции

Ще се запознаем с един общ метод, който ни позволява да интегрираме всяка рационална функция. Както знаем, общият вид на една рационална функция е

$$(1) \qquad f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми. От алгебрата е известно, че ако степента на $P(x)$ е по-висока или равна на степента на $Q(x)$, можем да извършим делението на полиномите и да получим представянето

$$f(x)=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Тук $S(x)$ и $R(x)$ са също полиноми, при това степента на $R(x)$ е по-ниска от степента на $Q(x)$. Тъй като интегрирането на полинома $S(x)$ не представлява проблема, можем от самото начало да допуснем, че в представянето (1) на рационалната функция $f(x)$ полиномът в числителя $P(x)$ е от степен, по-ниска от степента на полинома в знаменателя $Q(x)$.

Също така от алгебрата е известно, че полиномът $Q(x)$, както всеки полином, може да бъде разложен на прости множители от първа и втора степен, т. е. да се представи във вида

$$(2) \qquad Q(x)=C(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots$$

Тук $C, a, b, \ldots, p, q, \ldots$ са реални константи, а степенните показатели $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \ldots$ са цели и положителни. При това числата $a, b, \ldots$

са реалните корени на уравнението $Q(x)=0$. Следователно множителите от първа степен ще липсват, когато това уравнение има само комплексни корени. Множителите от втора степен пък отговарят на комплексните корени на уравнението $Q(x)=0$, когато то има такива. Както знаем, комплексните корени са два по два имагинерно спрегнати. На всеки два имагинерно спрегнати корена ще отговаря един множител от втора степен в разлагането (2), който те анулират. Поради това множителите от вида x^2+px+q ще удовлетворяват условието $p^2-4q<0$ и няма да могат да бъдат разложени на множители от първа степен с реални коефициенти.

Като се има пред вид разлагането (2), може при направените предположения за степените на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ да се покаже чрез разсъждения от алгебричен характер, които ние няма да привеждаме, че рационалната функция (1) се разлага в сума от следния вид:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-q)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{x-a}\\ &+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{x-b}\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\\ &+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q}\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned} \tag{3}$$

Отделните събираеми в дясната страна на това равенство се наричат **елементарни дроби**. Те са два вида — едни, които отговарят на множителите от първа степен в разлагането (2) и имат в числителя си константа, и други, които отговарят на множителите от втора степен в това разлагане и имат в числителя си линейна функция. При това на всеки множител от разлагането (2) отговарят толкова елементарни дроби, колкото е стойността на неговия степенен показател.

Разлагането (3) свежда интегрирането на рационалната функция $f(x)$ към интегриране на елементарни дроби. Те са, както вече отбелязахме, два вида. Елементарните дроби от първия вид, т. е. от вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}},$$

се интегрират непосредствено. Що се отнася до елементарните дроби от втория вид, т. е. от вида

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}},$$

то тяхното интегриране се извършва чрез субституцията $x=t-\frac{p}{2}$ (тази субституция, разбира се, е излишна, когато $p=0$). Получаваме

$$\int \frac{Mt - \frac{p}{2}M + N}{\left(t^2 + \frac{4q - p^2}{4}\right)^{\lambda}}\,dt.$$

Ако положим $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$ (това можем да направим, тъй като $4q-p^2>0$) и $N-\frac{p}{2}\cdot M=K$, последният интеграл се разлага на следната сума:

$$M\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}+K\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

Първият от тези два интеграла се пресмята веднага, като внесем t под знака на диференциала, а с пресмятането на втория се запознахме в § 42 (пример 7).

Разбира се, при този метод не е достатъчно само да се намери разлагането (2) и след това да се напише разлагането (3). Преди да пристъпим към интегрирането на елементарните дроби, трябва още да намерим константите A_1, $A_2, \ldots, A_\alpha$, B_1, $B_2, \ldots, B_\beta, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_\lambda, N_\lambda, \ldots$, които участват в разлагането (3). Пресмятането на тези константи може да стане по различни начини. Ние ще покажем при конкретни примери как се извършва това. Обикновено започваме с това, че в равенството (3) се освобождаваме от знаменателя и получаваме равенството на два полинома. По-нататък можем или да дадем на x някои конкретни стойности, или пък да приравним коефициентите пред еднаквите степени на x в полиномите от лявата и от дясната страна на полученото равенство. И при двата начина се получават числени равенства, в които остават като неизвестни търсените константи. Те се пресмятат по правилата за решаване на системи уравнения.

Ще илюстрираме казаното с няколко примера.

Пример 1. Да се представи като сума на елементарни дроби функцията

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}.$$

Най-напред написваме разлагането $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$, откъдето имаме

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

След освобождаване от знаменателя получаваме

$$1=A(x+3)+B(x-2).$$

Като положим $x=2$, намираме $A=\frac{1}{5}$, а при $x=-3$ получаваме $B=-\frac{1}{5}$. Следователно

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Пример 2. Да разложим функцията

$$f(x)=\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}.$$

Тъй като степента на полинома в числителя е по-висока от степента на полинома в знаменателя, най-напред извършваме делението и получаваме

$$\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=x-3+\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}.$$

След това разлагаме функцията $\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$ на елементарни дроби. Поради разлагането $x^4+3x^3+3x^2+x=x(x+1)^3$ ще имаме

$$\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{(x+1)^3}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{x+1},$$

откъдето получаваме

$$6x^3+3x+1=A(x+1)^3+B_1x+B_2x(x+1)+B_3x(x+1)^2.$$

След разкриване на скобите приравняваме коефициентите пред x^3, x^2, x, както и свободните членове от двете страни на полученото равенство:

$$\begin{aligned}A+B_3&=6,\\ 3A+B_2+2B_3&=0\\ 3A+B_1+B_2+B_3&=3,\\ A&=1.\end{aligned}$$

Оттук намираме

$$A=1,\ B_1=8,\ B_2=-13,\ B_3=5.$$

Следователно ще имаме окончателно

$$\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=x-3+\frac{1}{x}+\frac{8}{(x+1)^3}-\frac{13}{(x+1)^2}+\frac{5}{x+1}.$$

Пример 3. Да разложим на елементарни дроби функцията

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}.$$

Поради разлагането $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ ще имаме

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1},$$

откъдето

$$x^2+2x+3=A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1).$$

Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на x, получаваме

$$A+M=1,\quad -M+N=2,\ A-N=3.$$

Оттук намираме

$$A=3,\ M=-2,\ N=0.$$

Следователно имаме

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{3}{x-1}-\frac{2x}{x^2+1}.$$

Пример 4. Да разложим функцията $f(x)=\frac{1}{x^4+1}$. Имаме

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2,$$

откъдето

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

И така ще имаме

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Mx+N}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Като се освободим от знаменателя, получаваме

$$1=(Mx+N)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Px+Q)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Чрез сравняване на кофициентите достигаме до следната система уравнения относно неизвестните константи:

$$\begin{gathered}M+P=0,\\ N+Q+\sqrt{2}(P-M)=0,\\ M+P+\sqrt{2}(Q-N)=0,\\ N+Q=1.\end{gathered}$$

Тази система е очевидно еквивалентна на системата

$$\begin{aligned}&M+P=0, &&N+Q=1,\\ &M-P=\frac{1}{\sqrt{2}}, &&N-Q=0.\end{aligned}$$

Оттук намираме

$$M=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad P=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad N=Q=\frac{1}{2}.$$

Следователно

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Упражнения. Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int\frac{dx}{x^2+5x+4}$. Отг. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|$.

2. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx.$ Отг. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|.$

3. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}.$ Отг. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$

4. $\int \frac{dx}{x^3-1}.$ Отг. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

5. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$ Отг. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$

6. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

7. $\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$ Отг. $\frac{2}{3}\,\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

8. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$ Отг. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

9. $\int \frac{dx}{x^6+1}.$ Отг. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} x.$

§ 46. Интегриране на някои ирационални функции

За разлика от това, което имахме при рационалните функции, за интегриране на ирационалните функции не съществува общ метод. Нещо повече, по-голямата част от ирационалните функции притежават такива примитивни, които изобщо не могат да се изразят чрез елементарните функции. Само за някои специални категории ирационални функции съществуват методи за интегрирането им. Общ принцип е намирането на подходяща субституция, която позволява да сведем пресмятането на даден интеграл от ирационална функция към пресмятане на интеграл от рационална функция. Ще се спрем на някои от тези специални категории ирационални функции, за които това е възможно.

Най-напред ще разгледаме такива ирационални функции, в които променливата x и няколко нейни радикала

$$\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\quad \sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ldots,\ \sqrt[n_s]{x^{m_s}}$$

са подложени само на т. нар. рационални действия, т. е. на действията събиране, изваждане, умножение и деление. Тук $n_1, n_2, \ldots, n_s$ са цели положителни числа, а $m_1, m_2, \ldots, m_s$ са цели числа. Функции от този вид винаги могат да бъдат интегрирани. Това става, като вземем най-малкото общо кратно k на числата $n_1, n_2, \ldots, n_s$ и направим субституцията

$$x=t^k.$$

При тази субституция всички радикали преминават в степени на t с цели степенни показатели. Като вземем пред вид, че

$$dx=kt^{k-1}dt,$$

става ясно, че след субституцията ще получим интеграл от рационална функция на t.

Пример 1. Да пресметнем интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} \text{ при } x>0.$$

Правим субституцията $x=t^6$ и свеждаме дадения интеграл към интеграла

$$6\int\frac{t^2}{t^2+1}dt.$$

Описаният метод може да се използува и при функции от по-сложен вид, а именно при такива функции, при които вместо радикали на x имаме радикали на някоя дробно-линейна функция на x от вида $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$ (тук a, b, a_1, b_1 са константи, удовлетворяващи условието $ab_1-a_1b\neq 0$). Предполагаме, че тези радикали

$$(1) \qquad \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{m_1}},\quad \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{m_2}},\ldots,\quad \sqrt[n_s]{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{m_s}}$$

(където числата $n_1, n_2, \ldots, n_s$ са пак цели и положителни, а $m_1, m_2, \ldots, m_s$ са цели) са подложени само на рационалните действия. Интегрирането на функции от този вид става чрез субституцията, определена от равенството

$$(2) \qquad \frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^k,$$

където k е най-малкото общо кратно на числата $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Наистина от равенството (2) получаваме

$$(3) \qquad x=\frac{b_1t^k-b}{a-a_1t^k}.$$

И така x се явява рационална функция на t. Освен това всички радикали (1) преминават в степени на t с цели степенни показатели. Най-сетне от (3) получаваме

$$dx=k\frac{ab_1-a_1b}{(a-a_1t^k)^2}t^{k-1}dt,$$

така че и множителят, който идва от dx, ни донася една рационална функция на t. В резултат получаваме интеграл от рационална функция на t.

Пример 2. Да се занимаем с интеграла

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt[3]{x+1}}\,dx \quad \text{при } x>0.$$

Посредством субституцията

$$x+1=t^6,$$

която ни дава $x=t^6-1$, даденият интеграл се свежда до следния интеграл от рационална функция:

$$-6\int \frac{t^3}{t^3+1}\,dt.$$

Пример 3. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx \quad \text{при } x>1.$$

Представяме дадения интеграл във вида

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,dx$$

и правим субституцията

$$\frac{x+1}{x-1}=t^2.$$

Оттук получаваме

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

Пресмятаме (за удобство) предварително dx и получаваме

$$dx=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Тогава даденият интеграл се преобразува в интеграла

$$-4\int \frac{(t-1)\,t}{(t+1)(t^2-1)^2}\,dt=-4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^3(t-1)}.$$

Упражнения. Да се пресметнат следните итеграли:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)}$.

5. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

6. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

7. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2}$.

8. $\int \sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\,dx$.

§ 47. Субституции на Ойлер

Интегралите от вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

където $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ е един израз, в който променливата x и радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ са подложени само на рационалните действия, също могат винаги да бъдат пресметнати. Това става с помощта на три субституции, наречени субституции на Ойлер.

I. Първата субституция на Ойлер може да се използува, когато $a>0$. Тя се дава с равенството

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t. \tag{2}$$

След повдигане в квадрат двете страни на това равенство и проста преработка получаваме

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}.$$

Виждаме, че x се представя като рационална функция на t. Замествам намерения израз за x в дясната страна на равенството (2) и изразявам радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$ също като рационална функция на t. Най-сетне производната на x, която ще се появи в израза за dx, като производна на една рационална функция ще бъде също рационална функция на t. От всичко това е ясно, че след направената субституция интегралът (1) се превръща в интеграл от рационална функция на t

Пример 1. Да направим в интеграла

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx \quad (x>0)$$

субституцията

$$\sqrt{x^2+2x+2}=x+t.$$

Намираме

$$x=\frac{1}{2}\,\frac{t^2-2}{1-t},$$

откъдето

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2}{1-t}+t=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2t+2}{1-t}$$

и

$$dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2t+2}{(1-t)^2}\,dt.$$

Тогава даденият интеграл преминава в интеграла

$$\frac{1}{2}\int\frac{(t^2-2t+2)^2}{(t^2-2)(t-1)^2}\,dt.$$

II. **Втората субституция на Ойлер** може да бъде използувана в случая, когато квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ има два различни реални корена. Ако тези корени са α и β, то, както знаем, имаме разлагането

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Втората субституция на Ойлер се дава с равенството

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t\,(x-\alpha). \tag{3}$$

От равенството (3) след повдигане в квадрат и съкращаване на множителя $x-\alpha$ получаваме

$$x=\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a}.$$

И така x е представено като рационална функция на t. Като заместим така намерения израз за x в дясната страна на равенството (3), ще получим радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$, също изразен като рационална функция на t. Най-после и изразът за dx ще представлява една рационална функция на t, умножена с dt. В резултат след извършване на субституцията интегралът (1) ще се преобразува в интеграл от рационална функция на t.

Пример 2. Да разгледаме интеграла

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}\quad\text{при}\quad x>3.$$

Тъй като $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, можем да направим субституцията

$$\sqrt{(x+1)(x-3)}=t\,(x+1),$$

откъдето намираме

$$x=-\frac{t^2+3}{t^2-1}.$$

По-нататък получаваме

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(1-\frac{t^2+3}{t^2-1}\right)=\frac{-4t}{t^2-1}$$

и

$$dx=\frac{8t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Разглежданият интеграл след субституцията ще ни даде интеграла

$$2\int \frac{dt}{t^2+3}.$$

III. **Третата субституция на Ойлер** може да се използува, когато $c>0$. Тя се дава с равенството

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}. \tag{4}$$

След повдигане в квадрат и съкращаване на x получаваме

$$x=\frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}.$$

Отново получихме x, представено като рационална функция на t. Неговата производна ще бъде също рационална функция на t. Като заместим израза за x в дясната страна на равенството (4), ще получим и радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$, изразен като рационална функция на t. Всичко това ни убеждава, че след извършване на горната субституция интегралът (1) ще се превърне в крайна сметка в интеграл от рационална функция.

Пример 3. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

при $x>1$ и да направим субституцията

$$\sqrt{x^2-x+1}=xt+1.$$

Получаваме

$$x=-\frac{2t+1}{t^2-1},$$

откъдето

$$\sqrt{x^2-x+1}=1-\frac{2t+1}{t^2-1}t=-\frac{t^2+t+1}{t^2-1}$$

и

$$dx=2\frac{t^2+t+1}{(t^2-1)^2}dt.$$

След заместването стигаме до интеграла

$$2\int \frac{t^2+t+1}{t(t-1)^2(t+1)}dt.$$

Упражнения. Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$. Отг. $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}$.
2. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. Отг. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{2+x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

3. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$. Отг. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}} \right|$.

4. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx$. Отг. $\ln (x+\sqrt{x^2+2}) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

5. $\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

Отг. $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}{(2+x+2\sqrt{x^2+x+1})^3}$.

§ 48. Интеграли от диференциален бином

Ще се спрем на още една категория интеграли от ирационални функции, а именно на интегралите от вида

$$(1) \qquad \int x^m (ax^n+b)^p \, dx,$$

където степенните показатели m, n и p са рационални числа, а коефициентите a и b са произволни, различни от нула, константи. Тези интеграли носят името интеграли от диференциален бином. Има три случая, в които тези интеграли могат да бъдат пресметнати.

Първи случай. *Числото p е цяло.* В този случай имаме най-много два радикала на x, именно x^m и x^n, към които са приложени рационални действия. Следователно интегралът спада към разгледания вече от нас първи тип интеграли от ирационални функции (вж. § 46) и неговото пресмятане ни е познато.

Втори случай. *Числото $\frac{m+1}{n}$ е цяло.* В този случай правим субституцията

$$ax^n + b = t.$$

Тогава

$$x = \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

и

$$dx = \frac{1}{na} \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

След заместването получаваме

$$\frac{1}{na} \int \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^p \, dt.$$

Първият множител под интеграла е рационална функция на t, тъй като степенният показател $\frac{m+1}{n}-1$ е цяло число. Ирационалност може да имаме само ако числото p е дробно (което е допустимо). Но в този случай пак имаме интеграл от разгледания първи тип интеграли от ирационални функции.

Пример 1. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx \quad \text{при} \quad x>0.$$

Тук имаме $m=-1$, $n=4$, $p=\frac{1}{2}$. Виждаме, че числото $\frac{m+1}{n}=0$ е цяло и правим субституцията

$$1+x^4=t.$$

Получаваме

$$x=(t-1)^{\frac{1}{4}}$$

и

$$dx=\frac{1}{4}(t-1)^{-\frac{3}{4}}dt.$$

След заместването стигаме до интеграла

$$\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{t}}{t-1}\,dt,$$

който, както знаем, се пресмята с помощта на субституцията

$$t=u^2.$$

Получаваме следния интеграл от рационална функция

$$\frac{1}{2}\int\frac{u^2}{u^2-1}\,du.$$

Трети случай. *Числото* $\frac{m+1}{n}+p$ *е цяло.* В този случай, ако напишем интеграла (1) в следния вид:

$$\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p\,dx,$$

и положим $m+np=m_1$, $-n=n_1$, $p=p_1$, ще видим, че числото $\frac{m_1+1}{n_1}$ цяло. И наистина имаме

$$\frac{m_1+1}{n_1}=\frac{m+np+1}{-n}=-\left(\frac{m+1}{n}+p\right).$$

Като вземем пред вид това, което извършихме във втория случай, заключаваме, че субституцията

$$a+bx^{-n}=t$$

ще ни доведе до интеграл от познат тип.

Пример 2. Да разгледаме интеграла

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$$

Тук $m=1, n=3, p=\frac{1}{3}$. Числото $\frac{m+1}{n}+p=1$ е цяло. Ето защо представяме дадения интеграл във вида

$$\int x^2\sqrt[3]{x^{-3}+1}\,dx$$

и правим субституцията

$$x^{-3}+1=t.$$

Оттук намираме

$$x=(t-1)^{-\frac{1}{3}}$$

и

$$dx=-\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{4}{3}}dt.$$

Така стигаме до интеграла

$$-\frac{1}{3}\int\frac{\sqrt[3]{t}}{(t-1)^2}dt,$$

който, както знаем, се пресмята посредством субституцията $t=u^3$. Тя ни довежда до интеграла

$$-\int\frac{u^3}{(u^3-1)^2}du.$$

Доказано* е, че когато за някой интеграл от диференциален бином не е налице нито един от разгледаните три случая, той е нерешим, т. е. той представлява функция, която не може да се изрази чрез елементарните функции. Такъв е например интегралът

$$\int\sqrt{1+x^4}\,dx,$$

при който имаме $m=0$, $n=4$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{3}{4}$.

Изобщо при пресмятането на неопределените интеграли, т. е. при намирането на примитивна функция на дадена функция, ние считаме тази задача за решена, когато намерим тази примитивна, изразена посредством една или няколко елементарни функции. Далеч не всякога

---

* За първи път това е направил големият руски математик П. Л. Чебишев (1821—1894).

обаче търсената примитивна (макар и да знаем със сигурност, че тя съществува) може да бъде изразена по такъв начин. В такъв случай символът

$$\int f(x)\,dx$$

ни дефинира една трансцендентна функция, която не се изразява чрез елементарните функции.

Освен за интегралите от диференциален бином, неспадащи към никой от споменатите три случая, доказано е и за редица други неопределени интеграли, че не могат да бъдат изразени посредством елементарните функции. Такива са например интегралите

$$\int e^{x^2}\,dx,\quad \int \sin x^2\,dx,\quad \int \cos x^2\,dx,\quad \int \frac{e^x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

а също и всеки неопределен интеграл, който може да се преобразува в някой от тях посредством една или друга субституция, в която участвуват само елементарни функции.

Упражнения I. Пресметнете следните интеграли:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$ Отг. $\displaystyle\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^4}\,dx.$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right|$.

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ Отг. $2\left(4+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{3}{2}}$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$. Отг. $\displaystyle-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

II. Покажете за всеки от следващите неопределени интеграли, че не може да бъде изразен посредством елементарните функции (като го преобразувате, ако има нужда, чрез подходяща субституция в някой интеграл, за който това е доказано).

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. 2. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{x}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$. 5. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$ 6. $\displaystyle\int \frac{e^{x^2}}{x}\,dx.$

§ 49. Интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интегралите от вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{1}$$

където $R(\sin x, \cos x)$ е израз, в който над $\sin x$ и $\cos x$ са извършени само рационалните действия, могат винаги да бъдат пресметнати в интервала $(-\pi, \pi)$ посредством субституцията

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,$$

която ги превръща в интеграли от рационални функции на t.

Наистина имаме

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

От друга страна, при $-\pi<x<\pi$ са изпълнени равенствата

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Оттук получаваме

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{2}$$

Освен това

$$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Ясно е, че след заместването на $\sin x$, $\cos x$ и dx в интеграла (1) ще получим интеграл от рационална функция на t.

Пример 1. Интегралът

$$\int\frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$$

посредством субституцията $x=2\operatorname{arc\,tg} t$ и формулите (2) се преобразува в интеграла

$$2\int\frac{dt}{t^2+2t+3}.$$

Нека да отбележим, че когато $\sin x$ и $\cos x$ участвуват в израза $R(\sin x, \cos x)$, повдигнати в степени само с четни степенни показатели, за предпочитане е субституцията

$$x=\operatorname{arc\,tg} t,$$

която позволява да пресметнем интеграла (1) в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Тук имаме

$$t=\operatorname{tg} x$$

и поради тъждествата

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

получаваме

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}. \tag{3}$$

От друга страна,

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt,$$

така че интегралът (1) отново ще премине в интеграл от рационална функция на t. При това лесно е да се съобрази, че в този случай субституцията $x = \operatorname{arc\,tg} x$ ще ни доведе до такава рационална функция, в която съставящите я полиноми са от по-ниска степен, отколкото ония, до които бихме стигнали, работейки със субституцията $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$.

Пример 2. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Като прилагаме субституцията $x = \operatorname{arc\,tg} t$ и използуваме първата от формулите (3), стигаме до интеграла

$$\int \frac{dt}{2t^2+1}.$$

Субституцията пък $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ преобразува разглеждания интеграл в интеграла

$$2\int \frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1}\, dt.$$

Упражнения. Пресметнете следните интеграли:

1. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. 2. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. 3. $\int \frac{\sin x \cos x}{(3+\cos x)^2} dx$.

4. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$. 5. $\int \frac{1+\cos x}{(3+\sin x + 2\cos x)^2}\, dx$.

6. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$. 7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

ГЛАВА VIII

ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Понятието определен интеграл е едно от най-централните не само в математическия анализ, но и в математиката въобще. Задачи, чието решаване води по естествен начин до това понятие, са били разглеждани още в древността. Все пак се счита, че то е било въведено в окончателен вид през XVII в. от двамата създатели на диференциалното и интегралното смятане — Нютон и Лайбниц, които са работили независимо един от друг. Основният техен резултат се състои в тясната връзка, която те са установили, че съществува между такива две на пръв поглед стоящи далеч едно от друго понятия, каквито са понятията определен интеграл и производна на функция. В какво именно се изразява тази връзка, представляваща едно от най-забележителните открития в математиката, ние ще видим, когато се запознаем със съдържанието на важната теорема, наречена в чест на нейните велики откриватели теорема на Лайбниц и Нютон.

§ 50. Една задача за лице на фигура

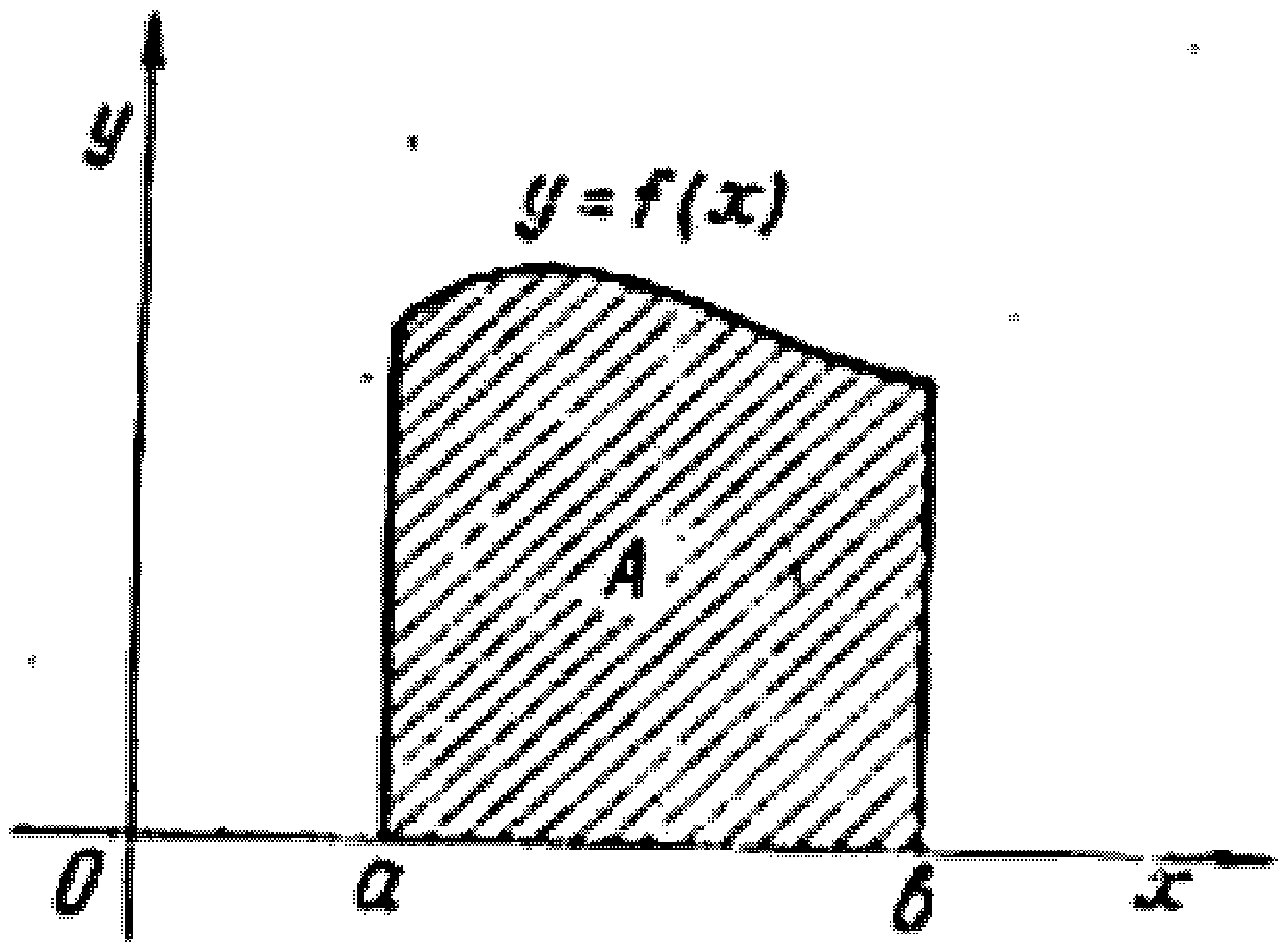
Нека е дадена една неотрицателна функция $f(x)$, дефинирана в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Нейната графика ще се намира изцяло над оста Ox. Да предположим още, че $f(x)$ е ограничена в този интервал, и да си поставим задачата да пресметнем лицето на фигурата A, заградена от графиката на функцията $f(x)$, оста Ox и правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 47).

Задачата, която току-що формулирахме, в същност не е добре поставена. Тя не може да има смисъл, докато не сме дефинирали самото понятие лице на фигурата A. Разбира се, когато това е някоя позната ни от елементарната геометрия фигура, например многоъгълник, ние знаем какво се нарича лице на тази фигура. В общия случай обаче това е понятие, което предстои да бъде дефинирано.*

---

* Тази задача — задачата за дефиниране на понятието лице на фигурата A, е частен случай от по-общата задача — да се дефинира понятието лице за някоя достатъчно широка категория равнинни множества. Ние ще се спрем върху тази по-обща задача в гл. XI.

И така ние искаме да определим едно число I, което да наречем лице на фигурата A. Разбира се, това число не може да бъде произволно. Следващата конструкция ще ни подскаже на какви условия трябва да отговаря то. Да разделим интервала $[a, b]$ по произволен начин на подинтервали (черт. 48).



Черт. 47

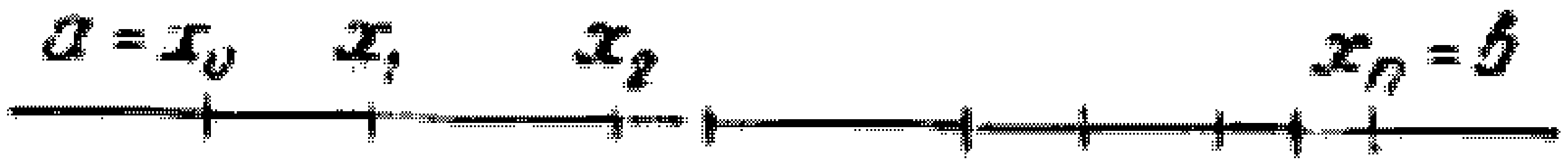
Точките на деление да означим с $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ако положим още $a = x_0$, $b = x_n$, то интервалът $[a, b]$ се разделя на следните подинтервали:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]. \tag{1}$$

Тъй като функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$, тя ще бъде ограначенa и във всеки негов подинтервал. Да означим с M_i точната горна граница, а с m_i точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$ и да образуваме сумите

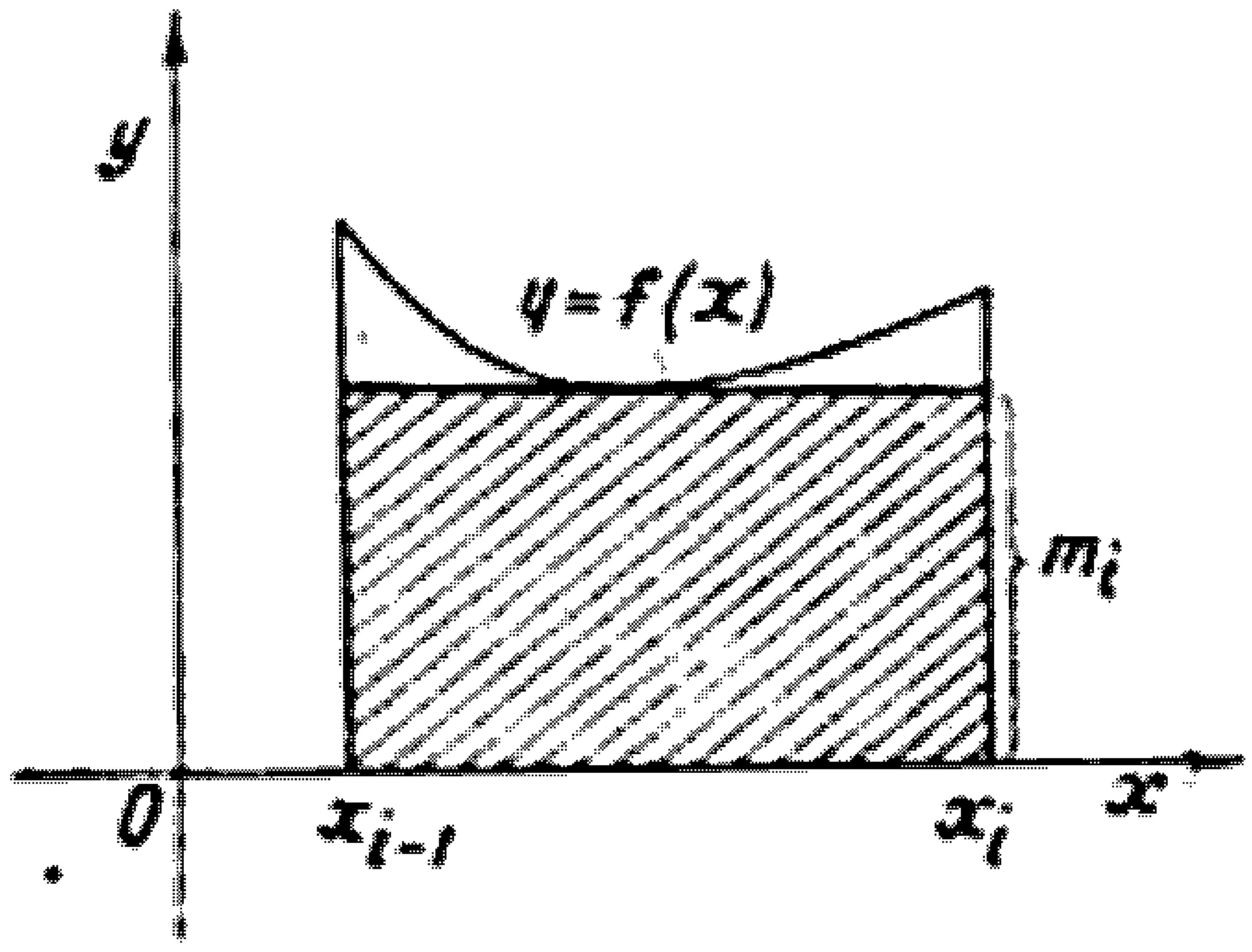
$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

Тези две суми се наричат съответно малка и голяма сума на Дарбу за функцията $f(x)$, отговарящи на разделянето (1) на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Те могат много лесно да бъдат изтълкувани геометрично. Да разгледаме сумата s. Всяко нейно събираемо

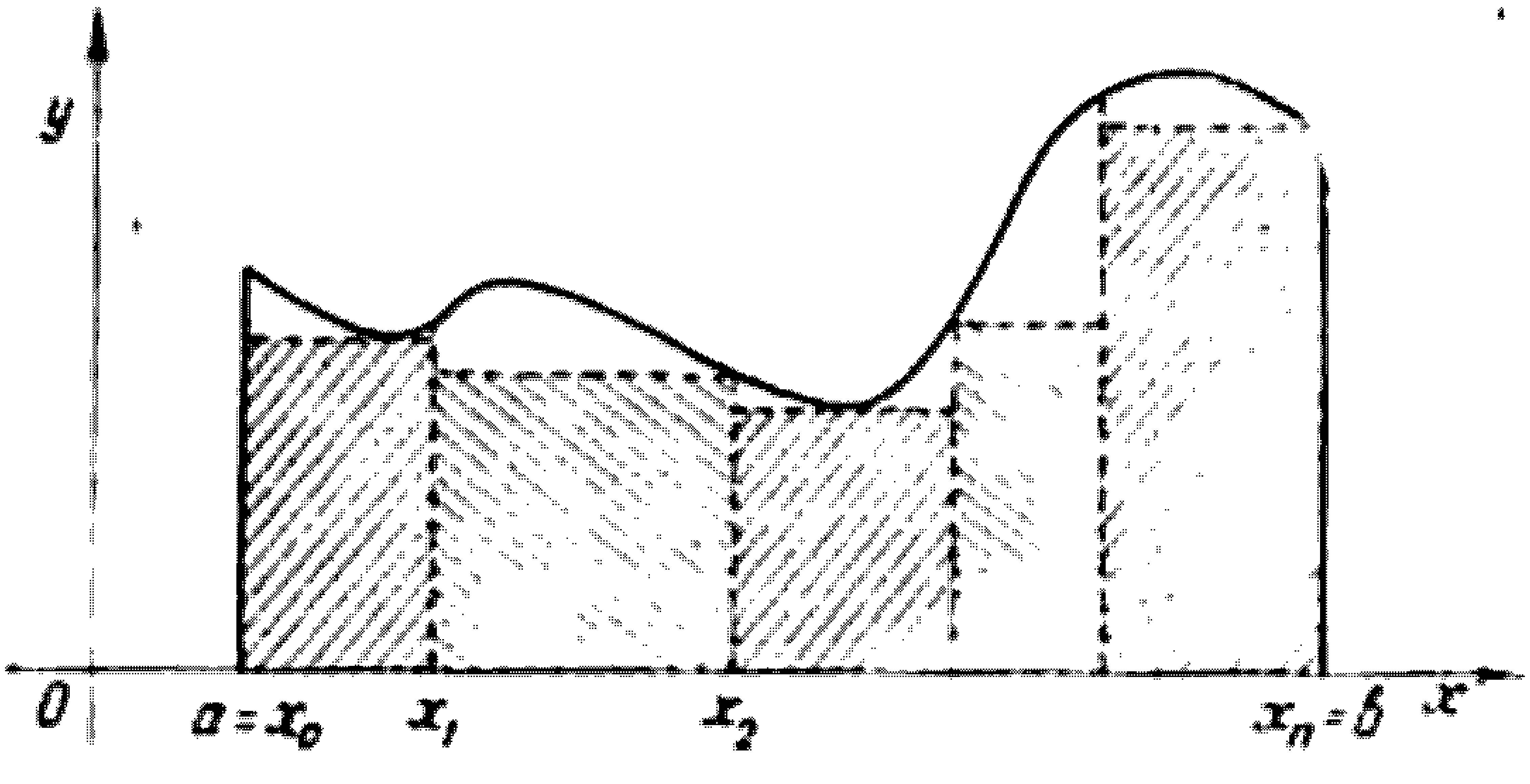


Черт. 48

$m_i(x_i - x_{i-1})$ може да бъде изтълкувано като лице на един правоъгълник — правоъгълника, за основа на който служи отсечката, определена върху оста Ox от точките x_{i-1} и x_i, а за височина — отсечката с дължина m_i. Тъй като за всяко x от интервала $[x_{i-1}, x_i]$ имаме $f(x) \geq m_i$, ясно е, че този правоъгълник изцяло ще се съдържа във фигурата, заградена от графиката на функцията $f(x)$, оста Ox и правите с уравнения $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$ (черт. 49). Тогава сумата s ще представлява лицето на един многоъгълник, който е съставен от n правоъгълника от описания



Черт. 49



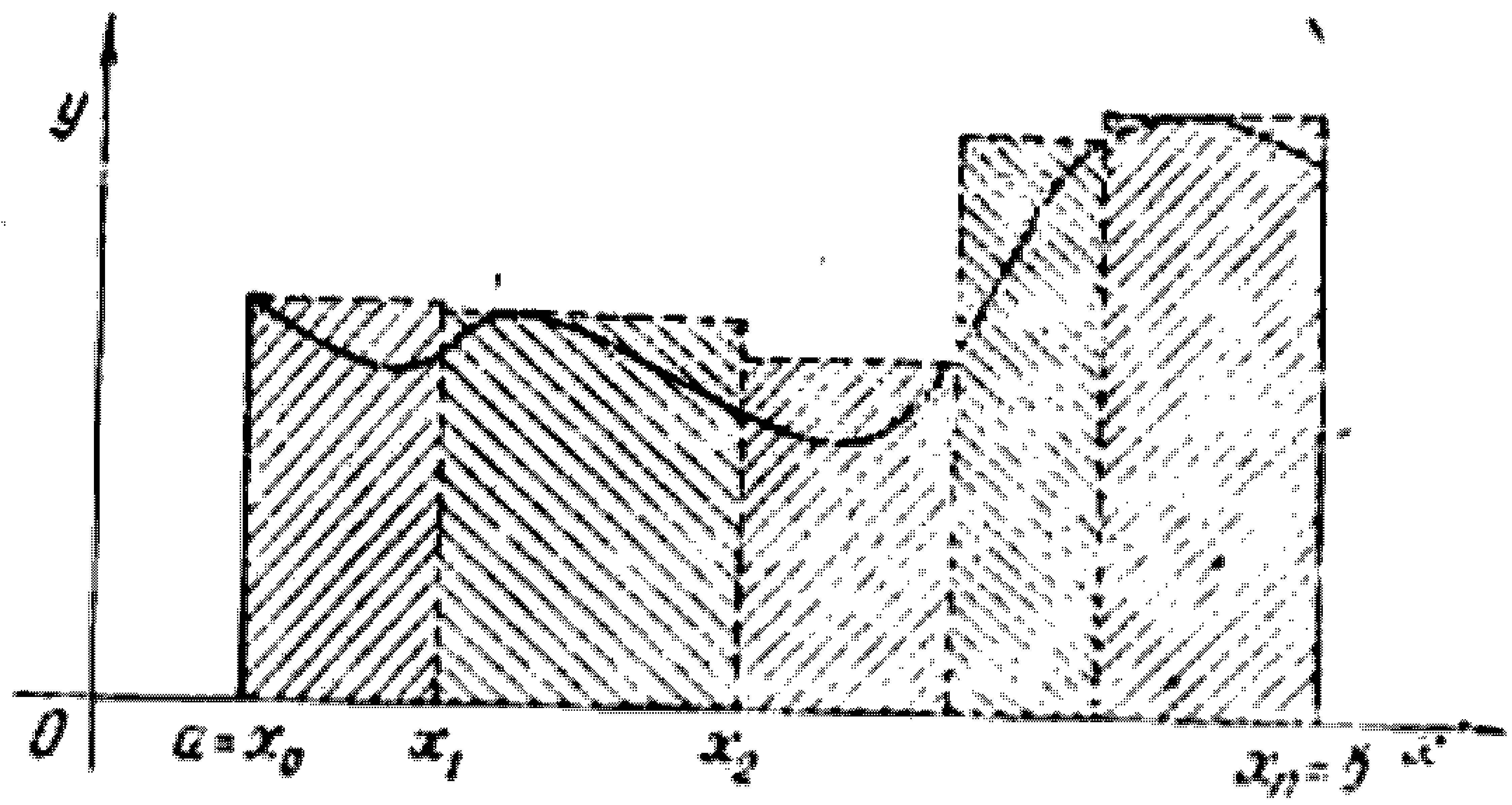
Черт. 50

вид и очевидно се съдържа във фигурата A. Този многоъгълник ние ще наречем вписан във фигурата A (черт. 50).

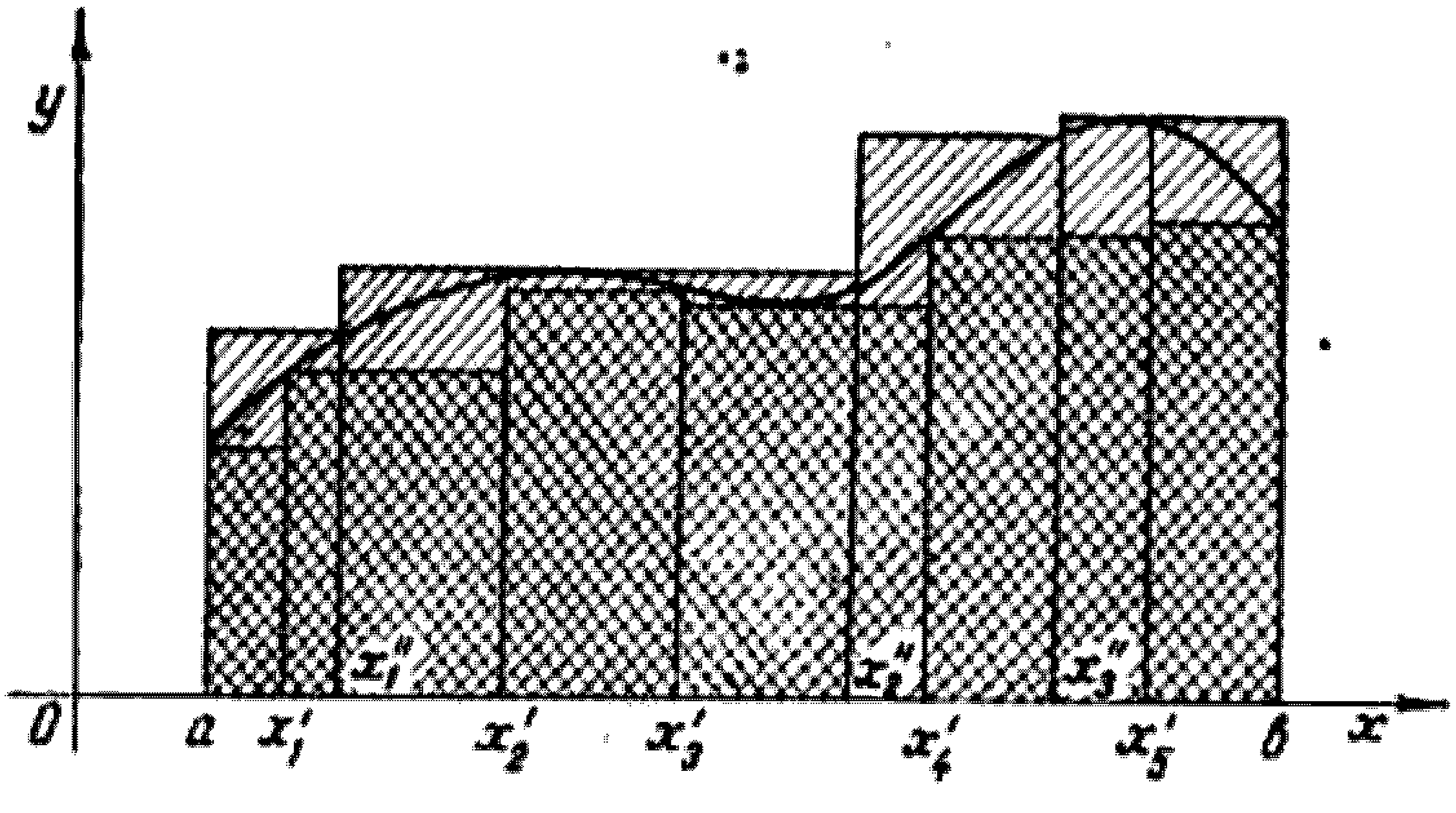
Като разсъждаваме аналогично, можем да изтълкуваме S също като лице на многоъгълник. Това ще бъде един многоъгълник, който пък изцяло съдържа фигурата A и който ще наречем описан около A. Той също е съставен от n правоъгълника, отговарящи на n-те подинтервала в разделянето (1) (черт. 51). Височината на всеки от тези правоъгълници е равна на точната горна граница на функцията $f(x)$ в съответния подинтервал.

И така на всяко разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали отговарят чрез описаната конструкция два многоъгълника — единият — вписан във фигурата A, другият — описан около нея. Естествено е да поискаме търсеното от нас число I, което желаем да наречем *лице на фигурата* A, да бъде по-голямо или равно на лицето на вписания и по-малко или равно на лицето на описания многоъгълник, т. е. да удовлетворява неравенствата

$$(3) \qquad s \leqq I \leqq S.$$



Черт. 51



Черт. 52

Но разделянето на интервала $[a, b]$ на подинтервали може да бъде осъществено по безбройно много различни начини. При всяко такова разделяне ние желаем да бъдат изпълнени неравенствата (3). Възможно ли е това? За да отговорим на този въпрос, ще забележим най-напред, че неравенството

$$(4) \qquad s \leqq S$$

е валидно не само когато s и S са малката и голямата сума на Дарбу, отговарящи на едно и също разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали (и когато то е очевидно), но и когато малката сума s е взета при едно разделяне, а голямата сума S — при друго. Действително s е лицето на някакъв многоъгълник P, съдържащ се изцяло във фигурата A, а S — лицето на друг многоъгълник Q, който пък съдържа изцяло фигурата A. Ясно е, че многоъгълникът Q съдържа изцяло многоъгълника P, от което веднага следва неравенството (4). (На черт. 52 е показан един пример — с x_1', x_2', x_3', x_4', x_5' са отбелязани точките, които осъществяват едно от двете разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, а с x_1'', x_2'', x_3'' — точките, осъществяващи другото.)

Нека вземем сега едно произволно разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали и си образуваме съответстващата на това разделяне голяма сума на Дарбу S. Съгласно неравенството (4) сумата S ще бъде по-голяма от малката сума на Дарбу s, образувана при кое да е разделяне на интервала $[a, b]$. Това означава, че множеството от малките суми на Дарбу, което ще получим, когато разгледаме всички възможни разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, е ограничено отгоре и че S е една негова горна граница. Да означим с $\underline{I}$ точната горна граница на това множество. Тогава ще имаме

$$\underline{I} \leqq S. \tag{5}$$

Но сумата S беше произволно взета голяма сума на Дарбу. Поради това неравенството (5) показва, че множеството от големите суми на Дарбу е ограничено отдолу и че числото $\underline{I}$ е една негова долна граница. Ако означим с $\overline{I}$ неговата точна долна граница, то ще имаме

$$\underline{I} \leqq \overline{I}. \tag{6}$$

Съгласно неравенствата (3) търсеното от нас число I трябва да бъде едновременно горна граница на множеството от малките суми на Дарбу и долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Следователно то трябва да удовлетворява неравенствата

$$\underline{I} \leqq I \leqq \overline{I}. \tag{7}$$

Ако имаме $\underline{I} < \overline{I}$, то съществуват безбройно много числа за I, за които са изпълнени неравенствата (7). Когато обаче за някоя функция имаме $\underline{I} = \overline{I}$, то търсеното число I се определя по един-единствен начин. В този именно случай ще считаме, че за фигурата A може да се дефинира понятието лице и под *лице* на фигурата A ще разбираме числото $I = \underline{I} = \overline{I}$.

§ 51. Дефиниция на определен интеграл

Това, което извършихме в предишния параграф, е почти всичко, необходимо за въвеждането на понятието определен интеграл. Остава да добавим още малко, за да дойдем до дефиницията на това важно понятие.

Ние разглеждахме в предишния параграф една неотрицателна и ограничена функция $f(x)$. Сега ще се освободим от предположението за неотрицателност. Нека е дадена функцията $f(x)$, за която ще предположим само, че е дефинирана и ограничена в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Да разделим, както и преди, този интервал по произволен начин на краен брой подинтервали. Тези подинтервали пак ще означим така:

$$(1)\qquad [x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където $x_0=a$ и $x_n=b$. Като означим отново с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, ние образуваме малката и голямата сума на Дарбу, отговарящи на разделянето (1). Те са

$$(2)\qquad s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),\qquad S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Сега обаче не можем да дадем такова просто геометрично тълкуване на сумите s и S, както в случая, когато $f(x)$ е неотрицателна.

Функцията $f(x)$ беше по условие ограничена в интервала $[a, b]$. Да означим с l една нейна долна граница и да разгледаме функцията $\varphi(x)=f(x)-l$. Ясно е, че $\varphi(x)$ е неотрицателна. Освен това, ако m_i' и M_i' са съответно точната долна и точната горна граница на функцията $\varphi(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, то не е трудно да се съобрази, че ще имаме

$$m_i'=m_i-l,\qquad M_i'=M_i-l.$$

Оттук получаваме

$$m_i=m_i'+l,\qquad M_i=M_i'+l.$$

Тогава сумите (2) могат да се напишат по следния начин:

$$(3)\qquad \begin{aligned} s&=\sum_{i=1}^{n}(m_i'+l)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}m_i'(x_i-x_{i-1})+l\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}),\\ S&=\sum_{i=1}^{n}(M_i'+l)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}M_i'(x_i-x_{i-1})+l\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}).\end{aligned}$$

Обаче

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_1-x_0+x_2-x_1+\cdots+x_n-x_{n-1}=x_n-x_0=b-a.$$

Ако сега означим с s' и S' сумите на Дарбу за функцията $\varphi(x)$, отговарящи на разделянето (1), равенствата (3) ни дават

$$(5)\qquad \begin{aligned} s&=s'+l(b-a),\\ S&=S'+l(b-a).\end{aligned}$$

Тъй като функцията $\varphi(x)$ е неотрицателна, то, както знаем от предишния параграф, множеството от сумите s' е ограничено отгоре. Нека $\underline{I}'$ е неговата точна горна граница и нека $\overline{I}'$ пък е точната долна граница на ограниченото отдолу множество от сумите S'. Ние знаем, че

$$\underline{I}' \leqq \overline{I}'. \tag{6}$$

Като вземем пред вид равенствата (5), заключаваме, че множеството от сумите s е също така ограничено отгоре, а множеството от сумите S е ограничено отдолу и че ако означим с $\underline{I}$ точната горна граница на първото, а с $\overline{I}$ точната долна граница на второто от тях, то ще имаме

$$\begin{gathered} \underline{I} = \underline{I}' + l\,(b-a), \\ \overline{I} = \overline{I}' + l\,(b-a). \end{gathered} \tag{7}$$

Тогава от неравенството (6) и равенствата (7) следва, че

$$\underline{I} \leqq \overline{I}. \tag{8}$$

И така за всяка функция $f(x)$, ограничена в интервала $[a, b]$, дефинирахме две числа — числото $\underline{I}$, явяващо се точна горна граница на множеството от нейните малки суми на Дарбу, и числото $\overline{I}$, представляващо точната долна граница на множеството от нейните големи суми на Дарбу. Първото от тези две числа ще наречем **долен интеграл**, а второто — **горен интеграл** на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Неравенството (8) показва, че за всяка ограничена функция долният интеграл не надминава горния. Когато за дадена ограничена функция $f(x)$ е изпълнено равенството

$$\underline{I} = \overline{I}, \tag{9}$$

ще казваме, че тя е **интегруема** в интервала $[a, b]$. Числото

$$I = \underline{I} = \overline{I}$$

се нарича **определен интеграл** на $f(x)$ в този интервал и се означава така:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числото a се нарича долна граница, а числото b — горна граница на написания определен интеграл.

Нека обърнем внимание върху следното: Определеният интеграл, както видяхме, е едно число. Поради това е безразлично с каква буква е означена независимата променлива в подинтегралната функция. Това ще рече, че вместо $\int_a^b f(x)dx$ можем да пишем $\int_a^b f(t)dt$ или $\int_a^b f(u)du$ и т. н

Ние вече видяхме как може да се изтълкува геометрично определеният интеграл, когато функцията $f(x)$ е неотрицателна. В общия случай това тълкуване не е валидно. Въпреки това обаче съществуват извънредно много възможности това число да бъде изтълкувано по един или друг начин, като бъде свързано с най-разнообразни въпроси от областта на приложенията на математиката.По-специално голям брой въпроси от физиката водят именно до определени интеграли.

Нека подчертаем още веднъж, че ние въведохме понятието определен интеграл само за функции, за които е изпълнено равенството (9), и тези функции нарекохме интегруеми. Не всички функции, ограничени в даден интервал, са интегруеми. Така например функцията, дефинирана в интервала $[0, 1]$ с равенствата

$$f(x)=0, \text{ когато } x \text{ е ирационално},$$
$$f(x)=1, \text{ когато } x \text{ е рационално},$$

не е интегруема. Действително, както и да разделим интервала $[0, 1]$ на подинтервали от вида (1), във всеки от тях $f(x)$ има точна долна граница, равна на 0, и точна горна граница, равна на 1. (Това е така, понеже както рационалните, тъй и ирационалните числа, както знаем, са разположени навсякъде гъсто върху реалната права.) Тогава

$$s=\sum_{i=1}^{n} 0\,.\,(x_i-x_{i-1})=0,$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} 1\,.\,(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=1.$$

И тъй всяка малка сума на Дарбу е равна на 0, а всяка голяма сума на Дарбу е равна на 1. Следователно $\underline{I}=0$, $\bar{I}=1$ и $\underline{I}<\bar{I}$.

В следващия параграф ще видим, че всяка функция, която е непрекъсната в краен и затворен интервал, е интегруема в него. Оттук ще следва, че фигурата A, която разглеждахме в предишния параграф, има лице винаги когато неотрицателната функция $f(x)$, чиято графика я огражда отгоре, е непрекъсната.

Сумите на Дарбу, с които си послужихме, за да дефинираме определения интеграл, представляват очевидно едно средство за неговото пресмятане. Да се следва този път обаче е трудно и неудобно за работа. И все пак в някои специални случаи, например, когато функцията $f(x)$ е константа, това не е сложно. Наистина нека $f(x)=C$ за всяко x в интервала $[a, b]$. Както и да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали, във всеки от тях точната горна и точната долна граница на функцията са равни на C. Тогава за сумите на Дарбу ще получим

$$s=\sum_{i=1}^{n} C(x_i-x_{i-1})=C(b-a),$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} C(x_i-x_{i-1})=C(b-a).$$

Следователно както всички малки, така и всички големи суми на Дарбу са равни на $C(b-a)$. Оттук следва, че

$$\int_a^b C\,dx=C\,(b-a).$$

И така ние вече познаваме стойността на определения интеграл, когато подинтегралната функция е константа.* По-специално получаваме равенството

$$\int_a^b dx=b-a.$$

По-нататък ще се запознаем с един общ метод за пресмятане на определените интеграли, с който можем да си служим винаги когато подинтегралната функция $f(x)$ е непрекъсната. Този метод се основава на споменатата вече теорема на Лайбниц и Нютон.

Засега ще отбележим само, че излизайки от самата дефиниция на определения интеграл, можем да установим лесно следното негово свойство:

Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и ако за всяко x от този интервал тя удовлетворява неравенствата

$$m\leqq f(x)\leqq M, \tag{10}$$

то

$$m(b-a)\leqq \int_a^b f(x)\,dx\leqq M\,(b-a). \tag{11}$$

Достатъчно е, разбира се, да разгледаме случая, когато M е точната горна, а m — точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Но тогава числото $M(b-a)$ се явява една специална голяма сума на Дарбу за функцията $f(x)$, а именно онази, която съответствува на случая, при който интервалът $[a, b]$ е „разделен" на един-единствен подинтервал — на самия себе си (този случай не се изключва в нашата дефиниция). Числото $m(b-a)$ се явява пък малката сума на Дарбу, отговаряща на същото това „разделяне". Определеният интеграл обаче е горна граница на множеството от малките суми и долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Оттук веднага следват неравенствата (11).

---

* В случая, когато $C>0$, този резултат напълно се съгласува с геометричното тълкуване на определения интеграл, тъй като фигурата A в този случай представлява правоъгълник с основа, равна на $b-a$, и с височина, равна на C.

Като следствие от току-що доказаното твърдение получаваме: Ако $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и ако $f(x)\geqq 0$, то

$$\int_a^b f(x) \geqq 0.$$

Наистина в този случай можем да вземем $m=0$ и да приложим лявото от неравенствата (11).

§ 52. Интегруемост на непрекъснатите функции

Както вече споменахме, към категорията на интегруемите функции спадат всички непрекъснати функции. Това именно е съдържанието на теоремата, която сега ще докажем.

Теорема. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ то тя е интегруема в този интервал.*

Доказателство. Както знаем, от непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в крайния и затворен интервал $[a, b]$ следва, че тя е ограничена в този интервал. Нека $\underline{I}$ и $\overline{I}$ са съответно долният и горният интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Трябва да докажем, че те са равни помежду си. Да допуснем противното. Поради неравенството (8) от предишния параграф това означава, че $\underline{I}<\overline{I}$. В такъв случай числото $\varepsilon=\frac{\overline{I}-\underline{I}}{b-a}$ ще бъде положително. Ще си спомним сега теоремата за равномерната непрекъснатост от § 24. Съгласно тази теорема можем да разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали по такъв начин, че във всеки от тях осцилацията на $f(x)$ да бъде по-малка от ε. Нека тези подинтервали са

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където $x_0=a$ и $x_n=b$. На това разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали ще отговарят една малка и една голяма сума на Дарбу. Това са сумите

$$(1) \qquad s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \text{ и } S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

където с m_i и M_i са означени съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. От дефиницията на долния и горния интеграл следва, че

$$s\leqq \underline{I}, \qquad \overline{I}\leqq S.$$

От тези пък неравенства получаваме

$$(2) \qquad \overline{I}-\underline{I}\leqq S-s.$$

Като извадим почленно равенствата (1), ще получим

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Но разликата $M_i - m_i$ не е нищо друго освен осцилацията на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Следователно ще имаме

$$S - s < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a).$$

Като си спомним как бяхме избрали ε, последното неравенство добива вида

$$(3) \qquad S - s < \overline{I} - \underline{I}.$$

Но неравенствата (2) и (3) си противоречат. Следователно нашето първоначално допускане е погрешно. И така имаме $\underline{I} = \overline{I}$. С това теоремата е доказана.

Нека да подчертаем, че условието за непрекъснатост на една функция е само достатъчно условие за интегруемост. То не е необходимо. В същност категорията на интегруемите функции е далеч по-широка от тази на непрекъснатите. Така може да се покаже, че ако една функция е прекъсната в краен брой точки на един интервал и при това е ограничена, тя е интегруема в този интервал. Друго достатъчно условие за интегруемост е условието функцията да бъде монотонна в даден краен и затворен интервал.

§ 53. Суми на Риман

Нека отново да разгледаме една функция $f(x)$, дефинирана и ограничена в някой интервал $[a, b]$. Да разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали и във всеки от тях да изберем по една точка. По такъв начин, ако подинтервалите на разделянето са

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където $x_0 = a$, $x_n = b$, то ние ще имаме n точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, избрани така, че

$$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Сумата

$$(1) \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

се нарича **сума на Риман**. Тя зависи очевидно от начина на разделянето на интервала $[a, b]$ на подинтервали и от избора на точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Ако образуваме сумите на Дарбу

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \text{ и } S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

отговарящи на същото разделяне на интервала $[a, b]$, то поради неравенствата

$$m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i,$$

изпълнени за $i=1, 2, \ldots, n$, ще получим

$$s \leqq \sigma \leqq S. \tag{2}$$

И така сумата на Риман по своята стойност се намира винаги между съответните суми на Дарбу.

С помощта на римановите суми ние ще формулираме и докажем една теорема, която ще се окаже твърде полезна за непосредствено следващата наша работа. Предварително обаче ще въведем още едно понятие.

Нека ни е дадена една безкрайна редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Това означава следното: Най-напред сме разделили по някакъв начин $[a, b]$ на подинтервали. Получили сме едно разделяне, което сме нарекли първо. След това по някакъв нов начин отново сме разделили $[a, b]$ на подинтервали — получили сме друго разделяне, което сме нарекли второ, и т. н.

Да означим сега с δ_1 дължината на най-големия от подинтервалите, получени при първото разделяне, с δ_2 — дължината на най-големия от подинтервалите, получени при второто разделяне, и т. н., изобщо с δ_n — дължината на най-големия от подинтервалите, получени при n-тото разделяне. Ще казваме, че ни е дадена една **издребняваща редица от разделяния** на интервала $[a, b]$ на подинтервали, когато редицата от числата

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

клони към нула.

Лесно можем да посочим примери за издребняващи редици от разделяния. Такава редица можем да получим, ако например при първото разделяне разделим интервала $[a, b]$ на две равни части, при второто на три равни части и т. н., изобщо при n-тото разделяне го разделим на $n+1$ равни части. Тогава $\delta_n=\frac{b-a}{n+1}$ и е ясно, че $\lim \delta_n=0$.

Друг пример за издребняваща редица от разделяния можем да получим по следния начин: При първото разделяне делим $[a, b]$ на две равни части, при второто делим всяка от тях също на по две равни части, така че интервалът е разделен на четири равни части, при третото разделяне той се оказва разделен на осем равни части и т. н. Тук пък имаме $\delta_n=\frac{b-a}{2^n}$ и отново $\lim \delta_n=0$.

Да преминем сега към теоремата, за която вече споменахме.

Теорема. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Ако е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали и ако при всяко от тези разделяния си образуваме по една риманова сума за $f(x)$, то редицата от така получените риманови суми*

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots \tag{3}$$

е сходяща и клони към интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Нека ε е едно произволно положително число. Трябва да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме

$$\left|\sigma_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Ще използуваме теоремата за осцилациите от § 20. Съгласно тази теорема ние можем да намерим такова число $\delta>0$, че във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина, по-малка от δ, осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от положителното число $\frac{\varepsilon}{b-a}$. От друга страна, дадена е една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Това ще рече, че ако

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$$

са дължините на максималните подинтервали, получени при последователните разделения в тази редица, то $\lim \delta_n = 0$. Тогава ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ ще имаме $\delta_n<\delta$. Нека сега разгледаме n-тото разделяне на интервала $[a, b]$. На него отговарят една риманова сума σ_n и две суми на Дарбу s_n и S_n, за които са изпълнени следните неравенства:

$$s_n \leqq \sigma_n \leqq S_n. \tag{5}$$

Знаем също, че

$$s_n \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq S_n. \tag{6}$$

От неравенствата (5) и (6) получаваме

$$\left|\sigma_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq S_n - s_n. \tag{7}$$

Ако подинтервалите на n-тото разделяне са

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m],$$

където $x_0=a$, $x_m=b$, то сумите s_n и S_n, подробно написани, са

$$s_n=\sum_{i=1}^{m} m_i(x_i-x_{i-1}),\quad S_n=\sum_{i=1}^{m} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Тук, както винаги, с m_i и M_i сме означили съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Тогава

$$S_n-s_n=\sum_{i=1}^{m}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{8}$$

Нека сега предположим, че $n>\nu$. Тогава ще бъде изпълнено неравенството $\delta_n<\delta$, т. е. най-големият подинтервал при n-тото разделяне ще има дължина, по-малка от δ. А това значи, че дължините на всички подинтервали при това разделяне са по-малки от δ и че следователно, съгласно избора на числото δ, осцилацията на $f(x)$ във всеки от тях ще бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогава от равенството (8) получаваме

$$S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon. \tag{9}$$

Най-сетне от (7) и (9) следва, че при $n>\nu$ е изпълнено неравенството

$$\left|\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

което показва, че редицата (3) е сходяща и клони към $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ние ще използваме тази теорема в следващия параграф, за да докажем някои основни свойства на определения интеграл. Тя обаче има и важно самостоятелно значение. Така например при много въпроси от физиката естествено се достига до риманови суми, след което с помощта на току-що доказаната теорема се преминава към определени интеграли.

§ 54. Основни свойства на определените интеграли

Свойствата на определените интеграли, които ще докажем в този параграф, в същност са валидни винаги когато интегралът съществува, т. е. при произволни интегруеми функции. Ние обаче с цел да опростим нещата ще установим тези свойства само в случая, когато подинтегралните функции са непрекъснати.

Преминаваме сега към формулирането и доказателството на тези основни свойства.

I. *Ако* $f(x)$ *е една функция, непрекъсната в интервала* $[a, b]$, *а* C *е едно реално число, то*

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{I}$$

Доказателство. Ако интервалът е разделен на подинтервалите

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \tag{1}$$

където $x_0=a$, $x_k=b$, и ако във всеки от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$ е избрана по една точка ξ_i, то можем да образуваме римановата сума σ за функцията $f(x)$ и римановата сума σ' за функцията $Cf(x)$, които ще бъдат съответно

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{k} Cf(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ясно е, че

$$\sigma' = C\sigma. \tag{2}$$

Нека сега е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, като същевременно при всяко от тези разделяния е избрана и по една точка в съответните подинтервали. Ако означим римановата сума, отговаряща на n-тото разделяне за функцията $f(x)$, със σ_n, а тази за функцията $Cf(x)$ със σ_n', то съгласно равенството (2) ще имаме

$$\sigma_n' = C\sigma_n.$$

Оттук, като използуваме теоремата от предишния параграф, заключаваме, че е в сила равенството (I).

II. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b]$, то*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{II}$$

Доказателство. Ако е дадено някое разделяне от вида (1) на интервала $[a, b]$ на подинтервали и е избрана по някакъв начин по една точка ξ_i във всеки от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$, то можем да образуваме римановата сума σ' за функцията $f(x)$, римановата сума σ'' за функцията $g(x)$ и римановата сума σ за функцията $f(x)+g(x)$. Ясно е, че

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma'' = \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_i) + g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

Следователно

$$\sigma = \sigma' + \sigma''. \tag{3}$$

Нека вземем сега една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали и нека на n-тото разделяне отговарят римановите суми: σ_n' за $f(x)$, σ_n'' за $g(x)$ и σ_n за $f(x)+g(x)$, образувани при един и същ избор на точките ξ_i. Тогава съгласно равенството (3) ще получим

$$\sigma_n = \sigma_n' + \sigma_n'',$$

откъдето отново въз основа на теоремата от предишния параграф идваме до заключението за верността на равенството (II).

III. *Ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са две функции, непрекъснати в интервала* $[a, b]$ *и удовлетворяващи неравенството*

$$f(x) \leqq g(x) \tag{4}$$

за всяко x *от този интервал, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{III}$$

Доказателство. Ако е извършено разделяне от вида (I) на интервала $[a, b]$ на подинтервали и е направен избор на точките ξ_i в тях, то за римановите суми σ' на $f(x)$ и σ'' на $g(x)$ ще имаме

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma'' = \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

откъдето поради неравенството (4) ще получим

$$\sigma' \leqq \sigma''. \tag{5}$$

Да вземем сега една издребняваща редица от разделяния на $[a, b]$ на подинтервали и да означим със σ_n' и σ_n'' съответно римановите суми за функциите $f(x)$ и $g(x)$, отговарящи на n-тото разделяне и образувани при един и същ избор на точките ξ_i. Поради неравенството (5) ще имаме

$$\sigma_n' \leqq \sigma_n'',$$

откъдето, прибягвайки отново към теоремата от предишния параграф, ще получим неравенството (III).

IV. *Ако* $f(x)$ *е една функция, непрекъсната в* $[a, b]$, *то*

(IV) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Неравенството (IV) следва от неравенствата

$$f(x) \leqq |f(x)| \quad \text{и} \quad -f(x) \leqq |f(x)|$$

и от свойството (III).

V. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и ако c е една вътрешна точка от този интервал, то*

(V) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Нека интервалът $[a, c]$ е разделен на подинтервалите

(6) $$[x_0', x_1'],\ [x_1', x_2'], \dots,\ [x_{p-1}', x_p'],$$

а интервалът $[c, b]$ — на подинтервалите

(7) $$[x_0'', x_1''],\ [x_1'', x_2''], \dots,\ [x_{q-1}'', x_q''],$$

където $x_0'=a$, $x_p'=x_0''=c$, $x_q''=b$. Ако вземем всички подинтервали — както тези, които участвуват в разделянето (6), така и онези, които участвуват в разделянето (7), ще получим едно разделяне на целия интервал $[a, b]$ на подинтервали, което ще наречем получено от обединяването на разделянията (6) и (7). Нека си изберем по една точка ξ_i' във всеки от интервалите $[x_{i-1}', x_i']$ и по една точка ξ_j'' във всеки от интервалите $[x_{j-1}'', x_j'']$ и си образуваме след това римановите суми

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i')(x_i' - x_{i-1}'),$$

$$\sigma'' = \sum_{j=1}^{q} f(\xi_j'')(x_j'' - x_{j-1}'').$$

Като съберем σ' и σ'', ние очевидно ще получим една риманова сума за функцията $f(x)$, отговаряща именно на това обединено разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Ако означим тази сума със σ, то ще имаме

(8) $$\sigma = \sigma' + \sigma''.$$

Нека сега е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, c]$ на подинтервали и една издребняваща редица от разделяния на интервала $[c, b]$. Като обединим n-тите разделяния на $[a, c]$ и $[c, b]$, ще получим едно разделяне на целия интервал $[a, b]$. По този начин получаваме една редица от разделяния на интервала $[a, b]$, която очевидно е също издребняваща. Ако означим съответно със σ_n', σ_n'' и σ_n римановите суми на $f(x)$, отговарящи на n-тите разделяния на интервалите $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$, образувани при някакъв избор на точките ξ_i' и ξ_i'', то съгласно равенството (8) ще имаме

$$\sigma_n=\sigma_n'+\sigma_n''.$$

Остава най-сетне отново да се позовем на теоремата от предишния параграф, за да получим равенството (V).

Разбира се, с помощта на принципа за пълната математична индукция можем да обобщим равенството (V) за случая, когато интервалът $[a, b]$ е разделен на m подинтервала от вида

$$[a, c_1],\ [c_1, c_2],\ldots,[c_{m-1}, b],$$

където m е произволно цяло положително число. В този случай ще имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{c_{m-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

За да допълним списъка на основните свойства на определените интеграли, нека добавим тук и свойството, което доказахме в края на § 51.

VI. *Ако $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и ако m и M са съответно една нейна долна и една нейна горна граница в този интервал, то*

$$m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)\,dx\leqq M(b-a). \tag{VI}$$

Към всичко изложено в този параграф ще добавим следното

Символа

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{9}$$

ние дефинирахме засега само когато е даден един интервал $[a, b]$, в който разглеждаме интегруемата функция $f(x)$. Това ще рече, че трябва да имаме $a<b$, т. е. долната граница на интеграла трябва да бъде по-малка от горната. Оказва се обаче целесъобразно да дадем смисъл на символа (9) и когато долната граница на интеграла е по-голяма от горната, и даже в случая, когато горната и долната граница са равни. Това се постига, като най-напред при $a>b$ дефинираме символа (9) с помощта на равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx. \tag{10}$$

Тук в дясната страна на равенството имаме определен интеграл, разбиран в смисъла на нашата първоначална дефиниция, тъй като $b<a$ (предполагаме, разбира се, че $f(x)$ е интегруема в интервала $[b, a]$).

Ако искаме сега да дадем смисъл на символа (9) в случая, когато $a=b$, и то така, че равенството (10) да остава в сила и в този случай, идваме по необходимост до дефиниционното равенство

$$\int_a^a f(x)\,dx=0. \tag{11}$$

Целесъобразността на дефинициите, които дадохме с помощта на равенствата (10) и (11), се вижда от следното: Равенството (V), което доказахме в този параграф, бе установено от нас при условие, че точките a, b и c удовлетворяват неравенствата $a<c<b$. Лесно може да се провери сега, като се вземат пред вид равенствата (10) и (11), че равенството (V) остава в сила при всякакво взаимно разположение на точките a, b и c, без да се изключва и евентуалното съвпадане на някои от тях (стига, разбира се, функцията $f(x)$ да е дефинирана и непрекъсната във всички интервали, които се определят от тези точки).

§ 55. Теорема за средните стойности

Една проста, но полезна теорема при определените интеграли е следната

Теорема за средните стойности. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то съществува поне една точка ξ в този интервал, за която е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a). \tag{1}$$

Доказателство. Да означим с m и M съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. От неравенствата

$$m\leqq f(x)\leqq M$$

следва, както знаем, че

$$m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)\,dx\leqq M(b-a).$$

Оттук получаваме

$$m\leqq\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\leqq M. \tag{2}$$

Поради непрекъснатостта на $f(x)$ съществуват, както знаем от теоремата на Вайерщрас, две точки x_1, x_2 от интервала $[a, b]$, за които

$$f(x_1)=m,\quad f(x_2)=M. \tag{3}$$

Можем да считаме, че тези две точки са различни. Наистина, ако $x_1=x_2$, то бихме имали $m=M$, откъдето би следвало, че $f(x)$ е константа. Този случай обаче може да се изключи от разглеждане, тъй като теоремата тогава е очевидна. И така точките x_1 и x_2 определят един интервал. По отношение на този интервал ние ще приложим към функцията $f(x)$ теоремата за междинната стойност от § 24. Като вземем пред вид равенствата (3) и неравенствата (2), ще заключим, че съществува поне една точка ξ, намираща се между x_1 и x_2, за която е изпълнено равенството

$$f(\xi)=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Оттук се получава равенството

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a) \tag{1}$$

и теоремата е доказана.

Нека да отбележим, че доказаното равенство може очевидно след умножаване с (-1) да се напише във вида

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx=f(\xi)(a-b).$$

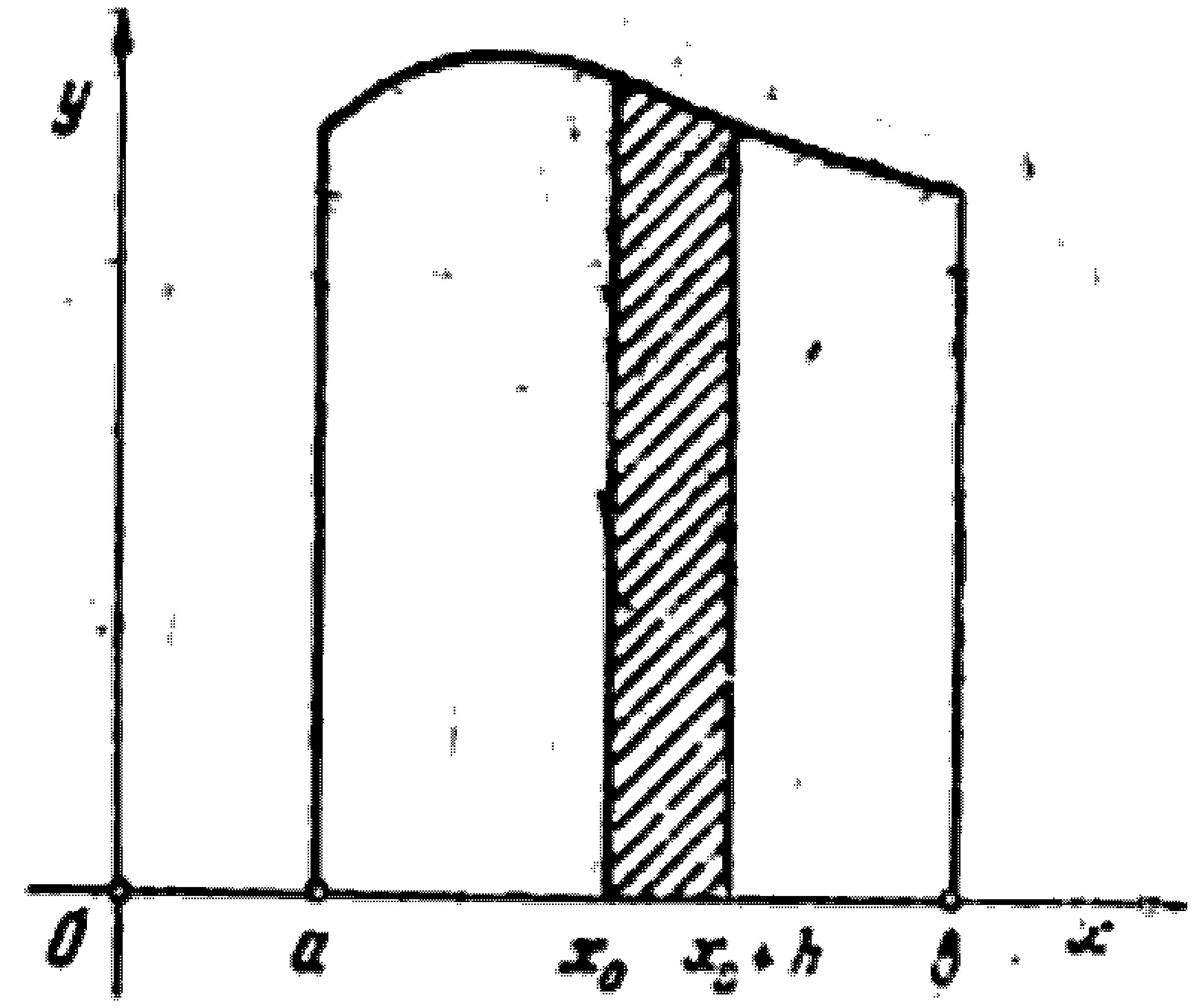
Следователно равенството (1) остава валидно независимо от това, дали долната граница на интеграла е по-малка от горната или обратно — при единственото условие $f(x)$ да е непрекъсната в затворения интервал, определен от тези две точки.

Когато функцията $f(x)$ е неотрицателна, на равенството (1) може да се даде просто геометрично тълкуване. Наистина то изразява това, че в интервала $[a, b]$ съществува точка ξ със следното свойство: лицето на фигурата, заключена между отсечката с краища a и b върху оста Ox, вертикалните прави, минаващи през тези две точки, и графиката на $f(x)$, е равно на лицето на правоъгълника с основа същата отсечка и височина, равна на $f(\xi)$.

§ 56. Теорема на Лайбниц и Нютон

С важната теорема на Лайбниц и Нютон, заемаща централно място в диференциалното и интегрално смятане, се установява в случая, когато $f(x)$ е непрекъсната функция, една проста връзка между понятията определен и неопределен интеграл на $f(x)$ — две понятия, стоящи твърде далеч едно от друго по начина на своето въвеждане.

Съдържанието на тази теорема, както и идеята за нейното доказателство имат ярко изразен геометричен характер, който особено просто се вижда, когато функцията $f(x)$ е неотрицателна. И наистина нека $f(x)$ е една функция, дефинирана и непрекъсната в един интервал D, и нека a е някоя точка от този интервал. Ако x е друга точка от интервала D, то $f(x)$ като непрекъсната в крайния и затворен интервал, определен от точките a и x, ще бъде интегруема в този интервал. И тъй за всяко x от D можем да си образуваме определения интеграл



Черт. 53

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Стойността на този интеграл представлява очевидно една функция на x, дефинирана в интервала $[a, b]$. Да означим тази функция с $F(x)$. Оказва се, че тя е примитивна функция на $f(x)$ в интервала D, т. е. че имаме $F'(x)=f(x)$ за всяко x от D. За да се убедим в това, трябва да разгледаме израза

(1) $$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

и да видим, че при произволно x_0 от D той клони към $f(x_0)$, когато h клони към нула.

Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и нека $h>0$. Тогава $F(x_0+h)$ и $F(x_0)$ могат да бъдат тълкувани като лица, ето защо и разликата $F(x_0+h)-F(x_0)$ можем да разглеждаме като лице — именно като лице на фигурата, показана на черт. 53. Ако положителното число h е малко, стойността на $f(x)$ в интервала $[x_0, x_0+h]$ поради непрекъснатостта на $f(x)$ малко ще се отличава от $f(x_0)$, поради което и лицето на разглежданата фигура ще бъде приблизително равно на лицето на правоъгълника, имащ основа, равна на h, и височина, равна на $f(x_0)$. Другояче казано, разликата $F(x_0+h)-F(x_0)$ ще бъде приблизително равна на $hf(x_0)$, а частното (1) — на $f(x_0)$. При това грешката, която правим, вземайки това число за истинска стойност на частното (1), ще става все по-малка, когато вземаме все по-малки стойности за h. Това навежда на мисълта, че частното (1) клони към $f(x_0)$, когато h клони към нула. Както ще видим веднага от изложеното по-долу подробно доказателство, този резултат е верен и без предположението за неотрицателност на $f(x)$.

И така ще установим следната

Теорема на Лайбниц и Нютон. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един интервал D, то функцията*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{2}$$

е диференцуема в този интервал и за всяко x от D е изпълнено равенството

$$F'(x)=f(x). \tag{3}$$

Другояче казано, $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала D.

Доказателство. Нека x е произволна точка от интервала D. Ако $x+h$ е друга точка от този интервал, то ще имаме

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Като приложим към последния интеграл теоремата за средните стойности, ще получим

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi),$$

където ξ е някаква точка, намираща се между x и $x+h$. Ако оставим h да клони към 0, то точката ξ ще клони към x. Ето защо, като вземем пред вид непрекъснатостта на $f(x)$ в точката x, ще получим

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x).$$

С това равенството (3) е установено и теоремата е доказана.

Нека отбележим впрочем, че ако D е краен и затворен интервал от вида $[a, b]$, то, както е ясно от направените разсъждения и както това се съгласува с нашата уговорка от § 27, равенството (3) трябва да се взема в точките a и b съответно в следния вид:

$$F'_+(a)=f(a), \qquad F'_-(b)=f(b).$$

Теоремата на Лайбниц и Нютон ни дава един прост начин за пресмятане на определените интеграли от непрекъснати функции. Наистина нека да пресметнем стойността на интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

където $f(x)$ е една функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$. Ако образуваме функцията $F(x)$, дефинирана с помощта на равенството (2), ще имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b).$$

И така задачата е да се пресметне $F(b)$. Ние видяхме, че $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$. Но функцията $f(x)$ има безбройно много примитивни, всяка от които, както знаем, се различава от $F(x)$ с константа. Нека познаваме някоя (коя да е) примитивна функция $\Phi(x)$ на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Ще имаме

$$F(x)=\Phi(x)+C.$$

За да пресметнем константата C, нека вземем $x=a$. Получаваме

$$F(a)=\Phi(a)+C.$$

Но $F(a)=0$, следователно $C=-\Phi(a)$. И така за всяко x от интервала $[a, b]$ е изпълнено равенството

$$F(x)=\Phi(x)-\Phi(a).$$

Специално при $x=b$ ще получим

$$F(b)=\Phi(b)-\Phi(a),$$

или окончателно

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{5}$$

От изложеното се вижда, че за да пресметнем определения интеграл (4), трябва да пресметнем най-напред неопределения интеграл

$$\int f(x)\,dx,$$

т. е. да намерим една примитивна функция $\Phi(x)$ на функцията $f(x)$, след което да приложим формулата (5). Тази формула за по-голямо удобство при прилагането ѝ се записва още и по следния начин:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

където под $\left|\Phi(x)\right|_a^b$ разбираме разликата $\Phi(b)-\Phi(a)$.

Примери.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left|\operatorname{arctg} x\right|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$.

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,d\,2x$

$$= \frac{1}{2}\left|x\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left|\sin 2x\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\int\limits_1^2 \ln x\,dx = \left|x \ln x\right|_1^2 - \int\limits_1^2 x\,d \ln x$

$$= (2\ln 2 - \ln 1) - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - \left|x\right|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Нека отбележим, че равенството (5) остава валидно и когато $a>b$ при условие, че $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[b, a]$. Наистина тогава ще имаме

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx = -[\Phi(a)-\Phi(b)] = \Phi(b)-\Phi(a).$$

Най-сетне равенството (5) е очевидно, когато $a=b$.

От теоремата на Лайбниц и Нютон се получава следното следствие:

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцуема, а нейната производна е непрекъсната в един интервал D и ако a е точка от този интервал, то за всяко x от D е изпълнено равенството

$$f(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)\,dt. \tag{6}$$

Действително функцията $f(x)$ е една примитивна на своята производна $f'(x)$ в интервала D и равенството (6) се получава непосредствено от формулата (5), приложена за подинтегрална функция $f'(x)$ към интервала, определен от точките a и x.

Упражнения. Пресметнете следните определени интеграли:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ Отг. $\frac{2}{3}$.

2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$. Отг. $\ln \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$.

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$. Отг. $\frac{4}{15}$.

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$. Отг. $\frac{\pi}{2}$.

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$. Отг. $\ln\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

6. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4+x^2}\,dx$. Отг. $2\sqrt{2}+$ $+2\ln(1+\sqrt{2})$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Отг. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$. Отг. $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

§ 57. Смяна на променливата в определените интеграли

При пресмятането на определените интеграли понякога е удобно да се прибегне към смяна на променливата. Тя се основава на следната

Теорема. *Нека функцията* $f(x)$ *е непрекъсната в интервала* $[a, b]$, *а функцията* $\varphi(t)$ *е диференцуема и притежава непрекъсната производна в един интервал* $[\alpha, \beta]$, *като нейните функционални стойности принадлежат на интервала* $[a, b]$. *Нека освен това*

$$\varphi(\alpha)=a, \qquad \varphi(\beta)=b.$$

Тогава е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t). \tag{1}$$

Доказателство. Равенството (1), което искаме да докажем, може да се запише във вида

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Да разгледаме функциите

$$F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$$

и

$$\Phi(s)=\int_{\alpha}^{s} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Първата от тях е дефинирана в интервала $[a, b]$, а втората — в интервала $[\alpha, \beta]$. Съгласно теоремата на Лайбниц и Нютон те са диференцуеми и

$$(3)\qquad F'(u)=f(u)\qquad \text{при } a\leqq u\leqq b,$$
$$\Phi'(s)=f[\varphi(s)]\varphi'(s)\qquad \text{при } \alpha\leqq s\leqq\beta.$$

Нека си образуваме сега съставната функция $F[\varphi(s)]$, която очевидно е дефинирана и диференцуема в интервала $[\alpha, \beta]$, и нека пресметнем нейната производна. Като вземем пред вид равенствата (3), ще получим

$$\{F[\varphi(s)]\}'=F'[\varphi(s)]\varphi'(s)=f[\varphi(s)]\varphi'(s)=\Phi'(s).$$

Виждаме, че двете функции $F[\varphi(s)]$ и $\Phi(s)$ имат една и съща производна в интервала $[\alpha, \beta]$, следователно те се различават с константа в този интервал. И така ще имаме

$$(4)\qquad F[\varphi(s)]=\Phi(s)+C.$$

За да пресметнем константата C, нека дадем на s стойността α. Ще получим

$$F[\varphi(\alpha)]=\Phi(\alpha)+C.$$

Но

$$F[\varphi(\alpha)]=F(a)=0,\qquad \Phi(\alpha)=0.$$

Следователно $C=0$ и равенството (4) придобива вида

$$F[\varphi(s)]=\Phi(s).$$

Ако дадем сега на s стойността β, ще получим

$$F[\varphi(\beta)]=\Phi(\beta),$$

или поради условието $\varphi(\beta)=b$:

$$F(b)=\Phi(\beta).$$

Последното равенство, написано по-подробно, ни дава равенството (2), което пък, както вече отбелязахме, не е нищо друго освен, другояче записано, равенството (1).

Пример. Да пресметнем интеграла $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ посредством субституцията $x=a\sin t$. Функцията $a\sin t$ ще разгледаме в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имаме

$$a\sin 0=0,\qquad a\sin\frac{\pi}{2}=a$$

и лесно се вижда, че всички условия на теоремата за смяна на променливата са изпълнени. Тогава

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,da\sin t = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d\,2t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left|t\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4}\left|\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Упражнения. Пресметнете следните определени интеграли:

1. $\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$ Отг. $\frac{3a^4\pi}{16}.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$ Отг. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$ Отг. $\frac{1}{3}\ln 4 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

§ 58*. Интегрална форма на остатъчния член във формулата на Тейлор. Форма на Коши

Формулата на Тейлор, валидна за функции $f(x)$, диференцуеми $n+1$ пъти в някоя околност на точката a, има, както знаем, вида

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n.$$

Изразът

$$(1)\qquad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

се нарича *остатъчен член* във формулата на Тейлор. Както ще видим, остатъчният член R_n може да бъде записван и по други начини и това обстоятелство се оказва полезно при редица въпроси, при които се използува формулата на Тейлор. Когато R_n е изразен чрез равенството (1), казваме, че сме записали остатъчния член във *формата на Лагранж*.

Ще покажем сега, че ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната в разглежданата околност на точката a, R_n може да се запише във формата

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{2}$$

наречена *интегрална форма* на остатъчния член. Наистина, интегрирайки последователно по части, получаваме

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,df^{(n)}(t)$$

$$=\frac{1}{n!}\left|(x-t)^n f^{(n)}(t)\right|_a^x-\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)\,d(x-t)^n$$

$$=-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,df^{(n-1)}(t)$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{(n-1)!}\left|(x-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\right|_a^x$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n-1)}(t)\,d(x-t)^{n-1}=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}-\ldots$$

$$-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Най-сетне, като вземем пред вид, че

$$\int_a^x f'(t)\,dt=f(x)-f(a),$$

ще имаме

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

откъдето следва равенството (2).

Интегралната форма на R_n позволява да изведем още един запис на остатъчния член. Наистина, ако към интеграла в дясната страна на равенството (2) приложим теоремата за средните стойности, ще получим

$$R_n=\frac{1}{n}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)(x-a),$$

където ξ е точка, намираща се между точките a и x. Ако $\theta=\frac{\xi-a}{x-a}$, то $0<\theta<1$ и ще имаме $\xi=a+\theta(x-a)$. Тогава R_n ще придобие вида

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{3}$$

или, ако $x-a=h$, вида

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h). \tag{4}$$

Когато използваме този начин за изразяване на R_n, казваме, че сме записали остатъчния член във *формата на Коши.*

§ 59. Интеграли в несобствен смисъл

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал $[a, b)$, който е отворен отдясно, или пък е дефинирана в интервала $[a, b]$, но е непрекъсната само в интервала $[a, b)$, то тя може и да не бъде интегруема в този интервал. Тя е обаче непрекъсната и следователно интегруема във всеки интервал от вида $[a, \beta]$, където $a<\beta<b$. Естествено е тогава да се запитаме дали интегралът

$$\int_a^\beta f(x)\,dx,$$

който представлява функция на β, дефинирана в интервала $[a, b)$, притежава граница при β, клонящо отляво към b. Ако тази граница съществува, то ние ще я приемем по дефиниция за стойност на интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

който ще наречем **интеграл в несобствен смисъл** или по-кратко **несобствен интеграл**, а за самата функция $f(x)$ ще казваме, че е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, b]$. Казва се също в този случай, че несобственият интеграл (1) е **сходящ**. И така той се дефинира с равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Ако пък границата, написана в дясната страна на това равенство, не съществува, то казваме, че и несобственият интеграл (1) не съществува или че е **разходящ**. На един разходящ несобствен интеграл не се приписва никаква стойност, така че символът (1) в такъв случай не представлява никакво число.

Аналогични разсъждения могат да се направят, когато вместо интервал от вида $[a, b)$ имаме интервал от вида $(a, b]$, т. е. интервал, отворен отляво. Естествено несобственият интеграл на една функция $f(x)$, непрекъсната в интервала $(a, b]$, ще се дефинира с равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a,\ \alpha>a} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Функцията $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[0, 1)$, следователно може да се постави въпросът за сходимостта на несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\beta\to 1,\ \beta<1} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{\beta\to 1,\ \beta<1} \left|\sqrt{1-x}\right|_0^\beta$$

$$= -2\lim_{\beta\to 1,\ \beta<1} (\sqrt{1-\beta}-1) = 2.$$

И така разглежданият несобствен интеграл е сходящ и неговата стойност е равна на 2.

Пример 2. Функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $(0, 1]$. Сега ще имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} \left|\ln x\right|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} (-\ln\alpha).$$

Но границата, до която достигнахме, не съществува (тя е равна на ∞) и следователно несобственият интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

е разходящ.

Съществуват още един вид несобствени интеграли — т. нар. несобствени интеграли в безкрайни граници. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал от вида $[a, \infty)$, то тя е интегруема във всеки интервал от вида $[a, p]$, където $p>a$. Можем тогава да се занимаем с въпроса, дали интегралът

$$\int_a^p f(x)\,dx,$$

който е функция на p, дефинирана в интервала $[a, \infty)$, притежава граница при p, клонящо към безкрайност. Ако тази граница съществува, то ние я означаваме така:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{2}$$

и я наричаме несобствен интеграл в граници от a до ∞. Казваме също, че несобственият интеграл (2) е сходящ или че функцията $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, \infty)$. И така имаме по дефиниция

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)\,dx.$$

Ако границата, която е в дясната страна на това равенство, не съществува, то несобственият интеграл (2) се нарича разходящ и не му се приписва никаква стойност.

Аналогично по дефиниция имаме

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{q\to-\infty} \int_q^a f(x)\,dx,$$

където $f(x)$ е функция, дефинирана и непрекъсната в интервала $(-\infty, a]$.

Най-сетне, когато една функция $f(x)$ е непрекъсната за всяко x от реалната права, въвеждаме следното дефиниционно равенство:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Интегралът в лявата страна на това равенство е сходящ, когато са сходящи и двата интеграла, написани в дясната му страна.

Пример 3. Да разгледаме несобствения интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Имаме

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{p\to\infty}\int_0^p \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{p\to\infty}\left|\operatorname{arc\,tg} x\right|_0^p=\lim_{p\to\infty}\operatorname{arc\,tg} p=\frac{\pi}{2}.$$

И така интегралът е сходящ и неговата стойност е $\frac{\pi}{2}$.

Пример 4. Да се занимаем с несобствения интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}.$$

Тук получаваме

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{dx}{x}=\lim_{p\to\infty}\left|\ln x\right|_1^p=\lim_{p\to\infty}\ln p=\infty.$$

Следователно разглежданият несобствен интеграл е разходящ.

Ако две функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в несобствен смисъл в някой интервал, то тяхната сума $f(x)+g(x)$, както и тяхната разлика $f(x)-g(x)$ са също интегруеми в несобствен смисъл в този интервал. Това се отнася както за несобствени интеграли в крайни граници, така и за такива, които са взети в безкрайни граници.

Действително, ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в несобствен смисъл например в интервала $[a, b)$, то

$$\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta [f(x)+g(x)]\,dx=\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta f(x)\,dx+\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta g(x)\,dx,$$

$$\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta [f(x)-g(x)]\,dx=\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta f(x)\,dx-\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta g(x)\,dx.$$

Тъй като границите, написани в десните страни на тези равенства, съществуват, ще съществуват и границите, написани в левите им страни. При това ще имаме

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ако вместо интервал от вида $[a, b)$ имаме интервал от вида $(a, b]$, разсъжденията по същество остават същите. По подобен начин разсъждаваме и когато имаме несобствени интеграли в безкрайни граници.

Упражнения. Установете сходимостта или разходимостта на следните несобствени интеграли:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. Отг. $\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\,dx$. Отг. $\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\pi-3\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x-5}$. Отг. $\ln 7$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Отг. $\dfrac{\pi}{2}$.

5. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}x^2e^{-x}\,dx$. Отг. 2.

§ 60. Принцип за сравняване при несобствените интеграли. Абсолютна сходимост на несобствени интеграли

Понякога е от значение да знаем дали даден несобствен интеграл е сходящ или не, без да се интересуваме от неговата стойност. В такъв случай е желателно да можем да отговорим на този въпрос и без да прибягваме непременно към самата дефиниция за несобствен интеграл. (За да приложим дефиницията, ние трябва, както знаем, да пресметнем преди всичко един неопределен интеграл — което дори когато сме в състояние да го извършим, може да бъде свързано с дълги пресмятания.)

В това отношение извънредно полезна е следната теорема, която е в известен смисъл аналогична на принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове. Ние ще я формулираме за случая на интервал от вида $[a, b)$, като е ясно как ще изглежда тя в останалите случаи на несобствени интеграли.

Теорема (принцип за сравняване на несобствените интеграли). *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и непрекъснати в интервала* $[a, b)$ *и нека за всяко* x *от този интервал са изпълнени неравенствата*

(1) $$0 \leqq f(x) \leqq g(x).$$

Тогава, ако несобственият интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *е сходящ, то сходящ е и несобственият интеграл* $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Да разгледаме функциите

$$F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx \quad \text{и} \quad G(\beta) = \int_a^\beta g(x)\,dx,$$

дефинирани за всяко β от интервала $[a, b)$. Като вземем пред вид неотрицателността на $f(x)$ и $g(x)$, лесно е да се убедим, че $F(\beta)$ и $G(\beta)$ са растящи. Наистина, ако $a \leqq \beta_1 < \beta_2 < b$, то

$$F(\beta_2) - F(\beta_1) = \int_a^{\beta_2} f(x)\,dx - \int_a^{\beta_1} f(x)\,dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx \geqq 0,$$

$$G(\beta_2) - G(\beta_1) = \int_a^{\beta_2} g(x)\,dx - \int_a^{\beta_1} g(x)\,dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(x)\,dx \geqq 0.$$

Освен това от неравенствата (1) следва, че за всяко β от интервала $[a, b)$ имаме още

(2) $$F(\beta) \leqq G(\beta).$$

Дадено е, че границата $\lim\limits_{\beta \to b,\ \beta < b} G(\beta)$ съществува. Поради монотонността на функцията $G(\beta)$ оттук следва, че тя е ограничена отгоре. Като вземем пред вид неравенството (2), заключаваме, че и функцията $F(\beta)$ е ограничена отгоре в интервала $[a, b)$. Поради нейната монотонност това е достатъчно, както знаем от теорема 2, § 19, за да твърдим, че границата $\lim\limits_{\beta \to b,\ \beta < b} F(\beta)$ съществува, което именно искахме да установим.

Преди да направим някои приложения на доказания вече принцип за сравняване на несобствени интеграли, ще въведем едно понятие, което напомня понятието абсолютна сходимост на безкраен ред.

Ще казваме, че несобственият интеграл от една функция $f(x)$ е **абсолютно сходящ**, когато несобственият интеграл от функцията $|f(x)|$ е сходящ.

Казва се в този случай също, че функцията $f(x)$ е **абсолютно интегруема в несобствен смисъл** в дадения интервал.

Лесно е да се види, че всеки абсолютно сходящ несобствен интеграл е сходящ. Нека покажем как се установява това в случая на несобствени интеграли в крайни граници. Случаят на интеграли в безкрайни граници се третира по същия начин.

И така нека $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b)$ и нека несобственият интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

е сходящ. Да разгледаме двете помощни функции

$$g(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2} \quad \text{и} \quad h(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}.$$

Те удовлетворяват неравенствата

$$0\leqq g(x)\leqq |f(x)|, \qquad 0\leqq h(x)\leqq |f(x)|$$

и следователно съгласно принципа за сравняване са интегруеми в несобствен смисъл в интервала $[a, b)$. Но тогава ще бъде интегруема в несобствен смисъл и тяхната разлика. Имаме обаче

$$g(x)-h(x)=f(x).$$

И така несобственият интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

е сходящ, което трябваше да докажем.

Една функция $f(x)$ обаче може да бъде интегруема в несобствен смисъл в някой интервал, без да бъде абсолютно интегруема в него.

Така например интегралът

$$(3) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

е сходящ, но не абсолютно сходящ. Преди всичко нека забележим, че макар подинтегралната функция да не е дефинирана при $x=0$, тя притежава граница, равна, както знаем, на 1, когато x клони към 0. Ето защо, считайки, че сме дефинирали израза $\frac{\sin x}{x}$ допълнително при $x=0$, приписвайки му стойност 1, ние получаваме една функция, която вече е не само дефинирана, но и непрекъсната в целия интервал $[0, +\infty)$, включително и в левия му край — точката 0. По такъв начин е ясно, че интегралът (3) не е несобствен по отношение на лявата си граница — това е един несобствен интеграл в безкрайни граници, дефиниран, както знаем, посредством равенството

$$(4) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{p\to\infty} \int_0^{p} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Да се занимаем с интеграла, стоящ под знака lim в горното равенство. Съгласно казаното по-горе това е един обикновен определен интеграл. Той може да се преработи така:

$$\int_0^p \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{d\cos x}{x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \left|\frac{\cos x}{x}\right|_{\frac{\pi}{2}}^p - \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\cos p}{p} - \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

От получените накрая три събираеми първото е число, независещо от p. За второто събираемо поради неравенството $\left|\frac{\cos p}{p}\right| \leq \frac{1}{p}$ имаме

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\cos p}{p} = 0.$$

За да изследваме третото събираемо, ще излезем от неравенството $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ и ще забележим, че несобственият интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

е сходящ (това се проверява непосредствено). Оттук въз основа на принципа за сравняване на несобствени интеграли заключаваме, че и интегралът $\int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ е сходящ. Това пък означава, че несобственият интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ е абсолютно сходящ и значи сходящ. Следователно границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

съществува. По този начин се убеждаваме, че границата, написана в дясната страна на равенството (4), съществува, т. е. че несобственият интеграл (3) е сходящ.

Нека видим сега, че този интеграл не е абсолютно сходящ, т. е. че границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^p \frac{|\sin x|}{x}\,dx \tag{5}$$

не съществува. Да си вземем едно произволно положително число A. След това, използувайки факта, че хармоничният ред е разходящ, да вземем цялото положително число n толкова голямо, че да имаме

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 3A.$$

$$\int_0^p \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{\left(k-\frac{5}{6}\right)\pi}^{\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi} |\sin x|\,dx \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{1}{2}\left[\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi - \left(k-\frac{5}{6}\right)\pi\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > A.$$

И така за всяко положително число A можем да намерим такова p, че да имаме

$$\int_0^p \frac{|\sin x|}{x}\,dx > A.$$

Това показва, че границата (5) не съществува (тя е равна на ∞).

Стойността на интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ не можем непосредствено да пресметнем, тъй като подинтегралната функция не притежава примитивна, изразяваща се чрез елементарните функции. С един начин за пресмятане на този интеграл ще се запознаем в § 84.

§ 61. Критерии за сходимост и разходимост на несобствени интеграли

Принципът за сравняване на несобствени интеграли може да се използува за получаването на някои достатъчни условия за интегруемост и неинтегруемост на функция в несобствен смисъл, известни като *критерии за сходимост или разходимост на несобствени интеграли*. Ние ще приведем четири такива критерия.

I. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в някой интервал от вида $[a, b)$ и ако тя удовлетворява в този интервал неравенството*

$$(1) \qquad |f(x)| \le \frac{A}{(b-x)^{\lambda}},$$

където A е положителна константа и $\lambda<1$, то несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ.

Действително, ако покажем, че функцията $\frac{A}{(b-x)^{\lambda}}$ е интегруема в несобствен смисъл в разглеждания интервал, то от принципа за сравняване на несобствени интеграли ще следва, че $f(x)$ е даже абсолютно интегруема в същия интервал. Непосредствено се получава

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^{\lambda}}\,dx=A\lim_{\beta\to b,\,\beta<b}\int_a^{\beta}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}=-\frac{A}{1-\lambda}\lim_{\beta\to b,\,\beta<b}\left|(b-x)^{1-\lambda}\right|_a^{\beta}$$

$$=-\frac{A}{1-\lambda}\lim_{\beta\to b,\,\beta<b}[(b-\beta)^{1-\lambda}-(b-a)^{1-\lambda}]=\frac{A(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

и желаното твърдение е установено.

В случая, когато имаме интервал от вида $(a, b]$, неравенството (1) трябва да се замени с неравенството

$$|f(x)|\leq\frac{A}{(x-a)^{\lambda}}.$$

Тук, разбира се, също се изисква да бъдат изпълнени условията $A>0$ $\lambda<1$.

От доказания по-горе критерий можем да получим следното следствие, което е по-удобно за работа:

Следствие. *Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b)$, респективно в интервала $(a, b]$, и ако границата*

$$\lim_{x\to b,\,x<b} f(x)(b-x)^{\lambda},$$

респективно границата

$$\lim_{x\to a,\,x>a} f(x)(x-a)^{\lambda},$$

съществува при някое $\lambda<1$, то несобственият интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ е сходящ.

Действително нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b)$ и нека съществува първата от написаните граници. Тогава функцията $f(x)(b-x)^{\lambda}$, а следователно и нейната абсолютна стойност $|f(x)|(b-x)^{\lambda}$ ще бъде ограничена в някой интервал от вида $(b-\delta, b)$. От друга страна, непрекъснатата функция $|f(x)|(b-x)^{\lambda}$ е сигурно ограничена в крайния и затворен интервал $[a, b-\delta]$. Оттук следва, че тя е ограничена в целия интервал $[a, b)$, т. е. че съществува такава положителна константа A, която удовлетворява неравенството

$$|f(x)|(b-x)^{\lambda}\leqq A$$

за всички точки от този интервал. Но последното неравенство е очевидно равносилно с неравенството (1).

Случаят на интервал от вида $(a, b]$ се разглежда аналогично.

Пример 1. Да изследваме сходимостта на несобствения интеграл

$$\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{2+x^{2}}{1-x^{2}}}\,dx.$$

(Интегралът е несобствен, понеже подинтегралната функция не е дефинирана при $x=1$.) Имаме

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+x^{2}}{(1-x)(1+x)}}\,.$$

Тъй като функцията

$$f(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2+x^{2}}{1+x}}$$

е непрекъсната в точката $x=1$, то тя сигурно притежава граница при $x\to 1$, $x<1$. Тук $\lambda={}^{1}/_{2}$. Следователно разглежданият интеграл е сходящ.

Пример 2. Нека разгледаме несобствения интеграл

$$\int_{0}^{1}\ln x d x.$$

(Интегралът е несобствен, тъй като $\ln x$ не е дефиниран при $x=0$.) Да вземем кое да е число λ, удовлетворяващо неравенствата $0<\lambda<1$, и да потърсим границата

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} x^{\lambda}\ln x.$$

Като положим $x=\frac{1}{t}$, ще имаме (вж. § 35)

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} x^{\lambda}\ln x=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\lambda}}\ln\frac{1}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\ln t}{t^{\lambda}}=0.$$

Следователно интегралът $\int_{0}^{1}\ln x dx$ е сходящ.

II. *Ако функцията $f(x)$, непрекъсната в интервала $[a, b)$, удовлетворява в този интервал неравенството*

(2) $$f(x)\geqq\frac{A}{b-x},$$

където A е положителна константа, то несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *е разходящ.*

Наистина да допуснем, че този интеграл е сходящ. Тогава въз основа на принципа за сравняване ще заключим, че несобственият интеграл от функцията $\frac{A}{b-x}$ е също сходящ в интервала $[a, b)$. Обаче чрез непосредствено пресмятане получаваме

$$\int\limits_a^b \frac{A}{b-x}\,dx = A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \int\limits_a^\beta \frac{dx}{b-x} = -A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \Big|\ln(b-x)\Big|_a^\beta$$

$$= -A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} [\ln(b-\beta)-\ln(b-a)] = \infty.$$

И така нашето допускане за сходимост на разглеждания несобствен интеграл е било погрешно. Следователно той е разходящ.

Да забележим, че когато се касае за интервал от вида $(a, b]$, неравенството (2) следва да бъде заменено с неравенството

$$f(x) \geq \frac{A}{x-a},$$

където A е пак положителна константа.

Доказаният критерий за разходимост на несобствени интеграли също позволява да се изведе от него едно следствие, което се оказва удобно за работа.

Следствие. *Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b)$, респективно в интервала $(a, b]$. Ако границата*

$$\lim_{x\to b,\ x<b} f(x)(b-x),$$

респективно границата

$$\lim_{x\to a,\ x>a} f(x)(x-a),$$

съществува и е различна от нула (но се позволява да бъде равна на ∞ или на $-\infty$), то несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ е разходящ.

Пример 3. Да изследваме сходимостта на несобствения интеграл

$$\int\limits_0^2 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx.$$

(Този интеграл е несобствен, тъй като знаменателят на подинтегралната функция става нула при $x=2$.) Имаме

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}.$$

Тъй като функцията

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}(2-x)=\frac{2x+1}{3-x}$$

е очевидно непрекъсната в точката $x=2$ и получава в тази точка стойност, различна от нула, тя ще притежава граница, различна от нула при $x\to 2$, $x<2$. Заключаваме, че разглежданият несобствен интеграл е разходящ.

III. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$, където $a>0$, и ако в този интервал удовлетворява неравенството*

$$|f(x)|\leq\frac{A}{x^{\lambda}},$$

където A е положителна константа, а $\lambda>1$, то несобственият интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ е сходящ.

Действително достатъчно е да покажем, че функцията $\frac{A}{x^{\lambda}}$ е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, \infty)$. Това се вижда обаче веднага с непосредствена проверка. Наистина имаме

$$\int_a^\infty\frac{A}{x^{\lambda}}dx=A\lim_{p\to\infty}\int_a^p\frac{dx}{x^{\lambda}}=\frac{A}{1-\lambda}\lim_{p\to\infty}\left|x^{-\lambda+1}\right|_a^p$$

$$=\frac{A}{1-\lambda}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{p^{\lambda-1}}-\frac{1}{a^{\lambda-1}}\right]=\frac{A}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}}.$$

Оттук въз основа на принципа за сравняване следва, че функцията $f(x)$ е даже абсолютно интегруема в интервала $[a, \infty)$.

Ще дадем и тук едно следствие от току-що доказания критерий за сходимост, улесняващо нашата работа с несобствените интеграли.

Следствие. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$ и ако съществува границата*

$$\lim_{x\to\infty}x^{\lambda}f(x),$$

където $\lambda>1$, то несобственият интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ е сходящ.

Пример 4. Да разгледаме несобствения интеграл

$$\int_0^\infty\frac{x-3}{x^3+2}dx.$$

Имаме

$$x^2 \frac{x-3}{x^3+2} = \frac{x^3-3x^2}{x^3+2}.$$

Тук $\lambda=2$. Тъй като границата

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2}{x^3+2}$$

съществува (тя е равна на 1), интегралът е сходящ.

Пример 5. Да разгледаме интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Да вземем $\lambda=2$. Както знаем от § 35, имаме $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}=0$. Оттук следва, че разглежданият несобствен интеграл е сходящ.

IV. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$, където $a>0$, и удовлетворява неравенството*

$$f(x) \geq \frac{A}{x}$$

при A — положителна константа, то несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ е разходящ.

Действително, ако допуснем, че този интеграл е сходящ, то ще бъде сходящ и интегралът от функцията $\frac{A}{x}$. Той обаче е разходящ, тъй като имаме

$$\int_a^\infty \frac{A}{x}dx = A\lim_{p\to\infty}\int_a^p \frac{dx}{x} = A\lim_{p\to\infty}\Big|\ln x\Big|_a^p = A\lim_{p\to\infty}(\ln p-\ln a)=\infty.$$

Както и при по-рано разгледаните критерии, ще приведем едно следствие от получения критерий за разходимост, което е удобно за работа.

Следствие. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$ и ако границата*

$$\lim_{x\to\infty} xf(x)$$

съществува и е различна от нула (но се допуска да бъде равна на ∞ или $-\infty$), то несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ е разходящ.

Пример 6. Да разгледаме интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx.$$

Имаме

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{3x-2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{x^2+x+1}=3.$$

Следователно интегралът е разходящ.

Пример 7. Да изследваме сходимостта на интеграла

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln x}.$$

От § 35 знаем, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\infty$. Следователно интегралът е разходящ.

Упражнения. Установете сходимостта или разходимостта на следните несобствени интеграли:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.
2. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt[3]{2-x}}\,dx$.
3. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$.
4. $\int_{-1}^1 \frac{x+2}{x^2+4x+3}\,dx$.
5. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$.
7. $\int_0^{\infty} \frac{2x^2+x-3}{x^4+x^2+1}\,dx$.
8. $\int_1^{\infty} \frac{x^2-x+1}{x^3}\,dx$.
9. $\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.
10. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$.
11. $\int_0^{\infty} \frac{x^2+x+2}{e^x}\,dx$.
12. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
13. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{\ln(\ln x)}$.

§ 62*. Интегрален критерий на Коши за редове с положителни членове

Понятието несобствен интеграл ни позволява да получим следното необходимо и достатъчно условие за сходимостта на един безкраен ред с положителни членове, известно под името

Интегрален критерий на Коши за редове с положителни членове. *Ако функцията* $f(x)$, *дефинирана и непрекъсната в интервала* $[1, \infty)$, *е положителна и намаляваща, то безкрайният ред*

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots \tag{1}$$

е сходящ тогава и само тогава, когато несобственият интеграл

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \tag{2}$$

е сходящ.

Доказателство. Наистина имаме

$$\int_1^\infty f(x)\,dx=\lim_n \int_1^n f(x)\,dx. \tag{3}$$

От друга страна,

$$\int_1^n f(x)\,dx=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Тъй като поради монотонността на функцията $f(x)$ в интервала $[k-1, k]$ са изпълнени неравенствата $f(k-1)\geqq f(x)\geqq f(k)$, ще имаме

$$f(k)\leqq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqq f(k-1),$$

откъдето поради равенството (4) получаваме

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\leqq \int_1^n f(x)\,dx\leqq f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1).$$

От тези неравенства, като вземем пред вид равенството (3), е ясно, че ако редът (1) е сходящ, сходящ ще бъде и интегралът (2), а също, че и обратно — от сходимостта на интеграла (2) следва сходимостта на реда (1).

Пример. Да изследваме реда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}. \tag{5}$$

За целта да разгледаме в интервала $[2, \infty)$ функцията $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Тя е очевидно положителна и намаляваща в този интервал. Съгласно интегралния критерий на Коши редът (5) ще бъде сходящ или разходящ в зависимост от това, дали е сходящ или разходящ несобственият интеграл

(6) $$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$$

(тук, разбира се, не е съществено това, че вместо интервала $[1, \infty)$ сме взели интервала $[2, \infty)$). На последния въпрос обаче можем да отговорим непосредствено. Имаме

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{p\to\infty}\int_{2}^{p}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{p\to\infty}\int_{2}^{p}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{p\to\infty}\left|\ln(\ln x)\right|_{2}^{p}$$

$$=\lim_{p\to\infty}(\ln(\ln p)-\ln(\ln 2))=\infty.$$

И тъй несобственият интеграл (6) е разходящ, значи разходящ е и редът (5).

ГЛАВА IX

РЕДИЦИ И РЕДОВЕ ОТ ФУНКЦИИ. СТЕПЕННИ РЕДОВЕ

В тази глава, след като въведем понятието равномерна сходимост и докажем няколко теореми, отнасящи се до редици и редове от функции, ще се спрем специално на т. нар. степенни редове, които играят важна роля както в математиката, така и в нейните приложения. Ще се запознаем с разни методи, позволяващи ни да представим дадена функция като сума на степенен ред или, както се казва, да развием тази функция в степенен ред. Едно такова представяне, когато то е възможно, има голямо както чисто теоретично, така и практическо значение поради това, че то ни дава възможност да получаваме приближени изрази за дадената функция, които представляват полиноми. А полиномите (или целите рационални функции), както знаем, се явяват в известен смисъл най-простите функции — в смисъл, че при тях променливата x е подложена само на най-простите аритметични действия — събиране, изваждане и умножение. Основно средство за развиване на функциите в степенни редове се явява познатата ни от гл. VI формула на Тейлор, която ни довежда до понятието Тейлоров ред на функция.

§ 63. Равномерна сходимост

Ако е дадено едно множество M от реални числа и ако на всяко естествено число n съпоставим по една функция $f_n(x)$, дефинирана в M, то ще получим редицата от функции

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1}$$

При всяка фиксирана точка x от M редицата (1) представлява една редица от числа, която може да бъде сходяща или разходяща. Множеството N от ония точки x, за които редицата (1) е сходяща, се нарича нейна **област на сходимост**. Границата на редицата (1) зависи, разбира се, от x и представлява следователно една функция на x, дефинирана в множеството N.

Да разгледаме сега една редица от функции от вида (1) с област на сходимост N и нека $f(x)$ е нейната гранична функция. Съгласно дефиницията за сходимост на редица от числа, ако x е точка от N, а ε е положително число, то ще съществува някакво число ν такова, че при $n>\nu$ ще имаме

$$(2) \qquad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Ясно е при това, че числото ν ще зависи от това, как сме избрали точката x и числото ε. Особено важен е обаче случаят, когато редицата (1) е такава, че числото ν може да бъде избрано независимо от точката x. Така идваме до следната

Дефиниция. *Нека редицата от функции*

$$(1) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

е сходяща за всяко x *от едно множество* N *и нека* $f(x)$ *е нейната граница. Казваме, че редицата* (1) *е равномерно сходяща в* N, *ако за всяко положително число* ε *съществува такова число* ν, *зависещо само от* ε, *но не и от* x, *че при* $n>\nu$ *неравенството*

$$(2) \qquad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

е изпълнено за всички точки x *от* N.

Пример. Да разгледаме редицата от функции

$$\sin x, \ \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin nx}{n}, \ldots$$

Лесно е да се види, че нейната област на сходимост е интервалът $(-\infty, \infty)$ и че граничната ѝ функция е константата 0. Нещо повече, тя е даже равномерно сходяща в този интервал. Наистина нека $\varepsilon>0$ и нека си образуваме числото $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$. При $n>\nu$ за всяко x ще имаме

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqq\frac{1}{n}<\frac{1}{\nu}=\varepsilon.$$

Тук числото ν бе избрано само в зависимост от ε, а неравенството

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|<\varepsilon$$

е изпълнено при $n>\nu$ за всички числа x от интервала $(-\infty, \infty)$. Следователно изискванията на дефиницията за равномерна сходимост са удовлетворени.

Що се отнася до съществуването на редици от функции, които не са равномерно сходящи, то в следващия параграф ще посочим пример за такава редица.

§ 64. Три теореми за редици от функции

Значението на понятието равномерна сходимост се вижда от важната роля, която то играе в теоремите, с които ще се запознаем в този параграф.

Първата от тези теореми разглежда следния въпрос. Ако една редица от функции е сходяща за всяко x от едно множество N и ако всички нейни членове са функции, непрекъснати в N, можем ли да твърдим, че граничната функция ще бъде също непрекъсната в N? Отговорът на този въпрос в общия случай е отрицателен. В това се убеждаваме от следния

Пример. Да разгледаме редицата от функции

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

в затворения интервал $[0, 1]$. Всички нейни членове са непрекъснати функции в този интервал. Както знаем, тази редица (която е геометрична прогресия) клони към 0 при $0 \leq x < 1$. При $x=1$ пък всички нейни членове са равни на 1 и тя клони към 1. И така редицата е сходяща в затворения интервал $[0, 1]$. Обаче нейната гранична функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

не е непрекъсната в този интервал — тя е прекъсната в точката $x=1$.

Този пример показва, че не винаги границата на една редица от непрекъснати функции е също непрекъсната. Толкова по-интересна се явява следната

Теорема 1. *Ако редицата*

(1) $$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

от функции, непрекъснати в едно множество N, е равномерно сходяща в N, то граничната ѝ функция $f(x)$ е също непрекъсната в N.

Доказателство. Нека x_0 е точка от N. Ще покажем, че $f(x)$ е непрекъсната в тази точка. За целта да вземем произволно положително число ε. Тъй като дадената редица от функции е равномерно сходяща, ще съществува такова число ν, че при $n > \nu$ неравенството

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ще бъде изпълнено за всички точки x от N. Да разгледаме сега някоя функция $f_n(x)$, номерът n на която удовлетворява неравенството $n > \nu$. Това е по условие функция, непрекъсната в точката x_0. Следователно съществува такова положително число δ, че за стойностите на x от N, за които имаме $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено неравенството

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогава при $|x - x_0| < \delta$ ще имаме

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n\ x_0)-f(x_0)|$$

$$\frac{\varepsilon}{3}$$

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

$$x\ ,\dots$$

от функции, непрекъснати в един краен и затворен интервал $[a, b]$. *Ако тя е равномерно сходяща в този интервал и* $f(x)$ *е нейната гранична функция, то редицата от определените интеграли*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx,\quad \int_a^b f_2(x)\,dx, \dots,\quad \int_a^b f_n(x)\,dx, \dots$$

е сходяща, като при това

$$\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Преди всичко нека забележим, че както знаем от теорема 1, граничната функция $f(x)$ ще бъде също непрекъсната и следователно интегруема в интервала $[a, b]$.

Нека ε е едно положително число. Тогава числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$ е също положително и поради равномерната сходимост ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ ще имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

за всяко x от интервала $[a, b]$. Това неравенство показва, че числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$ е горна граница на функцията $|f_n(x)-f(x)|$, когато $n>\nu$. Ето защо при $n>\nu$ ще имаме

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|$$

$$\leqq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon,$$

с което теоремата е доказана.

Полученият резултат може да се запише още и така:

$$\lim\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim f_n(x)\,dx,$$

поради което тази теорема се нарича също **теорема за граничен преход под знака на интеграла.**

Теорема 3 (теорема за почленно диференциране). *Нека редицата от функции*

$$f_1(x),\ f_2(x)\ ,\ \ldots\ ,f_n(x),\ \ldots$$

е сходяща в един интервал D и клони към $f(x)$ и нека всички нейни членове са диференцуеми, а производните им — непрекъснати функции в този интервал. Ако редицата от производните

$$f_1'(x), f_2'(x),\ \ldots\ ,f_n'(x),\ \ldots$$

е равномерно сходяща в D и клони към $\varphi(x)$, то функцията $f(x)$ също е диференцуема и

$$f'(x)=\varphi(x)$$

за всяко x от D.

Доказателство. Да си вземем една точка a от интервала D. Ако x е произволно взета точка от D, то, както знаем (формула (6) от § 56), ще имаме

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Следователно

$$\lim f_n(x)=\lim f_n(a)+\lim\int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Ако разгледаме редицата от производните в затворения интервал, определен от точките a и x, то към нея можем да приложим теоремата за почленно интегриране. Ще получим

$$f(x)=f(a)+\int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Оттук въз основа на теоремата на Лайбниц и Нютон заключаваме, че $f(x)$ е диференцуема в точката x и че $f'(x)=\varphi(x)$. Тъй като x беше избрано произволно в интервала D, теоремата е доказана.

§ 65. Редове от функции

Множеството N от точките x, за които е сходящ даден ред от функции

$$(1) \qquad u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

се нарича негова област на сходимост. Сумата на реда (1) е очевидно функция на x, дефинирана в N.

Понятието равномерна сходимост съвсем естествено се пренася за редовете от функции. Ще казваме, че редът (1) е **равномерно сходящ** в множеството N, когато редицата от неговите частични суми

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots$$

е равномерно сходяща в N.

Теоремите 1, 2 и 3 от предишния параграф веднага ни дават следващите три теореми, отнасящи се до редове от функции.

Теорема 1. *Ако всички членове на реда*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

са непрекъснати функции в едно множество N и ако той е равномерно сходящ в N, то неговата сума $u(x)$ е също непрекъсната функция в N.

Теорема 2 (теорема за почленно интегриране). *Ако редът*

$$(1) \qquad u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

членовете на който са непрекъснати функции в затворения интервал $[a, b]$, е равномерно сходящ в този интервал, то редът

$$\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\cdots$$

сходящ и ако сумата на реда (1) е $u(x)$, то имаме

$$\int_a^b u(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\cdots$$

Теорема 3 (теорема за почленно диференциране). *Нека редът от функции*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

е сходящ в един интервал D със сума $u(x)$ и нека всичките му членове са диференцуеми функции, а производните им — непрекъснати функции в този интервал. Ако редът

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

е равномерно сходящ в D, то функцията u(x) е диференцуема и за всяко x от D имаме

$$u'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\dots+u_n'(x)+\dots$$

Всяка от тези три теореми се доказва, като се разгледа редицата от частичните суми на дадения ред и към тази редица се приложи съответната теорема, отнасяща се до редици от функции.

Съществува едно твърде удобно достатъчно условие за равномерна сходимост на ред от функции. То се дава със следната

Теорема 4. *Нека е даден редът от функции*

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots, \tag{1}$$

дефинирани в едно множество N, и нека за всяко x от N и за всяко n са изпълнени неравенствата

$$|u_n(x)|\leqq a_n, \tag{2}$$

където a_n са някакви положителни константи. Ако числовият ред

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \tag{3}$$

е сходящ, то даденият ред от функции (1) е равномерно сходящ в N.

Доказателство. Преди всичко от неравенствата (2) и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове следва, че редът

$$|u_1(x)|+|u_2(x)|+\dots+|u_n(x)|+\dots$$

е сходящ за всяко x от N, т. е. че редът (1) е даже абсолютно схоящ в множеството N. Нека u(x) е неговата сума. Да въведем следните означения:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x),$$

$$\sigma_n=a_1+a_2+\dots+a_n.$$

По условие редът (3) е сходящ. Това значи, че числовата редица

$$\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\dots$$

е сходяща и клони към някаква граница σ. Да вземем едно произволно положително число ε. Ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме

$$|\sigma_n-\sigma|<\varepsilon.$$

Тогава за всяко x от N при $n>\nu$ ще имаме

$$\begin{aligned}|S_n(x)-u(x)|&=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots|\\&\leqq|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\dots\\&\leqq a_{n+1}+a_{n+2}+\dots=\sigma-\sigma_n<\varepsilon.\end{aligned}$$

А това означава, че редът (1) е равномерно сходящ.

Пример. Да разгледаме реда

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\dots+\frac{\sin nx}{n^2}+\dots \tag{4}$$

От неравенствата

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

и от сходимостта на реда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

която се установява лесно чрез критерия на Раабе—Дюамел, следва съгласно теорема 4, че редът (4) е равномерно сходящ.

§ 66. Степенни редове. Област на сходимост

Степенните редове са една специална категория редове от функции. Важната роля, която те играят в математическия анализ и неговите приложения, се обяснява с обстоятелството, че техните частични суми представляват полиноми.

Общият вид на един степенен ред е следният:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

Числата $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се наричат негови коефициенти.

Множеството от точките, за които е сходящ един степенен ред, се нарича негова област на сходимост. Тя може да съвпада с множеството на всички реални числа. Такъв е случаят например със следния степенен ред:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{2}$$

Наистина нека $x \neq 0$ и нека към реда

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+\cdots \tag{3}$$

приложим критерия на Даламбер. Имаме

$$\lim\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!}\right)=\lim\frac{|x|}{n+1}=0.$$

Получената граница е по-малка от 1, следователно редът (3) е сходящ, а това ще рече, че редът (2) е даже абсолютно сходящ за всички $x \neq 0$. Но той очевидно е сходящ и при $x=0$. И така степенният ред (2) е сходящ за всяко x, т. е. негова област на сходимост е интервалът $(-\infty, \infty)$.

Има една стойност на x, за която всеки степенен ред е сходящ — това е числото 0. Съществуват обаче степенни редове, които са разходящи за всяка друга стойност на x. Ето пример за един такъв ред:

$$1+1!\,x+2!\,x^2+\cdots+n!\,x^n+\cdots \tag{4}$$

Ако образуваме при $x \neq 0$ отношението

$$\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n}=(n+1)\,|x|,$$

виждаме, че за достатъчно големи стойности на n то става по-голямо от 1. Оттук получаваме неравенството

$$(n+1)!\,|x|^{n+1}>n!\,|x|^n,$$

изпълнено за всички стойности на n, по-големи от дадено число. Това ни показва, че редицата

$$1,\ 1!\,|x|,\ 2!\,|x|^2,\ldots,\ n!\,|x|^n,\ldots$$

не може да клони към нула. Но тогава няма да клони към нула и редицата от членовете на реда (4), който следователно ще бъде разходящ. И така неговата област на сходимост се състои от една единствена точка — точката 0.

Разгледаните два примера представляват, така да се каже, крайните случаи, които могат да се срещнат при степенните редове. Съществуват, разбира се, степенни редове, чиято област на сходимост не съвпада с цялата реална ос, нито пък се състои само от точката 0. Такъв пример ни дава познатата геометрична прогресия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \tag{5}$$

която представлява един степенен ред, сходящ, както знаем, при $|x|<1$ и разходящ при $|x|\geqq 1$. Неговата област на сходимост е следователно отвореният интервал $(-1,\ 1)$.

Ние ще покажем (и това е извънредно важен резултат), че областта на сходимост на един степенен ред (когато тя не се свежда до единствената точка 0) е винаги интервал, и то интервал от специален вид. Преди всичко ще докажем следната

Теорема 1. *Ако степенният ред*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

е сходящ за точката x_0, *то той е сходящ, и то абсолютно, за всяко* x, *удовлетворяващо неравенството* $|x|<|x_0|$.

Доказателство. От сходимостта на числовия ред

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$$

следва, че редицата от неговите членове

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\ \ldots,\ a_nx_0^n,\ \ldots$$

клони към нула. Поради това тя е ограничена и можем да намерим такова число A, че за всяко n да бъде изпълнено неравенството

$$|a_nx_0^n|\leqq A. \tag{6}$$

Нека сега x_1 е число, удовлетворяващо неравенството $|x_1|<|x_0|$. Тогава числото $q=\left|\frac{x_1}{x_0}\right|$ ще удовлетворява неравенствата $0\leqq q<1$. Да разгледаме сега реда

(7) $$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots$$

За неговия общ член $a_nx_1^n$ имаме

$$|a_nx_1^n|=\left|a_n\frac{x_1^n}{x_0^n}x_0^n\right|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n\leqq Aq^n.$$

От полученото неравенство и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове следва, че редът

(8) $$|a_0|+|a_1x_1|+|a_2x_1^2|+\ldots+|a_nx_1^n|+\ldots$$

е сходящ. Действително неговият n-ти член е по-малък или равен на n-тия член на геометричната прогресия

$$A+Aq+Aq^2+\ldots+Aq^n+\ldots,$$

която е сходяща, тъй като $0\leqq q<1$.

Това означава, че редът (7) е абсолютно сходящ. Тъй като точката x_1 беше произволна точка, удовлетворяваща неравенството $|x_1|<|x_0|$, то теоремата е доказана.

От тази теорема следва, че когато един степенен ред е сходящ за всяко x, той е и абсолютно сходящ за всяко x.

По-нататък от нея следва също, че ако даден степенен ред е разходящ за някое x_1, то той е разходящ и за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x|>|x_1|$.

Сега е лесно да се установи следната важна теорема, която дава отговор на въпроса за вида на областта на сходимост на един степенен ред.

Теорема 2. *Нека е даден един степенен ред*

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Тогава или той е абсолютно сходящ за всяко x, или е сходящ само при $x=0$, или най-сетне съществува едно положително число r със следното свойство: при $|x|<r$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x|>r$ е разходящ.

Доказателство. Нека допуснем, че даденият ред нито е абсолютно сходящ за всяко x, нито пък е сходящ само в точката $x=0$. Трябва да покажем, че в такъв случай съществува положително число r със свойството, изказано във формулировката на теоремата.

Да означим с M множеството от ония числа x, за които редът (1) е сходящ. Ако допуснем, че това множество не е ограничено отгоре, ще заключим, че редът (1) е абсолютно сходящ за всяко x — случай, който ние изключихме. Наистина, каквото и число x да си вземем, числото $|x|$ няма да бъде горна граница на множеството M. Значи ще съществува число x_1, което принадлежи на M (т. е. за което редът (1) е сходящ) и за което имаме $|x|<x_1$. Но тогава съгласно теорема 1 редът ще бъде сходящ и за точката x.

Следователно множеството M е ограничено отгоре. Да означим с r неговата точна горна граница. Тъй като M съдържа числото 0, то числото r е неотрицателно. Ако бихме имали обаче $r=0$, то редът би бил сходящ само при $x=0$ — случай, който също изключихме. Наистина при $r=0$ редът е разходящ очевидно за всяко положително x. Но той ще бъде тогава разходящ и за всяко отрицателно x — от неговата сходимост за някое отрицателно число x_1 би следвала сходимостта му и за всички положителни числа x, по-малки от $|x_1|$.

И така $r>0$. Нека x е число, удовлетворяващо неравенството $|x|<r$. Тогава $|x|$ няма да бъде горна граница на множеството M, т. е. ще съществува число x_1 от M, такова, че $|x|<x_1$. Оттук следва че редът (1) е абсолютно сходящ в точката x.

Ако пък x е число, за което $|x|>r$, то можем да вземем такова число x_1, че да имаме $r<x_1<|x|$. Ако допуснем сега, че редът (1) е сходящ в точката x, той ще бъде сходящ и в точката x_1, което противоречи на дефиницията на числото r.

По такъв начин установихме, че степенният ред (1) е абсолютно сходящ при $|x|<r$ и разходящ при $|x|>r$. С това теоремата е доказана.

Положителното число r, което въведохме при доказателството на тази теорема, се нарича **радиус на сходимост** на дадения степенен ред. Прието е да се счита, че когато един степенен ред е сходящ за всяко x, той има радиус на сходимост $x=\infty$, а когато е сходящ само за точката 0, неговият радиус на сходимост е $r=0$. По такъв начин можем да говорим за радиус на сходимост при всеки степенен ред.

Нека отбележим, че в теорема 2 не се говори нищо за сходимостта на реда (1) в крайните точки на интервала $(-r, r)$. В действителност ние и не можем да изкажем никакво общо твърдение, отнасящо се до тези две точки — редът може да бъде сходящ в едната от тях и разходящ в другата или пък да бъде сходящ и в двете, или най-сетне разходящ и в двете.

И наистина геометричната прогресия (5) ни дава пример за степенен ред, който има радиус на сходимост, равен на 1, и който е разходящ в двете крайни точки на интервала $(-1, 1)$.

Ето още два примера, които ще ни убедят, че действително са възможни и другите два случая, за които споменахме:

Степенният ред

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots \tag{9}$$

има радиус на сходимост $r=1$. Действително достатъчно е да го разгледаме за положителни стойности на x. Като приложим при $x>0$ критерия на Даламбер, имаме

$$\lim\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}\right)=\lim\left(\frac{n}{n+1}\cdot x\right)=x.$$

Оттук следва, че при $0<x<1$ редът е сходящ, а при $x>1$ — разходящ, което показва, че имаме $r=1$. При $x=1$ редът (9) е разходящ, тъй като в този случай той се превръща в хармоничния ред, а при $x=-1$ той е сходящ съгласно критерия на Лайбниц. И така неговата област на сходимост е интервалът $[-1, 1)$.

Да разгледаме най-сетне степенния ред

(10) $$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\dots+\frac{x^n}{n^2}+\dots$$

При $x>0$ получаваме

$$\lim\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{x^n}{n^2}\right)=\lim\frac{n^2}{(n+1)^2}x=x.$$

Оттук въз основа на критерия на Даламбер заключаваме, че редът (10) е сходящ при $0<x<1$ и разходящ при $x>1$ и че следователно неговият радиус на сходимост е $r=1$. При $x=1$ получаваме реда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots,$$

за който с помощта на критерия на Раабе — Дюамел се установява, че е сходящ. Но тогава редът (10) ще бъде даже абсолютно сходящ и при $x=-1$. И така неговата област на сходимост е затвореният интервал $[-1, 1]$.

Ще отбележим накрая, че от теорема 2 можем да извлечем още и следното

Следствие. *Ако степенният ред*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$$

има радиус на сходимост r, то той е равномерно сходящ във всеки интервал от вида $[-c, c]$, където $0<c<r$. (Когато $r=\infty$, това твърдение е вярно за всяко положително число c.)

Наистина твърдението следва от сходимостта на числовия ред

$$|a_0|+|a_1c|+|a_2c^2|+\dots+|a_nc^n|+\dots,$$

от теорема 4, § 65 и от неравенствата

$$|a_nx^n|\leqq|a_nc^n|,$$

изпълнени за всяко x от интервала $[-c, c]$.

Упражнения. Определете радиусите на сходимост на следните степенни редове:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n.$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{3^n}.$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n.$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n.$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n.$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n.$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2n}.$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}x^n.$

§ 67. Диференциране на степенните редове

Ако диференцираме почленно даден степенен ред

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{1}$$

то в резултат ще получим отново един степенен ред, а именно реда

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \tag{2}$$

За тези два реда е в сила следната

Теорема 1. *Степенните редове* (1) *и* (2) *имат един и същ радиус на сходимост.*

Доказателство. Нека означим радиуса на сходимост на реда (1) с r, а този на реда (2) с r'. Да вземем една точка x_1 от интервала $(-r', r')$. За тази точка редът (2) е абсолютно сходящ, т. е. сходящ е редът

$$|a_1|+2|a_2x_1|+\ldots+n|a_nx_1^{n-1}|+\ldots$$

Ако умножим този ред с числото $|x_1|$, ще получим сходящия ред

$$|a_1x_1|+2|a_2x_1^2|+\ldots+n|a_nx_1^n|+\ldots$$

Тогава от очевидните неравенства

$$|a_nx_1^n|\leqq n\,|a_nx_1^n|,$$

изпълнени за всяко n, и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове ще следва, че редът (1) е абсолютно сходящ за точката x_1. Тъй като това беше произволна точка от интервала $(-r', r')$, то редът (1) се оказва сходящ за всички точки от този интервал. Следователно неговият радиус на сходимост r не може да бъде по-малък от r'. И така имаме

$$r'\leqq r. \tag{3}$$

Нека сега x_2 е точка от интервала $(-r, r)$. Да вземем едно положително число x_0, удовлетворяващо неравенствата $|x_2|<x_0<r$. Редът (1) ще бъде абсолютно сходящ за точката x_0. Поради това редицата от неговите членове

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\ \ldots,\ a_nx_0^n,\ \ldots$$

ще клони към нула и следователно ще бъде ограничена. Нека A е такова число, за което е изпълнено неравенството

$$|a_nx_0^n|\leqq A \text{ за всяко } n.$$

Да разгледаме реда

$$|a_1|+|2a_2x_2|+\cdots+|na_nx_2^{n-1}|+\cdots \tag{4}$$

и да образуваме числото $q=\frac{|x_2|}{x_0}$. За общия член на реда (4) имаме

$$|na_nx_2^{n-1}|=\left|na_n\frac{x_2^{n-1}}{x_0^{n-1}}x_0^{n-1}\right|=\frac{|a_nx_0^n|}{x_0}nq^{n-1}\leqq\frac{A}{x_0}nq^{n-1}.$$

Като вземем пред вид, че $0<q<1$, и използуваме критерия на Даламбер, убеждаваме се, че редът

$$1+2q+\dots+nq^{n-1}+\dots$$

е сходящ. Неговата сходимост, разбира се, няма да се наруши, ако умножим всичките му членове с числото $\frac{A}{x_0}$. Ето защо от неравенството

$$|na_n x_2^{n-1}| \leqq \frac{A}{x_0} nq^{n-1},$$

което вече доказахме за всяко n, и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове ще следва сходимостта и на реда (4). Това означава, че редът (2) е абсолютно сходящ за произволно взетата точка x_2 от интервала $(-r, r)$. Следователно неговият радиус на сходимост е най-малко равен на r, т. е. имаме

$$r' \geqq r. \tag{5}$$

От неравенствата (3) и (5) получаваме най-сетне

$$r=r',$$

което искахме да докажем.

Нека подчертаем обаче, че макар степенните редове (1) и (2) да имат един и същ радиус на сходимост, техните области на сходимост могат и да не съвпадат. Това ще рече, че в крайните точки на интервала $(-r, r)$ двата реда могат да имат различно поведение. Така например степенният ред

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots,$$

както видяхме в миналия параграф, има за област на сходимост интервала $[-1, 1)$, докато полученият от него чрез почленно диференциране степенен ред

$$1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

е разходящ при $x=-1$ и има за област на сходимост отворения интервал $(-1,1)$.

Степенните редове са особено удобни за работа поради валидността на следната

Теорема 2 (теорема за диференциране на степенните редове). *Сумата $f(x)$ на един степенен ред*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots \tag{1}$$

е диференцуема функция за всяка вътрешна точка от неговия интервал на сходимост и при това

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}+\dots \tag{6}$$

Доказателство. Както знаем от теорема 1, редовете (1) и (2) имат един и същ радиус на сходимост r. Нека $x\in(-r, r)$ и нека c е число, удовлетворяващо неравенствата $|x|<c<r$. Съгласно следствието, което получихме в края на предишния параграф, степенният ред (2) е равномерно сходящ в интервала $[-c, c]$. Тогава въз основа на теоремата

за почленно диференциране на редове от функции от § 65 заключаваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x и че е в сила равенството (6). Тъй като x беше произволна точка от интервала $(-r, r)$, с това теоремата е доказана.

От тази теорема следва по-специално, че сумата на един степенен ред е непрекъсната функция във всички вътрешни точки от неговия интервал на сходимост.

В заключение нека отбележим, че ако интегрираме почленно степенния ред

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots, \tag{1}$$

чийто радиус на сходимост е r, полученият степенен ред

$$a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\dots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots \tag{7}$$

има същия радиус на сходимост, тъй като редът (1) се получава от него чрез почленно диференциране. Нещо повече, въз основа на теорема 2 можем да твърдим, че сумата на степенния ред (7) представлява една примитивна функция на сумата на степенния ред (1) в интервала $(-r, r)$.

§ 68. Тейлоров ред

Доказаните в предишните параграфи свойства на степенните редове ги правят твърде удобни за работа. Ето защо, както вече имахме случая да отбележим, твърде е желателно дадена функция $f(x)$ (когато това е възможно) да бъде представена, поне за някоя част от своята дефиниционна област, като сума на степенен ред или, както се казва още, да бъде развита в степенен ред.

Един основен метод за постигането на тази цел е използването на т. нар. тейлоров ред.

В § 36 бяхме доказали, че ако $f(x)$ е функция, $n+1$ пъти диференцуема в някоя околност на една точка a, то за всяка точка $a+h$ от тази околност е валидна следната формула, наречена формула на Тейлор:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R_n. \tag{1}$$

Изразът R_n се нарича остатъчен член и има вида

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \tag{2}$$

където θ е число, намиращо се между 0 и 1.

Нека сега е дадена една функция $f(x)$, която е безбройно много пъти диференцуема в някоя околност $(a-\delta, a+\delta)$ на една точка a (тази околност може да бъде в частност и интервалът $(-\infty, +\infty)$). Ние можем да напишем тогава формулата на Тейлор при всяко цяло положително число n. Това ни навежда на мисълта да си образуваме следния степенен ред на променливата h:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\cdots \tag{3}$$

Този ред се нарича **тейлоров ред** на функцията $f(x)$ относно точката a. Ако означим с S_n неговата $(n+1)$-ва частична сума, то формулата на Тейлор ни дава

$$f(a+h)=S_n+R_n.$$

Ясно е, че ако за някоя стойност на h имаме $\lim R_n=0$, то ще имаме и $\lim S_n=f(a+h)$, т. е. редът (3) ще бъде сходящ и неговата сума ще бъде равна на $f(a+h)$. За ония точки $a+h$ от интервала $(a—\delta, a+\delta)$, за които това е изпълнено, ние казваме, че функцията $f(x)$ се **развива в тейлоров ред**. Обикновено това са точките от някой интервал от вида $(a—\delta_1, a+\delta_1)$, явяващ се подинтервал на интервала $(a—\delta, a+\delta)$. В такъв случай казваме, че $f(x)$ е развиваема в тейлоров ред в околността $(a—\delta_1, a+\delta_1)$ на точката a или по-кратко, че $f(x)$ се развива в тейлоров ред около точката a. За точките от споменатата околност имаме

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\cdots \tag{4}$$

Ако положим $a+h=x$, равенството (4) се написва така:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{5}$$

В специалния случай, когато $a=0$, получаваме т. нар. **маклоренов ред** на функцията $f(x)$, който има вида

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{6}$$

В този случай за остатъчния член R_n имаме

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \tag{7}$$

където $0<\theta<1$.

Когато за всяка точка x от някой интервал $(—\delta, \delta)$ е изпълнено равенството

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, \tag{8}$$

казваме, че $f(x)$ се развива в маклоренов ред в този интервал. Това ще се осъществи, когато за всяка от тези стойности на x остатъчният член R_n клони към нула.

Ние ще получим сега маклореновите развития на някои конкретни функции. Тези степенни развития се използват често в математическия анализ.

Да разгледаме функцията $f(x)=e^x$. Тъй като за нея $f^{(n)}(x)=e^x$ и следователно $f^{(n)}(0)=1$ за всяко n, то нейният маклоренов ред е следният:

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \tag{9}$$

Ние изследвахме този ред в § 66 и видяхме, че той е абсолютно сходящ за всяко x, т. е. че неговата област на сходимост е интервалът $(-\infty, \infty)$. Сега ще покажем, че неговата сума за всяко x е равна на e^x, т. е. че в целия интервал $(-\infty, \infty)$ е изпълнено равенството

$$(10) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Както видяхме, за целта трябва да изследваме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Нека x е произволно число. Имаме

$$(11) \qquad |R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

По-нататък разсъждаваме по следния начин: Изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ представлява общият член на един сходящ ред, тъй като редът (9), както отбелязахме вече, е абсолютно сходящ за всяко x. Но редицата от членовете на всеки сходящ ред клони към нула. Следователно имаме

$$\lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Оттук и от неравенството (11) следва, че $\lim R_n = 0$. С това е доказано, че функцията e^x е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty, \infty)$.

Да вземем сега функцията $f(x) = \sin x$. За нея имаме (вж. § 30)

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Оттук получаваме

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} \quad \text{при } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Имаме $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следователно маклореновият ред на функцията $\sin x$ ще бъде следният:

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Остатъчният член тук е

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

От неравенството

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

по същия начин, както по-горе, се убеждаваме, че $\lim R_n = 0$ за всяко x. И така функцията $\sin x$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty, \infty)$. Следователно за всяко x е изпълнено равенството

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

По подобен начин получаваме и маклореновото развитие на функцията $\cos x$. То е следното:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

и е валидно също така в интервала $(-\infty, \infty)$.

Да разгледаме и функцията $f(x) = (1+x)^m$, където m е произволно реално число, дефинирана при $x > -1$. Лесно получаваме

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \; n=1, 2, \dots$$

Оттук

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1) \text{ при } n=1, 2, \dots$$

Като използуваме означенията

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!},$$

ще запишем маклореновия ред на функцията $(1+x)^m$ по следния начин:

(12)
$$1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \cdots$$

Изследването на остатъчния член тук показва, че $\lim R_n = 0$ при $-1 < x < 1$. И така функцията $(1+x)^m$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-1, 1)$. За всяко x от този интервал е изпълнено равенството

(13)
$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \cdots$$

Наистина нека x е число от интервала $(-1, 1)$ и нека представим R_n във формата на Коши, която получихме в § 58*. Ще имаме

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1},$$

или

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!} x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1}.$$

Като вземем пред вид, че $|x| < 1$ и $0 < \theta < 1$, виждаме, че $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ и че ако $m < 1$, то $(1+\theta x)^{m-1} \leqq (1-|x|)^{m-1}$, а ако $m \geqq 1$, то $(1+\theta x)^{m-1} \leqq (1+|x|)^{m-1}$. Следователно при $m < 1$ имаме

(14)
$$|R_n| \leqq \frac{|m(m-1)\dots(m-n)|}{n!}|x|^{n+1}(1-|x|)^{m-1},$$

а при $m \geqq 1$

(15)
$$|R_n| \leqq \frac{|m(m-1)\dots(m-n)|}{n!}|x|^{n+1}(1+|x|)^{m-1}.$$

Ако към реда

$$(16) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|m(m-1)\dots(m-n)|}{n!} |x|^{n+1}$$

приложим критерия на Даламбер, виждаме, че той е сходящ. Следователно общият му член клони към нула. Оттук въз основа на неравенството (14) (при $m<1$) или (15) (при $m \geqq 1$) заключаваме, че $\lim R_n = 0$. И така равенството (13) е в сила за всички x от отворения интервал $(-1, 1)$.

Нека забележим впрочем, че равенството (13) е валидно и за $x=1$, когато $m \geqq 1$. Наистина при $m>1$ и $x=1$ редът (16) е също сходящ, както можем да се убедим с помощта на критерия на Раабе — Дюамел, и заключението се извършва отново въз основа на неравенството (15). При $m=1$ пък равенството (13) е очевидно за всяко x (в дясната му страна в този случай всички събираеми след второто са нули).

Редът (12) се нарича **биномен ред**. Равенството (13) представлява очевидно обобщение на формулата

$$(14) \qquad (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots + \binom{m}{m} x^m,$$

валидна, когато m е цяло положително число. Наистина, когато m е цяло положително число, коефициентите $\binom{m}{n}$ са равни на нула при $n = m+1, m+2, \dots$ и равенството (13) преминава в равенството (14).

Упражнения. Като използвате степенните развития на функциите e^x, $\sin x$, $\cos x$ и $(1+x)^m$, намерете степенните развития и посочете интервалите, в които те са валидни, за следните функции:

1. $f(x) = e^{x^2}$.
2. $f(x) = \sin 2x$.
3. $f(x) = \cos^2 x$.
4. $f(x) = \sin^4 x$.
5. $f(x) = \sin 2x \cos x$.
6. $f(x) = \cos 3x \cos x$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{(2+x^2)^2}$.
9. $f(x) = \sqrt{4+x}$.
10. $f(x) = \sqrt[4]{1-x^2}$.
11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

§ 69. Други начини за развиване на функции в степенни редове

Освен използването на тейлоровия или маклореновия ред съществуват и други начини дадена функция $f(x)$ да бъде развита в степенен ред. Ние ще посочим чрез конкретни примери някои от тях.

1. Един такъв метод е преди всичко използването на познатата ни формула за сумата на геометричната прогресия

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

валидна при $-1<x<1$. Ето няколко примера, поясняващи как се извършва това.

Пример 1. Функцията $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ се представя като сума на една геометрична прогресия по следния начин:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad \text{при} \quad |x|<1.$$

Пример 2. За функцията $f(x)=\frac{1}{2-x}$ имаме

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\cdots+\frac{x^n}{2^{n+1}}+\cdots \quad \text{при} \quad |x|<2.$$

Пример 3. При функцията $f(x)=\frac{x}{3+2x}$ получаваме

$$\frac{x}{3+2x}=\frac{x}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\frac{x}{3}\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{2^2}{3^2}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{2^n}{3^n}x^n+\cdots\right)$$

$$=\frac{x}{3}-\frac{2}{3^2}x^2+\frac{2^2}{3^3}x^2+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{2^n}{3^{n+1}}x^{n+1}+\cdots \quad \text{за} \quad |x|<\frac{3}{2}\cdot$$

Горният метод може да бъде използван и след предварително разлагане на функцията на сума от елементарни дроби. Ето един пример за такъв начин на работа.

Пример 4. За да развием в ред функцията $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2x-3}$, най-напред я представяме като сума от две елементарни дроби. Получаваме

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{4}\,\frac{1}{x+3}\cdot$$

Имаме

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{4}(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots) \quad \text{при} \quad |x|<1$$

и

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{7}{4.3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

$$=\frac{7}{4.3}\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{3^n}+\cdots\right) \quad \text{при} \quad |x|<3,$$

откъдето

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=-\frac{1}{4}(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

$$+\frac{7}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x-\frac{5}{27}x^2+\cdots+\frac{1}{4}\left((-1)^n\frac{7}{3^{n+1}}-1\right)x^n+\cdots \text{ при } |x|<1.$$

II. Друг метод за развиване на функции в степенни редове е методът на почленното интегриране. Ние ще го приложим за получаването на две важни развития, които често се използуват в математическия анализ.

Най-напред да разгледаме функцията $f(x)=\ln(1+x)$, дефинирана при $x>-1$. Като диференцираме, получаваме $f'(x)=\frac{1}{1+x}$. Но в отворения интервал $(-1, 1)$ имаме

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

Ако интегрираме почленно степенния ред, написан в дясната страна на това равенство, ще получим степенния ред

$$(2)\qquad x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

Този ред има също така радиус на сходимост, равен на 1, а за всяко x от интервала $(-1, 1)$ неговата сума $\varphi(x)$ съгласно теоремата за диференциране на степенните редове има производна, равна на сумата на реда, който интегрирахме. Следователно $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}$.

Двете функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имат една и съща производна в интервала $(-1, 1)$ и следователно тяхната разлика е константа в този интервал. За да пресметнем тази константа, да дадем на x стойността 0. Тъй като $f(0)=0$ и $\varphi(0)=0$, то заключаваме, че $f(x)=\varphi(x)$ в интервала $(-1, 1)$. И така получихме равенството

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

валидно при $-1<x<1$. Може да се покаже, че то остава валидно и за точката $x=1$.

Наистина при $0<x<1$ редът (2) удовлетворява условията на критерия на Лайбниц. Ето защо съгласно бележките, които направихме след доказателството на този критерий в § 11, ще имаме

$$\left|\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right|\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

При $x\to 1$ горното неравенство преминава в неравенството

$$\left|\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{n+1},$$

откъдето получаваме равенството

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

Като втори пример ще разгледаме функцията $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$. За нейната производна $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ имаме

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad \text{при} \quad -1<x<1.$$

Като интегрираме почленно степенния ред от това равенство, получаваме степенния ред

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \tag{3}$$

чиято сума $\varphi(x)$ е диференцуема в интервала $(-1, 1)$ и има за производна в този интервал сумата на реда, който интегрирахме. И така $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. От равенството $f'(x)=\varphi'(x)$ заключаваме, че функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ се различават с една константа в интервала $(-1, 1)$. Но тъй като $f(0)=\varphi(0)=0$, то тази константа е нула. И така имаме $f(x)=\varphi(x)$, т. е. получаваме развитието

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \tag{4}$$

валидно при $-1<x<1$. Може да се покаже, че то е валидно и при $x=1$, и при $x=-1$.

Наистина, ако $0<x<1$, то редът (3) удовлетворява условията на критерия на Лайбниц, поради което ще имаме

$$\left|\operatorname{arc\,tg} x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

При $x\to1$ получаваме

$$\left|\operatorname{arc\,tg} 1-\left(1-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{1}{2n+3},$$

откъдето следва равенството

$$\operatorname{arc\,tg} 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots \tag{5}$$

По този начин виждаме, че равенството (4) е вярно при $x=1$. То е вярно и при $x=-1$, защото при замяна на x с $-x$ двете страни на равенството (4) само си сменят знака. Нека забележим, че равенството (5), като вземем пред вид, че $\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}$, може да се запише и така:

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots\right).$$

III. Най-сетне степенните развития на някои функции могат да се получат и посредством метода на почленното диференциране. Ще покажем това с един пример. Да вземем функцията $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. Забелязваме, че тази функция е производна на функцията $\varphi(x)=\frac{1}{1-x}$, за която имаме развитието

$$\varphi(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

валидно в интервала $(-1, 1)$. Тогава, ако диференцираме почленно този степенен ред, неговата сума съгласно теоремата за диференциране на степенните редове ще бъде равна на $\varphi'(x)$ в същия интервал. Но $\varphi'(x)=f(x)$. И така получаваме развитието

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,$$

валидно при $-1<x<1$.

Упражнения. Да се развият в степенни редове следните функции, като се посочат и съответните интервали, в които тези развития са валидни:

1. $f(x)=\frac{1}{3+x}$.
2. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+5}$.
3. $f(x)=\frac{x}{x^2+2x-8}$;
4. $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}$.
5. $f(x)=\ln(1+x^2)$.
6. $f(x)=\ln\frac{2-x}{3+x}$.
7. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x^2$.
8. $f(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$.

ЧАСТ III

ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ДВЕ НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

ГЛАВА X

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиницията на понятието функция на две и повече независими променливи в логическо отношение не се различава съществено от дефиницията на понятието функция на една променлива. Що се отнася до диференциалното и интегрално смятане на функциите на няколко независими променливи, то макар до голяма степен и да се развива по образеца, който ни дават функциите на една променлива, все пак в редица пунктове изисква разработката на някои нови идеи и методи. Оказва се обаче, че е достатъчно тези нови моменти да се развият за функциите на две променливи, след това те по правило без особени затруднения се пренасят за функциите на повече променливи. Поради това тази глава е посветена почти изключително на функциите на две независими променливи.

Теорията на функциите на няколко променливи, разбира се, има не по-малко значение за приложенията на математическия анализ от тази на функциите на една променлива, тъй като природните процеси, които отделните науки изучават, много често ни довеждат до необходимостта от разглеждане на функции, зависещи именно от няколко, а не само от една променлива.

§ 70. Точки в равнината и в n-мерното пространство

Преди да преминем към изучаването на функциите на две и повече независими променливи, ние ще се погрижим най-напред да придадем известна геометрична нагледност (доколкото това е възможно) на нашите разглеждания подобно на това, което правехме при функциите на една променлива. Тогава изобразявахме различните значения на аргумента като точки от една права, а на функционалните стойности съпоставяхме точки от една равнина, като получавахме по този начин т. нар. графика на дадената функция. Подобно нещо е удобно да бъде направено при функциите на две променливи. Що се отнася до функциите на три и особено до функциите на повече от три променливи, там геометричната нагледност вече се губи. Въпреки това редица идеи, почерпани от геометричния наглед, който имаме при функциите на две променливи, запазват своята сила и при функциите на произволен брой променливи. Ето защо най-подробно ще се спрем именно на функциите на две независими променливи.

Казваме, че ни е дадена функцията $f(x, y)$, когато на всяка двойка числа (x, y), взети от някакво множество M, е съпоставено съгласно някакво правило едно трето число, което означаваме с $f(x, y)$ и наричаме функционална стойност. Множеството M, което в случая представлява множество от двойки числа от вида (x, y), се нарича дефиниционно множество или дефиниционна област на дадената функция.

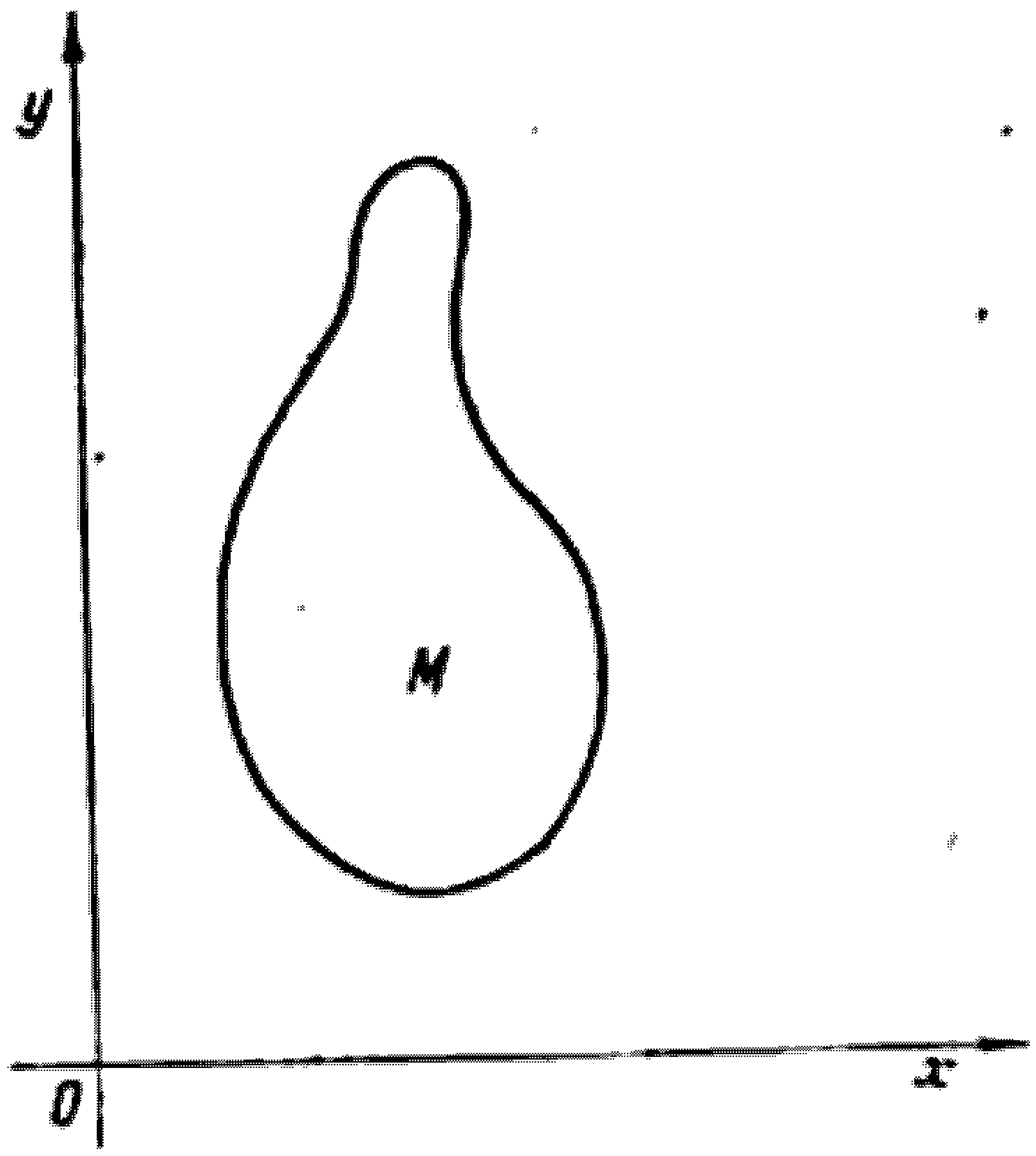
Тук, както виждаме, ролята на „аргумент" играят двете числа x и y или по-точно двойката числа (x, y), взети при това в определен ред — числото x е първата компонента, а числото y — втората компонента на аргумента. Ето защо говорим по-точно за наредена двойка реални числа (x, y). Като си спомним, че реалните числа изобразявахме като точки от една права, естествено стигаме до идеята наредените двойки числа пък да изобразяваме като точки от една равнина, в която е въведена правоъгълна координатна система Oxy. Тогава на всяка двойка числа (x, y) ще съответствува точката, за която тези две числа се явяват координати относно въведената координатна система, т. е. точката с абсциса x и ордината y. Обратно, на всяка точка от равнината ще съответствува една наредена двойка реални числа — двойката, образувана от абсцисата и ординатата на тази точка. По такъв начин ние можем винаги когато става дума за наредена двойка числа да употребяваме термина точка в равнината. Също така, когато говорим за множество от наредени двойки реални числа, можем да си служим с израза множество от точки в равнината.

Понякога подобно на това, което се прави в геометрията, ще означаваме дадена точка в равнината с една буква (обикновено главна латинска). Например ще казваме: дадена е точка P. Ако при това искаме изрично да отбележим и координатите на тази точка, ще я записваме, както в аналитичната геометрия: $P(x, y)$. По такъв начин разполагаме с три различни начина за означаване на една и съща наредена двойка реални числа.

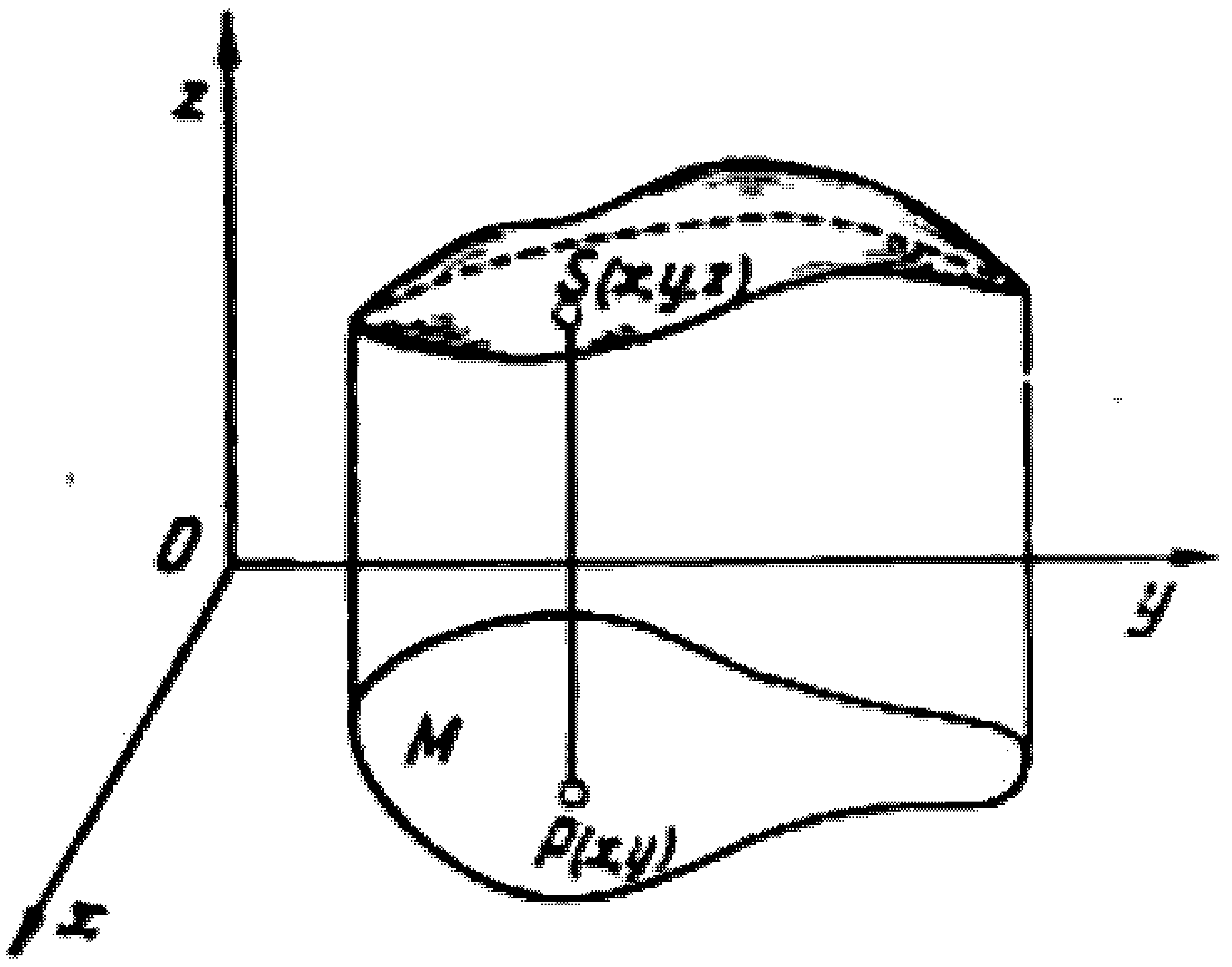
Що се отнася до графичното представяне на функция на две независими променливи, то за неговото осъществяване се налага да прибегнем вече до тримерното пространство. Това става по следния начин: Преди всичко аналогично на това, което имахме по-горе, наредените тройки реални числа се отъждествяват с точките на тримерното пространство, в което е въведена една правоъгълна координатна система $Oxyz$, така че на тройката числа (x, y, z) съответствува точката с абсциса x, ордината y и апликата z и обратно. (Тук също, разбира се, дадена точка (x, y, z) може да бъде записана във вида $P(x, y, z)$ или пък просто чрез P.)

Нека е дадена една функция $f(x, y)$ с дефиниционна област M. Множеството M като множество от наредени двойки реални числа може да бъде разгледано като множество от точки, лежащи в координатната равнина Oxy на тримерното пространство (черт. 54). Ако сега означим със

z функционалната стойност $f(x, y)$, т. е. ако въведем равенството $z= =f(x, y)$, то на всяка точка $P(x, y)$ от M ще бъде съпоставена по една точка от пространството — именно точката $S(x, y, z)$. Когато точката P се мени в множеството M, точката S ще опише в пространството едно



Черт. 54



Черт. 55

множество (една „повърхнина", както бихме казали), което и представлява графичното изображение на дадената функция (черт. 55).

Нека отбележим още, че в математиката е приета следната абстракция: каквото и да бъде цялото положително число n, наредените n-орки реални числа от вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ също така се разглеждат като „точки" в едно пространство — те образуват т. нар. n-измеримо или n-

'', z'') в тример-

$r(P'$

$_2', \dots, x_n')$ и

за

(1) $r(P, P'' - (x$ $_1$ $' - x_n'')^2$

да наричаме по дефиниция **разстояние** между тези две точки.* Нека отбележим, че когато имаме две точки от реалната права, която разглеждаме като едноизмеримо пространство, т. е. когато са ни дадени две реални числа x' и x'', формулата (1) ни дава

$$r(x', x'') = \sqrt{(x'-x'')^2} = |x'-x''|,$$

резултат, който също така се съгласува с нашата представа за разстояние, тъй като числото $|x'-x''|$ не е нищо друго освен дължината на интервала, определен от точките x' и x'', т. е. дължината на отсечката, свързваща тези две точки.

Понятието разстояние между две точки ни позволява по съвсем естествен начин да дойдем и до понятието за сходяща редица от точки в n-мерното пространство. Именно *ще казваме, че редицата от точки*

(2) $$P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$$

е сходяща и клони към дадена точка P_0, когато разстоянието между точките P_k и P_0 клони към нула, т. е. когато редицата от числа

(3) $$r(P_1, P_0), r(P_2, P_0), \dots, r(P_k, P_0), \dots$$

е сходяща и има за граница числото 0.

Горната дефиниция може да се изкаже и другояче. За простота да разгледаме случая на двумерното пространство. В този случай редицата 2) може да се запише подробно по следния начин:

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_k(x_k, y_k), \dots,$$

а общият член на редицата (3) ще има вида

---

* Когато в n-мерното пространство е въведено разстояние по показания начин, то се нарича n-мерно **евклидово** пространство.

$$r(P_k, P_0)=\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2},$$

където с x_0 и y_0 са означени координатите на граничната точка P_0. Като вземем пред вид, от една страна, неравенствата

$$|x_k-x_0| \leqq \sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}$$

и

$$|y_k-y_0| \leqq \sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2},$$

а, от друга, неравенството

$$\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2} \leqq |x_k-x_0|+|y_k-y_0|,$$

става ясно, че условието редицата (3) да клони към нула е равносилно с условието да клонят към нула редиците с общи членове $|x_k—x_0|$ и $|y_k—y_0|$. Това пък от своя страна означава, че *изискването редицата с общ член* (x_k, y_k) *да клони към точката* (x_0, y_0) *е равносилно с изискването двете редици от реални числа*

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

да бъдат сходящи и да клонят съответно към x_0 *и* y_0.

Разбира се, всичко това важи не само за редица от точки в равнината, но и за редица от точки в пространство с произволен брой измерения. По този начин условието за сходимостта на една редица от точки в n-мерното пространство се замества с условието за сходимост на n редици от реални числа — именно редиците, съставени от съответните компоненти на точките от дадената редица.

Ясно е сега, че *ако една редица от точки*

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$$

в равнината (или изобщо в n-мерното пространство) е сходяща и клони към точката P, то всяка нейна подредица

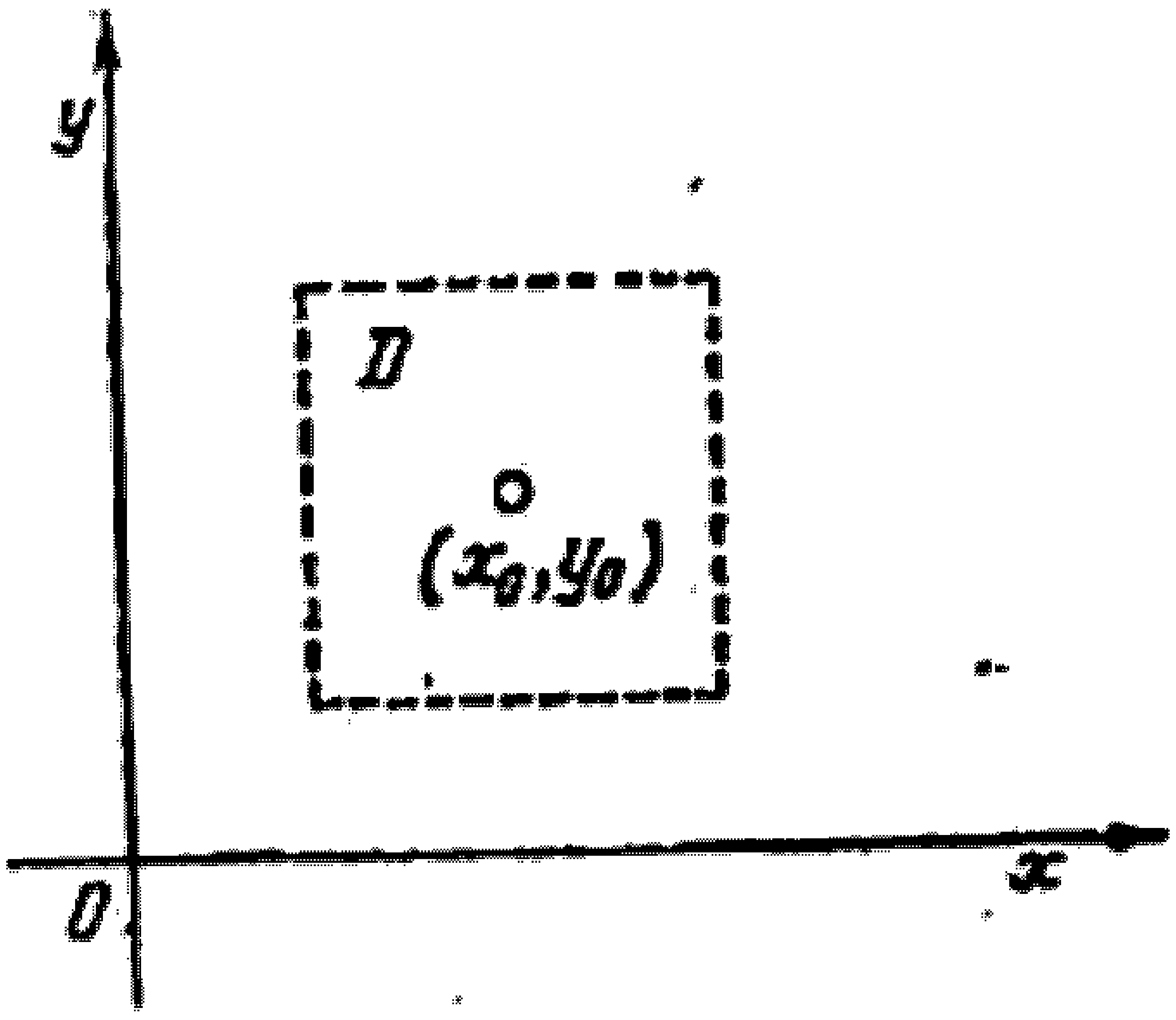
$$P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_j}, \ldots$$

е също сходяща и клони също към P.

§ 71. Видове точкови множества

Понятието околност на точка, което бяхме въвели за точките от реалната права, може да бъде въведено за точките от произволно n-мерно пространство. При това неговата роля във въпросите на математическия анализ е даже по-очевидна именно когато разглеждаме точки в пространство с две или повече измерения, отколкото при точките от реалната права.

Да се спрем отново на двумерното пространство. Нека е дадена точката (x_0, y_0). Да разгледаме един квадрат D (с произволна дължина на страната), страните на който са успоредни на координатните оси и който има за център (т. е. пресечна точка на диагоналите) точката (x_0, y_0) (черт. 56). Множеството от всички точки, влизащи в този квадрат, но нележащи върху страните му, ще наречем **околност** на точката (x_0, y_0).



Черт. 56

Ако дължината на страната на квадрата D означим с 2δ, то ясно е, че условието една точка (x, y) да се съдържа в споменатата околност е равносилно с изискването да бъдат изпълнени двете неравенства

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta.$$

Тъй като съществуват безбройно много квадрати от посочения вид, всяка точка в равнината ще притежава очевидно безбройно много околности.*

По аналогичен начин се въвежда понятието околност и за точките от пространствата с по-голям брой измерения. В тримерното пространство ролята на квадрата се изпълнява от куб със стени, успоредни на координатните равнини, и с център точката (x_0, y_0, z_0). Точките (x, y, z), лежащи в такъв куб, се характеризират с трите неравенства

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta, \quad |z-z_0|<\delta.$$

В n-мерното пространство говорим условно за „n-мерен хиперкуб", чиито точки имат координати, удовлетворяващи неравенства от следния вид:

$$|x_1-x_1^0|<\delta, \quad |x_2-x_2^0|<\delta, \ldots, \quad |x_n-x_n^0|<\delta.$$

---

* Това не е единственият начин за въвеждане на понятието околност на точка в равнината. Често например под околност на една такава точка се разбира множеството, състоящо се от точките, които влизат в един кръг с център дадената точка и произволен радиус, но не лежат върху контурната му окръжност. От гледище обаче на въпросите от математическия анализ този начин на въвеждане на понятието околност не е съществено различен от онзи, който вече посочихме и към който ще се придържаме в този курс.

Специално в случая, когато $n=1$, т. е. когато нашето пространство е реалната права, горните n неравенства се свеждат до единственото неравенство

$$|x-x_0|<\delta,$$

което е изпълнено за всички числа x от отворения интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. По такъв начин се убеждаваме, че въведеното току-що понятие околност е обобщение на онова, с което си служехме по-рано.

Използувайки понятието околност на точка, лесно можем да се убедим, че дефиницията на понятието сходяща редица от точки в n-мерното пространство, която дадохме в предишния параграф, може да се изкаже и така:

Редицата от точки в n-мерното пространство

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$$

е сходяща и клони към точката P_0, ако за всяка околност D на точката P_0 съществува такова число ν, че при $k>\nu$ всички точки P_k от редицата се съдържат в D.

Сега лесно ще стигнем до дефиницията на някои понятия, отнасящи се до взаимното разположение на точки и множества. Тези понятия пък от своя страна ще ни позволят да дадем удобна характеристика на някои видове множества от точки, играещи важна роля по-нататък.

В дефинициите и разсъжденията, които следват до края на този параграф, е безразлично какъв е броят на измеренията на пространството, което разглеждаме — те остават в сила за произволно n-мерно пространство.

Нека в едно пространство е дадено някакво множество M. *Една точка P от същото пространство се нарича вътрешна за множеството M, когато тя притежава такава околност, която се състои изцяло от точки, принадлежащи на M. Една точка Q се нарича външна за M, ако притежава околност, състояща се изцяло от точки, непринадлежащи на M. Най-сетне една точка R се нарича контурна за множеството M, ако тя не е нито вътрешна, нито външна за M.*

Лесно е да се съобрази, че условието една точка да бъде *контурна* за дадено множество M може да се изкаже още така: *всяка нейна околност съдържа както точки от M, така и точки, непринадлежащи на M.*

Оттук пък следва, че ако R е една контурна точка на множеството M, могат да се намерят две редици от точки — едната:

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$$

съставена от точки от M, а другата

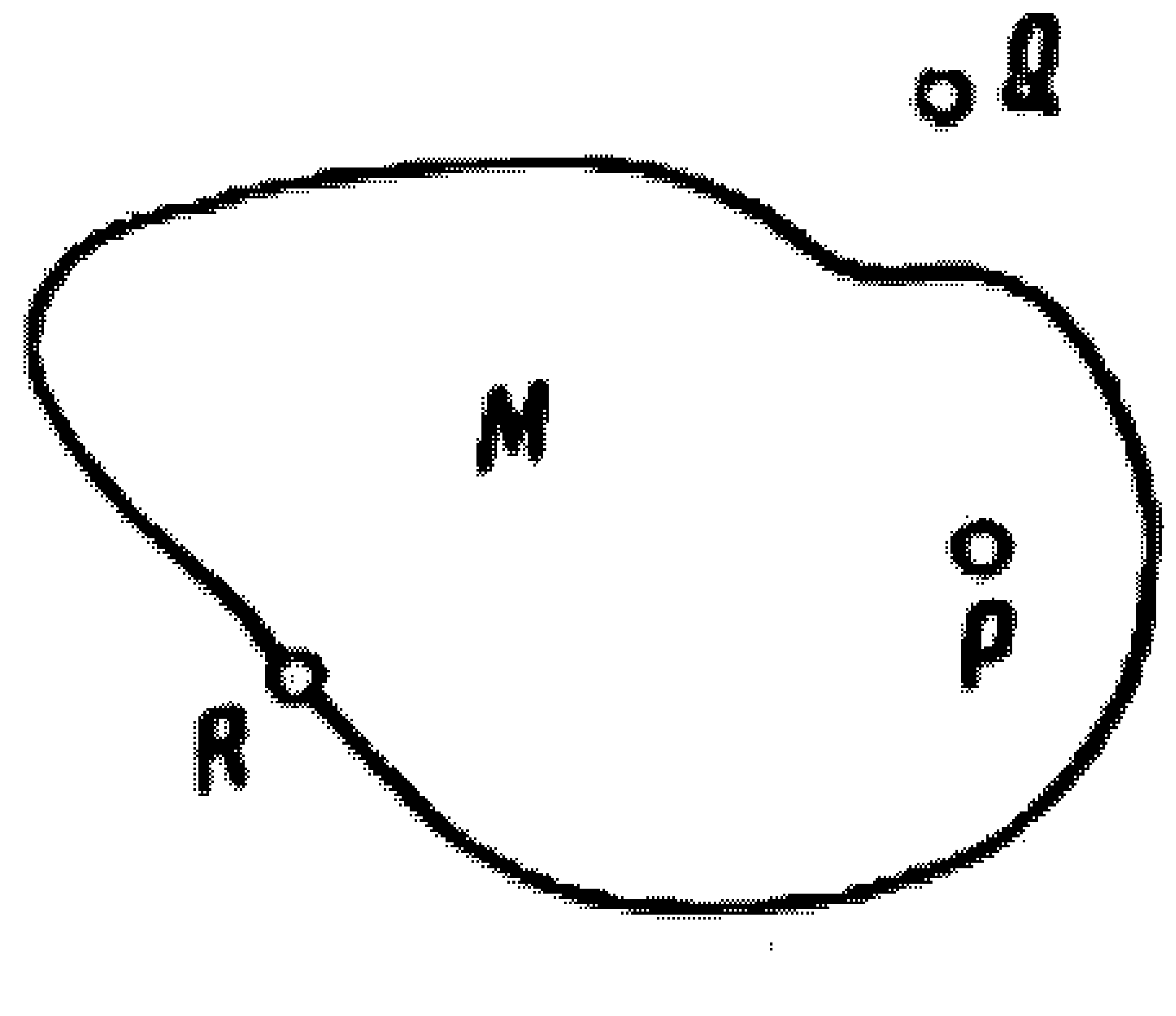
$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$$

състояща се от точки, непринадлежащи на M, които редици клонят (и двете) към точката R. (Предоставяме доказателството на читателя.)

На черт. 57 са показани едно множество M в равнината и три точки P, Q и R, явяващи се съответно вътрешна, външна и контурна точка за M.

Множеството от всички контурни точки на дадено множество M се нарича контур на това множество, а множеството от всички негови вътрешни точки — негова вътрешност.

От изложените дефиниции е ясно, че всяко множество съдържа всички свои вътрешни точки и не съдържа никоя от своите външни точки.



Черт. 57

Що се отнася до контурните му точки, то някои от тях могат да му принадлежат, други — не. Именно това последно обстоятелство ни довежда до следните две дефиниции:

Едно множество от точки се нарича отворено, когато то не съдържа нито една своя контурна точка (т. е. когато то съвпада със своята вътрешност).

Едно множество от точки се нарича затворено, когато то съдържа всички свои контурни точки (т. е. когато съдържа своя контур).

Разбира се, дадено множество от точки може да не бъде нито отворено, нито затворено. Това ще бъде така, когато то съдържа само част от своите контурни точки, но не всичките.

Примери: 1. Точките, лежащи в един кръг в равнината, но не и върху ограждащата го окръжност, образуват отворено множество. Ние ще наричаме това множество отворен кръг. Точките пък, лежащи в един кръг, взет заедно с контурната му окръжност,образуват затворено множество, което ще наричаме затворен кръг. Аналогично ще употребяваме термините отворен квадрат, затворен квадрат, отворен многоъгълник, затворен многоъгълник и пр.

2. Нека е дадена една права в равнината. Кои са нейните контурни точки? Какво множество е правата?

3. Дайте примери на отворени и затворени множества в тримерното пространство.

4. Ако вземем множеството, съставено от всички точки на разглежданото пространство, т. е. цялото пространство разглеждаме като едно множество от точки, то това множество няма контурни точки. Следователно то е едновременно отворено и затворено.

Лесно може да се докаже следното свойство на затворените множества:

Ако множеството M е затворено и ако редицата

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots,$$

съставена от точки, принадлежащи на M, е сходяща и клони към P, то точката P също принадлежи на M.

Наистина във всяка околност на точката P се съдържат точки P_k от дадената редица — това са точки, принадлежащи на M. Оттук е ясно, че точката P не е външна за множеството M — тя е негова вътрешна или контурна точка. Множеството M обаче е затворено и следователно то съдържа както всички свои вътрешни, така и всички свои контурни точки. Следователно точката P принадлежи на M.

В същност вярно е и обратното — *ако едно множество M съдържа граничната точка на всяка сходяща редица, съставена от точки, принадлежащи на M, то това множество е затворено.* (Нека читателят сам докаже това.)

Ще дадем още следната дефиниция:

Едно множество от точки в равнината се нарича ограничено, когато то се съдържа изцяло в някой квадрат. Едно множество от точки в тримерното пространство е ограничено, когато се съдържа изцяло в някой куб.

Лесно можем да се убедим, че както в равнината, тъй и в тримерното пространство тази дефиниция е равносилна със следната:

Едно множество е ограничено, когато разстоянията на всички негови точки до някоя фиксирана точка (например до началото на координатната система) не надминават дадено положително число.

Така изказана, дефиницията запазва валидността си за произволно n-мерно пространство.

Примери. Всеки отворен, както и всеки затворен кръг в равнината, представлява ограничено множество. Всяка права в равнината е неограничено множество. Ивицата от равнината, заградена между две успоредни прави, също представлява пример за неограничено множество.

§ 72. Непрекъснати функции

Понятието ограничена функция се пренася без изменения за функциите на няколко променливи. Една такава функция се нарича ограничена, когато е ограничено множеството от нейните функционални стойности. Точната горна граница на това множество се нарича точна горна граница на самата функция, а точната му долна граница — точна долна граница на функцията.

Важното понятие непрекъснатост на функция на няколко променливи се въвежда, както и при функциите на една променлива, посредством две еквивалентни дефиниции — на Коши и на Хайне. Ще ги изкажем за случая на две променливи.

Дефиниция на Коши. *Функцията $f(x, y)$ се нарича непрекъсната в една точка (x_0, y_0) от своята дефиниционна област M, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка (x, y) от M, за която са в сила неравенствата*

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta,$$

е изпълнено и неравенството

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

Дефиниция на Хайне. *Функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0) от дефиниционната си област M, когато при всеки избор на редицата*

$$(x_1, y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n),\ \ldots,$$

състояща се от точки от множеството M и клоняща към точката (x_0, y_0), съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2),\ \ldots, f(x_k, y_k),\ \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0,\ y_0)$.

Ако дадена функция $f(x, y)$ е непрекъсната в една точка (x_0, y_0) и ако разгледаме функциите на една променлива $\varphi(x)=f(x, y_0)$ и $\psi(y)=f(x_0, y)$, получени чрез фиксиране на единия от аргументите, тези две функции очевидно ще бъдат непрекъснати — първата в точката x_0, а втората — в точката y_0. Както ще видим обаче в следващия параграф, от непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ съответно в точките x_0 и y_0 още не следва непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0).

Както и при функциите на една променлива, лесно се установява, че ако две функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в дадена точка (x_0, y_0), то сумата, разликата, произведението и частното на тези две функции са също непрекъснати функции в тази точка. Разбира се, когато става дума за частното, трябва да се предположи още, че $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Също така с разсъждения, подобни на онези, които извършихме при функциите на една променлива, се доказва и следното просто, но важно свойство на непрекъснатите функции:

Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0) и ако $f(x_0, y_0) \neq 0$, то съществува такава околност на точката (x_0, y_0), в която функцията не си мени знака.

По-сложен е въпросът за пренасянето на теоремите от § 24 към функции на две и повече променливи. Въпреки това се оказва, че след подходящо прередактиране, което впрочем не е много очевидно, те също остават в сила. За три от тях, а именно за теоремата за ограниченост, за теоремата на Вайерщрас и за теоремата за равномерната непрекъснатост, ще покажем още сега — в настоящия параграф и в § 74*, каква формулировка придобиват в случая на две променливи и как се доказват в този случай (в n-мерното пространство нещата стоят аналогично). Нека обърнем внимание на това, че във всички тях условието дадена функция $f(x)$ да бъде непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, се замества с условието дадена функция $f(x, y)$ да бъде непрекъсната в едно ограничено и затворено множество M в равнината (такова множество се нарича компактно множество).

Теорема за ограниченост. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в едно ограничено и затворено множество M, тя е ограничена в M.*

x, y

на множест

диаметър,

е і е

ε пол

мн

ствата

$$|x_1-x_2|<\delta, \quad |y_1-y_2|<\delta$$

следва неравенството

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon.$$

Функция, която притежава изказаното по-горе свойство в някое множество M, се нарича равномерно непрекъсната в M. Ето защо теоремата може да се изкаже още и така:

Ако една функция $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M, тя е и равномерно непрекъсната в M.

Доказателството на формулираните по-горе три теореми ще бъде изложено в § 74*. Що се отнася до теоремата на Болцано от § 24, нейното пренасяне за функции на две и повече променливи ще отложим за по-нататък — то е направено в § 98.

§ 73*. Теореми на Кантор и на Болцано—Вайерщрас в равнината

Теоремата на Кантор, която доказахме в § 4, след подходящо видоизменение на нейната формулировка може да бъде пренесена и за n-мерното пространство. Ще я формулираме и докажем за равнината (в случая на произволно n-мерно пространство нещата стоят аналогично).

Множеството от точки (x, y) в равнината, чиито координати удовлетворяват неравенствата

$$a\leqq x\leqq b, \qquad c\leqq y\leqq d,$$

където $a<b$ и $c<d$, представлява един затворен правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси. Именно за такива правоъгълници се говори в теоремата на Кантор за равнината, която следва.

Теорема. *Нека е дадена редицата от затворени правоъгълници*

$$(1) \qquad D_1,\ D_2, \dots, D_n, \dots,$$

където правоъгълникът D_n *е зададен с неравенствата*

$$(2) \qquad a_n\leqq x\leqq b_n, \qquad c_n\leqq y\leqq d_n,$$

и нека са изпълнени следните условия:

а) *за всяко* n *правоъгълникът* D_n *съдържа правоъгълника* D_{n+1} *(т. е* D_{n+1} *е част от* D_n*);*

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-c_n)=0.$

Тогава съществува, и то една единствена точка (ξ, η), *съдържаща се във всички праовоъгълници от редицата* (1).

Доказателство. Изискването правоъгълникът D_n да съдържа D_{n+1} се изразява фактически чрез неравенствата

$$a_n\leqq a_{n+1},\quad b_{n+1}\leqq b_n,\quad c_n\leqq c_{n+1},\quad d_{n+1}\leqq d_n.$$

Оттук заключаваме, че както редицата от интервалите

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

така и редицата от интервалите

$$[c_1, d_1],\ [c_2, d_2], \dots, [c_n, d_n], \dots$$

удовлетворява условията на теоремата на Кантор от § 4. Следователно ще съществуват едно единствено число ξ, съдържащо се във всичките интервали $[a_n, b_n]$, и едно единствено число η, съдържащо се във всичките интервали $[c_n, d_n]$. Тогава точката (ξ, η), чиито координати удовлетворяват за всяко n неравенствата

$$a_n\leqq\xi\leqq b_n \qquad \text{и} \qquad c_n\leqq\eta\leqq d_n,$$

ще се съдържа във всичките правоъгълници D_n от редицата (1), като при това тя ще бъде очевидно (поради единствеността на числата ξ и η) и единствената точка с това свойство.

С това твърдението в теоремата е установено.

С оглед на приложението на тази теорема при доказателството на теоремите на предишния параграф ще направим, както и при теоремата на Кантор от § 4, още следната допълнителна бележка:

При условията на горната теорема, каквато и околност U на точката (ξ, η) да вземем, всички правоъгълници D_n с достатъчно големи номера се съдържат в U.

Наистина нека U е квадрат, зададен с неравенствата

$$\xi-\delta<x<\xi+\delta, \quad \eta-\delta<y<\eta+\delta.$$

Поради условието б) на теоремата ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме

$$b_n-a_n<\delta \quad \text{и} \quad d_n-c_n<\delta,$$

т. е. страните на правоъгълника D_n, зададен с неравенствата (2), при $n>\nu$ ще станат по-малки от δ. Тъй като точката (ξ, η), явяваща се център на квадрата U, е в същото време и точка от D_n, а страните на квадрата U имат дължина 2δ, ясно е, че при $n>\nu$ правоъгълникът D_n ще се съдържа изцяло в U.

Теоремата на Болцано—Вайерщрас се пренася без изменение за редици от точки в равнината (и изобщо в n-мерното пространство). При това и нейното доказателство остава по идея същото. И така в сила е следната

Теорема на Болцано—Вайерщрас. *Всяка ограничена редица от точки в равнината*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

притежава поне една сходяща подредица.

Доказателство. Тъй като редицата (3) е ограничена, ще съществува някакъв затворен правоъгълник D със страни, успоредни на координатните оси, който съдържа всички нейни точки. Да разделим този правоъгълник на четири еднакви по-малки правоъгълника и да означим с D_1 един от тях, избран така, че да съдържа безбройно много точки от дадената редица. Нека P_{n_1} е една точка от редицата (3), принадлежаща на D_1. Да разделим след това и D_1 на четири еднакви правоъгълника и да означим с D_2 един от тях, в който се съдържат безбройно много точки от редицата (3), а с P_{n_2} — една такава точка от тази редица, която се съдържа в D_2 и за която освен това имаме $n_2>n_1$. Продължавайки по този начин, ще получим една редица от затворени правоъгълници

$$D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots \tag{4}$$

която удовлетворява очевидно условията на теоремата на Кантор, и една редица от точки

$$P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_k}, \ldots, \tag{5}$$

която е подредица на редицата (3). Нека P е онази единствена точка, която съгласно теоремата на Кантор се съдържа във всички правоъгълници D_k, и нека U е произволна околност на точката P. Съгласно бележката, която направихме след доказателството на теоремата на Кантор, за достатъчно големи стойности на k всички правоъгълници D_k, а следователно и всички точки P_{n_k} ще се съдържат в U. Това означава, че редицата (5), която е подредица на редицата (3), е сходяща и клони към P. По такъв начин теоремата е доказана.

§ 74*. Доказателства на теоремите от § 72

Преминаваме към доказателството на трите теореми, формулирани в предишния параграф. Както ще видим, основна роля тук играе доказаната от нас в § 73* теорема на Кантор в равнината.

Доказателство на теоремата за ограниченост. Дадено е, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M. Трябва да докажем, че тя е ограничена. Да допуснем че функцията $f(x, y)$ не е ограничена в M. Да вземем един квадрат D със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ ограниченото множество M, и да го разделим посредством средните му линии на четири еднакви по-малки квадрата. Поне един от тези четири квадрата — да го означим с D_1 — ще съдържа такава част M_1 от множеството M, в която функцията $f(x, y)$ не е ограничена — в противен случай тя би била ограничена в M. Да разделим D_1 също тъй на четири еднакви по-малки квадрата (представляващи — всеки от тях, вече една шестнадесета част от D) и да означим с D_2 един от тях, избран така, че функцията $f(x, y)$ да бъде неограничена в оназн част M_2 от M, която се съдържа в него (такъв квадрат D_2 сигурно има, иначе $f(x, y)$ би била ограничена в M_1). Продължавайки по този начин, ние ще получим една редица от затворени квадрати

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots,$$

удовлетворяваща очевидно условията и теоремата на Кантор. При това всеки от тези квадрати D_n съдържа такава част M_n от множеството M, в която функцията $f(x, y)$ не е ограничена. Ако (ξ, η) е оназн единствена точка, която според теоремата на Кантор се съдържа във всичките квадрати D_n, и ако U е произволна околност на точката (ξ, η), то съгласно бележката, която направихме непосредствено след доказателството на тази теорема, всички квадрати D_n с достатъчно големи номера ще се съдържат в U. Оттук следва, че във всяка околност на точката (ξ, η) се съдържат точки от M, откъдето пък заключаваме, че тази точка не може да бъде външна — тя е или вътрешна, или контурна за M. Но множеството M е затворено, следователно то съдържа не само всички свои вътрешни, но и всички свои контурни точки. По този начин се убеждаваме, че точката (ξ, η) е точка от M.

Понеже функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (ξ, η), ще можем да намерим, прилагайки дефиницията на Коши при $\varepsilon = 1$, такова положително число δ, че от неравенствата

$$(1) \qquad |x-\xi| < \delta, \quad |y-\eta| < \delta$$

за точки (x, y) от M да следва неравенството

$$(2) \qquad |f(x, y) - f(\xi, \eta)| < 1.$$

Неравенствата (1) определят един квадрат U, явяващ се околност на точката (ξ, η). За достатъчно големи стойности на n квадратът D_n, а следователно и множеството M_n ще се съдържат в U. Следователно за всички точки (x, y) от M_n ще бъде изпълнено неравенството (2), което може да се запише още така:

$$f(\xi, \eta) - 1 < f(x, y) < f(\xi, \eta) + 1.$$

Оттук виждаме, че функцията $f(x, y)$ е ограничена в множеството M_n, противно на свойството на това множество тази функция да бъде неограничена в него. Полученото противоречие показва, че нашето първоначално допускане, според което функцията $f(x, y)$ е неограничена в множеството M, е било погрешно. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теоремата на Вайерщрас. И тук е дадена една функция $f(x, y)$, непрекъсната в ограниченото и затворено множество M. Съгласно предишната теорема функцията $f(x, y)$ е ограничена в M. Нека L е нейната точна горна, а l — нейната точна долна граница в M. Ще докажем, че числото L се явява стойност на функцията $f(x, y)$ за някоя точка от множеството M (аналогично се доказва същото за числото l).

Да вземем, както в предишната теорема, един квадрат D със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ множеството M, и да го разделим на четири равни части. Поне един от така получените по-малки квадрати — нека го означим с D_1 — ще съдържа такава част M_1 от множеството M, в която точната горна граница на функцията $f(x, y)$ е равна на L (ако това не би било така, то точната горна граница на $f(x, y)$ в цялото множество M би била по-малка от L). Разделяйки D_1 също на четири равни части, ще означим с D_2 един такъв от новополучените още по-малки квадрати, че и в съдържащата се в него част M_2 от множеството M функцията $f(x, y)$ да има точна горна граница, равна на L, и т. н. Получаваме редица от затворени квадрати

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots,$$

всеки от които съдържа такава част M_n от множеството M, в която функцията $f(x, y)$ има за своя точна горна граница числото L. Тази редица от квадрати удовлетворява условията на теоремата на Кантор, значи съществува някаква точка (ξ, η), съдържаща се във всичките квадрати D_n. Както в предишната теорема се убеждаваме, че точката (ξ, η) принадлежи на M.

Ще покажем, че $f(\xi, \eta) = L$. Да допуснем, че това не е вярно и че следователно имаме $f(\xi, \eta) < L$. Ако L_1 е такова число, че $f(\xi, \eta) < L_1 < L$, то вземайки пред вид, че функцията $f(x, y) - L_1$ е непрекъсната в точката (ξ, η) и че $f(\xi, \eta) - L_1 < 0$, ще намерим такава околност U на (ξ, η), че да имаме $f(x, y) - L_1 < 0$ за всички точки от тази околност. Но за достатъчно големи n квадратите D_n, а значи и множествата M_n, се съдържат изцяло в U. Следователно за всички точки (x, y) от M_n ще бъде в сила неравенството $f(x, y) - L_1 < 0$, или все едно неравенството

$$f(x, y) < L_1,$$

което показва, че числото L_1 е горна граница на функцията $f(x, y)$ в множеството M. Но това е невъзможно, тъй като $L_1 < L$, а L е точната, т. е. най-малката горна граница на $f(x, y)$ в M_n. Полученото противоречие се дължи на допускането, че $f(\xi, \eta) \neq L$. Следователно това допускане е погрешно; в сила е равенството $f(\xi, \eta) = L$. И така функцията $f(x, y)$ достига в M своята точна горна граница L. Както вече казахме, аналогично се установява, че тя достига в M и своята точна долна граница l.

Доказателство на теоремата за равномерната непрекъснатост. Отново е дадено, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M. Нека ε е едно положително число. Трябва да установим съществуването на такова положително число δ, че във всяко подмножество на M с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на функцията $f(x, y)$ да бъде по-малка от ε.

Да допуснем, че такова число δ не съществува. Това значи по-точно, че каквото и положително число δ да вземем, винаги можем да намерим такова подмножество на M с диаметър, по-малък от δ, в което осцилацията на $f(x, y)$ е по-голяма или равна на ε. Следователно ще съществуват подмножества

$$M_1, \; M_2, \ldots, M_k, \ldots$$

на множеството M, такива, че диаметърът на M_k е по-малък от $\frac{1}{k}$ и в същото време осцилацията на $f(x, y)$ във всяко от тях е по-голяма или равна на ε.

Да вземем, както и в предишните две теореми, квадрат D със страни, успоредни на координатните оси, който съдържа множеството M, и да разделим този квадрат на четири еднакви по-малки квадрата. Поне един от тези квадрати — да го означим с D_1 — ще има общи точки с безбройно много от множествата M_k. Ако разделим D_1 също тъй на четири еднакви по-малки квадратчета, отново ще намерим между тях поне един — да го означим с D_2, — който има общи точки с безбройно много от множествата M_k. Продължавайки така, ще построим една редица от затворени квадрати

$$D_1, \; D_2, \ldots, \; D_n, \ldots,$$

всеки един от които има общи точки с безбройно много от множествата M_k. Тази редица удовлетворява очевидно условията на теоремата на Кантор. Следователно ще съществува една точка (ξ, η), съдържаща се във всичките квадрати D_n. Както и преди, можем да се убедим, че тази точка принадлежи на M. Тъй като функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (ξ, η), ще съществува такова число δ, че при

$$|x - \xi| < \delta, \qquad |y - \eta| < \delta, \tag{3}$$

когато (x, y) е точка от M, да имаме $|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \frac{\varepsilon}{3}$, или все едно

$$f(\xi, \eta) - \frac{\varepsilon}{3} < f(x, y) < f(\xi, \eta) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Неравенствата (3) определят една околност U на точката (ξ, η). Да разгледаме и по-малката околност V на (ξ, η), определена чрез неравенствата

$$|x-\xi|<\frac{\delta}{2}, \quad |y-\eta|<\frac{\delta}{2}.$$

Ако n е достатъчно голямо, квадратът D_n ще се съдържа във V. Да вземем в D_n една точка (x_k, y_k), принадлежаща на такова множество M_k, чийто номер k удовлетворява неравенството $\frac{1}{k}<\frac{\delta}{2}$ (това можем да направим, тъй като D_n има общи точки с безбройно много от множествата M_k). Тъй като една точка от M_k — точката (x_k, y_k) — се съдържа в околността V на точката (ξ, η), то цялото множество M_k, чийто диаметър, както знаем, е по-малък от $\frac{1}{k}$ и следователно по-малък от $\frac{\delta}{2}$, ще се съдържа в по-голямата нейна околност U, която беше зададена чрез неравенствата (3). Това се вижда от факта, че за всяка точка (x, y) от M_k ще имаме

$$|x-\xi| \leqq |x-x_k|+|x_k-\xi|<\frac{1}{k}+\frac{\delta}{2}<\delta$$

и

$$|y-\eta| \leqq |y-y_k|+|y_k-\eta|<\frac{1}{k}+\frac{\delta}{2}<\delta.$$

Оттук заключаваме, че за всяка точка (x, y) от M_k ще бъдат изпълнени неравенствата (4). Следователно числата $f(\xi, \eta)-\frac{\varepsilon}{3}$ и $f(\xi, \eta)+\frac{\varepsilon}{3}$ са съответно долна и горна граница на функцията $f(x, y)$ в множеството M_k, откъдето пък следва, че осцилацията на $f(x, y)$ в M_k няма да надминава числото

$$\left(f(\xi, \eta)+\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(f(\xi, \eta)-\frac{\varepsilon}{3}\right)=\frac{2}{3}\varepsilon,$$

т. е. ще бъде по-малка от ε. Тази осцилация обаче беше по-голяма или равна на ε. Полученото противоречие завършва доказателството на теоремата.

§ 75. Частни производни

Нека е дадена функцията $f(x, y)$ с дефиниционна област M и нека (x_0, y_0) е вътрешна точка за M. За стойности на x, близки до x_0, точките (x, y_0) сигурно принадлежат на M. Ако разгледаме функцията $f(x, y)$ за такива точки, то поради това, че втората им координата е постоянна, ще получим в същност функцията, зависеща само от x. Нека означим тази функция с $\varphi(x)$, т. е. да запишем

$$\varphi(x)=f(x, y_0).$$

Тъй като функцията $\varphi(x)$ е сигурно дефинирана в някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0, то можем да поставим въпроса за нейната диференцуемост в тази точка. Ако производната $\varphi'(x_0)$ съществува, то казваме, че функцията $f(x, y)$ е **диференцуема частно относно** x в точката (x_0, y_0) а самата производна $\varphi'(x_0)$ наричаме **частна** производна относно x на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) и я бележим

$$f_x'(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Когато не желаем да отбелязваме точката, в която сме диференцирали, може да пишем просто

$$f_x' \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

или най-сетне, ако сме положили $z=f(x, y)$, пишем

$$z_x' \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично, като излизаме от функцията

$$\psi(y)=f(x_0, y),$$

дефинираме частната производна на функцията $f(x, y)$ относно y в точката (x_0, y_0). Тя е равна на производната $\psi'(y_0)$ (когато тази производна съществува) и се бележи

$$f_y'(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

или по-кратко

$$f_y' \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

а ако сме положили $z=f(x, y)$, също и чрез

$$z_y', \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Като си спомним дефиницията на понятието производна на функция на една независима променлива, ще получим равенствата

$$f_x'(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$$

и

$$f_y'(x_0, y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}.$$

По аналогичен начин се дефинират частните производни и при функциите на повече от две променливи. Така за функцията $u=f(x, y, z)$ те ще бъдат три на брой и ще се означават

$$f_x', f_y', f_z' \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}.$$

За разлика от частните производни производните на функциите на една променлива се наричат обикновени **производни**.

Практическото намиране на частните производни на дадена функция на две или повече променливи се извършва по правилата за диференциране на функции на една променлива, като се взема пред вид само оная променлива, по отношение на която диференцираме, а останалите променливи се разглеждат като константи.

Примери: 1) Ако $z=\sin(x^2+y^2)$, то

$$z_x'=2x\cos(x^2+y^2),\quad z_y'=2y\cos(x^2+y^2).$$

2) Ако $u=x\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}$, то

$$u_x'=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z},\qquad u_y'=\frac{xz}{y^2+z^2},\qquad u_z'=\frac{-xy}{y^2+z^2}.$$

За функциите на една променлива беше в сила теоремата, съгласно която от диференцуемостта на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0 следва нейната непрекъснатост в същата точка. Тук би могло да се допусне, че от съществуването на двете частни производни $f_x'(x_0, y_0)$ и $f_y'(x_0, y_0)$ ще следва непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). Следващият пример обаче ни показва, че това не е така.

Да разгледаме функцията $f(x, y)$, дефинирана с равенството

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

за всички точки в равнината с изключение на точката $(0, 0)$ и отделно дефинирана в тази точка с равенството $f(0, 0)=0$. Лесно е да се види, че тази функция е диференцуема частно както относно x, така и относно y в точката $(0, 0)$. Наистина имаме

$$f_x'(0, 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$

$$f_y'(0, 0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$

От друга страна обаче, функцията $f(x, y)$ не е непрекъсната в точката $(0, 0)$. За да се убедим в това, да разгледаме редицата от точки

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots,$$

която очевидно клони към точката $(0, 0)$. Ако допуснем, че $f(x, y)$ е непрекъсната в тази точка, то съгласно дефиницията на Хайне редицата

$$f(1, 1), f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots,$$

ще трябва да бъде сходяща и да клони към $f(0, 0)$, т. е. към 0. Но това не е така, тъй като за всяко n имаме $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$. Следователно функцията $f(x, y)$ е прекъсната в точката $(0, 0)$.

Упражнения. I. Намерете частните производни на следните функции:

1. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.
4. $z = xe^{xy}$.
5. $z = \ln (x^2 + y^2) + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$.
6. $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{xy}{z^2}$.
7. $u = x^2 y \sin (xyz)$.
8. $u = xy^z$.

II. Проверете, че функцията

$$z = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial z}{\partial x} x + \frac{\partial z}{\partial y} y = 0.$$

§ 76. Частни производни от по-висок ред. Равенство на смесените производни

Частните производни $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ на дадена функция $f(x, y)$ се наричат още първи частни производни на тази функция. Когато съществуват във всички точки от някаква област в равнината, те представляват също така функции на x и y и като такива могат също да притежават свои частни производни. Тези производни се наричат втори частни производни на функцията $f(x, y)$. Те са четири на брой и се получават по следния начин: От $f_x'(x, y)$ чрез диференциране относно x получаваме $f''_{x^2}(x, y)$, а чрез диференциране относно y — производната $f''_{xy}(x, y)$. От $f_y'(x, y)$ пък получаваме съответно $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{y^2}(x, y)$. Те се означават още и така:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

или ако сме положили $z = f(x, y)$, така:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Макар че вторите частни производни на една функция на две променливи са четири на брой, две от тях, а именно т. нар. „смесени производни“ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, се оказват, както ще видим, равни по между си във всички точки, в които те са непрекъснати. Следователно при това допускане за непрекъснатост имаме в същност само три втори частни производни. В това се състои съдържанието на следната

Теорема. *Ако частните производни $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ на дадена функция $f(x, y)$ съществуват в някоя околност на точката (x_0, y_0) и ако те са непрекъснати в тази точка, то в сила е равенството*

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Доказателство. Ще излезем от равенството

$$(1)\qquad \begin{aligned}&[f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)]-[f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)]\\ &=[f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)]-[f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)],\end{aligned}$$

в което h и k са някакви произволно взети различни от нула величини, които обаче засега ще разглеждаме като постоянни. Ако въведем функциите

$$\varphi(x)=f(x, y_0+k)-f(x, y_0),$$

и

$$\psi(y)=f(x_0+h, y)-f(x_0, y),$$

то равенството (1) може да се напише във вида

$$(2)\qquad \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\psi(y_0+k)-\psi(y_0).$$

Като приложим към двете страни на равенството (2) теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$(3)\qquad h\varphi'(x_0+\theta_1 h)=k\psi'(y_0+\theta_2 k),$$

където 0_1 и 0_2 са числа, намиращи се между 0 и 1. Но равенството (3) може да се напише по-подробно така:

$$(4)\qquad \begin{aligned}&h[f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)]\\ &=k[f'_y(x_0+h, y_0+\theta_2 k)-f'_y(x_0, y_0+\theta_2 k)].\end{aligned}$$

Нека сега разгледаме функциите

$$p(y)=f'_x(x_0+\theta_1 h, y)$$

и

$$q(x)=f'_y(x, y_0+\theta_2 k).$$

С тяхна помощ равенството (4) се превръща в следното равенство:

$$(5)\qquad h[p(y_0+k)-p(y_0)]=k[q(x_0+h)-q(x_0)].$$

Като приложим отново теоремата за крайните нараствания, този път към двете страни на равенството (5), получаваме

$$(6)\qquad hkp'(y_0+\theta_3 k)=khq'(x_0+0_4 h),$$

където θ_3 и 0_4 са пак числа, намиращи се между 0 и 1. Като вземем пред вид дефиницията на функциите $p(y)$ и $q(x)$, равенството (6) ще ни даде

$$(7)\qquad hkf''_{xy}(x_0+0_1 h, y_0+0_3 k)-hkf''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_2 k).$$

Нека сега съкратим множителя hk и най-сетне, като се възползуваме от обстоятелството, че h и k бяха взети произволно, да ги оставим да клонят към нула. Ще получим

$$(8)\qquad \lim_{h\to 0,\ k\to 0} f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_3 k)=\lim_{h\to 0,\ k\to 0} f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+0_2 k).$$

Поради непрекъснатостта на функциите $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ в точката (x_0, y_0) равенството (8) ни дава окончателно

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Твърдението в тази теорема може да бъде изказано и така: При условие, че търсените частни производни на дадена функция са непрекъснати, редът на диференцирането няма значение (т. е. все едно е дали ще диференцираме най-напред относно x, а след това относно y или обратно — и в двата случая ще получим един и същ резултат).

По-нататък във всички общи разглеждания ще считаме, че условията от тази теорема са изпълнени, и ще приемаме винаги смесените производни за равни помежду си.

Частните производни на вторите частни производни на дадена функция на няколко променливи се наричат нейни трети частни производни и т. н. Разбира се, ако е изпълнено условието за непрекъснатост, правилото, според което редът на диференцирание е без значение, остава в сила. В такъв случай например третите частни производни на функцията $z=f(x, y)$ ще бъдат всичко четири на брой, а именно

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Всичко казано в този параграф за функции на две независими променливи по очевиден начин се пренася и за функции на повече от две променливи. Начинът на означаването на частните производни при такива функции е ясен, а що се отнася до теоремата за равенство на смесените производни, тя също остава валидна. Така, ако $f(x, y, z)$ е функция на три променливи, за която например вторите частни производни $f''_{xz}(x, y, z)$ и $f''_{zx}(x, y, z)$ съществуват в някоя околност на една вътрешна точка (x_0, y_0, z_0) от нейната дефиниционна област и са непрекъснати в тази точка, то като разглеждаме функцията $\varphi(x, z)=f(x, y_0, z)$ (получена посредством фиксиране на втората променлива) и приложим към тази функция на две променливи доказаната току-що теорема относно точката (x_0, z_0), ще получим $\varphi''_{xz}(x_0, z_0)=\varphi''_{zx}(x_0, z_0)$, което очевидно не е друго освен равенството

$$f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)=f''_{zx}(x_0, y_0, z_0).$$

Изобщо за вторите частни производни на разглежданата функция ще имаме при предположението за непрекъснатост следните равенства:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}.$$

За третите пък частни производни (пак при предположението за непрекъснатост) ще са в сила вече голям брой равенства, например равенствата

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial z\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x},$$

както и много други. Аналогични равенства могат да се напишат, разбира се, и за частните производни от по-висок ред.

Упражнения. I. Намерете вторите частни производни на следните функции:

1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. 2. $z=\ln(x^2+y^2)$. 3. $u=x^2y^2z^2$.

II. Намерете всички втори и трети частни производни на функциите:

1. $z=\sin(xy)$. 2. $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. 3. $u=e^{xyz}$.

III. Проверете, че функциите:

а) $z=xe^{x+y}+yx+y^2$; б) $z=x\sin\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$,

удовлетворяват съответно уравненията:

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; б) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

§ 77. Диференциране на съставни функции

Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана в някоя околност на една точка (x_0, y_0) от равнината и нека са дадени освен това две функции на една променлива $f(t)$ и $g(t)$, които са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на една точка t_0 от реалната права. Ако при това са изпълнени равенствата $f(t_0)=x_0$ и $g(t_0)=y_0$, то поради непрекъснатостта на функциите $f(t)$ и $g(t)$ е ясно, че когато t е близко до t_0, стойностите на $f(t)$ и $g(t)$ ще бъдат близко съответно до x_0 и y_0. Това означава, че точката от равнината $(f(t), g(t))$ ще бъде близко до точката (x_0, y_0) и следователно ще се намира в дефиниционната област на функцията $F(x, y)$. Това ни дава възможност да си образуваме за такива стойности на t израза $F[f(t), g(t)[$, който очевидно представлява вече функция, зависеща само от t. Тази функция наричаме **съставна функция**. За съставни функции от този вид е валидна следната

Теорема. *Нека функцията $F(x, y)$ притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0). Нека освен това двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0 и удовлетворяват равенствата*

$$f(t_0)=x_0, \qquad g(t_0)=y_0.$$

Тогава съставната функция

$$\varphi(t)=F[f(t), g(t)]$$

е диференцуема в точката t_0 и при това

$$\varphi'(t_0)=F_x'(x_0, y_0)f'(t_0)+F_y'(x_0, y_0)g'(t_0). \tag{1}$$

Доказателство. Знаем, че

$$\varphi'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}.$$

Като вземем пред вид дефиницията на функцията $\varphi(t)$, ще имаме

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F[f(t_0+h),\ g(t_0+h)]-F[f(t_0),\ g(t_0)]}{h}.$$

Да положим

(2) $$f(t_0+h)-f(t_0)=k, \qquad g(t_0+h)-g(t_0)=l.$$

Оттук

$$f(t_0+h)=x_0+k, \qquad g(t_0+h)=y_0+l.$$

Като използуваме тези означения и направим някои прости преобразувания, ще получим

(3) $$\begin{aligned}\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}&=\frac{F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0)}{h}\\&=\frac{F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0+l)}{h}+\frac{F(x_0,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0)}{h}.\end{aligned}$$

Да въведем помощните функции

$$p(x)=F(x,\ y_0+l)$$

и

$$q(y)=F(x_0,\ y).$$

Като си послужим с тях и използуваме теоремата за крайните нараствания, получаваме следните равенства:

(4) $$\begin{aligned}F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0+l)&=p(x_0+k)-p(x_0)\\&=kp'(x_0+\theta_1k)=kF_x'(x_0+\theta_1k,\ y_0+l)\end{aligned}$$

и

(5) $$\begin{aligned}F(x_0,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0)&=q(y_0+l)-q(y_0)\\&=lq'(y_0+\theta_2l)=lF_y'(x_0,\ y_0+\theta_2l),\end{aligned}$$

където θ_1 и θ_2 са две числа, намиращи се между 0 и 1.

Като вземем пред вид равенствата (3), (4) и (5), а също и равенствата (2), ще получим

(6) $$\begin{aligned}&\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}\\&=F_x'(x_0+\theta_1k,\ y_0+l)\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}+F_y'(x_0,\ y_0+\theta_2l)\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}.\end{aligned}$$

Функциите $f(t)$ и $g(t)$ поради условието за диференцуемост са непрекъснати в точката t_0. Оттук следва, че когато $h\to0$, ще имаме също $k\to0$ и $l\to0$.

Нека сега в двете страни на равенството (6) вземем граница при h, клоняща към нула. Като си спомним, че производните $F_x'(x, y)$ и $F_y'(x, y)$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0), а функциите $f(t)$ и $g(t)$ — диференцуеми в точката t_0, ще видим, че равенството (6) преминава в желаното равенство (1).

Резултатът, получен в тази теорема, се написва по-просто, когато не желаем да отбелязваме точките, в които са взети производните. Така, ако положим $z=F(x, y)$, $x=f(t)$, $y=g(t)$, равенството (1) ще се напише в следния вид:

$$z'=\frac{\partial z}{\partial x} x'+\frac{\partial z}{\partial y} y'. \tag{7}$$

Ако вместо функцията $F(x, y)$ разгледаме функция на три или повече променливи, то като разсъждаваме по подобен начин, ще получим формула от сроден вид, дясната страна на която ще съдържа толкова събираеми, колкото е броят на независимите променливи. Например, ако $z=F(u, v, w)$, $u=f(t)$, $v=g(t)$, $w=h(t)$, то ще имаме

$$z'=\frac{\partial z}{\partial u} u'+\frac{\partial z}{\partial v} v'+\frac{\partial z}{\partial w} w'.$$

От друга страна, вместо функциите $f(t)$ и $g(t)$ също можем да вземем функции на две или повече променливи. В такъв случай формулата (1) (както и нейното доказателство) не се променя съществено. Трябва само при нейното записване обикновените производни да се заменят с частни. Така, ако $z=F(u, v)$, $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$, то ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Най-сетне, ако с помощта на функциите $F(u)$ и $f(x, y)$ си образуваме съставната функция $z=F[f(x, y)]$, то намирането на нейните частни производни става въз основа на теоремата за диференциране на съставни функции от глава V, § 28 (тъй като тук едната от независимите променливи считаме за постоянна величина). Ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=F'[f(x, y)]\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=F'[f(x, y)]\frac{\partial f}{\partial y},$$

или по-кратко, ако положим $u=f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ще отбележим още, че като приложим неколкократно правилото за диференциране на съставни функции, можем да намираме и частни производни от по-висок ред. Така например от равенството (7), като вземем пред вид, че не само функцията z, но и нейните частни производни $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ са съставни функции, ще получим

$$z''=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}y'\right)x'+\frac{\partial z}{\partial x}x''$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}x'+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial z}{\partial y}y''$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial z}{\partial x}x''+\frac{\partial z}{\partial y}y''.$$

Пример 1. Ако са дадени двете функции $F(x, y)$ и $f(x)$, с помощта на които е образувана съставната функция

$$z=F(x, f(x)),$$

ще имаме

$$z'=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}f'(x),$$

$$z''=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}f'(x)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'^2(x)+\frac{\partial F}{\partial y}f''(x).$$

Пример 2. Ако с помощта на функцията $F(u, v)$ си образуваме съставната функция

$$z=F(x^2+y^2, xy),$$

ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial F}{\partial u}+x\frac{\partial F}{\partial v}.$$

По-нататък ще получим например за $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4x^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Намерете останалите втори частни производни!

Пример 3. Нека посредством функцията $F(u)$ си образуваме съставната функция

$$z=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Като положим за краткост $u=\frac{y}{x}$, ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}F'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}F'(u).$$

Като диференцираме $\frac{\partial z}{\partial x}$ относно x, получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{y}{x^3}F'(u)+\frac{y^2}{x^4}F''(u).$$

Намерете другите две втори частни производни!

Упражнения. 1. Нека $z=F(x, y)$, $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$. Намерете z''!

2. Ако $z=F(u)$, $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, да се намерят $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3. Ако $z=F(u, v)$, $u=x+y$, $v=x-y$, намерете $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Нека $z=F(u)$ и $u=x+y^2$. Проверете равенството

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

§ 78. Тотален диференциал

Нека е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана в някоя околност D на точката (x_0, y_0) и непрекъсната в тази точка. Да разгледаме двете точки (x_0+h, y_0) и (x_0, y_0+k), първата от които сме получили, като сме дали на абсцисата x_0 някакво нарастване h, а втората — като сме дали на ординатата y_0 нарастване k по такъв начин, че тези две точки също да принадлежат на околността D. Ако въведем означенията

$$x_1=x_0+h, \qquad y_2=y_0+k$$

и

$$z_0=f(x_0, y_0), \qquad z_1=f(x_1, y_0), \qquad z_2=f(x_0, y_2),$$

то и трите точки (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_0, z_1) и (x_0, y_2, z_2) ще лежат върху повърхнината S, явяваща се графика на функцията $z=f(x, y)$. От аналитичната геометрия е известно, че равнината, минаваща през тези три точки, има уравнение

$$\zeta-z_0=\frac{z_1-z_0}{x_1-x_0}(\xi-x_0)+\frac{z_2-z_0}{y_2-y_0}(\eta-y_0), \tag{1}$$

където ξ, η и ζ са текущите координати.

Ако оставим нарастванията h и k да клонят към нула, то x_1 ще клони към x_0, а y_2 — към y_0. Поради непрекъснатостта пък на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) както z_1, така и z_2 ще клонят към z_0. Това ще рече, че точките (x_1, y_0, z_1) и (x_0, y_2, z_2) ще клонят към точката (x_0, y_0, z_0). Какво можем да кажем за равнината, която се дава с уравнението (1)? Тя, разбира се, ще променя своето положение, тъй като коефициентите в уравнението ѝ, които са в същност функции на h и k, ще се менят. Въпросът е: дали тези функции притежават граница, когато h и k клонят към нула. Да напишем по-подробно тези коефициенти:

$$\frac{z_1-z_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h} \tag{2}$$

и

$$\frac{z_2-z_0}{y_2-y_0}=\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}. \tag{3}$$

Ясно е, че изискването тези функции да притежават граници при $h\to 0$ и $k\to 0$ не е нищо друго освен изискването функцията $f(x, y)$ да притежава частни производни както относно x, тъй и относно y в точката (x_0, y_0). В такъв случай подвижната равнина, дадена с уравнението (1), ще клони към едно гранично положение — към равнината с уравнение

$$\zeta-z_0=f_x'(x_0, y_0)(\xi-x_0)+f_y'(x_0, y_0)(\eta-y_0). \tag{4}$$

Съвсем естествено е да наречем тази равнина допирателна равнина към графиката на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0, z_0).

В близост с точката (x_0, y_0, z_0) графиката на функцията $f(x, y)$ не е твърде отдалечена от допирателната равнина, прекарана в тази точка. С известно приближение можем за някоя малка околност на точката (x_0, y_0) да заменим частта от графиката на функцията $f(x, y)$, която съответствува на тази околност, със съответната част от допирателната равнина. Това ще рече, че ако нарастванията Δx и Δy са твърде малки, ние ще заместим функционалната стойност $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ със стойността на апликатата на онази точка от допирателната равнина, която съответствува на точката $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Тази стойност ние пресмятаме от уравнението (4) и получаваме

$$\zeta=z_0+f_x'(x_0, y_0)\Delta x+f_y'(x_0, y_0)\Delta y.$$

Тогава нарастването на функцията

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

ще бъде заместено с приближената стойност

$$\zeta-z_0=f_x'(x_0, y_0)\Delta x+f_y'(x_0, y_0)\Delta y.$$

Тази приближена стойност ние наричаме *тотален диференциал* на функцията $z=f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) и бележим с dz. Написан вече не специално за точката (x_0, y_0), а за произволна точка (x, y), в която съществуват частните производни $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$, той има вида

$$dz=f_x'(x, y)\Delta x+f_y'(x, y)\Delta y.$$

При функцията $f(x, y)=x$ ще получим

$$dx=1.\Delta x+0.\Delta y,$$

а при функцията $f(x, y)=y$ получаваме

$$dx=0\,.\,\Delta x+1\,.\,\Delta y.$$

Следователно $\Delta x=dx$ и $\Delta y=dy$. Ето защо тоталният диференциал на една функция $z=f(x, y)$ обикновено се записва във вида

$$dz=f_x'(x, y)\,dx+f_y'(x, y)\,dy,$$

или по-кратко

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{5}$$

При функциите на повече от две променливи тоталният диференциал се въвежда с подобна формула, дясната страна на която съдържа толкова събираеми, колкото е броят на независимите променливи. Така за функцията $u=f(x, y, z)$ ще имаме

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Както при диференциалите на функциите на една променлива, и тук могат да се изведат съвсем леко формулите

$$d(u+v)=du+dv, \tag{6}$$

$$d(u-v)=du-dv, \tag{7}$$

(8) $$d(uv) = vdu + udv,$$

(9) $$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

където u и v са функции на две или повече променливи.

Да разгледаме съставната функция $z = F[f(t), g(t)]$. Нейният диференциал като диференциал на функция на една променлива ще бъде

$$dz = z'\, dt.$$

От друга страна, ако приложим $z = F(x, y)$, $x = f(t)$, $y = g(t)$, то съгласно правилото за диференциране на съставни функции ще имаме

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} x' + \frac{\partial z}{\partial y} y'.$$

Следователно

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} x'\, dt + \frac{\partial z}{\partial y} y'\, dt,$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Получихме формула, която по външен вид не се различава от формулата (5), макар че сега x и y не са вече независими променливи, а функции на t.

Също така, ако имаме $z = F(u, v)$, $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, то за тоталния диференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

на съставната функция

$$z = F[f(x, y), g(x, y)]$$

ще получим

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$
$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right),$$

или окончателно

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Отново получихме формула от типа на формулата (5), въпреки че тук вече u и v са функции на две независими променливи и du и dv са техните тотални диференциали.

Ако пък имаме $z = F(u)$, $u = f(x, y)$, то за dz ще получим

$$dz = F'(u)\frac{\partial u}{\partial x} dx + F'(u)\frac{\partial u}{\partial y} dy = F'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right),$$

или най-сетне

$$dz = F'(u)du,$$

формула, която по външен вид изглежда точно както формулата за диференциал на функция на една независима променлива (въпреки че тук du е тоталният диференциал на функция на две променливи).

Пример. Да намерим тоталния диференциал на функцията

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Имаме

$$dz = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\, d\,\frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Тоталният диференциал на функция на няколко променливи се нарича още и нейни **първи тотален диференциал**. Тоталните диференциали от по-висок ред се въвеждат последователно: вторият тотален диференциал е тотален диференциал на първия, третият е тотален диференциал на втория и т. н. Те се означават съответно с d^2z, d^3z и пр. При тяхното пресмятане диференциалите на независимите променливи се приемат за константи.

Нека намерим например втория тотален диференциал на функцията $z = f(x, y)$. Имаме

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

С помощта на принципа на математичната индукция лесно се установява следната обща формула за n-тия тотален диференциал на функцията $z = f(x, y)$:

$$d^n z = \binom{n}{0}\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\,dx^{n-1}\,dy + \cdots + \binom{n}{n}\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\,dy^n.$$

Упражнения. I. Намерете тоталния диференциал на функцията:

1. $z = x^2 y - y^2 x$. 2. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. 3. $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{xy}{z^2}$.

II. Намерете втория тотален диференциал на функцията:

1. $z = xe^{xy}$. 2. $z = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 3. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

§ 79. Неявни функции

При много въпроси от анализа и неговите приложения срещаме функции, при които зависимостта между независимата променлива x и зависимата y е зададена с помощта на някакво равенство, което не искаме или не можем да решим относно y. Такива функции се наричат **неявни** функции. Тяхното въвеждане става с помощта на следната

Дефиниция. *Нека $F(x, y)$ е функция с дефиниционна област M. Казваме, че уравнението*

$$(1) \qquad F(x, y)=0$$

определя y като неявна функция на x в едно множество D върху реалната права, ако съществува някаква функция $y=f(x)$, дефинирана в D, за която са изпълнени следните две условия:

1) *за всяко x от D точката $(x, f(x))$ принадлежи на M;*
2) *за всяко x от D имаме*

$$F(x, f(x))=0.$$

Самата функция $y=f(x)$ се нарича **неявна функция**, определена от уравнението (1). Накратко казваме, че тя **удовлетворява** това уравнение.

Така например функцията $y=\frac{x}{1+x^2}$, дефинирана за всяко x, се определя като неявна функция от уравнението $y+x^2y-x=0$.

Функцията пък $y=\sqrt{1-x^2}$, дефинирана при $-1\leqq x\leqq 1$, се определя неявно от уравнението $x^2+y^2-1=0$.

Не винаги обаче една неявна функция може явно да се пресметне, както в дадените два примера. В повечето случаи това е невъзможно и именно тази е причината за въвеждането на самото понятие неявна функция. Такъв е например случаят с неявната функция $y=f(x)$, определена от уравнението $e^{xy}-y^2=0$.

При това не всяко уравнение от вида (1) определя неявна функция. Уравнението

$$x^2+y^2+1=0$$

например не се удовлетворява от никаква функция, то не определя никаква неявна функция.

От друга страна, едно уравнение може да определя не само една, а повече неявни функции. Така уравнението

$$x^2+y^2-1=0$$

се удовлетворява както от функцията $y=\sqrt{1-x^2}$, тъй и от функцията $y=-\sqrt{1-x^2}$. Те и двете са неявни функции, определени от това уравнение.

Тук няма да се спираме на въпроса, кога едно уравнение от вида (1) определя наистина една неявна функция. Отговорът на този въпрос, както и на аналогичния въпрос относно неявни функции, определени от система уравнения, ще бъде даден в § 81*. Сега ще се спрем само на въпроса за пресмятането на производните на дадена неявна функция, когато знаем, че тя съществува и е диференцуема.

Нека неявната функция $y=f(x)$, дефинирана в един интервал D върху реалната права, се определя от уравнението

$$F(x,\ y)=0. \tag{1}$$

Ще предположим, че функцията $F(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни спрямо x и спрямо y от толкова висок ред, колкото ни е необходимо за нашите по-нататъшни пресмятания, а също, че и функцията $f(x)$ притежва първа, втора и т. н. производни. От дефиницията на понятието неявна функция знаем, че ако в равенството (1) заменим променливата y с $f(x)$, то ще се превърне в тъждество, т. е. ще бъде изпълнено за всички точки x от интервала D. Това означава, че функцията, написана в лявата му страна, ще съвпада с константата 0 в този интервал. Следователно нейната производна също ще бъде нула. Като диференцираме по правилото за съставни функции и помним, че y е функция на x, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0. \tag{2}$$

Оттук

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

(Тук, разбира се, трябва още да се предположи, че $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Условия от такъв вид ние ще считаме в разглежданията от този и следващия параграф винаги за изпълнени.)

За да намерим y'', можем да излезем от намерения израз за y' или пък да диференцираме равенството (2), което е също тъждество. Вторият от тези два начина ни дава

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0.$$

Оттук след заместване на y' с намерената стойност пресмятаме y''. По този начин можем да пресметнем всяка производна на функцията $y=f(x)$.

Пример 1. Нека y се определя като неявна функция на x от уравнението

$$\sin(x+y)-y=0.$$

Като диференцираме, получаваме

$$\cos(x+y)(1+y')-y'=0, \tag{3}$$

откъдето

$$y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

По нататък диференцираме равенството (3):

$$-\sin(x+y)(1+y')^2+\cos(x+y)y''-y''=0,$$

откъдето след заместване на y' с намерения израз получаваме

$$y''=-\frac{\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}.$$

Пример 2. Нека y е неявна функция на x, определена от уравнението

$$(4)\qquad e^{2x+y}-y^2=0.$$

Като диференцираме, ще получим

$$e^{2x+y}(2+y')-2yy'=0.$$

откъдето

$$y'=\frac{2e^{2x+y}}{2y-e^{2x+y}}.$$

От уравнение (4), което неявната функция y превръща в тъждество, получаваме $e^{2x+y}=y^2$, поради което можем още да пишем

$$y'=\frac{2y}{2-y}.$$

Намерете y''!

Нека сега разгледаме уравнението

$$F(x, y, z)=0,$$

в което участвуват три променливи. Ние можем подобно на това, което имахме преди, да определим (при известни условия, на които тук няма да се спираме) едната от тези променливи — например z, като неявна функция на останалите две. Но това ще бъде вече функция на две променливи.

Дефиниция. *Уравнението*

$$(5)\qquad F(x, y, z)=0$$

определя z като неявна функция на x и y в някоя област N в равнината, ако съществува функция $z=f(x, y)$, дефинирана в N и удовлетворяваща следните условия:

1) *за всяка точка (x, y) от N точката $(x, y, f(x, y))$ принадлежи на дефиниционната област на функцията $F(x, y, z)$;*

2) *за всяка точка (x, y) от N е изпълнено равенството*

$$F(x, y, f(x, y))=0.$$

По аналогичен начин се дефинират и неявните функции на повече от две променливи.

Намирането на производните на такива неявни функции става по същия начин, както при неявните функции на една променлива, само че сега ще става дума за частни производни. Нека например намерим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ за неявната функция z, определена от уравнението (5). Като вземем пред вид, че след заместването на z с тази функция в уравнението (5), то се превръща в тъждество, и като диференцираме това тъждество относно x, ще получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Оттук

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Като диференцираме пък относно y, ще имаме

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

откъдето

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Намирането на частни производни от по-висок ред става чрез понататъшно диференциране на намерените изрази.

Пример 3. Нека z се определя като неявна функция на x и y от уравнението

$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1.$$

Диференцираме относно x и получаваме

$$-2\cos x\sin x-2\cos z\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

или

$$\sin 2x+\sin 2z.\,\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

откъдето

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}.$$

Аналогично чрез диференциране на даденото уравнение относно y получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}.$$

Намерете вторите частни производни на z!

Упражнения. I. Намерете y' и y'' за неявната функция y, определена от следните уравнения:

1. $x^3+3x^2y-y^3=0$. 2. $e^{\sin x}-xe^{\sin y}=0$.

3. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = 0.$

II. Намерете $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ за неявната функция z, определена от уравненията

1. $z^3 - 3xyz = 1.$ 2. $z = ye^{-\frac{x}{z}}.$ 3. $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1.$

III. Намерете всички първи и втори частни производни на неявната функция z, определена от уравненията:

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 0.$ 2. $x + y + z = e^z.$

§ 80. Неявни функции, определени от системи уравнения

Когато вместо едно уравнение, съдържащо две или повече променливи, са дадени няколко уравнения, разглеждани съвместно като система уравнения, можем при известни условия да определим от тази система вече не една, а няколко неявни функции. При това е необходимо броят на всички променливи, участвуващи в дадената система уравнения, да бъде по-голям от броя на самите уравнения. Тогава пък броят на неявните функции, които се определят от дадената система уравнения, е равен на броя на уравненията.

Ще се спрем по-подробно на най-простия случай — случая на система от две уравнения с три променливи.

Дефиниция. Нека $F(x, y, z)$ *и* $G(x, y, z)$ *са две функции с обща дефиниционна област* M. *Ще казваме, че системата уравнения*

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

определя y *и* z *като неявни функции на* x *в някое множество* D *върху реалната права, ако съществуват две функции* $y = f(x)$ *и* $z = g(x)$, *дефинирани в* D *и удовлетворяващи следните изисквания:*

1) *за всяко* x *от* D *точката* $(x, f(x), g(x))$ *принадлежи на* M;

2) *за всяко* x *от* D *имаме*

$$F(x, f(x), g(x)) = 0 \quad и \quad G(x, f(x), g(x)) = 0.$$

Като предположим, че функциите $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ притежават всички частни производни, които са ни необходими, и че неявните функции $y = f(x)$ и $z = g(x)$ също са диференцуеми, ще покажем как се пресмятат производните y', z', y'', z'', и т. н. Като вземем пред вид, че след заместването на променливите y и z в системата уравнения (1), съответно с неявните функции $f(x)$ и $g(x)$ двете уравнения на тази система се превръщат в тъждества, ние диференцираме тези две тъждества и получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}y' + \frac{\partial G}{\partial z}z' = 0, \tag{2}$$

което е нова система от две уравнения. Ако разгледаме y' и z' като неизвестни, ние виждаме, че това е система от първа степен с две неизвестни, която знаем да решаваме. Така намираме y' и z'. Ако искаме да намерим сега y'' и z'', диференцираме уравненията от системата (2). Получаваме две нови уравнения, в които след заместване на y' и z' с намерените изрази ще останат като неизвестни само y'' и z''. Това ще бъде пак една система с две уравнения от първа степен с две неизвестни. Решаваме я и намираме y'' и z''.

Пример 1. Нека y и z се определят като неявни функции на x от системата уравнения

$$y^2+z^2=x^2$$
$$x+y+z=2.$$

Диференцираме и получаваме

$$yy'+zz'=x$$
$$y'+z'=-1,$$

откъдето намираме

$$y'=\frac{x+z}{y-z},\quad z'=-\frac{x+y}{y-z}.$$

Диференцираме по-нататък и пресмятаме y'' и z''. Получаваме следните изрази:

$$y''=-2\frac{(x+z)(x+y)}{(y-z)^3},\quad z''=2\frac{(x+y)(x+z)}{(y-z)^3}.$$

Да разгледаме още и случая на неявни функции, определени със система от две уравнения с четири неизвестни.

Дефиниция. *Нека $F(x, y, u, v)$ и $G(x, y, u, v)$ са две функции с обща дефиниционна област някакво множество M в четиримерното пространство. Ще казваме, че системата уравнения*

$$F(x, y, u, v)=0,\quad G(x, y, u, v)=0 \tag{3}$$

определя u и v като неявни функции на x и y в някоя област N в равнината, ако съществуват две функции $u=f(x, y)$ и $v=g(x, y)$, дефинирани в N, които удовлетворяват следните условия:

1) *за всяка точка (x, y) от N точката $(x, y, f(x, y), g(x, y))$ принадлежи на M;*

2) *за всяка точка (x, y) от N имаме*

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y))=0 \quad \text{и} \quad G(x, y, f(x, y), g(x, y))=0.$$

Намирането на частните производни на дефинираните по този начин две неявни функции се извършва чрез диференциране на равенствата (3), които след заместването на u и v съответно с $f(x, y)$ и $g(x, y)$ се превръщат в тъждества. Като диференцираме относно x, ще получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Тук неизвестни са търсените частни производни $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Тъй като те участвуват в една система уравнения от първа степен с две неизвестни, тяхното намиране не представлява вече, принципно казано, никаква трудност. Като диференцираме пък равенствата (3) относно y, ще получим

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Тук неизвестни са $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$. Остава да решим получената система уравнения относно тези неизвестни.

Що се отнася до производните от по-висок ред, пътят за тяхното пресмятане е ясен. Той води винаги до решаване на система с две уравнения от първа степен с две неизвестни.

Пример 2. От системата уравнения

$$x+y=u+v$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin u}{\sin v}$$

u и v се определят като неявни функции на x и y. Като диференцираме дадените уравнения относно x, ще получим

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{\cos u}{\sin v}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

откъдето пресмятаме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin^2 v+y\sin u\cos v}{y\sin(u+v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\sin v\,(y\cos u-\sin v)}{y\sin(u+v)}.$$

Намерете $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, като диференцирате дадените уравнения относно y и решите получената система относно търсените производни.

Упражнения. I. Намерете y' и z', ако y и z са неявни функции, определени от следните системи уравнения:

1. $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz \\ x+y+z=a. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=1 \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

II. Намерете първите частни производни на неявните функции u и v, определени от следните системи уравнения:

1. $\begin{cases} xy+uv=1 \\ \dfrac{x+y}{u+v}=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1 \\ ye^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}=2x. \end{cases}$

§ 81.* Теорема за съществуване на неявни функции

Този параграф е посветен на формулировката и доказателството на теоремата за съществуване на неявни функции. (Впрочем тя съдържа и едно твърдение за единственост, поради което може да бъде наречена теорема за съществуване и единственост на неявни функции.) Най-напред — в теорема 1, се разглежда случаят на неявна функция, определена от едно единствено уравнение, след което общата теорема за съществуване на неявни функции — теорема 2, се доказва по метода на пълната математична индукция, като се използува теорема 1. Изложеното доказателство е наистина доста дълго, но почива на твърде ясна и естествена идея. Нека забележим още, че се касае за едно твърдение от локален характер, т. е. твърдение, отнасящо се не до цялото дефиниционно множество на разглежданите функции, а само до някоя околност на една точка от това множество.

С цел да обърнем внимание върху най-характерните моменти във формулировката на теоремата, ще я изкажем най-напред в най-простия възможен случай — случая, когато една неявна функция на една променлива се определя от едно уравнение от вида $F(x, y)=0$. В този случай тя се формулира така:

Теорема. *Нека функцията* $F(x, y)$ *е дефинирана и непрекъсната в някоя околност* D *на точката* (x_0, y_0), *а частната ѝ производна* $F_y'(x, y)$ *съществува и също е непрекъсната в* D, *като при това* $F(x_0, y_0)=0$ *и* $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$. *Тогава съществуват такова положително число* δ *и такава функция* $f(x)$, *че:*

а) *функцията* $f(x)$ *е дефинирана и непрекъсната в интервала* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$;

б) $f(x_0)=y_0$;

в) *при* $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *точката* $(x, f(x))$ *принадлежи на* D *и при това* $F(x, f(x))=0$;

г) $f(x)$ *е единствената функция, удовлетворяваща изискванията* а), б) и в);

д) *ако частната производна* $F_x'(x, y)$ *съществува и е непрекъсната* D, *то* $f(x)$ *е диференцуема в* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *и при това*

$$f(x)=-\frac{F_x'(x, f(x))}{F_y'(x, f(x))}.$$

Тази теорема се явява частен случай от следната

Теорема 1. *Нека функцията* $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ *е дефинирана, непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна* $F_y'(x_1, \ldots, x_m, y)$ *в някоя околност* D *на точката* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)$ *в* $(m+1)$*-мерното пространство, и нека* $F(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)=0$, $F_y'(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)\neq 0$. *Тогава съществуват такава околност* U *на точката* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *в* m*-мерното пространство и такава функция* $f(x_1, \ldots, x_m)$, *че*

а) *функцията* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *е дефинирана и непрекъсната в* U;

б) $f(x_1^0, \ldots, x_m^0)=y^0$;

в) *за* $(x_1,\dots,x_m)\in U$ *имаме* $(x_1,\dots,x_m, f(x_1,\dots,x_m))\in D$ *и*

$$F(x_1,\dots,x_m, f(x_1,\dots,x_m))=0; \tag{1}$$

г) $f(x_1,\dots,x_m)$ *е единствената функция, удовлетворяваща изискванията* а), б) *и в)*;

д) *ако частната производна* $F'_{x_i}(x_1,\dots,x_m, y)$ *съществува и е непрекъсната в* D, *то съществува и е непрекъсната в* U *частната производна* $f'_{x_i}(x_1,\dots,x_m)$, *като при това*

$$f'_{x_i}(x_1,\dots,x_m)=-\frac{F'_{x_i}(x_1,\dots,x_m, f(x_1,\dots,x_m))}{F'_y(x_1,\dots,x_m, f(x_1,\dots,x_m))}. \tag{2}$$

Доказателство. Ще считаме, че околността D е зададена с неравенствата

$$|x_1-x_1^0|<d,\dots, |x_m-x_m^0|<d, |y-y_0|<d,$$

където $d>0$. Ще предположим освен това, че $F'_y(x_1^0,\dots,x_m^0, y^0)>0$ (случаят $F'_y(x_1^0,\dots,x_m^0, y^0)<0$ се разглежда аналогично). Тъй като функцията $F'_y(x_1,\dots,x_m, y)$ е непрекъсната в точката $(x_1^0,\dots,x_m^0, y^0)$, то ще съществува такова $\rho>0$ (можем да вземем $\rho<d$), че при

$$|x_1-x_1^0|<\rho,\dots, |x_m-x_m^0|<\rho, \quad |y-y^0|<\rho$$

да имаме

$$F'_y(x_1,\dots,x_m, y)>0. \tag{3}$$

Тогава от неравенството $F'_y(x_1^0,\dots,x_m^0, y)>0$, изпълнено при $y\in(y^0-\rho, y^0+\rho)$, заключаваме, че функцията $\varphi(y)=F(x_1^0,\dots,x_m^0, y)$ е строго растяща в интервала $[y^0-\rho, y^0+\rho]$. Тъй като $\varphi(y^0)=0$, то ще имаме $\varphi(y^0-\rho)<0$ и $\varphi(y^0+\rho)>0$, т. е. $F(x_1^0,\dots,x_m^0, y^0-\rho)<0$ и $F(x_1^0,\dots,x_m^0, y^0+\rho)>0$. Поради непрекъснатостта пък на функцията $F(x_1,\dots,x_m, y)$ в D можем да намерим такова $\delta>0$ $(\delta<\rho)$, че от неравенствата

$$|x_1-x_1^0|<\delta,\dots, |x_m-x_m^0|<\delta \tag{4}$$

да следват неравенствата

$$F(x_1,\dots,x_m, y^0-\rho)<0 \text{ и } F(x_1,\dots,x_m, y^0+\rho)>0. \tag{5}$$

Множеството от точки $(x_1,\dots,x_m)$ в m-мерното пространство, удовлетворяващи неравенствата (4), представлява една околност на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0)$. Ние ще означим тази околност с U и ще дефинираме в нея една функция $f(x_1,\dots,x_m)$ по следния начин. Нека $(x_1',\dots,x_m')$ е произволно взета точка от U, която ще считаме фиксирана за момента. Тогава можем да разглеждаме $F(x_1',\dots,x_m', y)$ като функция само на y — да означим тази функция с $\chi(y)$. Неравенството (3), приложено към точката $(x_1',\dots,x_m', y)$ сега ни дава $\chi'(y)>0$ за $y\in(y^0-\rho, y^0+\rho)$, което показва, че непрекъснатата функция $\chi(y)$ е строго растяща в интервала $[y^0-\rho, y^0+\rho]$. От неравенствата (5) обаче имаме $\chi(y^0-\rho)<0$ и $\chi(y^0+\rho)>0$. Оттук следва, че съществува, и то едно единствено число y', намиращо се между $y^0-\rho$ и $y^0-\rho$, за което е изпълнено равенството $\chi(y')=0$, т. е. $F(x_1',\dots,x_m', y')=0$. Това число y' ще приемем за стойност на функцията $f(x_1,\dots,x_m)$ в избраната точка $(x_1',\dots,x_m')$.

И така вече дефинирахме функцията $f(x_1, \dots, x_m)$ в множеството U. От самата дефиниция е ясно, че $f(x_1^0, \dots, x_m^0)=y^0$, че за всяка точка $(x_1, \dots, x_m)$ от U имаме $(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m))\in D$, както и че е изпълнено равенството (1). С това са установени твърденията б) и в) на теоремата.

Сега ще покажем, че функцията $f(x_1, \dots, x_m)$ е непрекъсната във всички точки на множеството U. Нека вземем отново една точка $(x_1', \dots, x_m')$ от U и нека $y'=f(x_1', \dots, x_m')$. Да вземем и едно произволно положително число ε. Можем да считаме, че сме взели ε толкова малко, че да имаме $y^0-\rho<y'-\varepsilon$ и $y'+\varepsilon<y^0+\rho$. Това е възможно, тъй като $y^0-\rho<y'<y^0+\rho$. Ако разгледаме отново функцията $\chi(y)=F(x_1', \dots, x_m', y)$, то поради равенството $\chi(y')=0$ и поради това, че $\chi(y)$ е строго растяща, ще видим, че $\chi(y'-\varepsilon)<0$ и $\chi(y'+\varepsilon)>0$, т. е. $F(x_1', \dots, x_m', y'-\varepsilon)<0$ и $F(x_1', \dots, x_m', y'+\varepsilon)>0$. Използувайки още веднъж непрекъснатостта на функцията $F(x_1, \dots, x_m, y)$ в D, ще намерим такова число $\delta'>0$, че от неравенствата

$$|x_1-x_1'|<\delta', \dots, |x_m-x_m'|<\delta' \tag{6}$$

да следват неравенствата

$$F(x_1, \dots, x_m, y'-\varepsilon)<0 \quad \text{и} \quad F(x_1, \dots, x_m, y'+\varepsilon)>0. \tag{7}$$

При това можем да считаме δ' взето толкова малко, че точките $(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяващи неравенствата (6), да не напускат U. От неравенствата (7) сега заключаваме, че за всяка точка $(x_1, \dots, x_m)$, чиито координати удовлетворяват неравенствата (6), единственото число y, намиращо се между $y^0-\rho$ и $y^0+\rho$, за което е изпълнено равенството $F(x_1, \dots, x_m, y)=0$, се намира между $y'-\varepsilon$ и $y'+\varepsilon$. Тъй като това число y не е нищо друго освен $f(x_1, \dots, x_m)$, то получаваме

$$|f(x_1, \dots, x_m)-f(x_1', \dots, x_m')|<\varepsilon.$$

С това е доказана непрекъснатостта на функцията $f(x_1, \dots, x_m)$ в произволна точка на множеството U, т. е. доказано е и твърдението а) на теоремата.

Пристъпваме към доказателството на твърдението г). Да допуснем, че в някоя околност U^* на точката $(x_1^0, \dots, x_m^0)$, която околност можем да считаме съдържаща се в U, е дефинирана една различна от $f(x_1, \dots, x_m)$ непрекъсната функция $f^*(x_1, \dots, x_m)$, такава, че да имаме $f^*(x_1^0, \dots, x_m^0)=y^0$ и

$$F(x_1, \dots, x_m, f^*(x_1, \dots, x_m))=0$$

за всяка точка $(x_1, \dots, x_m)$ от U^*. Това, че функциите $f(x_1, \dots, x_m)$ и $f^*(x_1, \dots, x_m)$ са различни, означава, че за някоя точка $(x_1^1, \dots, x_m^1)$ от U^* имаме

$$f(x_1^1, \dots, x_m^1)\neq f^*(x_1^1, \dots, x_m^1).$$

Да разгледаме точките $(x_1^t, \dots, x_m^t)$, където $0\leq t\leq 1$ и

$$x_k^t=x_k^0+t(x_k^1-x_k^0), \qquad k=1, 2, \dots, m,$$

и да означим с τ точната долна граница на стойностите на t, за които

$$(8) \qquad f(x_1^t, \dots, x_m^t) \neq f^*(x_1^t, \dots, x_m^t).$$

Ясно е, че $\tau \geqq 0$. Ако $\tau > 0$, то за $0 \leqq t < \tau$ ще имаме $f(x_1^t, \dots, x_m^t) = f^*(x_1^t, \dots, x_m^t)$. Като вземем пред вид непрекъснатостта на функциите $f(x_1, \dots, x_m)$ и $f^*(x_1, \dots, x_m)$, заключаваме, че ще имаме също

$$f(x_1^\tau, \dots, x_m^\tau) = f^*(x_1^\tau, \dots, x_m^\tau).$$

Оттук е ясно, че $\tau < 1$. Ако $y^\tau = f(x_1^\tau, \dots, x_m^\tau) = f^*(x_1^\tau, \dots, x_m^\tau)$, то $y^0 - \rho < y^\tau < y^0 + \rho$. Ето защо, опирайки се отново върху непрекъснатостта на двете разглеждани функции, ще можем да намерим такова $\delta_1 > 0$, че $\tau + \delta_1 < 1$ и при $\tau < t < \tau + \delta_1$ да бъдат изпълнени както неравенствата

$$y^0 - \rho < f(x_1^t, \dots, x_m^t) < y^0 + \rho,$$

така и неравенствата

$$y^0 - \rho < f^*(x_1^t, \dots, x_m^t) < y^0 + \rho.$$

Но тъй като при $\tau < t < \tau + \delta_1$ точките $(x_1^t, \dots, x_m^t)$ принадлежат на U^*, а следователно и на U, то ще имаме и равенствата

$$F(x_1^t, \dots, x_m^t, f(x_1^t, \dots, x_m^t)) = 0$$

и

$$F(x_1^t, \dots, x_m^t, f^*(x_1^t, \dots, x_m^t)) = 0.$$

Както знаем обаче, за всяка точка $(x_1, \dots, x_m)$ от U съществува между $y^0 - \rho$ и $y^0 + \rho$ една единствена стойност на y, за която е в сила равенството

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0.$$

Оттук заключаваме, че при $\tau < t < \tau + \delta_1$ имаме

$$f(x_1^t, \dots, x_m^t) = f^*(x_1^t, \dots, x_m^t),$$

и следователно точната долна граница на стойностите t, за които е изпълнено неравенството (8), не може да бъде по-малка от $\tau + \delta_1$. Това противоречи обаче на определението на числото τ. Полученото противоречие показва, че нашето допускане за съществуването на функция $f^*(x_1, \dots, x_m)$ с посочените по-горе свойства е било погрешно. С това е завършено доказателството на твърдението г) за единственост.

Най-сетне да се занимаем и с твърдението д). Да допуснем, че не само частната производна $F_y'(x_1, \dots, x_m, y)$, но също тъй за някое i и частната производна $F'_{x_i}(x_1, \dots, x_m, y)$ съществува и е непрекъсната в D. Ще покажем, че в такъв случай функцията $f(x_1, \dots, x_m)$ е диференцуема частно относно x_i във всяка точка U. Нека $(x_1, \dots, x_m)$ е произволно взета точка от U и нека точката $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m)$, където $h \neq 0$, принадлежи също на U. Ако $(x_1, \dots, x_m) = y$ и $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) = y + k$, то въз основа на равенството (1) ще имаме

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$$

и

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m, y + k) = 0.$$

Тогава ще получим

$$\begin{aligned}0&=F(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_m,y+k)-F(x_1,\dots,x_m,y)\\&=[F(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_m,y+k)-F(x_1,\dots,x_m,y+k)]\\&\quad+[F(x_1,\dots,x_m,y+k)-F(x_1,\dots,x_m,y)]\\&=hF_{x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta_1 h,x_{i+1},\dots,x_m,y+k)\\&\quad+kF_y'(x_1,\dots,x_m,y+\theta_2 k),\end{aligned}$$

където $0<\theta_1<1$ и $0<\theta_2<1$ (последното равенство е получено с помощта на теоремата на крайните нараствания, приложена поотделно към двете разлики, написани в средните скоби).

Следователно ще имаме

$$\frac{k}{h}=-\frac{F'_{x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta_1 h,x_{i+1},\dots,x_m,y+k)}{F_y'(x_1,\dots,x_m,y+\theta_2 k)}.$$

Като вземем пред вид, че

$$k=f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_m)-f(x_1,\dots,x_m),$$

ще получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_m)-f(x_1,\dots,x_m)}{h}$$

$$=-\lim_{h}\frac{F'_{x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta_1 h,x_{i+1},\dots,x_m,y+k)}{F_y'(x_1,\dots,x_m,y+\theta_2 k)}.$$

Оттук, като използуваме това, че поради непрекъснатостта на $f(x_1,\dots,x_m)$ имаме $\lim\limits_{h\to 0}k=0$, заключаваме, че функцията $f(x_1,\dots,x_m)$ е диференцуема частно спрямо x_i в произволно взетата точка $(x_1,\dots,x_m)$ и че

$$f'_{x_i}(x_1,\dots,x_m)=-\frac{F'_{x_i}(x_1,\dots,x_m,y)}{F_y'(x_1,\dots,x_m,y)}.$$

С това е доказано и равенството (2). От това равенство се вижда и непрекъснатостта на $f'_{x_i}(x_1,\dots,x_m)$ в U. По този начин теорема 1 е доказана докрай.

Общият случай, при който срещаме неявни функции — случаят, когато няколко неявни функции се определят едновременно от една система уравнения, е предмет на следната по-обща

Теорема 2. *Нека функциите*

(9) $$F_k(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n),\quad k=1,2,\dots,n,$$

са дефинирани, непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни относно променливите y_j $(j=1,2,\dots,n)$ *в някоя околност* D *на точката* $(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_n^0)$ *в* $(m+n)$*-мерното пространство. Да предположим още, че*

(10) $$F_k(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_n^0)=0,\quad k=1,2,\dots,n,$$

и

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

където

$$F_{k,i}=(F_k)'_{y_i}(x_1^0,\dots,\ x_m^0,\ y_1^0,\dots,\ y_n^0),\quad k=1,\dots,\ n,\ i=1,\dots,\ n.$$

Тогава съществуват такава околност U на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0)$ в m-мерното пространство и такива функции

$$(12)\qquad f_k(x_1,\dots,x_m),\quad k=1,2,\dots,n,$$

че:

а) *функциите* (12) *са дефинирани и непрекъснати в U;*

б) $f_k(x_1^0,\dots,\ x_m^0)=y_k^0$ *за* $k=1,\ 2,\dots,\ n$;

в) *за* $(x_1,\dots,x_m)\in U$ *имаме*

$$(13)\qquad (x_1,\dots,x_m,\ f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))\in D$$

и

$$(14)\quad F_k(x_1,\dots,x_m,f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))=0,\ k=1,\ 2,\dots,\ n,$$

г) *функциите* (12) *образуват единствената система от n функции удовлетворяваща изискванията* а), б) *и* в);

д) *ако за някое i частните производни на функциите* (9) *относно променливата x_i съществуват и са непрекъснати в D, то в U съществуват и са непрекъснати частните производни на функциите* (12) *относно x_i.*

Доказателство. Ще докажем теоремата по метода на пълната математична индукция, приложена относно n. При $n=1$ теорема 2 преминава, както веднага се вижда, в доказаната вече теорема 1. Нека сега $n>1$. Ще допуснем че теорема 2 е вярна винаги когато броят на функциите (9) (който е равен на броя на променливите y_i) е по-малък от n, и ще разгледаме случая, който ни е даден във формулировката на теоремата.

Ще считаме, че множеството D, за което се говори в условието на теоремата, е определено от неравенствата

$$|x_i-x_i^0|<d\ (i=1,\dots,\ m),\quad |y_j-y_j^0|<d\quad (j=1,\dots,\ n),$$

където $d>0$.

Тъй като детерминантата, написана в лявата страна на неравенството (11), е различна от нула, то поне един от нейните елементи ще бъде също различен от нула. Нека такъв е например $F_{n,n}$. По-подробно записано, ще имаме

$$(F_n)'_{y_n}(x_1^0,\dots,\ x_m^0,\ y_1^0,\dots,\ y_n^0)\neq 0.$$

Това неравенство ни дава възможност, прилагайки теорема 1, да намерим едно положително число δ_1, по-малко от d, и една функция $g(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1})$, такива, че:

1) тази функция е дефинирана и непрекъсната в $(m+n-1)$-мерната околност U_1 на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0, y_1^0,\dots,y_{n-1}^0)$, определена чрез неравенствата

$$|x_i-x_i^0|<\delta_1 \quad (i=1,\dots, m), \qquad |y_j-y_j^0|<\delta_1 \quad (j=1,\dots, n-1);$$

2) изпълнено е равенството

$$(15) \qquad g(x_1^0,\dots,x_m^0, y_1^0,\dots, y_{n-1}^0)=y_n^0;$$

3) за всяка точка $(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1})$ от U_1 имаме

$$(16) \qquad (x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1}, g(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1}))\in D$$

и

$$(17) \qquad F_n(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1}, g(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1}))=0;$$

4) функцията $g(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1})$ е диференцуема частно относно променливите $y_1,\dots,y_{n-1}$ в U_1 и нейните частни производни са непрекъснати в U_1, като при това имаме

$$(18) \qquad g'_{y_j}(x_1^0,\dots, x_m^0, y_1^0,\dots, y_{n-1}^0)=-\frac{F_{n,j}}{F_{n,n}} \quad (j=1,\dots, n-1).$$

Да разгледаме сега при $k=1,2,\dots,n-1$ функциите

$$(19) \qquad \begin{aligned} &G_k(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1}) \\ &=F_k(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1}, g(x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_{n-1})) \end{aligned}$$

и да се убедим, че тези $n-1$ на брой функции удовлетворяват условията на теоремата в околността U_1 на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0, y_1^0,\dots,y_{n-1}^0)$. Тяхната непрекъснатост и диференцуемост относно $y_1,\dots,y_{n-1}$, както и непрекъснатостта на техните частни производни в U_1 се виждат веднага. От равенствата (15) и (10) пък следват равенствата

$$G_k(x_1^0,\dots, x_m^0, y_1^0,\dots, y_{n-1}^0)=0, \qquad k=1,\dots, n-1.$$

По-нататък нека

$$G_{k,j}=(G_k)'_{y_j}(x_1^0,\dots, x_m^0, y_1^0,\dots, y_{n-1}^0),$$

където $k=1,\dots,n-1$; $j=1,\dots,n-1$. Вземайки пред вид равенствата (18), получаваме

$$G_{k,j}=F_{k,j}-F_{k,n}\frac{F_{n,j}}{F_{n,n}}.$$

Ето защо ще имаме

$$\begin{vmatrix} G_{1,1} & \dots & G_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ G_{n-1,1} & \dots & G_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{1,1}-F_{1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{1,n-1}-F_{1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n-1,1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{n-1,n-1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{1,1}-F_{1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{1,n-1}-F_{1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}} & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ F_{n-1,1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{n-1,n-1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}} & 0 \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n-1} & \frac{F_{1,n}}{F_{n,n}} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ F_{n-1,1} & \dots & F_{n-1,n-1} & \frac{F_{n-1,n}}{F_{n,n}} \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{F_{n,n}}\begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

По такъв начин виждаме, че функциите (19), чийто брой е $n-1$, наистина удовлетворяват всички условия на теорема 2 в $'U_1$. Следователно ще съществува в m-мерното пространство някаква околност U на точката $(x_1^0, \dots, x_m^0)$, определена от неравенствата

$$|x_i-x_i^0|<\delta \qquad (i=1,\ 2, \dots,\ m),$$

в която са дефинирани $n-1$ на брой функции

(20) $$f_k(x_1, \dots, x_m), \qquad k=1, 2, \dots, n-1,$$

като при това:

1) функциите (20) са непрекъснати в U;

2) в сила са равенствата

(21) $$f_k(x_1^0, \dots, x_m^0)=y_k^0, \quad k=1,\ 2, \dots,\ n-1;$$

3) за $(x_1, \dots, x_m)\in U$ имаме

(22) $$(x_1, \dots, x_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_m))\in U_1$$

и

(23) $$G_k(x_1, \dots, x_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_m))=0,$$
$$k=1, \dots, n-1.$$

Нека сега дефинираме в U функцията $f_n(x_1, \dots, x_m)$ чрез равенството

(24) $f_n(x_1, \dots, x_m)=g(x_1, \dots, x_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_m))$.

Ще проверим, че системата от функции $f_k(x_1, \dots, x_m)$, $k=1, 2, \dots, n$, в която освен функциите (20) е включена още и функцията (24), удовлетворява твърденията на теоремата 2, отнасящи се до функциите (12), в околността U на точката $(x_1^0, \dots, x_m^0)$. Непрекъснатостта на функциите $f_k(x_1, \dots, x_m)$ в множеството U е очевидна, значи твърдението а) е изпълнено

Поради равенствата (15), (21) и (24) ще имаме

$$f_n(x_1^0, \dots, x_m^0)=y_n^0.$$

Последното равенство заедно с равенствата (21) показва, че и твърдението б) е изпълнено.

За всяка точка $(x_1, \dots, x_m)$, принадлежаща на U, от (22) и (16) следва (13), а от равенствата (19), (23), (17) и (24) следват равенствата (14). С това е доказано и твърдението в).

Що се отнася до твърдението д), неговата проверка (извършена чрез математична индукция относно n с помощта на равенство (24)) вече не представлява трудност и може да се предостави на читателя.

Най-сетне ще се спрем на твърдението г) за единственост. Неговото доказателство, което само ще скицираме, се опира на следното допълнително твърдение:

Околността U на точката $(x_1^0, \dots, x_m^0)$, за която се говори във формулировката на теоремата (и която вече построихме по-горе), може да бъде определена по такъв начин, че да притежава следното свойство: съществува положително число ρ, такова, че за всяка точка $(x_1, \dots, x_m)$ от U единствената n-орка числа $y_1, \dots, y_n$, удовлетворяващи неравенствата

$$y_k^0-\rho<y_k<y_k^0+\rho \qquad (k=1, \dots, n)$$

и равенствата

$$F_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)=0 \qquad (k=1, \dots, n),$$

е n-орката, състояща се от числата

$$y_k=f_k(x_1, \dots, x_m) \qquad (k=1, \dots, n).$$

Изказаното твърдение може да бъде доказано по метода на пълната математична индукция (при $n=1$ то бе установено при доказателството на теорема 1). След това твърдението г) на теорема 2 се доказва с помощта на разсъждения, подобни на онези, с които доказахме твърдението г) на теорема 1.

Така доказателството на теорема 2 е завършено.

82. Формула на Тейлор за функции на две променливи

При функциите на две променливи съществува формула, носеща името **формула на Тейлор**, която е подобна на познатата ни формула на Тейлор за функции на една променлива и която се извежда именно с помощта на споменатата формула.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава частни производни до $(n+1)$-ви ред включително в някаква околност D на точката (x_0, y_0) и нека всичките ѝ частни производни са непрекъснати в тази околност. Да вземем друга точка (x_0+h, y_0+k), лежаща също в D. След това да образуваме функцията

$$\varphi(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt),$$

където h и k разглеждаме като постоянни, а t — като променлива. Когато променливата t се мени в интервала $[0, 1]$, точката (x_0+ht, y_0+kt) ще описва отсечката, съединяваща точките (x_0, y_0) и (x_0+h, y_0+k), и следователно също ще лежи в околността D. Поради условията, на които подчинихме функцията $f(x, y)$, оттук следва, че функцията $\varphi(t)$ ще бъде дефинирана и $n+1$ пъти диференцуема в интервала $[0, 1]$. Това ни дава право да твърдим, че формулата на Маклорен

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1!}\varphi'(0)+\frac{t^2}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)+R_n$$

е валидна за всяко t, удовлетворяващо неравенствата $0\leq t\leq 1$. Тук имаме

$$R_n=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta t),$$

където θ е число, намиращо се между 0 и 1.

При $t=1$ получаваме

$$(1)\quad \varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta).$$

Нашата най-близка цел сега ще бъде да напишем подробно равенството (1), като изхождаме от дефиницията на функцията $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt).$$

Диференцираме последователно това равенство и получаваме

$$\varphi'(t)=f'_x(x_0+ht,\ y_0+kt)h+f'_y(x_0+ht,\ y_0+kt)k,$$

$$\varphi''(t)=f''_{x^2}(x_0+ht,\ y_0+kt)h^2+2f''_{xy}(x_0+ht,\ y_0+kt)hk$$
$$+f''_{y^2}(x_0+ht,\ y_0+kt)k^2.$$

С помощта на метода на пълната математична индукция намираме

$$\varphi^{(n)}(t)=f^{(n)}_{x^n}(x_0+ht,\ y_0+kt)h^n+\binom{n}{1}f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0+ht,\ y_0+kt)h^{n-1}k$$
$$+\cdots+\binom{n}{n}f^{(n)}_{y^n}(x_0+ht,\ y_0+kt)k^n.$$

От тези равенства следва, че

$$\varphi(0)=f(x_0,\ y_0),$$

$$\varphi'(0)=f_x'(x_0,\ y_0)h+f_y'(x_0,\ y_0)k,$$

$$\varphi''(0)=f''_{x^2}(x_0,\ y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)hk+f''_{y^2}(x_0,\ y_0)k^2,$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}_{x^n}(x_0,\ y_0)h^n+\binom{n}{1}f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0,\ y_0)h^{n-1}k+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}f^{(n)}_{y^n}(x_0,\ y_0)k^n.$$

От друга страна, имаме

$$\varphi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k).$$

Следователно равенството (1) се превръща в следното:

$$(2)\qquad f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{1!}[f_x'(x_0,\ y_0)h+f_y'(x_0,\ y_0)k]$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0,\ y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)hk+f''_{y^2}(x_0,\ y_0)k^2]$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{1}{n!}[f^{(n)}_{x^n}(x_0,\ y_0)h^n+\binom{n}{1}f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0,\ y_0)h^{n-1}k+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}f^{(n)}_{y^n}(x_0,\ y_0)k^n]+R_n.$$

Тук имаме

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\Big[f^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)h^{n+1}$$

$$+\binom{n+1}{1}f^{(n+1)}_{x^ny}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)h^nk$$

$$+\cdots+\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}_{y^{n+1}}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)k^{n+1}\Big],$$

където θ е някакво число, намиращо се между 0 и 1.

Формулата (2) се нарича *формула на Тейлор* за функции на две независими променливи.*

---

* От изложеното доказателство се вижда, че за верността на формулата (2) не е необходимо точката $(x_0+h,\ y_0+k)$ да лежи в някоя околност D на точката $(x_0,\ y_0)$, в която околност е изпълнено условието за съществуване на частните производни; достатъчно е (стига това условие да е изпълнено за всички точки от вътрешността на дефиниционната област M на функцията $f(x,\ y)$) да предположим, че отсечката, съединяваща точките $(x_0,\ y_0)$ и $(x_0+h,\ y_0+k)$, лежи изцяло във вътрешността на M.

$$+\frac{1}{1!}(f_x'(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)h+f_y'(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)k.$$

$$\lim_{h\to 0,\ k\to 0} f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0),$$

което именно показва, че функцията $f(x,\ y)$ е непрекъсната в тази точка

§ 83. Максимум и минимум на функции на две променливи

Нека е дадена една функция $f(x,\ y)$ с дефиниционна област M и нека точката $(x_0,\ y_0)$ е вътрешна за M. *Казваме, че функцията $f(x,\ y)$ има локален максимум в точката $(x_0,\ y_0)$, ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството*

$$(1)\qquad f(x,\ y)\leqq f(x_0,\ y_0).$$

Аналогично *функцията $f(x,\ y)$ притежава локален минимум в точката $(x_0,\ y_0)$, ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството*

$$(2)\qquad f(x,\ y)\geqq f(x_0,\ y_0).$$

Локалните максимуми и локалните минимуми на една функция и тук се наричат с общото име локални екстремуми.

Следващата теорема ни дава едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум.

Теорема 1. *Ако функцията $f(x,\ y)$ има локален екстремум в точката $(x_0,\ y_0)$ и притежава първи частни производни в тази точка, то*

$$f_x'(x_0,\ y_0)=f_y'(x_0,\ y_0)=0.$$

Доказателство. Да разгледаме случая, когато $f(x,\ y)$ има локален максимум в точката $(x_0,\ y_0)$. Ако образуваме функцията $\varphi(x)=f(x,\ y_0)$, то неравенството

$$f(x,\ y_0)\leqq f(x_0,\ y_0),$$

което е сигурно изпълнено в някоя околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на x_0, може да се запише във вида

$$\varphi(x)\leqq\varphi(x_0).$$

Следователно функцията $\varphi(x)$ има локален максимум в точката x_0 и съгласно теоремата на Ферма ще имаме $\varphi'(x_0)=0$, или, което е все едно, $f_x'(x_0, y_0)=0$.

Аналогично, като разгледаме функцията $\psi(y)=f(x_0, y)$, получаваме $f_y'(x_0, y_0)=0$.

Случаят, когато $f(x, y)$ има локален минимум в точката (x_0, y_0), се разглежда по същия начин.

Анулирането на първите частни производни обаче не е достатъчно за съществуването на локален екстремум. В това можем да се убедим, като разгледаме функцията

$$f(x, y)=x^3+y^3$$

в точката (0, 0). Тук имаме $f_x'(0,0)=f_y'(0, 0)=0$. Но функцията няма нито локален максимум, нито локален минимум в тази точка, тъй като при $x>0$ и $y>0$ имаме $f(x, y)>f(0, 0)$, а при $x<0$, $y<0$ имаме $f(x, y)<f(0,0)$ и следователно не съществува такава околност на точката (0, 0), в която да бъде изпълнено неравенството (1) или пък неравенството (2).

Сега ще се запознаем с една теорема, даваща достатъчни условия за съществуването на локален екстремум:

Теорема 2. *Нека функцията $f(x, y)$ има непрекъснати първи и втори частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0).*

Ако

$$f_x'(x_0, y_0)=f_y'(x_0, y_0)=0 \tag{3}$$

и

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{x^2}(x_0, y_0)f''_{y^2}(x_0, y_0)<0, \tag{4}$$

то $f(x, y)$ има локален екстремум в точката (x_0, y_0). При това той е минимум, когато $f''_{x^2}(x_0, y_0)>0$, и е максимум, когато $f''_{x^2}(x_0, y_0)<0$.

Доказателство. Ще разгледаме подробно случая, когато

$$f''_{x^2}(x_0, y_0)<0. \tag{5}$$

Случаят, когато $f''_{x^2}(x_0, y_0)>0$, се третира съвсем аналогично (не е възможно да имаме $f''_{x^2}(x_0, y_0)=0$, тъй като тогава би се нарушило неравенството (4)).

Да въведем за удобство функцията

$$\varphi(x, y)=f''^2_{xy}(x, y)-f''_{x^2}(x, y)f''_{y^2}(x, y).$$

Неравенствата (4) и (5) показват, че функциите $f''_{x^2}(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ са различни от нула в точката (x_0, y_0). Съгласно предположенията на теоремата те са и непрекъснати, поради което ще запазват знака си в някоя околност D на тази точка. И така за всички точки от квадрата D ще имаме

$$f''_{x^2}(x, y)<0 \text{ и } \varphi(x, y)<0.$$

Да вземем сега една точка (x_0+h, y_0+k), принадлежаща на D.

$$(6)\quad \begin{aligned} f(x_0+h,\ y_0+k)&=f(x_0,\ y_0)\\ +\frac{1}{2!}\Big[f''_{x^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)h^2&+2f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)hk\\ &+f''_{y^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)k^2\Big], \end{aligned}$$

Нека положим за краткост

$$a=f''_{x^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),\quad b=f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),$$
$$c=f''_{y^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

Тогава равенството (6) може да се напише във вида

$$(7)\qquad f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2}\,[ah^2+2bhk+ck^2].$$

Тъй като точката $(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$ лежи върху отсечката, съединяваща точките $(x_0,\ y_0)$ и (x_0+h, y_0+k), тя също се намира в квадрата D и следователно са изпълнени неравенствата

$$f''_{x^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)<0 \text{ и } \varphi(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)<0.$$

С нашите означения последните две неравенства се записват така:

$$(8)\qquad a<0 \text{ и } b^2-ac<0.$$

Нека сега преработим израза в дясната страна на равенството (7). Имаме

$$\frac{1}{2}\,[ah^2+2bhk+ck^2]=\frac{1}{2a}\,[(a^2h^2+2abhk+b^2k^2-b^2k^2+ack^2]$$
$$=\frac{1}{2a}\,[(ah+bk)^2+(ac-b^2)k^2].$$

Оттук, като вземем пред вид неравенствата (8), виждаме, че

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\,[ah^2-2bhk+ck^2]\leqq 0.$$

Най-сетне равенството (7) и неравенството (9) показват, че

$$f(x_0+h,\ \ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)\leqq 0.$$

И тъй произволно взетата точка $(x_0+h,\ y_0+k)$ от околността D на точката $(x_0,\ y_0)$ удовлетворява неравенството

$$f(x_0+h,\ y_0+k)\leqq f(x_0,\ y_0).$$

Това показва, че функцията $f(x,\ y)$ има локален максимум в точката $(x_0,\ y_0)$.

Нека забележим, че когато прилагаме тази теорема, можем при определянето на това, дали в точката (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има максимум или минимум, да си послужим с $f''_{y^2}(x_0, y_0)$ вместо с $f''_{x^2}(x_0, y_0)$, тъй като неравенството (4) ни гарантира, че тези две числа имат един и същ знак.

Без да се спираме на доказателството, ще отбележим още, че ако са изпълнени условията на доказаната теорема, но вместо неравенството (4) имаме неравенството

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0) - f''_{x^2}(x_0, y_0)f''_{y^2}(x_0, y_0) > 0, \tag{10}$$

то функцията $f(x, y)$ няма локален екстремум в точката (x_0, y_0).

Ако пък имаме равенството

$$f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{x^2}(x_0, y_0)f''_{y^2}(x_0, y_0) = 0, \tag{11}$$

то е възможно както да имаме, тъй и да нямаме екстремум. В това можем да се убедим, като разгледаме функциите $f(x, y) = x^3 + y^3$ и $g(x, y) = x^4 + y^4$. И за двете функции равенството (11) е изпълнено в точката (0, 0). Но първата от тях, както видяхме вече в този параграф, няма локален екстремум в тази точка, докато за втората е очевидно, че притежава локален минимум в точката (0, 0).

Пример 1. Да намерим локалните екстремуми на функцията

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

Намираме

$$f'_x = 2x + y - 2, \quad f'_y = x + 2y - 1$$

и решаваме системата уравнения

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 1. \end{aligned}$$

Единственото решение на тази система е $x = 1$, $y = 0$. Това ще рече, че производните $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ се анулират едновременно само в точката (1, 0). От друга страна, имаме

$$f''_{x^2}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 1, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2$$

и следователно за всяка точка (x, y) ще имаме

$$f''^2_{xy}(x, y) - f''_{x^2}(x, y)f''_{y^2}(x, y) = -3 < 0.$$

И така дадената функция има един-единствен локален екстремум в точката (1, 0). Той е минимум, тъй като $f''_{x^2}(1, 0) > 0$. Стойността на самия минимум е $f(1, 0) = -1$.

Пример 2. Да потърсим локалните екстремуми на функцията

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

Намираме

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y, \quad f'_y(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x$$

и решаваме следната система уравнения:

$$x^3-x+y=0$$

(12) $$y^3+x-y=0.$$

Чрез почленно събиране получаваме

$$x^3+y^3=0,$$

или

(13) $$(x+y)(x^2-xy+y^2)=0.$$

Лесно е да се убедим, че изразът

(14) $$x^2-xy+y^2$$

става нула само при $x=y=0$. Наистина, ако $xy\leqq 0$, то и трите събираеми в този израз са неотрицателни и той може да бъде равен на нула само ако всички те са нули. А това ще рече, че $x=y=0$. Ако пък $xy>0$, то от равенствата

$$x^2-xy+y^2=x^2-2xy+y^2+xy=(x-y)^2+xy$$

виждаме, че изразът (14) се представя като сума от две събираеми, първото от които е неотрицателно, а второто — положително, т. е. че той е различен от нула.

И така вторият множител в уравнението (13) може да стане равен на нула само в точката (0, 0). Анулирането пък на първия множител ни дава

(15) $$y=-x,$$

откъдето, като заместим в първото уравнение на системата (12), получаваме

$$x^3-2x=0,$$

или

$$x(x^2-2)=0.$$

При $x=0$ от равенството (15) получаваме $y=0$, т. е. стигаме пак до точката (0, 0). Най-сетне равенството

$$x^2-2=0$$

заедно с равенството (15) ни довежда до двете точки $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Намираме по-нататък

$$f''_{x^2}(x, y)=12x^2-4, \quad f''_{xy}(x, y)=4, \quad f''_{y^2}(x, y)=12y^2-4.$$

Ако положим

$$\varphi(x, y)=f''^2_{xy}(x, y)-f''_{xx}(x, y)f''_{y^2}(x, y),$$

ще имаме

$$\varphi(x, y)=48(x^2+y^2-3x^2y^2).$$

Оттук получаваме

$$\varphi(0, 0)=0,$$

$$\varphi(-\sqrt{2}, \sqrt{2})=48(2+2-12)<0,$$

$$\varphi(\sqrt{2}, -\sqrt{2})=48(2+2-12)<0.$$

И тъй в точките $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ функцията $f(x, y)$ има локални екстремуми. Те и двата са минимуми, тъй като

$$f''_{x^2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})=20>0, \quad f''_{x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})=20>0.$$

Самата стойност на тези минимуми е

$$f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})=f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})=-8.$$

Що се отнася до точката (0, 0), теоремата от този параграф не ни дава нищо. Ние можем обаче с непосредствени разсъждения да се убедим, че в тази точка функцията няма екстремум. Наистина, от една страна, имаме

$$f(0, y)=y^4-2y^2=y^2(y^2-2)$$

— израз, който е сигурно отрицателен за малки по абсолютна стойност значения на y. От друга страна пък, при $y=x$ ще имаме

$$f(x, x)=2x^4,$$

който израз е винаги положителен при $x \neq 0$. Оттук виждаме, че във всяка околност на точката (0, 0) функцията $f(x, y)$ приема както положителни, тъй и отрицателни стойности, докато $f(0, 0)=0$.

Упражнения. Намерете всички локални екстремуми на функциите:

1. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$. 2. $z=x^3-y^3-3x+3y$. 3. $z=x^3+xy^2+6xy$.

4. $z=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, където $x>0$, $y>0$.

5. $z=\sin x \sin y \sin(x+y)$, където $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

6. $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$.

§ 84. Диференциране под знака на интеграла

Нека е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана и непрекъсната в правоъгълника D, даден с неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d. \tag{1}$$

При фиксирано y (взето произволно в интервала $[c, d]$) функцията $f(x, y)$ представлява непрекъсната функция на x в интервала $[a, b]$. Можем следователно да образуваме определения интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Стойността на този интеграл ще зависи, разбира се, от избора на точката y и ще представлява следователно функция на y, дефинирана в интервала $[c, d]$. За тази функция ние ще докажем следната теорема, която се използува на много места в анализа и неговите приложения.

Теорема. *Нека функцията* $f(x, y)$ *е дефинирана и диференцуема частно спрямо* y *в някакво отворено множество, съдържащо правоъгълника* D, *зададен с неравенствата* (1). *Ако функциите* $f(x, y)$ *и* $f_y'(x, y)$ *са непрекъснати в* D, *то функцията*

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

е диференцуема в интервала $[c, d]$ *и при това*

$$\Phi'(y)=\int_a^b f_y'(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Доказателство. Да изберем едно произволно положително число ε и да образуваме след това числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тъй като функцията $f_y'(x, y)$ е по предположение непрекъсната в затворения правоъгълник D, то съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост от § 72 ще съществува едно число δ, такова, че от

$$|h|<\delta, \ |k|<\delta$$

да следва неравенството

$$|f_y'(x+h, y+k)-f_y'(x, y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Да вземем сега една произволна точка y_0 от интервала $[c, d]$. Ще покажем, че при $|k|<\delta$ имаме

$$\left|\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}-\int_a^b f_y'(x, y_0)\,dx\right|<\varepsilon, \tag{3}$$

откъдето ще следва, че

$$\Phi'(y_0)=\int_a^b f_y'(x, y_0)\,dx. \tag{4}$$

Наистина имаме

$$\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}=\frac{1}{k}\int_a^b [f(x, y_0+k)-f(x, y_0)]\,dx. \tag{5}$$

Нека сега да фиксираме x, взето произволно в интервала $[a, b]$, и да разгледаме функцията $\psi(y)=f(x, y)$. Тази функция, явяваща се функция само на y, е диференцуема в интервала $[c, d]$ по предположение. Прилагаме към нея теоремата за крайните нараствания по отношение на затворения интервал, определен от y_0 и y_0+k, и получаваме

$$\psi(y_0+k)-\psi(y_0)=k\psi'(y_0+\theta k),$$

или по-подробно

$$f(x,\ y_0+k)-f(x,\ y_0)=kf_y'(x,\ y_0+\theta k),$$

където $0<\theta<1$. Като заместим в равенството (5), получаваме

$$\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}=\int_a^b f_y'(x,\ y_0+\theta k)\,dx.$$

Тогава ще имаме

$$\left|\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}-\int_a^b f_y'(x,\ y_0)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_a^b f_y'(x,\ y_0+\theta k)\,dx-\int_a^b f_y'(x,\ y_0)\,dx\right|,$$

откъдето

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\left|\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}-\int_a^b f_y'(x,\ y_0)\,dx\right|\\ &\leq\int_a^b |f_y'(x,\ y_0+\theta k)-f_y'(x,\ y_0)|\,dx.\end{aligned}$$

Нека сега $|k|<\delta$. Очевидно е, че и $|\theta k|<\delta$. Тогава поради избора на числото δ при всяко x (между a и b) ще бъде изпълнено неравенството

$$|f_y'(x,\ y_0+\theta k)-f_y'(x,\ y_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Последното неравенство показва, че в интервала $[a,\ b]$ числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$ се явява горна граница на функцията, написана в лявата страна на това неравенство. Ето защо ще имаме

$$(7)\qquad \int_a^b |f_y'(x,\ y_0+\theta k)-f_y'(x,\ y_0)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

От неравенствата (6) и (7) заключаваме, че при $|k|<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството (3). Оттук следва, че функцията $\Phi(y)$ е диференцуема в точката y_0 и че е в сила равенството (4). Но тъй като точката y_0 беше взета произволно в интервала $[c,\ d]$, то с това е доказано и твърдението на теоремата.

Ще отбележим, че равенството (2), което току-що доказахме, може да се запише още и по следния начин:

$$\left(\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right)' = \int_a^b f_y'(x,\ y)\,dx.$$

Ето защо доказаната теорема се нарича *теорема за диференциране под знака на интеграла*.

Пример. Ще използуваме теоремата за диференциране под знака на интеграла, за да пресметнем стойността на несобствения интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,.$$

В § 60 видяхме, че този интеграл е сходящ (но не абсолютно сходящ). С цел да го пресметнем, нека въведем функцията

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Тази функция е дефинирана за $\alpha \geqq 0$. Наистина при $\alpha > 0$ написаният по-горе несобствен интеграл е абсолютно сходящ (това се вижда много лесно с помощта на критерия за сходимост на несобствени интеграли с безкрайни граници), а при $\alpha = 0$ имаме

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Преди всичко ще докажем, че функцията $F(\alpha)$ е непрекъсната при $\alpha = 0$, т. е. че имаме

(8) $$\lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} F(\alpha) = F(0).$$

Да вземем едно положително число ε. Като имаме пред вид, че интегралът $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ е сходящ, ще можем да намерим такова число p (по-голямо от 1), че да имаме

(9) $$\int_p^\infty \frac{dx}{x^2} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Числото p ще считаме по-нататък фиксирано. Отчитайки, че $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq 1$ за всяко x ще получим (при $\alpha > 0$)

$$|F(\alpha) - F(0)| = \left|\int_0^\infty (e^{-\alpha x} - 1)\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right|$$

$$\leqq \int_0^p |e^{-\alpha x} - 1|\,dx + \left|\int_p^\infty (e^{-\alpha x} - 1)\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right|.$$

Поради неравенството $|e^{-\alpha x}-1|\leqq 1-e^{-\alpha p}$, изпълнено при $0\leqq x\leqq p$, ще имаме

$$\int_0^p |e^{-\alpha x}-1|\,dx \leqq p(1-e^{-\alpha p}). \tag{10}$$

От друга страна,*

$$\int_p^\infty (e^{-\alpha x}-1)\,\frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_p^\infty \frac{e^{-\alpha x}-1}{x}\,d\cos x$$

$$= \left|\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos x\right|_p^\infty + \int_p^\infty \cos x\, d\,\frac{e^{-\alpha x}-1}{x}$$

$$= \frac{e^{-\alpha p}-1}{p}\cos p + \int_p^\infty \cos x\,\frac{1-e^{-\alpha x}(1+\alpha x)}{x^2}\,dx.$$

Но при $x\geqq 1$ и $\alpha>0$ имаме

$$0\leq \frac{1+\alpha x}{e^{\alpha x}}\leq 1$$

това се вижда лесно, като се използва например маклореновото развитие на функцията $e^{\alpha x}$). Ето защо ще получим

$$\left|\int_p^\infty (e^{-\alpha x}-1)\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{1}{p}\,(1-e^{-\alpha p}) + \int_p^\infty \frac{dx}{x^2},$$

откъдето въз основа на неравенствата (9) и (10) ще имаме

$$|F(\alpha)-F(0)| \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)(1-e^{-\alpha p}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тъй като $\lim\limits_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} e^{-\alpha p}=1$, то за достатъчно малки положителни стойности на α ще бъде изпълнено неравенството

$$|F(\alpha)-F(0)|<\varepsilon,$$

с което е доказано равенството (8).

Нека сега разгледаме функцията $F(\alpha)$ като граница (при $\alpha>0$) на редицата от функции

$$F_1(\alpha),\ F_2(\alpha),\ \ldots,\ F_n(\alpha),\ \ldots, \tag{11}$$

където

$$F_n(\alpha)=\int_0^n e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

---

* Тук, както обикновено се прави в такива случаи, сме избягнали на някои места знака lim, считайки, че смисълът на написаните изрази е ясен и при този по-кратък начин на записване.

Да вземем едно произволно положително число α_0. Ще покажем, че към редицата (11) можем да приложим относно интервала $[\alpha_0, \infty)$ теоремата за почленно диференциране от § 64. За целта трябва да установим, че редицата от производните

(12) $$F_1'(\alpha),\ F_2'(\alpha), \ldots ,\ F_n'(\alpha), \ldots$$

е равномерно сходяща в този интервал. Въз основа на теоремата за диференциране под знака на интеграла получаваме

$$F_n'(\alpha) = -\int_0^n e^{-\alpha x} \sin x \, dx,$$

откъдето

$$\lim_n F_n'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx$$

(написаният в дясната страна на равенството несобствен интеграл е очевидно абсолютно сходящ). Сега при $\alpha \geqq \alpha_0$ ще имаме

$$\left| F_n'(\alpha) + \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx \right| = \left| \int_n^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx \right|$$

$$\leq \int_n^\infty e^{-\alpha x} dx = -\left| \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right|_n^\infty = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha n} \leq \frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 n}.$$

Изразът $\frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 n}$ обаче може да бъде направен по-малък от всяко положително число ε, стига да вземем n достатъчно голямо. Оттук заключаваме, че редицата (12) е равномерно сходяща в интервала $[\alpha_0, \infty)$. Това ни дава основание да твърдим, че функцията $F(\alpha)$ е диференцуема в този интервал и че

$$F'(\alpha) = \lim_n F_n'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx.$$

Но

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d \cos x = \left| e^{-\alpha x} \cos x \right|_0^\infty$$

$$+ \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x \, dx = -1 + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} d \sin x = -1 + \alpha \left| e^{-\alpha x} \sin x \right|_0^\infty$$

$$+ \alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx = -1 + \alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx,$$

откъдето

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Следователно при $\alpha\geqq\alpha_0$ имаме

$$F'(\alpha)=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Тъй като α_0 беше произволно положително число, последното равенство ще бъде изпълнено за всяко $\alpha>0$. Оттук следва (с помощта на основната теорема на интегралното смятане), че при $\alpha>0$ имаме

(13) $$F(\alpha)=-\operatorname{arc\,tg}\alpha+C,$$

където C е някаква константа. Това равенство ще бъде изпълнено и при $\alpha=0$ поради непрекъснатостта на функцията $F(\alpha)$ при $\alpha=0$, която установихме по-рано. За да пресметнем константата C, нека забележим, че

$$|F(\alpha)|\leq\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}.$$

Оттук е ясно, че

$$\lim_{\alpha\to\infty}F(\alpha)=0.$$

От друга страна, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\alpha=\frac{\pi}{2}$. От равенството (13) следва, че $C=\frac{\pi}{2}$. И така при $\alpha\geqq0$ имаме

$$F(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\alpha,$$

откъдето получаваме $F(0)=\frac{\pi}{2}$. Следователно

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

ГЛАВА XI

МЯРКА НА РАВНИННИ МНОЖЕСТВА

Тази глава е посветена на едно обобщение на понятието лице на многоъгълник в равнината. Ще покажем, че е възможно това обобщение да бъде въведено за една достатъчно широка категория равнинни точкови множества и ще го наречем мярка (за разлика от познатото ни от елементарната геометрия понятие лице). Съществуват различни начини да бъде постигната тази цел. Пътят, който ще следваме, ще ни доведе до т. нар. мярка на Пеано—Жордан. Това понятие ще ни бъде необходимо по-нататък при дефиницията на понятието двоен интеграл.

§ 85. Някои понятия от теорията на множествата. Теореми за контурите

Преди да преминем към излагането на теорията на мярката в равнината, ще се спрем на някои дефиниции и твърдения, които ще използваме по-нататък. Те се отнасят до равнината, но имат смисъл и запазват своята валидност за произволно n-мерно пространство, а някои от тях — по-специално онези, които ще разгледаме най-напред, въобще за множества от най-общ вид.

Ще започнем с въвеждането на няколко основни понятия.

Ако са дадени две точкови множества A и B и ако всички точки от множеството A принадлежат на множеството B (черт. 58), казваме, че A е подмножество на B, и бележим това така:

$$A \subset B.$$

Нека A и B са отново две точкови множества. Точките, които принадлежат поне на едното от тези две множества, образуват множество, наречено обединение на множествата A и B (черт. 59), което се бележи с

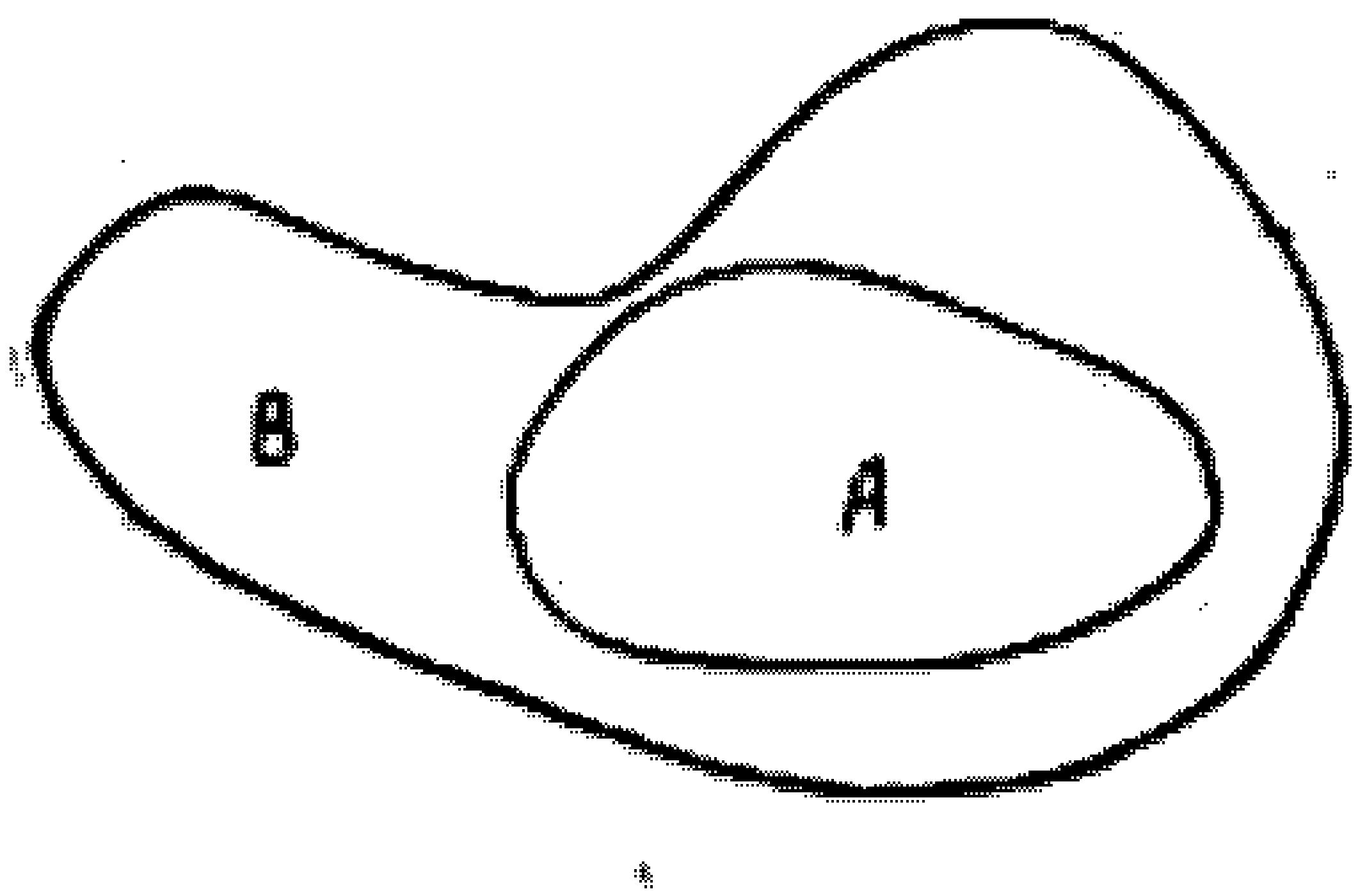
$$A \cup B.$$

Точките, принадлежащи както на множеството A, така и на множеството B, образуват множество, което се нарича сечение на множествата A и B (черт. 60) и се бележи с

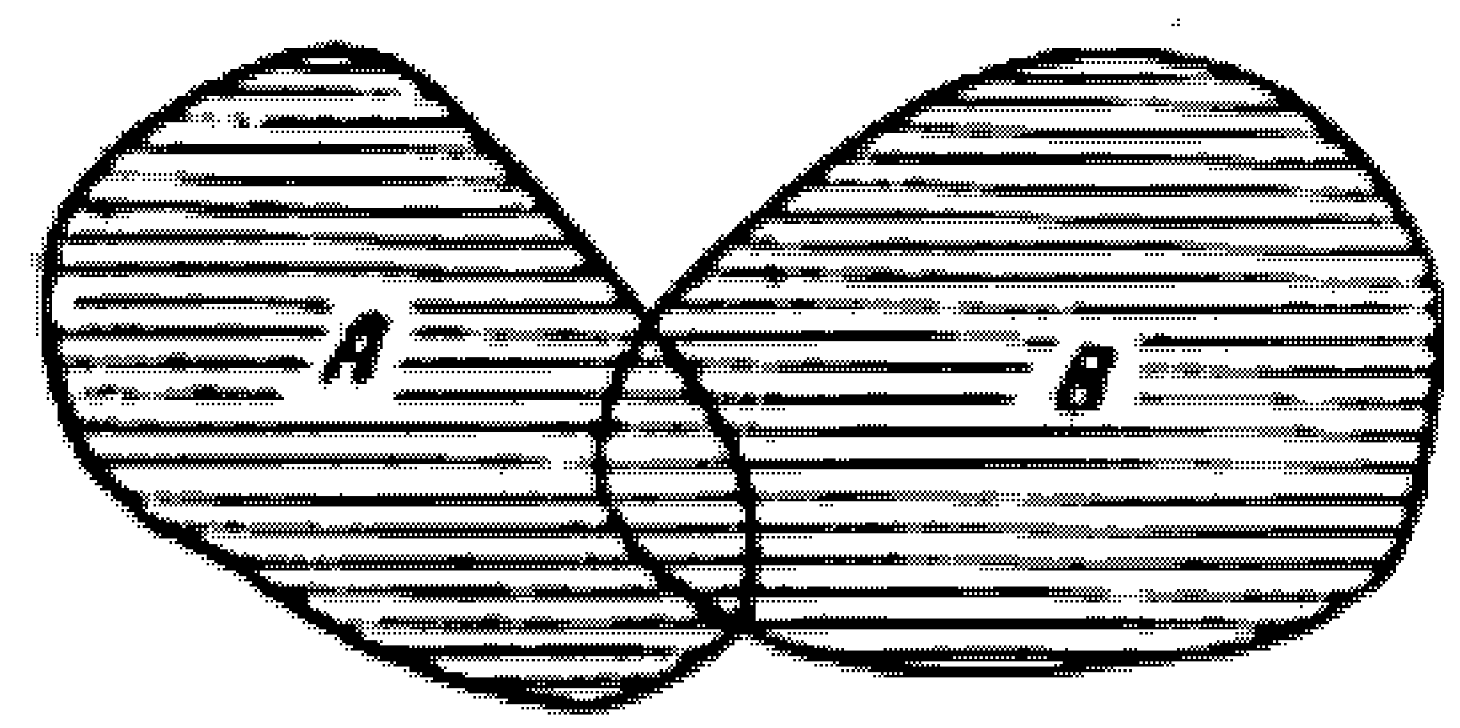
$$A \cap B.$$

Най-сетне множеството, образувано от точките, принадлежащи на A, но непринадлежащи на B (черт. 61), се нарича разлика на тези две множества и се бележи с

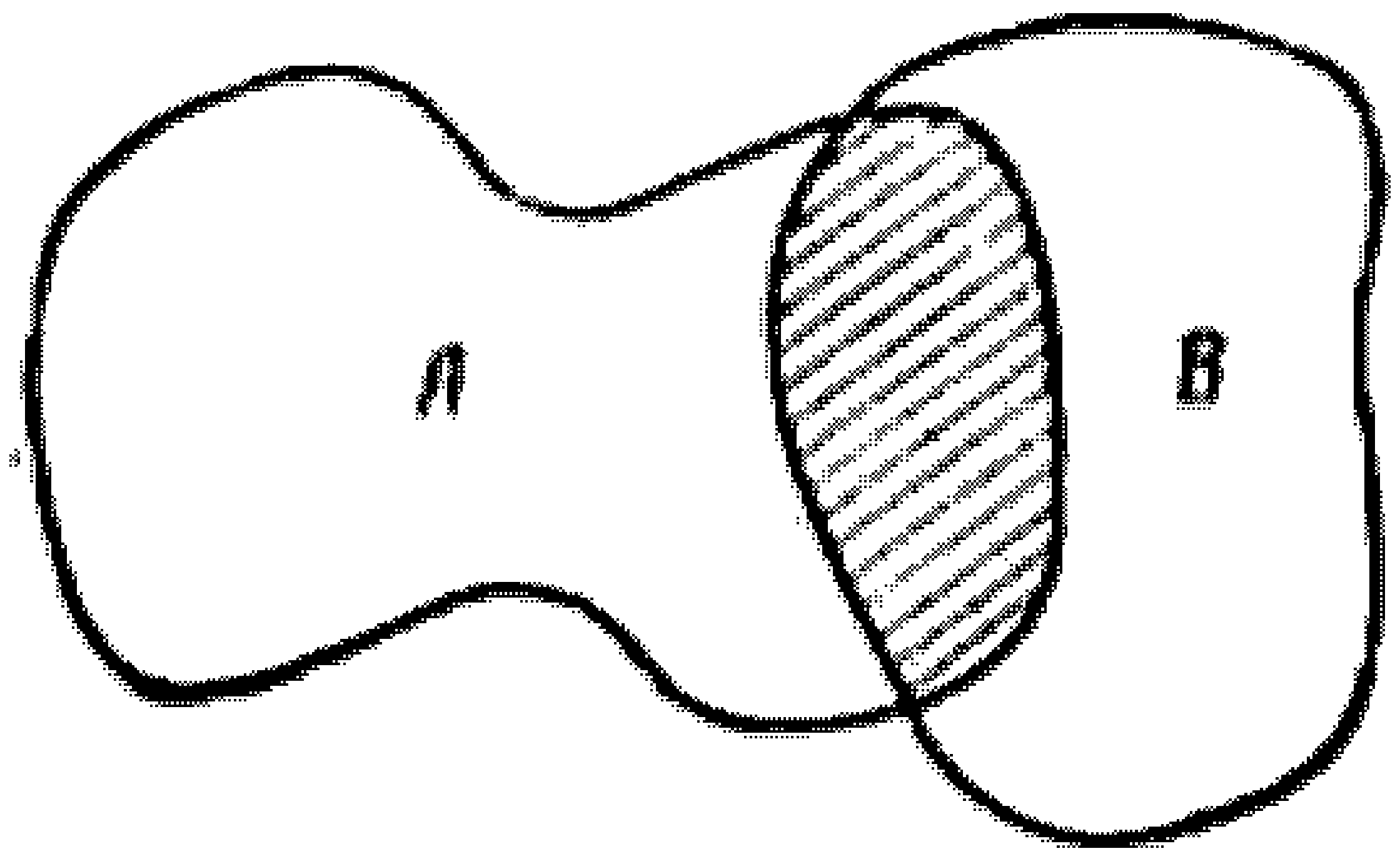
$$A—B.$$



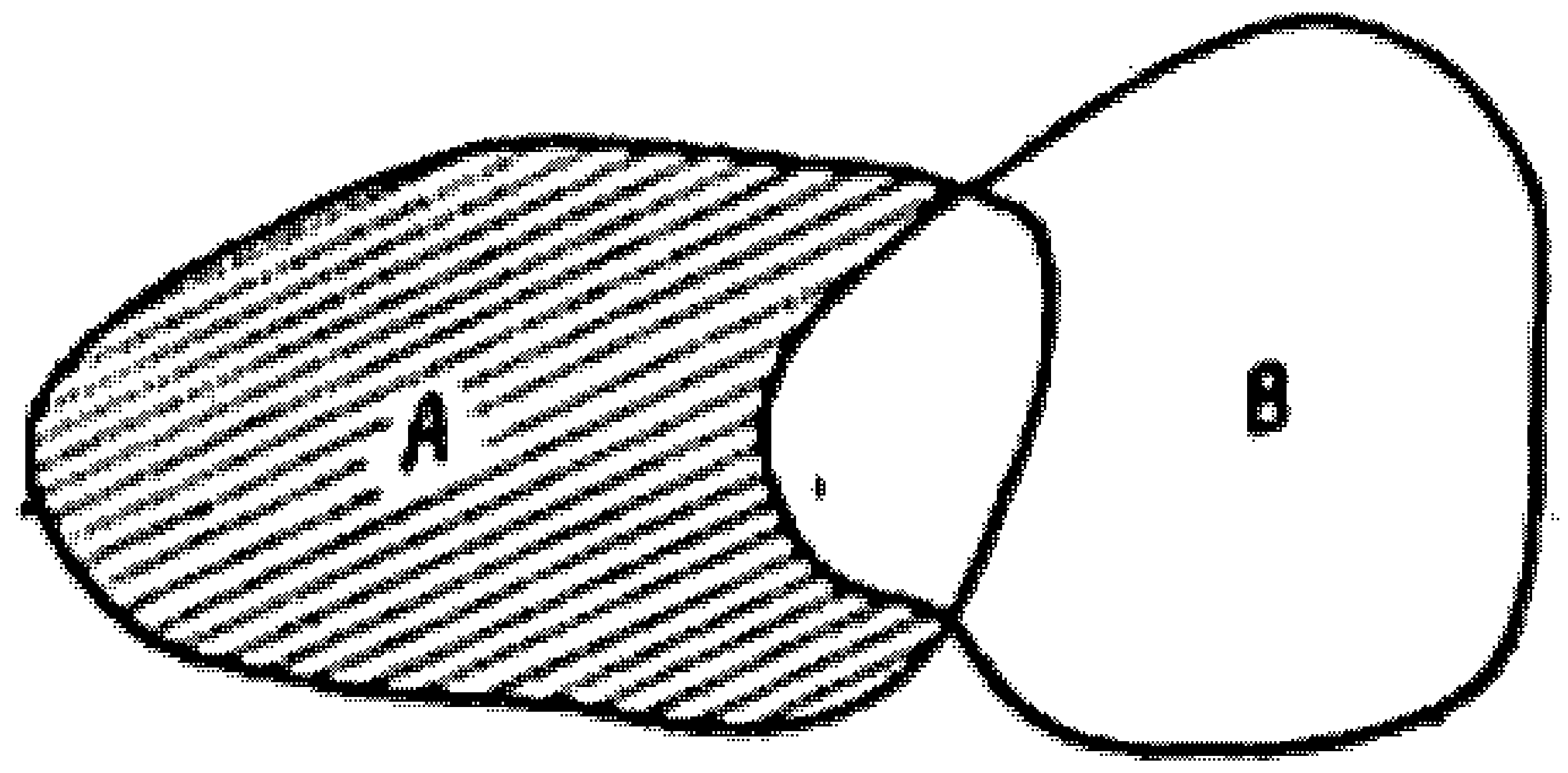
Черт. 58



Черт. 59



Черт. 60

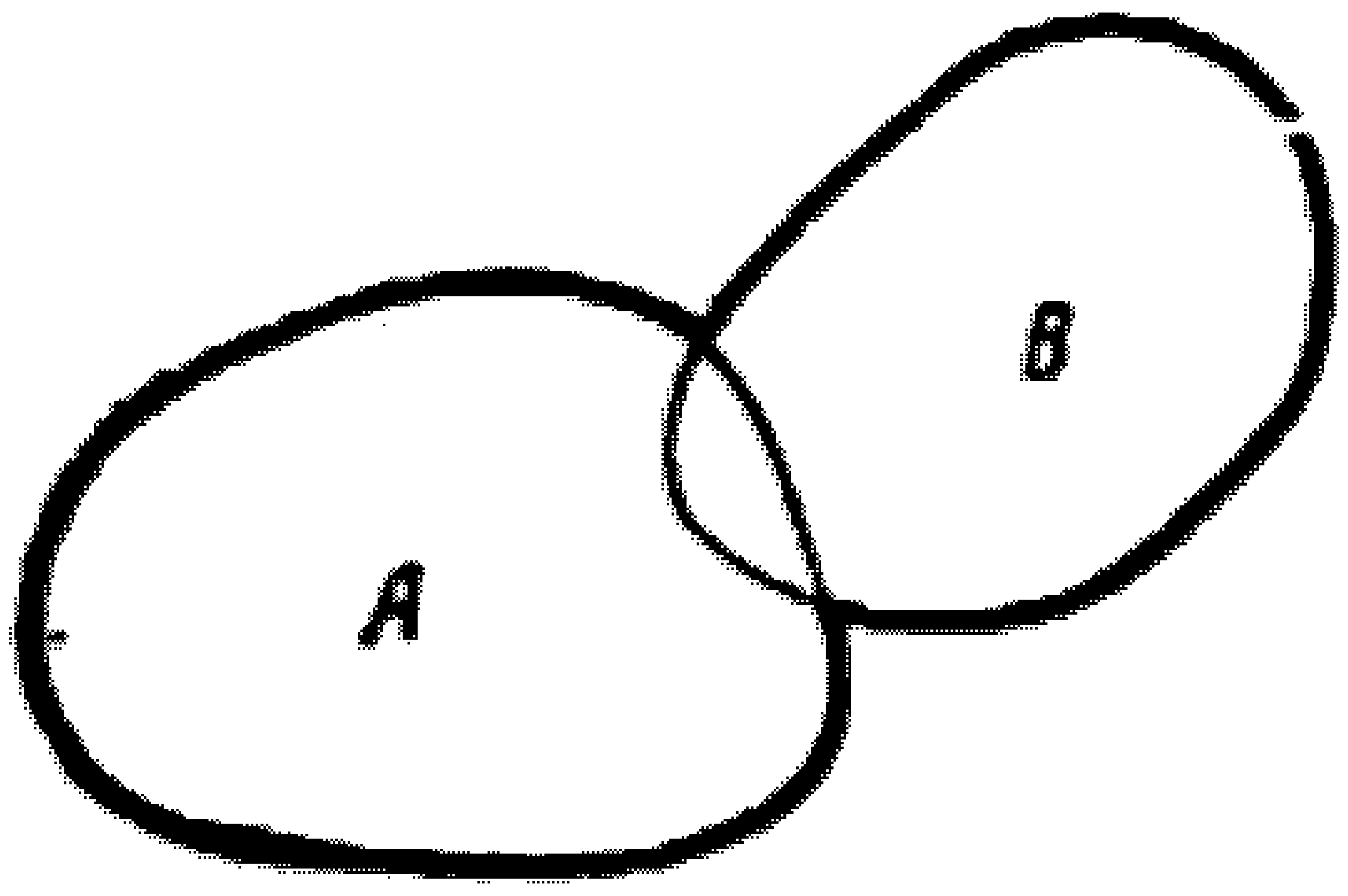


Черт. 61

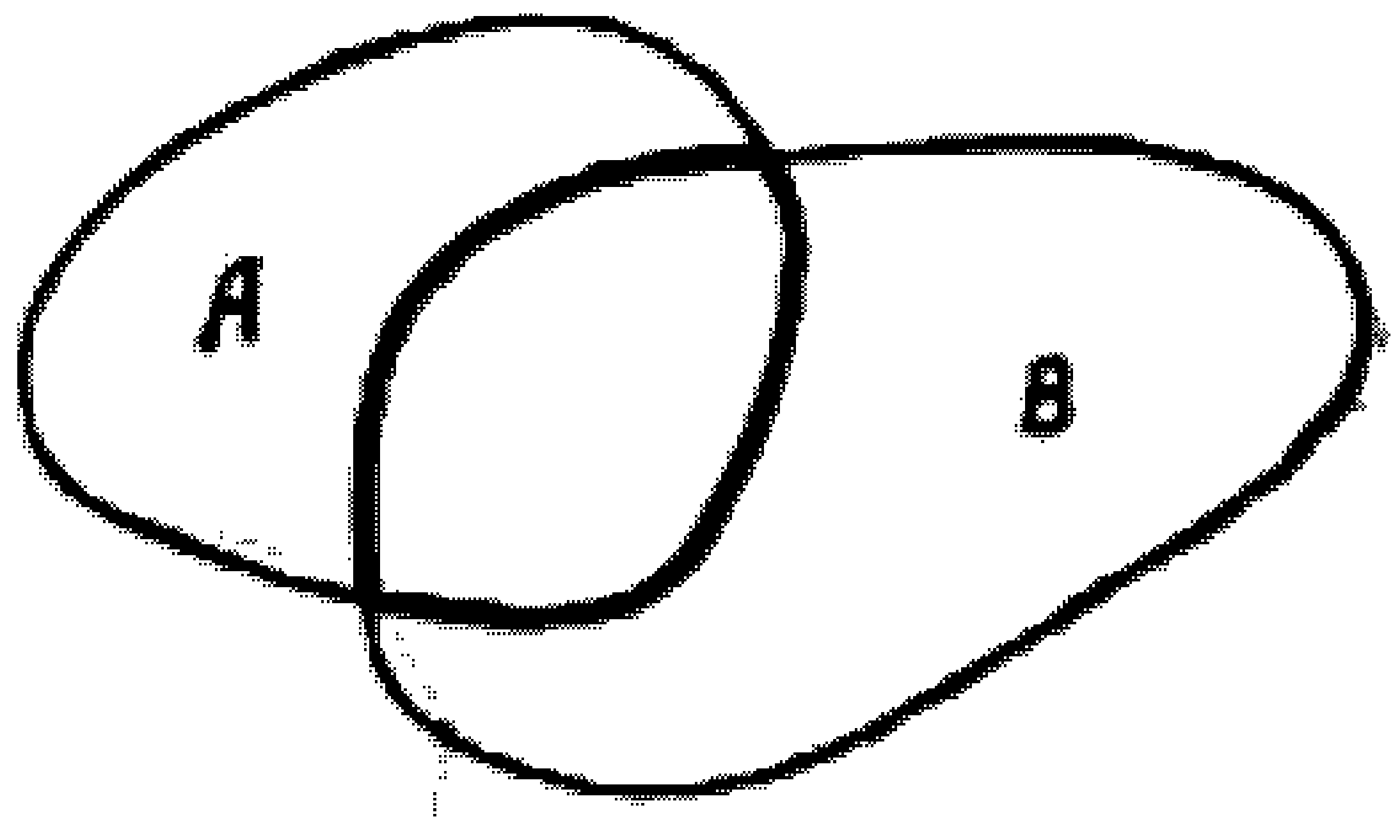
Във връзка с дефинициите на последните две понятия трябва да направим следната важна забележка: В математиката с оглед на известно удобство при разсъжденията относно множества е прието да се разглежда и т. нар. празно множество, т. е. множеството, което не съдържа никакви точки и което е прието да се счита за подмножество на всяко друго множество. Тази абстракция се оказва твърде полезна. Така например, ако не разполагахме с празното множество, въведеното по-горе понятие сечение на две множества A и B би било лишено от смисъл, когато тези две множества нямат общи точки. Също така понятието разлика на множествата A и B би изгубило смисъл, когато A е подмножество на B. Ние избягваме тази опасност, като допускаме възможността било сечението, било разликата на две множества да бъде празно множество.

Нека отбележим още, че понятието обединение на две множества по съвсем естествен начин се обобщава за произволен краен брой множества. Под обединение на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разбираме множеството A, съставено от всички точки, които принадлежат на поне едно от тези множества. Факта, че A е обединение на множествата A_1, $A_2, \dots, A_n$, записваме така:

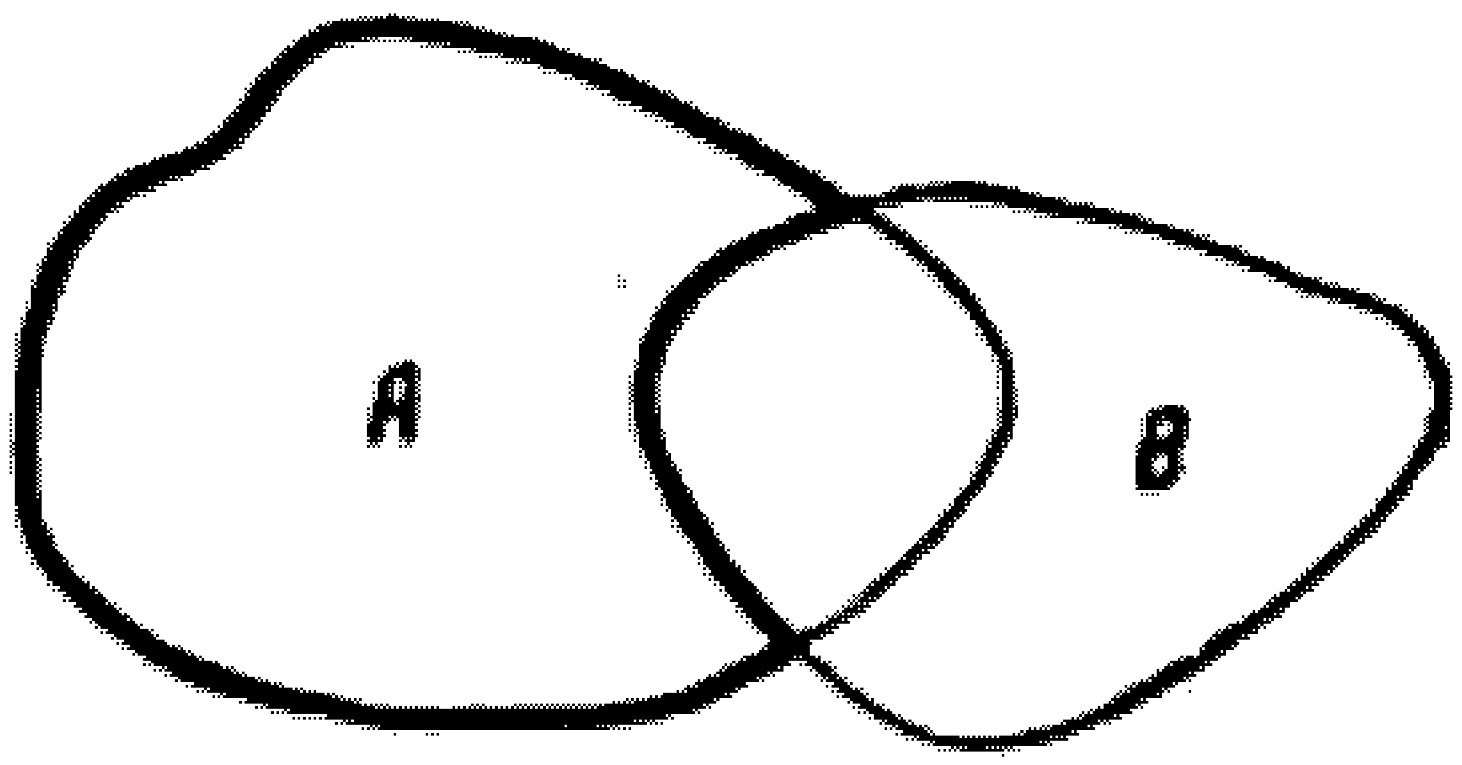
$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$



Черт. 62



Черт. 63



Черт. 64

Ще се обърнем сега към множествата в дадено n-мерно пространство. В § 71 ние нарекохме *контур* на едно множество множеството от всички негови контурни точки. Нека сега са дадени две множества A и B. Да означим с K_A контура на множеството A, а с K_B — контура на множеството B. Нека освен това означим за краткост с K обединението на контурите K_A и K_B, т. е. нека

$$K=K_A \cup K_B.$$

Ако сега означим с K' контура на множеството $A \cup B$ (черт. 62), с K'' — контура на множеството $A \cap B$ (черт. 63) и с K''' — контура на множеството $A—B$ (черт. 64), то

(1) $$K' \subset K, \quad K'' \subset K, \quad K''' \subset K.$$

За пример ще докажем първото от тези три твърдения, именно твърдението, че $K' \subset K$. Трябва да докажем, че всяка точка, която е контурна за множеството $A \cup B$, принадлежи поне на едно от множествата K_A и K_B. Да вземем произволна точка P, явяваща се контурна за $A \cup B$. Тази точка сигурно не е вътрешна нито за A, нито за B, защото, ако би била вътрешна например за множеството A, тя би притежавала околност, състояща се изцяло от точки, които принадлежат на A, а следователно и на $A \cup B$, т. е. тя би се оказала вътрешна и за множеството $A \cup B$. И така точката P е външна или контурна за A и също така външна или контурна за B. Да допуснем, че тя е външна както за A, така и за B. Тогава тя ще притежава такава околност D', която се състои изцяло от точки, непринадлежащи на A, а също и такава околност D'', която пък се състои изцяло от точки, непринадлежащи на B. Но в такъв случай по-малката от тези две околности ще бъде съставена от точки, които не принадлежат нито на A, нито на B. Това ще означава, че точката P е външна за множеството $A \cup B$, което не е вярно. Следователно тази точка трябва да бъде контурна поне за едно от двете множества A и B, т. е. да принадлежи на множеството $K_A \cup K_B$. С това е доказано, че $K' \subset K$.

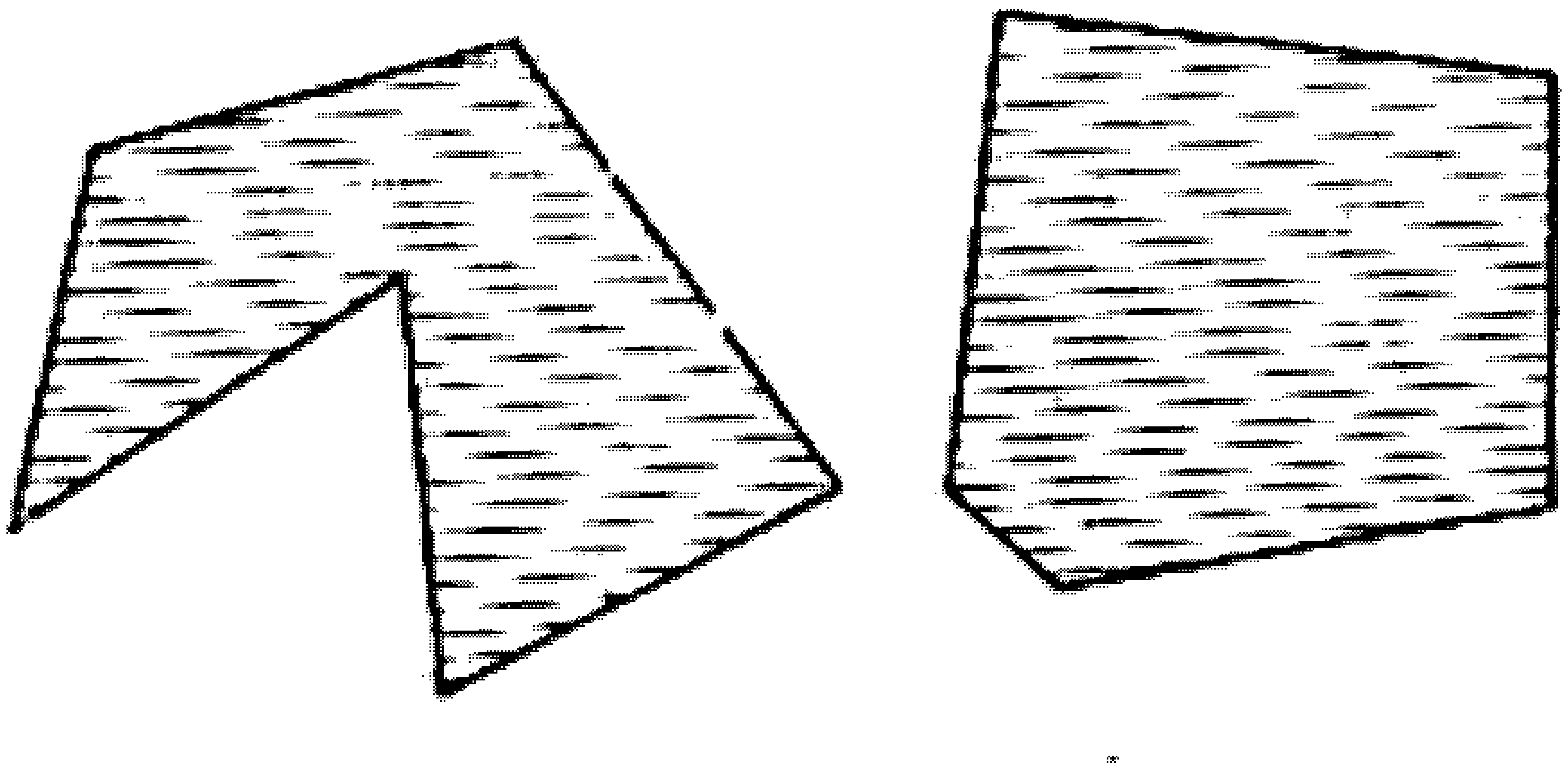
Доказателствата на твърденията $K'' \subset K$ и $K''' \subset K$, които се извършват с подобни разсъждения, ще оставим на читателя.

Тези три твърдения относно контурите на обединението, сечението и разликата на две множества, записани с формулите (1), ние ще наречем накратко теореми за контурите.

§ 86. Пеано-Жорданова мярка в равнината

В следващите разсъждения ще играе основна роля понятието многоъгълна фигура в равнината, което ще въведем сега. Това понятие е малко по-сложно от познатото ни от елементарната геометрия понятие многоъгълник, което тук ще означаваме с термина прост многоъгълник. А именно под многоъгълна фигура ще разбираме всяко множество в равнината, което или е многоъгълник, или може да се разгледа като обединение на краен брой многоъгълници.

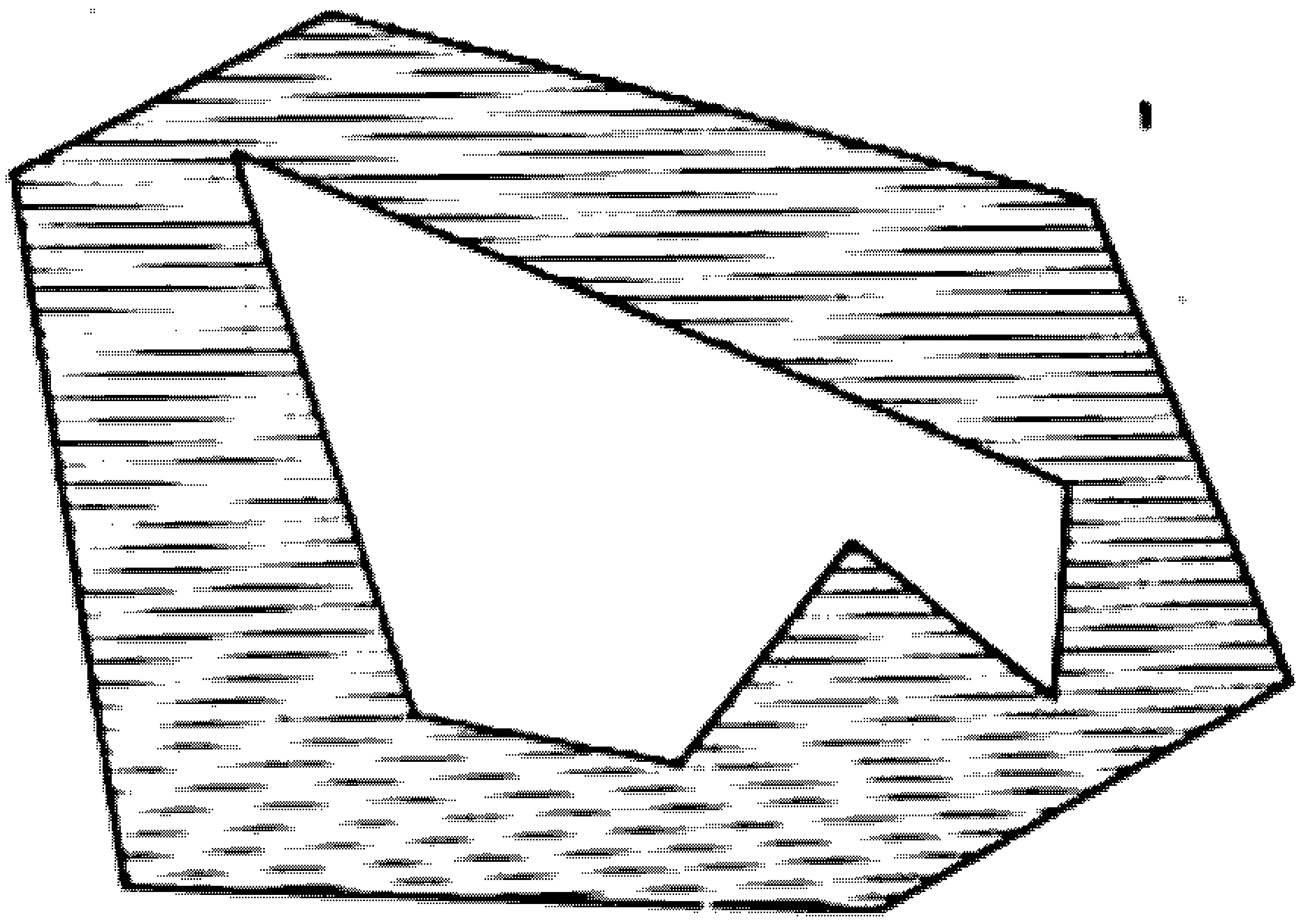
По този начин в понятието многоъгълна фигура включваме и такива фигури, които в елементарната геометрия не е прието да се



Черт. 65

разглеждат като многоъгълници. Така например на черт. 65 е показана една многоъгълна фигура, която от гледна точка на елементарната геометрия представлява не един, а два многоъгълника. Фигурата, показана на черт. 66, е също многоъгълна, тъй като тя може, както читателят лесно ще съобрази, да бъде разделена на няколко части, всяка от които е многоъгълник. (Тя може даже да се представи, и то по няколко начина, като обединение само на два многоъгълника. Покажете как.)

Освен това за удобство в разсъжденията ще разглеждаме празното множество също като многоъгълна фигура.



Черт. 66

Важно е да отбележим, че ние познаваме лицето на всяка многоъгълна фигура — можем да пресметнем това лице, като представим дадената многоъгълна фигура като обединение на няколко прости многоъгълника, които нямат общи точки (освен контурни), и след това съберем лицата на тези многоъгълници. Ще означаваме лицето на дадена многоъгълна фигура A с $s(A)$. Тъй като се условихме празното множество да считаме също за многоъгълна фигура, ще приемем, че то има лице нула.

От самата дефиниция на понятието многоъгълна фигура е ясно, че обединението на две и повече многоъгълни фигури е пак многоъгълна фигура.

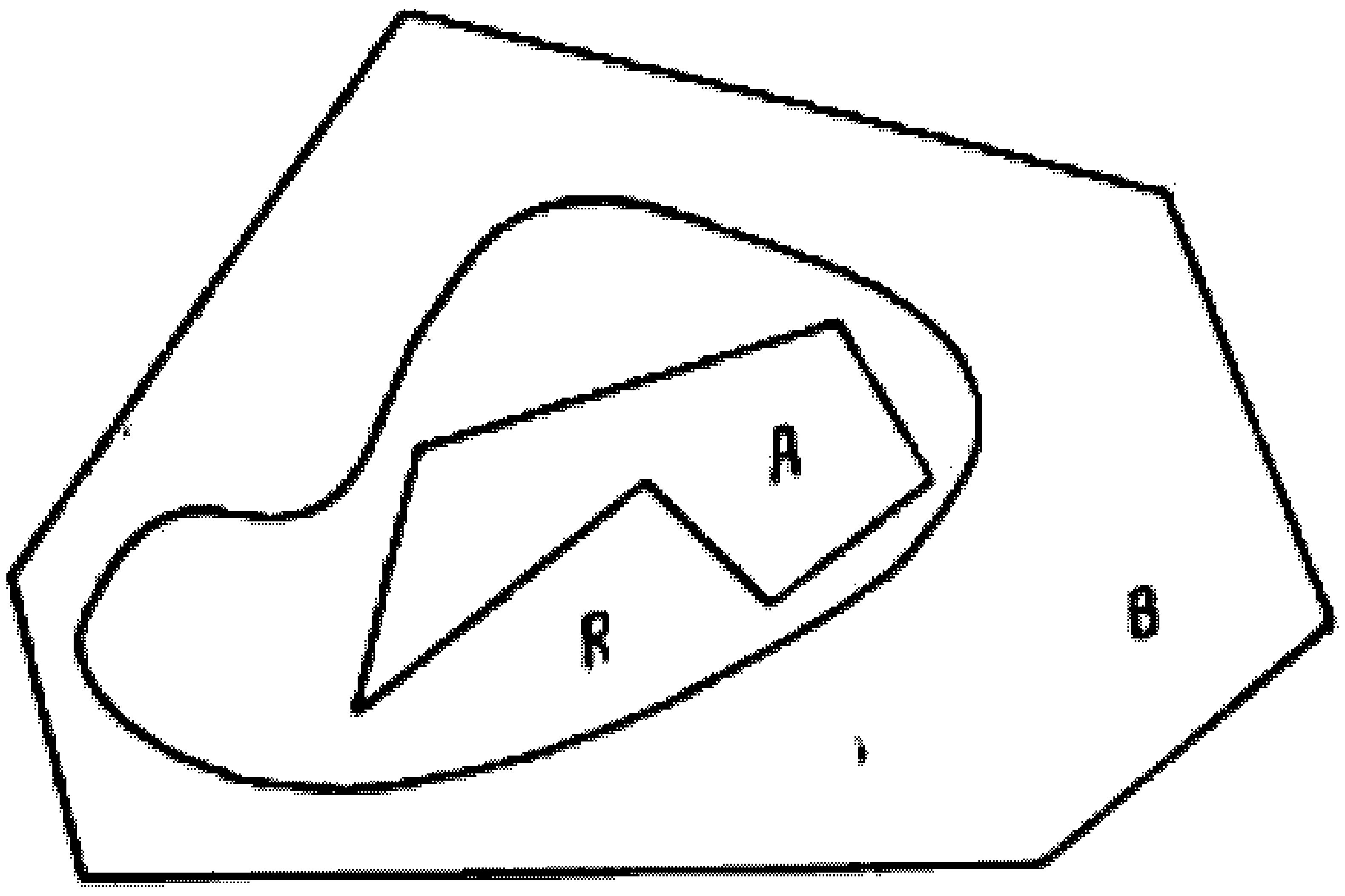
Сега ще преминем вече към онези разглеждания, които ще ни доведат непосредствено до дефиницията на понятието мярка в равнината — понятие, което, както вече отбелязахме, трябва да се яви като обобщение на познатото ни от елементарната геометрия понятие лице.

Нека R е ограничено множество от точки в равнината. Една многоъгълна фигура A ще наричаме **вписана** в R, ако тя се съдържа заедно с контура си във вътрешността* на множеството R. Многоъгълната фигура B пък ще наричаме **описана** около R, ако тя съдържа множеството R заедно с неговия контур във вътрешността си (черт. 67).

---

* Нека напомним, че вътрешност на едно множество в равнината е множеството от неговите вътрешни точки.

Тъй като множеството R е по предположение ограничено, то сигурно съществува някакъв квадрат, описан около R. От друга страна, празното множество, което, както знаем, се съдържа във всяко друго множество, ще бъде вписано в R. Ето защо винаги можем да говорим



Черт. 67

за вписани и описани многоъгълни фигури, каквото и да бъде ограниченото множество R.

Да разгледаме множеството от лицата на всички описани около R многоъгълни фигури. Това е едно множество от положителни числа и следователно то е ограничено отдолу. Неговата точна долна граница ще наричаме горна мярка на множеството R и ще я бележим с $\bar{\mu}(R)$. Ако разгледаме пък множеството от лицата на всички вписани в R многоъгълни фигури, ще видим, че то е ограничено отгоре (всички тези лица са по-малки например от лицето на даден отнапред квадрат, съдържащ R). Точната горна граница на това множество ще наричаме долна мярка на R и ще я бележим с $\underline{\mu}(R)$.

Горната и долната мярка на едно множество R удовлетворяват важно неравенство. За да го получим, ще разсъждаваме така: Да вземем произволна многоъгълна фигура A, вписана в R, и произволна многоъгълна фигура B, описана около R. Ясно е, че фигурата A ще бъде вписана и във фигурата B. Тогава лицата на тези фигури, както знаем от елементарната геометрия, ще удовлетворяват неравенството

(1) $$s(A) < s(B).$$

Ако сега разгледаме фигурата B като фиксирана, то неравенството (1), изпълнено за всяка многоъгълна фигура A, вписана в R, ще ни доведе до заключението, че

(2) $$\underline{\mu}(R) \leq s(B).$$

Като вземем пред вид след това, че B беше произволна многоъгълна фигура, описана около R, неравенството (2) пък ще ни доведе до неравенството

(3) $$\underline{\mu}(R) \leqq \overline{\mu}(R).$$

Едно равнинно множество ще наречем **измеримо***, *ако за него неравенството* (3) *преминава в равенство, т. е. ако*

$$\underline{\mu}(R)=\overline{\mu}(R).$$

В такъв случай общата стойност на числата $\underline{\mu}(R)$ и $\overline{\mu}(R)$ ще наричаме **мярка** или лице на множеството R и ще я бележим с $\mu(R)$.

Лесно се вижда, че когато R е обикновен многоъгълник в равнината, както неговата долна, така и неговата горна мярка ще бъде равна на лицето му**. Следователно всеки многоъгълник R в равнината е измеримо множество и неговата мярка $\mu(R)$ не е нищо друго освен познатото ни от елементарната геометрия лице, т. е.

$$\mu(R)=s(R).$$

По такъв начин виждаме, че въведеното понятие мярка на измеримо равнинно множество е действително обобщение на понятието лице на многоъгълник.

От геометрията е известно, че лицето на един многоъгълник не се променя, ако подложим този многоъгълник на едно движение в равнината, в която той лежи. Същото, разбира се, се отнася и за лицето на всяка многоъгълна фигура, а оттук и за мярката на произволно измеримо равнинно множество.

От изложеното дотук е ясно, че мярката $\mu(R)$ на едно измеримо равнинно множество R е винаги неотрицателно число. Ние ще се спрем малко по-подробно на случая, когато това число е нула. Тъй като и долната, и горната мярка на всяко множество са неотрицателни числа, то за да покажем, че дадено равнинно множество R има мярка нула, достатъчно е поради неравенството (3) да установим, че $\overline{\mu}(R)=0$. Ето защо, като си припомним дефиницията на числото $\overline{\mu}(R)$, идваме до заключението:

Едно равнинно множество R има мярка нула, когато за всяко положително число ε може да се намери такава многоъгълна фигура, която е описана около R и която има лице, по-малко от ε.

Оттук се вижда веднага, че *всяко подмножество на едно множество с мярка нула има също мярка нула.*

Не е трудно също да се види, че *обединението на краен брой множества с мярка нула представлява също така множество с мярка нула.* Наистина нека $R_1, R_2, \ldots, R_n$ са n множества с мярка нула и нека

$$R=\bigcup_{k=1}^{n} R_k.$$

---

* По-точно измеримо в Пеано-Жорданов смисъл, тъй като съществуват и други начини за въвеждане на понятието мярка.

** За целта е достатъчно да забележим, че когато е даден един обикновен многоъгълник, съществуват както вписани в него, така и описани около него многоъгълници (можем да разглеждаме даже подобни на дадения), лицата на които се различават колкото искаме малко от неговото лице.

Да вземем едно произволно положително число ε. Ще опишем около всяко множество R_k такава многоъгълна фигура B_k, която има лице, по-малко от $\frac{\varepsilon}{n}$. Тогава обединението $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ ще представлява една многоъгълна фигура, описана около R, с лице, по-малко от $n\frac{\varepsilon}{n}$, т. е. по-малко от ε.

Като примери за множества с мярка нула в равнината ще посочим: всяко множество, съставено от една или от краен брой точки; също така всяка отсечка в равнината, както и всяко множество, съставено от краен брой отсечки. Във всички тези случаи читателят лесно ще покаже, че е изпълнено формулираното по-горе условие за това, щото мярката на едно равнинно множество да бъде равна на нула.

Накрая ще посочим един важен пример за измеримо множество. Ако $f(x)$ е неотрицателна функция, непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то множеството A, заключено между графиката на тази функция, оста Ox и правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 47) е измеримо. Читателят си спомня, че още в § 50 ние разгледахме задачата за определянето и пресмятането на лицето на тази фигура. Ако проследим отново онова, което тогава извършихме, за да определим търсеното лице, лесно ще се убедим*, че числото, до което достигнахме, а именно определения интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$, не е нищо друго освен мярката на множеството A. Следователно можем да запишем

$$\mu(A) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

§ 87. Условие за измеримост

Нека R е измеримо равнинно множество и нека ε е произволно положително число. Можем да намерим такава многоъгълна фигура A, която е вписана в R и лицето на която удовлетворява неравенството

$$s(A) > \underline{\mu}(R) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Също така ще съществува многоъгълна фигура B, описана около R, на която пък лицето ще удовлетворява неравенството

$$s(B) < \overline{\mu}(R) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

(Съществуването на такива фигури A и B следва от дефиницията на по-

---

* Тук трябва да се има пред вид обаче, че онези многоъгълници, които в § 50 нарекохме вписани във фигурата A, както и онези, които нарекохме описани около нея, не са вписани, съответно описани в смисъла, който вложихме в тези термини в тази глава. Ето защо при сегашните разглеждания е необходимо многоъгълниците от § 50 да бъдат заменени с други (например подобни на тях), които

нятията точна горна и точна долна граница на множество от реални числа.)

Тъй като R е измеримо множество, имаме $\underline{\mu}(R)=\mu(R)$. Тогава от неравенствата (1) и (2) получаваме

$$s(B)-s(A)<\varepsilon. \tag{3}$$

И така съществуването при всяко $\varepsilon>0$ на такава описана около R многоъгълна фигура B и такава, вписана в R многоъгълна фигура A, за които е изпълнено неравенството (3), е едно необходимо условие за измеримостта на множеството R. Това условие обаче е и достатъчно. Наистина нека сега, обратно, за дадено ограничено равнинно множество R е известно, че при всеки избор на положителното число ε съществуват многоъгълна фигура A, вписана в R, и многоъгълна фигура B, описана около R, лицата на които удовлетворяват неравенството (3). Тогава от неравенствата

$$s(A)\leqq\underline{\mu}(R)\leqq\overline{\mu}(R)\leqq s(B)$$

следват неравенствата

$$0\leqq\overline{\mu}(R)-\underline{\mu}(R)\leqq s(B)-s(A)<\varepsilon.$$

Тъй като положителното число ε бе произволно, неравенствата

$$0\leqq\overline{\mu}(R)-\underline{\mu}(R)<\varepsilon$$

трябва да бъдат изпълнени за всяко положително число ε. А това е възможно само когато $\overline{\mu}(R)-\underline{\mu}(R)=0$, т. е. когато $\underline{\mu}(R)=\overline{\mu}(R)$. И така множеството R е измеримо.

Тези разглеждания лежат в основата на доказателството на следната твърде полезна

Теорема. *Необходимото и достатъчно условие, за да бъде едно ограничено равнинно множество R измеримо, е неговият контур да има мярка нула.*

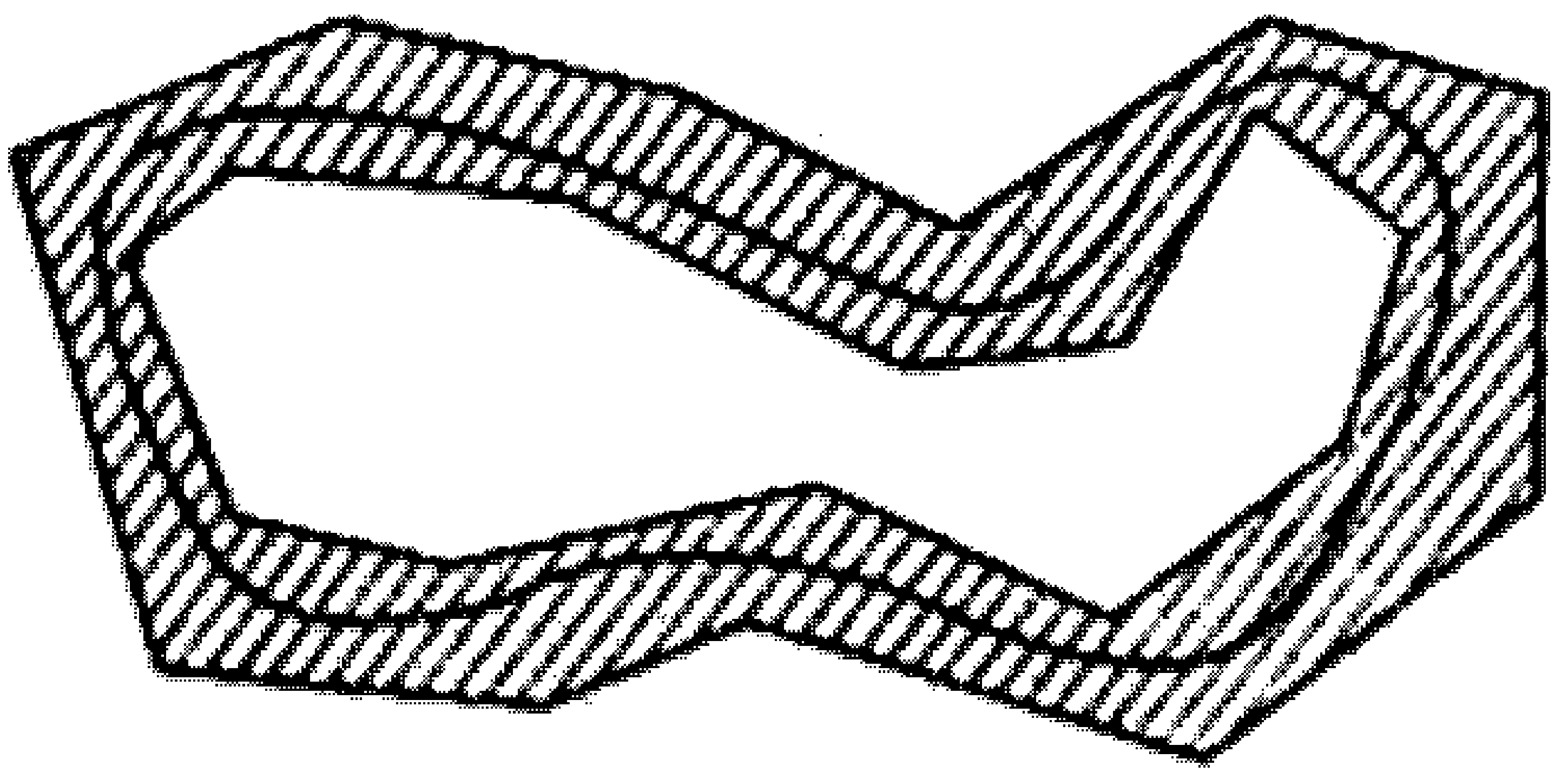
Ще скицираме доказателството на тази теорема. Нека най-напред ни е дадено, че множеството R е измеримо и че ε е едно произволно положително число. Съгласно направените по-рано бележки ще съществуват две многоъгълни фигури A и B — първата, вписана в R, а втората, описана около R, чиито лица ще удовлетворяват неравенството

$$s(B)-s(A)<\varepsilon. \tag{3}$$

Разликата $B-A$ на двете многоъгълни фигури B и A ще съдържа контура на R (черт. 68). От друга страна, лесно е да се види, че тя ще представлява многоъгълна фигура, с лице, равно на разликата от лицата на фигурите B и A, т. е. лице, по-малко от ε. Съгласно разглежданията от края на предишния параграф това означава, че контурът на множеството R има мярка нула.

са вписани, съответно описани в смисъла на сегашното изложение и чиито лица са произволно близки до лицата на многоъгълниците, построени в § 50. Това очевидно може лесно да бъде направено.

Нека сега пък, обратно, е дадено, че контурът на множеството R има мярка нула. Да изберем едно произволно положително число ε и да опишем около контура на R такава многоъгълна фигура D, лицето на която е по-малко от ε. Може да се покаже — което вече не е просто и което тук няма да правим, — че фигурата D може да бъде представена



Черт. 68

като разлика на две многоъгълни фигури B и A, първата от които е описана около R, а втората — вписана в R (черт. 68). При това ясно е, че лицето на фигурата D ще бъде равно на разликата $s(B)-s(A)$. Следователно неравенството (3) ще бъде изпълнено, а това, както видяхме, е достатъчно, за да заключим, че множеството R е измеримо.

Доказаната теорема дава една твърде удобна характеристика на фамилията на измеримите множества. От нея се вижда, че *обединението на две или повече (но, разбира се, краен брой) измерими множества, както и сечението, а също така и разликата на две измерими множества са пак измерими множества.*

Наистина, ако две множества A и B са измерими, то техните контури K_A и K_B ще бъдат множества с мярка нула. Но контурът на тяхното обединение $A \cup B$ (както и този на тяхното сечение $A \cap B$ или тяхната разлика $A-B$), както знаем от § 85, ще бъде част от множеството $K_A \cup K_B$ и следователно ще има също така мярка нула.

От друга страна, сега можем да видим, че *графиката на всяка функция $f(x)$, непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е множество с мярка нула.* Това е така, защото тази графика е част от контура на измеримото множество A, за което стана дума в края на предишния параграф. (Разбира се, не е съществено това, че там ставаше дума за неотрицателна функция $f(x)$.)

§ 88. Основни свойства на мярката

Ние вече отбелязахме някои основни свойства на пеано-жордановата мярка в равнината, като например това, че тя е винаги неотрицателно число, както и това, че тя се явява обобщение на понятието лице на многоъгълник. Сега ще установим още някои важни нейни свойства.

Теорема 1 (теорема за адитивност). *Ако R_1 и R_2 са две измерими* *множества, които нямат общи точки или имат само контурни общи точки, то за тяхното обединение имаме*

(1) $$\mu(R_1 \cup R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2).$$

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Да впишем в множеството R_1 една многоъгълна фигура A_1, а в множеството R_2 — многоъгълна фигура A_2 по такъв начин, че да имаме

(2) $$s(A_1)>\mu(R_1)-\frac{\varepsilon}{2},\quad s(A_2)>\mu(R_2)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

След това да опишем около множеството R_1 многоъгълна фигура B_1, а около R_2 — многоъгълна фигура B_2, така че да са изпълнени неравенствата

(3) $$s(B_1)<\mu(R_1)+\frac{\varepsilon}{2},\quad s(B_2)<\mu(R_2)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Обединението $A_1 \cup A_2$ ще представлява многоъгълна фигура, вписана в множеството $R_1 \cup R_2$. При това многоъгълните фигури A_1 и A_2 сигурно нямат общи точки, поради което ще имаме

(4) $$s(A_1 \cup A_2)=s(A_1)+s(A_2).$$

От друга страна, обединението $B_1 \cup B_2$ ще бъде многоъгълна фигура, описана около $R_1 \cup R_2$, за която очевидно ще имаме

(5) $$s(B_1 \cup B_2)\leqq s(B_1)+s(B_2).$$

Множеството $R_1 \cup R_2$ като обединение на две измерими множества е също измеримо. Неговата мярка ще удовлетворява неравенствата

$$s(A_1 \cup A_2)\leqq\mu(R_1 \cup R_2)\leqq s(B_1 \cup B_2).$$

Поради равенството (4) и неравенството (5) получаваме

$$s(A_1)+s(A_2)\leqq\mu(R_1 \cup R_2)\leqq s(B_1)+s(B_2).$$

Като вземем пред вид след това неравенствата (2) и (3), ще имаме

(6) $$\mu(R_1)+\mu(R_2)-\varepsilon\leqq\mu(R_1 \cup R_2)\leqq\mu(R_1)+\mu(R_2)+\varepsilon.$$

Неравенствата (6) са равносилни с неравенството

$$|\mu(R_1 \cup R_2)-[\mu(R_1)+\mu(R_2)]|<\varepsilon,$$

от което поради произволния избор на числото ε следва, че

(7) $$\mu(R_1 \cup R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2).$$

Нека забележим, че равенството (1) с помощта на метода на математичната индукция може лесно да се обобщи за произволен краен брой измерими множества. А именно, ако $R_1, R_2, \ldots, R_n$ са n измерими множества, всеки две от които или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки и ако

$$R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i,$$

то

$$\mu(R)=\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i).$$

Теорема 2 (теорема за монотонност). *Ако R_1 и R_2 са две измерими множества и ако $R_1\subset R_2$, то*

$$\mu(R_1)\leqq\mu(R_2).$$

Доказателство. Поради условието $R_1\subset R_2$ ще имаме

$$R_2=R_1\cup(R_2-R_1).$$

Множеството R_2-R_1 като разлика на две измерими множества ще бъде измеримо. Освен това двете множества R_1 и R_2-R_1 нямат общи точки. Следователно въз основа на предишната теорема ще бъде в сила равенството

$$\mu(R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2-R_1).$$

Оттук получаваме

$$\mu(R_1)\leqq\mu(R_2). \tag{8}$$

Теорема 3 (теорема за полуадитивност). *Ако R_1 и R_2 са две измерими множества, то за тяхното обединение имаме винаги*

$$\mu(R_1\cup R_2)\leqq\mu(R_1)+\mu(R_2). \tag{9}$$

Доказателство. С помощта на равенството

$$R_1\cup R_2=R_1\cup(R_2-R_1)$$

представяме множеството $R_1\cup R_2$ като обединение на двете измерими множества R_1 и R_2-R_1, които очевидно нямат общи точки. Ето защо въз основа на теорема 1 ще имаме

$$\mu(R_1\cup R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2-R_1).$$

От теорема 2 пък следва, че $\mu(R_2-R_1)\leqq\mu(R_2)$, поради което получаваме

$$\mu(R_1\cup R_2)\leqq\mu(R_1)+\mu(R_2). \tag{10}$$

Равенството (9) може също посредством метода на математичната индукция да се обобщи за произволен краен брой измерими множества. Това значи, че ако

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}R_i,$$

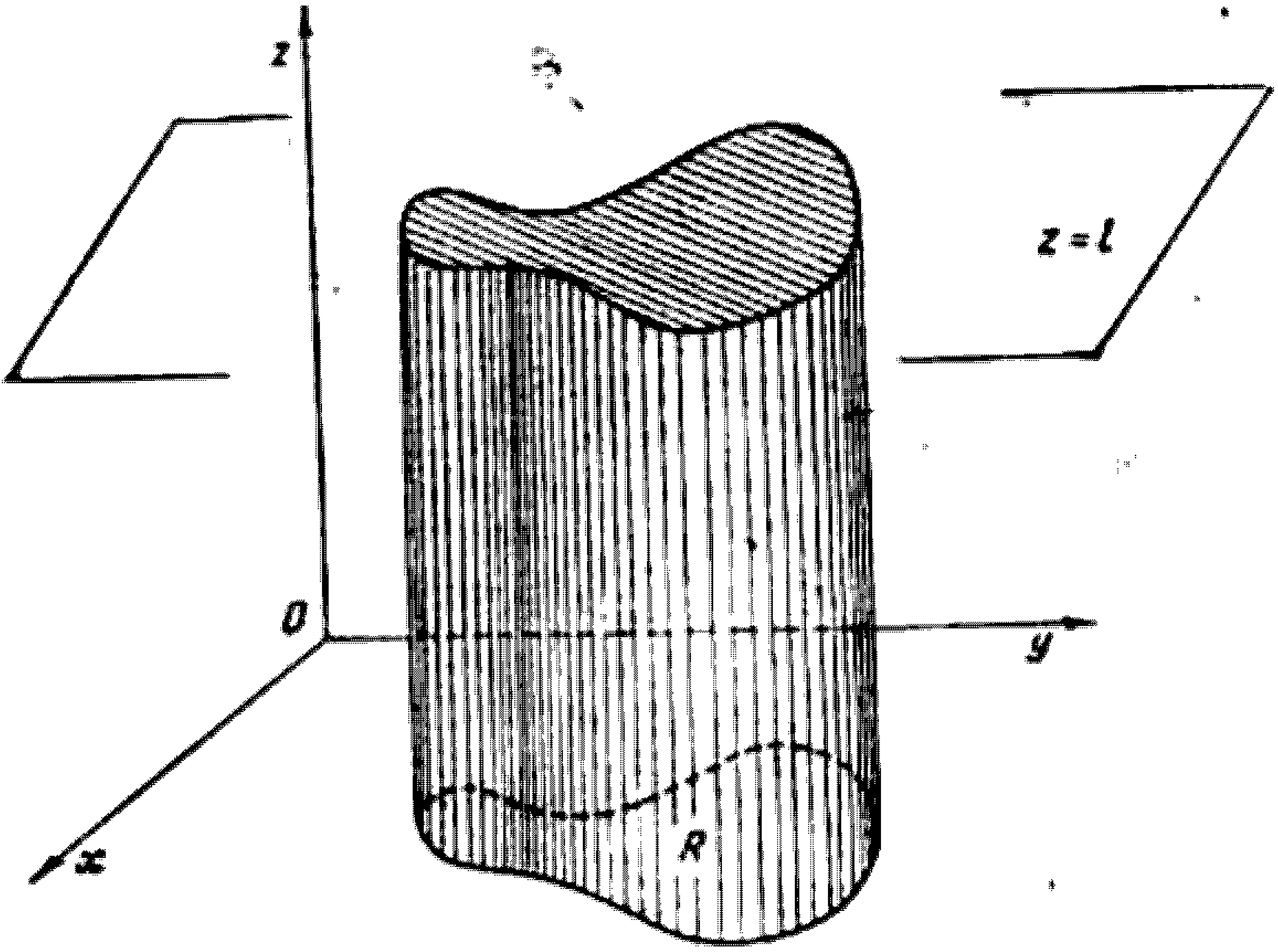
то

$$\mu(R)\leqq\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i).$$

Свойствата адитивност, полуадитивност и монотонност на пеано-жордановата мярка, които установихме, я правят удобна за работа. От друга страна, поради тяхната естественост, която ги прави задължителни за всяко понятие от този род, те показват, че така въведеното понятие е удачно обобщение на понятието лице на многоъгълник в равнината.

§ 89. Мярка в тримерното пространство

Като разсъждаваме по същия начин, както при въвеждането на понятието мярка в равнината, можем да въведем и понятието мярка в тримерното пространство. Това е вече едно обобщение на познатото ни понятие обем на тяло (което в елементарната геометрия се въвежда за някои специални тела). Тук ролята на многоъгълните фигури се изпълнява от многостенни тела, които вписваме или описваме около дадено тримерно множество. Под многостенно тяло разбираме такова тяло, което е обединение на краен брой многостени. Полученото по този начин понятие мярка в тримерното пространство се нарича също пеано-жорданова мярка и има същите основни свойства, както пеано-жордановата мярка в равнината.*



Черт. 69

---

* Съдържащата се в тези няколко реда програма има този недостатък, че ако искаме, следвайки я, да въведем понятието пеано-жорданова мярка в произволно n-мерно пространство, тя е трудно изпълнима. Тези трудности обаче могат да бъдат избегнати по следния начин. Нека под термина отворен, съответно затворен n-мерен правоъгълник разбираме множеството от онези точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерното пространство, чиито координати удовлетворяват неравенства от вида

$$a_i<x_i<b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

съответно от вида

$$a_i\leqq x_i\leqq b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

където $a_i<b_i$. (Ясно е, че при тази терминология двумерният правоъгълник в същност е обикновен правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, а три-

С оглед на някои разглеждания от следващата глава ще отбележим следното: Нека в тримерното пространство е дадена правоъгълна координатна система $Oxyz$ и нека R е измеримо множество в равнината Oxy. Да разгледаме една равнина, успоредна на равнината Oxy и намираща се над нея на разстояние l (т. е. равнината с уравнение $z=l$, където l е положително число). Ако през всяка точка на множеството R прекараме прави, успоредни на оста Oz, (т. е. перпендикулярни на равнината Oxy), то отсечките, които се отсичат от тези прави между равнината Oxy и равнината с уравнение $z=l$, ще образуват едно цилиндрично тяло (черт. 69). Това тяло се оказва измеримо и неговата тримерна пеано-жорданова мярка е равна на произведението

$$l.\mu(R),$$

където $\mu(R)$ е двумерната мярка (лицето) на равнинното множество R.

По-нататък, когато става дума за тримерната пеано-жорданова мярка, ще използуваме за това понятие също и обичайния термин **обем**

мерният е паралелепипед със стени, успоредни на координатните равнини.) Нека се условим обединението на краен брой n-мерни правоъгълници да наричаме n-мерна **елементарна фигура**. Лесно е да се види, че ако при изграждането на теорията на пеано-жордановата мярка, което извършихме в § 86—88, вместо с многоъгълни фигури си послужим с елементарни фигури, тази теория няма да претърпи особени изменения. В същото време всички направени разглеждания могат направо да бъдат отнесени към произволно n-мерно пространство.

Ако въпреки това в подробното изложение на двумерния случай предпочетохме многоъгълните фигури, това бе продиктувано единствено от съображения за по-голяма простота и нагледност.

ГЛАВА XII

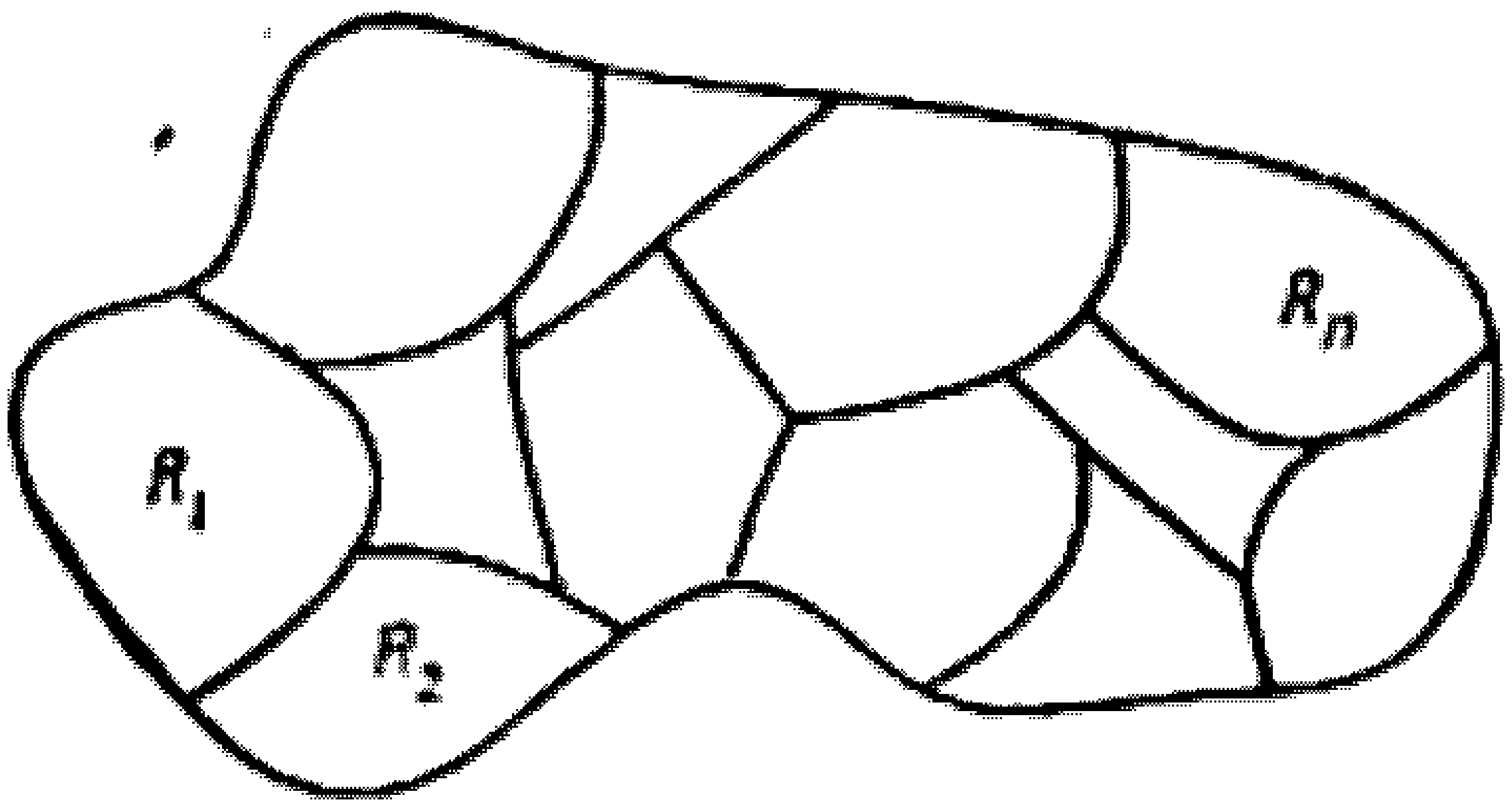
ДВОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

Въвеждането на понятието двоен интеграл става по начин, следващ идеята за въвеждането на понятието определен интеграл. Но тук нещата се усложняват от това, че сега разглежданията се извършват не в един интервал, взет върху реалната права, а в едно равнинно точково множество. Ето защо беше необходимо предварително да се запознаем с понятието пеано-жорданова мярка на равнинни фигури.

Ще отбележим още, че за разлика от двойните и въобще многократните интеграли определените интеграли от функции на една променлива се наричат още прости интеграли.

§ 90. Дефиниция на двоен интеграл

Нека е дадена една функция $f(x, y)$, която има за дефиниционна област равнинното измеримо множество R. Ще предполагаме, че функцията $f(x, y)$ е ограничена в R.



Черт. 70

Да разделим областта R на краен брой измерими подмножества $R_1, R_2, \ldots, R_n$ по такъв начин (черт. 70), че всеки две от тях или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки. Когато по-нататък в тази глава говорим за правилно разделяне на някое измеримо равнинно множество на подмножества, винаги ще имаме пред вид разделяне от такъв вид. В случай на такова разделяне, както знаем, е валидно равенството

$$\mu(R)=\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i).$$

След това означаваме с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i и образуваме следните две суми, наречени съответно малка и голяма **сума на Дарбу** за функцията $f(x, y)$:

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\mu(R_i),\qquad S=\sum_{i=1}^{n}M_i\mu(R_i).$$

Като разглеждаме всички възможни правилни разделяния на областта R на подобласти, извършени по споменатия начин, ние ще получим безбройно много малки суми и безбройно много големи суми на Дарбу. Точната горна граница на множеството на малките суми на Дарбу ще наречем **долен двоен интеграл** на функцията $f(x, y)$ в областта R и ще я означим с $\underline{I}$. Точната долна граница пък на множеството от големите суми на Дарбу ще наречем **горен двоен интеграл** на $f(x, y)$ в R и ще я означим с $\overline{I}$. С помощта на разсъждения, подобни на онези, които проведохме при дефиницията на простия интеграл, ще получим неравенството

$$\underline{I}\leq\overline{I}. \tag{1}$$

При извършването на тези разсъждения ще се наложи в определен момент да се използува геометричното значение на сумите s и S в случая, когато функцията $f(x, y)$ е неотрицателна. Такова геометрично тълкуване не е трудно да се даде по подобие на това, което направихме при дефиницията на простия интеграл. Тук трябва да вземем пред вид, че всяко от събираемите в сумите s и S може да се разгледа като обем на едно тримерно цилиндрично тяло от вида, за който стана дума в края на последния параграф от предишната глава.

Функцията $f(x, y)$ ще наречем **интегруема** в множеството R, когато е изпълнено равенството

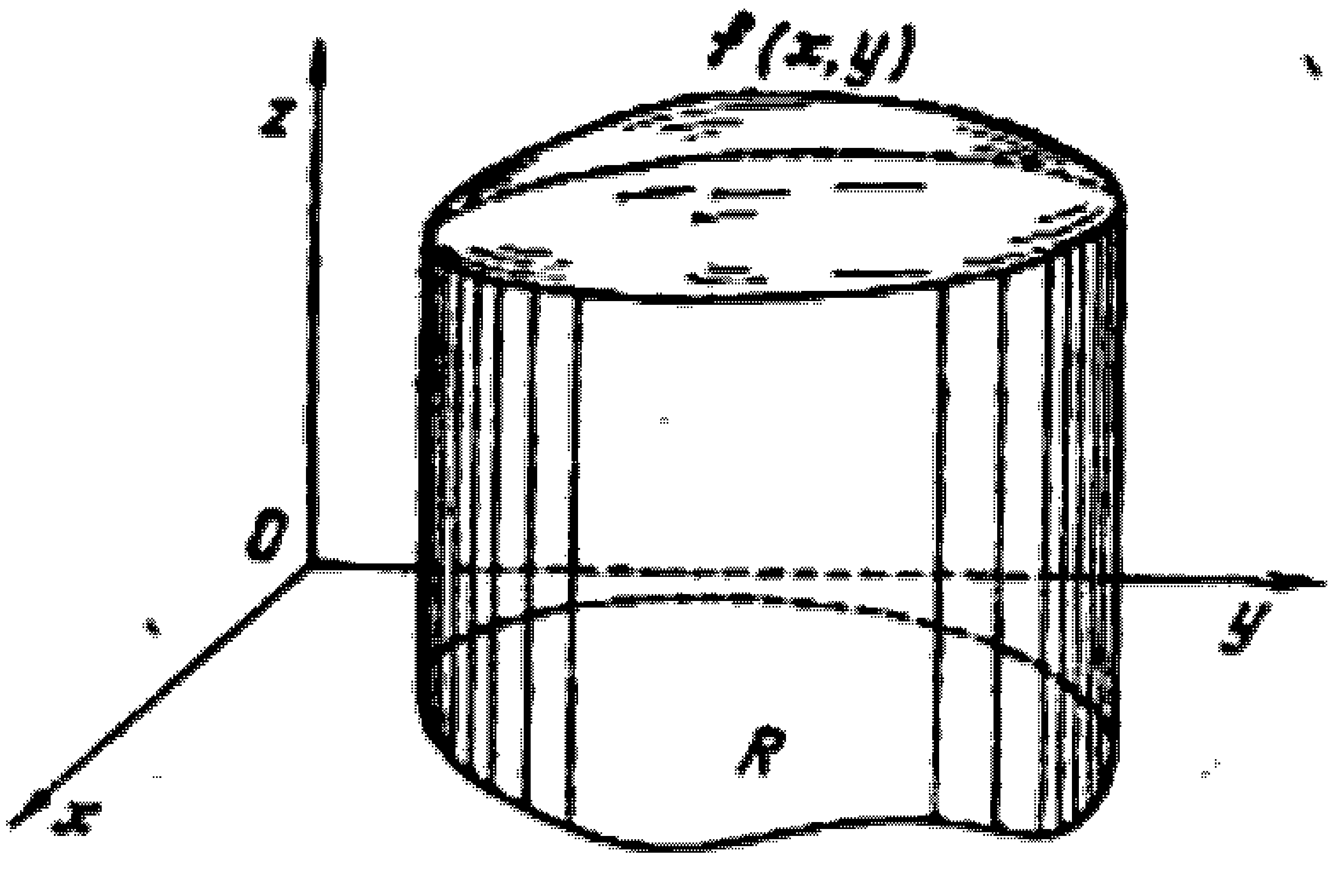
$$\underline{I}=\overline{I},$$

а общата стойност на долния и горния интеграл в този случай ще наречем **двоен интеграл** на функцията $f(x, y)$ в множеството R и ще означаваме така:

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

(Множеството R се нарича интеграционна област, а функцията $f(x, y)$ — подинтегрална функция.)

В случая, когато функцията $f(x, y)$ е неотрицателна и интегруема в R, на двойния интеграл може да се даде следното геометрично тълкуване: Да прекараме през всяка точка на множеството R по една права, успоредна на оста Oz, и да разгледаме тялото G, образувано от отсечките от тези прави, които са заключени между равнината Oxy и графиката на функцията $f(x, y)$ (черт. 71). Това тяло се оказва измеримо, а двойният интеграл (2) представлява неговата тримерна мярка, т. е. неговият обем.



Черт. 71

Лесно можем да се убедим, че когато функцията $f(x, y)$ е константа, тя е интегруема във всяка измерима област R. Наистина, ако $f(x, y)=C$ за всички точки от R, то при всяко разделяне на множеството R на подобласти $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ще имаме

$$s=S=\sum_{i=1}^{n} C\,\mu(R_i)=C\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i)=C\,\mu(R).$$

Оттук заключаваме, че за всяко измеримо равнинно множество R имаме

$$\iint_R C\,dx\,dy=C\,\mu(R).$$

Специално, когато $f(x, y)=1$, получаваме важната формула

$$\iint_R dx\,dy=\mu(R), \tag{3}$$

известна като формула за пресмятане на лица чрез двойни интеграли.

Лесно се вижда също, че ако множеството R има мярка нула, то всяка ограничена функция $f(x, y)$ е интегруема в R и има двоен интеграл, равен на 0. И наистина, ако $\mu(R)=0$, то при всяко разделяне на R

на подмножества R_1, $R_2, \ldots, R_n$ ще имаме $\mu(R_i)=0$ за всяко от тези подмножества. Тогава всички малки и големи суми на Дарбу ще бъдат нули и следователно ще имаме

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Ще докажем следната теорема, която дава едно важно достатъчно условие за интегруемост.

Теорема. *Ако R е измеримо и затворено равнинно множество и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в R, то тя е интегруема в R.*

Доказателство. Ако $\mu(R)=0$, то твърдението на теоремата, както видяхме, е изпълнено. Ето защо ще предположим, че $\mu(R)>0$. Да допуснем, че между долния и горния двоен интеграл на функцията $f(x, y)$ в R имаме строгото неравенство

$$\underline{I}<\overline{I}, \tag{4}$$

и да изберем положителното число $\varepsilon=\frac{\overline{I}-\underline{I}}{\mu(R)}\cdot$ Съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост от § 72 ще съществува такова число δ, че във всяко подмножество на R с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на $f(x, y)$ е по-малка от ε.

Сега да разделим правилно R на подмножествата R_1, $R_2, \ldots, R_n$ по такъв начин, че диаметърът на всяко от тези подмножества да бъде по-малък от δ и да образуваме сумите на Дарбу s и S, съответствуващи на това разделяне. Като вземем пред вид неравенствата

$$s\leqq \underline{I} \quad \text{и} \quad \overline{I}\leqq S,$$

получаваме

$$\overline{I}-\underline{I}\leqq S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\mu(R_i).$$

Тъй като за всяко i имаме $M_i-m_i<\varepsilon$, ще получим

$$\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i)=\varepsilon\mu(R)=\frac{\overline{I}-\underline{I}}{\mu(R)}\cdot\mu(R),$$

или

$$\overline{I}-\underline{I}<\overline{I}-\underline{I}.$$

Последното невярно неравенство ни показва, че нашето допускане за валидността на неравенството (4) е погрешно. Следователно имаме

$$\underline{I}=\overline{I},$$

т. е. функцията е интегруема.

§ 91. Суми на Риман

Нека, след като сме разделили правилно измеримото равнинно множество R на подмножествата $R_1, R_2, \ldots, R_n$, изберем по една точка във всяко от тях. Ако означим с (ξ_i, η_i) точката, която сме избрали в R_i, то сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i)$$

се нарича **сума на Риман**. Ако s и S са сумите на Дарбу, съответствуващи на същото разделяне на R на подмножества, то лесно се вижда, че

$$s \leqq \sigma \leqq S.$$

Преди да формулираме теоремата, която е аналогична на теоремата за римановите суми при простите интеграли, ще въведем и тук понятието „издребняваща редица от разделяния" на дадено множество R.

Нека е дадена една редица от правилни разделяния на измеримото множество R на подмножества. Да означим с δ_k най-големия от диаметрите на подмножествата, които са се появили при k-тото разделяне. Ако редицата

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$$

клони към нула, ще казваме, че дадената редица от разделяния на множеството R е издребняваща.

По начин, подобен на онзи, чрез който доказахме теоремата от § 53, можем да установим и следната

Теорема. *Нека R е измеримо и затворено множество, а $f(x, y)$ е една функция, непрекъсната в R. Ако е дадена една издребняваща редица от разделяния на множеството R на подмножества и ако при всяко разделяне от тази редица си образуваме по една риманова сума, то редицата от тези суми*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

е сходяща и

$$\lim \sigma_n = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

§ 92. Основни свойства на двойните интеграли

С помощта на теоремата от предишния параграф посредством разсъждения от типа на онези, които използувахме при установяването на свойствата на простите интеграли, можем да докажем следните основни свойства на двойните интеграли:

I. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R, а C е константа, то

$$\text{(I)} \qquad \iint\limits_R Cf(x, y)\,dx\,dy = C\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

II. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в измеримото и затворено множество R, то

$$\text{(II)} \qquad \iint\limits_R [f(x, y)+g(x, y)]\,dx\,dy$$

$$=\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_R g(x, y)\,dx\,dy.$$

III. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в измеримото и затворено равнинно множество R и ако те удовлетворяват за всички точки от R неравенството

$$f(x, y)\leqq g(x, y),$$

то

$$\text{(III)} \qquad \iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy \leqq \iint\limits_R g(x, y)\,dx\,dy.$$

IV. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R, то

$$\text{(IV)} \qquad \left|\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqq \iint\limits_R |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

V. Ако R_1 и R_2 са две измерими и затворени равнинни множества, които нямат общи точки или имат само контурни общи точки, и ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната както в R_1, така и в R_2, то

$$\text{(V)} \qquad \iint\limits_{R_1\cup R_2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{R_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{R_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Разбира се, последното равенство посредством математическа индукция се обобщава за случая на произволен краен брой множества $R_1, R_2, \ldots, R_n$, образуващи правилно разделяне на измеримото и затворено множество $R=\bigcup\limits_{i=1}^{n} R_n$. В този случай имаме

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{R_i} f(x, y)\,dx\,dy.$$

VI. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R и ако за всички точки от R тя удовлетворява неравенствата

$$m\leqq f(x, y)\leqq M,$$

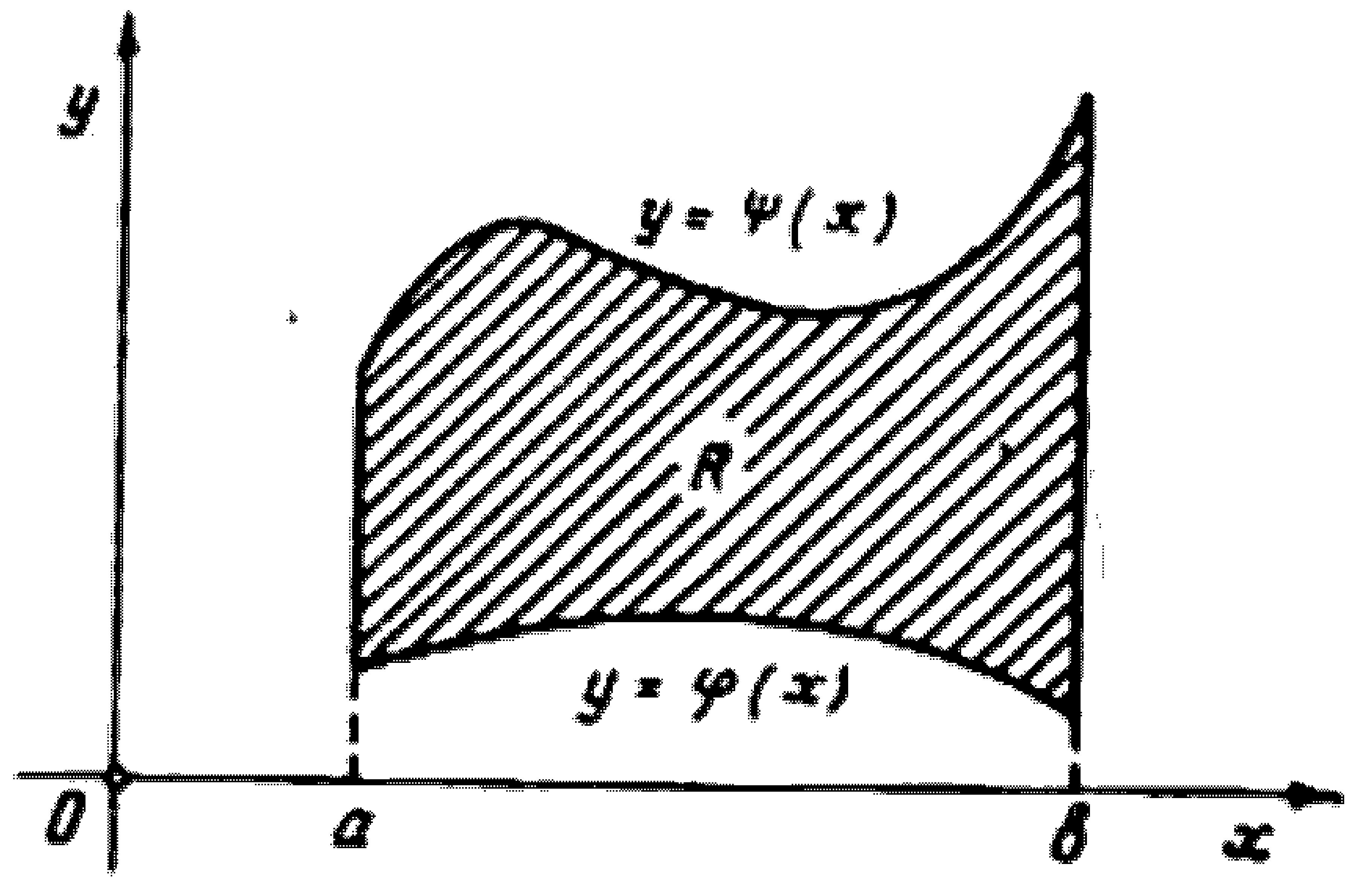
то

(VI) $$m\,\mu(R) \leqq \iint\limits_{R} f(x,\ y)\,dx\,dy \leqq M\,\mu(R),$$

Нека подчертаем, че изложените току-що свойства на двойните интеграли в същност са валидни не само за непрекъснати, но изобщо за интегруеми функции. Впрочем доказателството на свойство VI даже в този най-общ случай се извършва съвсем просто с разсъждения, подобни на онези, посредством които установихме в края на § 51 аналогичните неравенства за простия интеграл.

§ 93. Пресмятане на двойните интеграли

Да се пресметне стойността на даден двоен интеграл, като се изхожда от самата дефиниция на това понятие, в общия случай е практически безнадеждна за решаване задача поради нейната сложност. Ето защо е извънредно важно да се запознаем с други методи, които биха ни довели по-просто до желания резултат. За съжаление ние не познаваме такива прости методи дори в случая на непрекъсната функция $f(x,\ y)$, ако не сме направили допълнителни предположения за вида на интеграционната област R. В този параграф ще видим обаче, че такъв метод съществува за една специална категория интеграционни области — все пак достатъчно широка за практическите нужди на математиката и нейните приложения. Чрез този метод пресмятането на даден двоен интеграл се свежда към последователното пресмятане на два прости интеграла.



Черт. 72

Нека са дадени две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, дефинирани и непрекъснати в един краен и затворен интервал $[a,\ b]$, които удовлетворяват в този интервал неравенството

$$\varphi(x) \leqq \psi(x).$$

От това неравенство следва, че графиката на функцията $\psi(x)$ ще лежи изцяло над графиката на функцията $\varphi(x)$ (макар някъде тези две графики и да могат да се допират). Да разгледаме областта R, която се огражда отдолу от графиката на функцията $\varphi(x)$, отгоре от графиката на функцията $\psi(x)$, а отстрани — от правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 72). Тя се състои от точките (x, y), чиито координати удовлетворяват неравенствата

$$(1) \qquad a \leqq x \leqq b, \qquad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x).$$

Област от такъв вид ще наричаме **криволинеен трапец**.

Поради непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ криволинейният трапец R ще представлява, както знаем, измеримо множество в равнината. Лесно се вижда също, че то е и затворено. Нека отбележим освен това, че мярката $\mu(R)$ на криволинейния трапец R, определен чрез неравенствата (1), се дава с равенството

$$(2) \qquad \mu(R) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx.$$

Това се вижда веднага въз основа на равенството (4), дадено в края на § 86 и на адитивността на пеано-жордановата мярка.*

Именно в случая, когато интеграционната област е криволинеен трапец, ще се запознаем с метод за пресмятане на двойните интеграли. Предварително обаче ще установим следната

Помощна теорема. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в криволинейния трапец R, зададен с неравенствата* (1), *то интегралът*

$$(3) \qquad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

съществува за всяко фиксирано x от интервала $[a, b]$ и представлява непрекъсната функция на x в този интервал.

Доказателство. При всяко фиксирано x от интервала $[a, b]$ функцията $f(x, y)$, разглеждана като функция само на y, е непрекъсната в интервала $[\varphi(x), \psi(x)]$. Ето защо тя ще бъде интегруема в този интервал и ще можем да образуваме интеграла (3). (Тази бележка, казано по-

---

* По-точно казано, равенството (2) се получава веднага от равенството (4) в § 86, в случая, когато функцията $\varphi(x)$ (а следователно и $\psi(x)$) е неотрицателна. Когато условието за неотрицателност не е изпълнено, ще вземем такова число m, че да имаме $\varphi(x) \geqq m$ за $x \in [a, b]$ и ще разгледаме криволинейния трапец R_1, определен от неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \quad \varphi(x) - m \leqq y \leqq \psi(x) - m.$$

Тъй като множеството R_1 е получено чрез едно вертикално преместване на множеството R, тези две множества имат еднакви мерки. А мярката на R_1 поради неотрицателността на функциите $\varphi(x) - m$ и $\psi(x) - m$ ще се дава с интеграла

$$\int_a^b [(\psi(x) - m) - (\varphi(x) - m)]\, dx = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx.$$

точно, се отнася за случая, когато $\varphi(x)<\psi(x)$, но ако $\varphi(x)=\psi(x)$, интегралът (3) очевидно също съществува и е равен на нула.)

Нека покажем сега, че функцията

$$F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy \tag{4}$$

е непрекъсната в интервала $[a,\ b]$. За целта ще отбележим най-напред, че функциите $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,y)$ са ограничени. Ето защо можем да намерим такава константа K, че да имаме $|\varphi(x)|\leqq K$ и $|\psi(x)|\leqq K$ за $x\in[a,\ b]$ и $|f(x,\ y)|\leqq K$ за $(x,\ y)\in R$.

Да вземем една точка x_0 от интервала $[a,\ b]$ и едно произволно положително число ε. Поради непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точката x_0 и равномерната непрекъснатост на функцията $f(x,\ y)$ в R ще съществува такова $\delta>0$, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следват неравенствата

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4K}\ ,\quad |\psi(x)-\psi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4K} \tag{5}$$

и

$$|f(x,\ y)-f(x_0,\ y)|<\frac{\varepsilon}{4K} \tag{6}$$

(стига точката x да принадлежи на $[a,\ b]$, а точките $(x_0,\ y)$ и $(x,\ y)$ — на R).

Нека сега x е точка от интервала $[a,\ b]$, за която имаме $|x-x_0|<\delta$. Ще разгледаме два случая. Първо ще се спрем на случая, когато $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$. Тогава $F(x_0)=0$, поради което ще имаме

$$|F(x)-F(x_0)|=|F(x)|=\left|\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy\right|\leqq K(\psi(x)-\varphi(x))$$

$$=K[(\psi(x)-\psi(x_0))+(\varphi(x_0)-\varphi(x))]<K\,.\,2\frac{\varepsilon}{4K}<\varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на $F(x)$ в точката x_0 е установена в разглеждания случай.

Остава да разгледаме случая, когато $\varphi(x_0)<\psi(x_0)$. Сега можем да считаме, че числото δ сме взели по такъв начин, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следват освен неравенствата (5) и (6) още и неравенствата

$$\varphi(x)<\psi(x_0) \quad \text{и} \quad \psi(x)>\varphi(x_0). \tag{7}$$

Налага се по-нататък да се разгледат поотделно следните четири възможни подслучая:

1) $\varphi(x)\geqq\varphi(x_0)$, $\quad\psi(x)\geqq\psi(x_0)$;

2) $\varphi(x)\geqq\varphi(x_0)$, $\quad\psi(x)<\psi(x_0)$;

3) $\varphi(x)<\varphi(x_0), \quad \psi(x)\geqq\psi(x_0);$

4) $\varphi(x)<\varphi(x_0). \quad \psi(x)<\psi(x_0).$

Ние ще разгледаме първия от тях. Останалите се третират по подобен начин. И така ще приемем, че са изпълнени неравенствата

$$(8) \qquad \varphi(x)\geqq\varphi(x_0) \quad \text{и} \quad \psi(x)\geqq\psi(x_0).$$

Като вземем пред вид, че поради неравенствата (7) и (8) всички написани по-нататък интеграли имат смисъл, ще имаме

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy-\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,\ y)\,dy\right|$$

$$=\left|\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} f(x,\ y)\,dy+\int\limits_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy-\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x_0',\ y)\,dy-\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} f(x_0,\ y)\,dy\right|$$

$$\leqq\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} |f(x,\ y)-f(x_0,\ y)|\,dy+\int\limits_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} |f(x,\ y)|\,dy+\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} |f(x_0,\ y)|\,dy$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{4K}(\psi(x_0)-\varphi(x))+K|\psi(x)-\psi(x_0)|+K|\varphi(x)-\varphi(x_0)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K+K\cdot\frac{\varepsilon}{4K}+K\cdot\frac{\varepsilon}{4K}=\varepsilon.$$

По този начин се убеждаваме в непрекъснатостта на функцията $F(x)$ в произволно взетата точка x_0 от интервала $[a, b]$. С това теоремата е доказана.

Сега вече да преминем към главната теорема на настоящия параграф, посочваща начин за пресмятане на двойни интеграли в криволинейни трапеци.

Теорема. Нека $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *са две функции, дефинирани и непрекъснати в интервала* $[a, b]$ *и удовлетворяващи в този интервал неравенството* $\varphi(x)\leqq\psi(x)$. *Ако функцията* $f(x, y)$ *е непрекъсната в криволинейния трапец* R, *зададен посредством неравенствата*

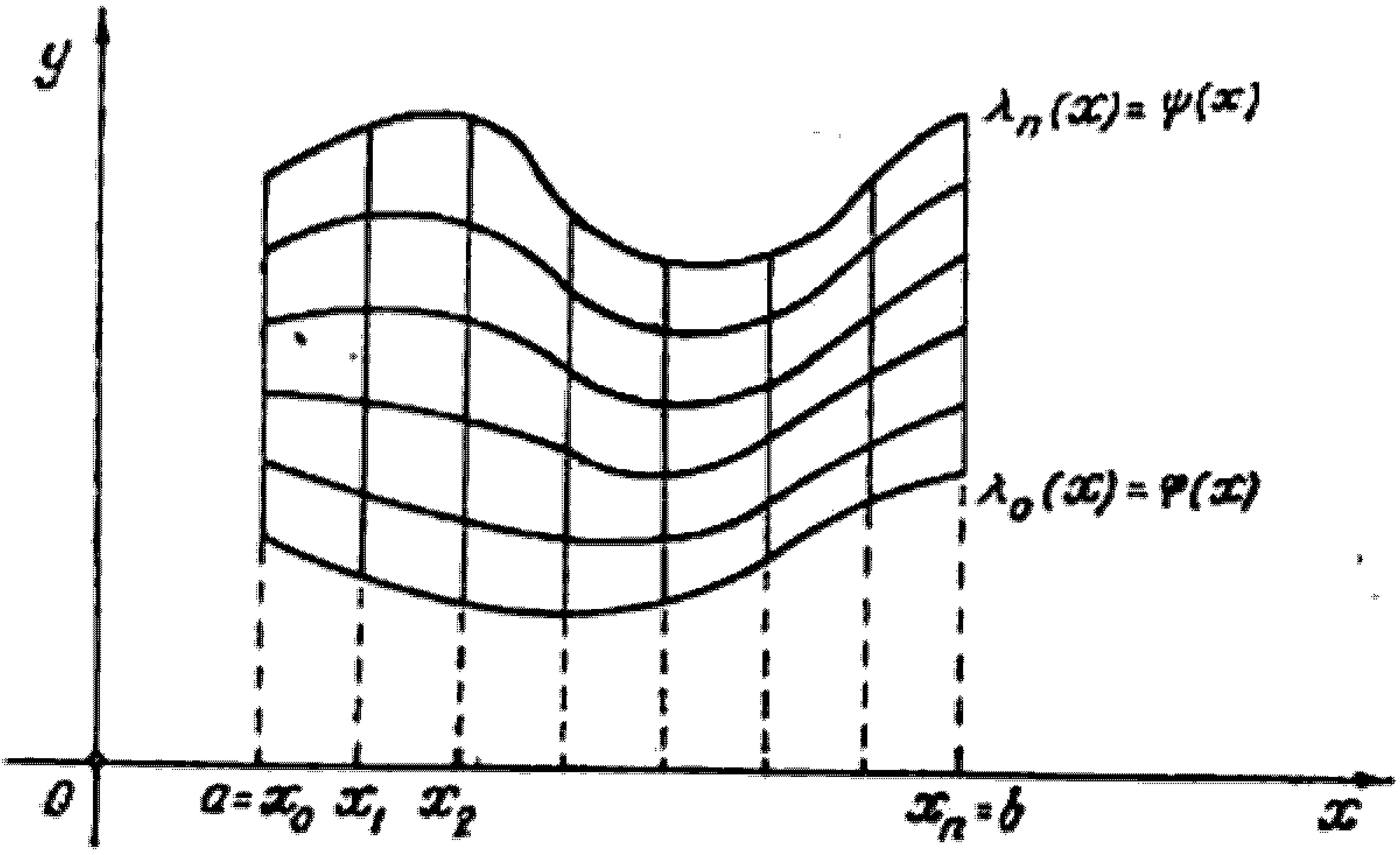
$$(1) \qquad a\leqq x\leqq b, \qquad \varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x),$$

то

$$(9) \qquad \iint\limits_R f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx.$$

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Тъй като функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество R, ще можем да намерим съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост такова положително число δ, че във всяко подмножество на R с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на $f(x, y)$ да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{\mu(R)}$. След това нека вземем едно естествено число n. Да разгледаме функциите

$$\lambda_k(x)=\varphi(x)+\frac{k}{n}[\psi(x)-\varphi(x)], \quad k=0, 1, \ldots, n.$$



Черт. 73

Очевидно $\lambda_0(x)=\varphi(x)$ и $\lambda_n(x)=\psi(x)$. Освен това поради неравенството $\varphi(x)\leqq\psi(x)$ е ясно, че за всяко x от интервала $[a, b]$ ще имаме

$$\lambda_{k-1}(x)\leqq\lambda_k(x), \quad k=0, 1, \ldots, n,$$

което показва, че при всяко k графиката на функцията $\lambda_k(x)$ ще се намира над графиката на $\lambda_{k-1}(x)$. Да разделим по-нататък интервала $[a, b]$ на n равни части посредством точките

$$a=x_0, \ x_1, \ldots, x_n=b$$

и да прекараме през тези точки вертикални прави. Тези прави заедно с графиките на функциите $\lambda_k(x)$ ще разделят (при това правилно) областта R на n^2 подобласти (черт. 73), всяка от които представлява един по-малък криволинеен трапец. Ще означим с R_{ik} криволинейния трапец, определен чрез неравенствата

$$x_{i-1}\leqq x\leqq x_i, \quad \lambda_{k-1}(x)\leqq y\leqq\lambda_k(x).$$

Ако вземем числото n достатъчно голямо, можем да направим диаметрите на всички R_{ik} по-малки* от избраното по-горе число δ. Тогава, означавайки с M_{ik} и m_{ik} точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_{ik}, ще имаме

$$M_{ik}-m_{ik}<\frac{\varepsilon}{\mu(K)}.$$

Да разгледаме сега функцията

$$F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

Както видяхме в помощната теорема, тя е непрекъсната, а следователно и интегруема в интервала $[a, b]$. Ще излезем от равенството

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx.$$

---

* По-подробно в това можем да се убедим по следния начин. Нека ρ е такова положително число, че от неравенството $|x'-x''|<\rho$ да следват неравенствата

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\delta}{8} \quad\text{и}\quad |\psi(x')-\psi(x'')|<\frac{\delta}{8}.$$

Да означим освен това с K някаква константа, такава, че да имаме $|\varphi(x)|\leqq K$ и $|\psi(x)|\leqq$ $\leqq K$ за $x\in[a, b]$. Ще вземем естественото число n толкова голямо, че да са изпълнени неравенствата

$$\frac{b-a}{n}<\frac{\delta}{2}, \qquad \frac{b-a}{n}<\rho, \qquad \frac{2K}{n}<\frac{\delta}{8}.$$

Ако сега (x', y') и (x'', y'') са две точки, принадлежащи на криволинейния трапец R_{ik}, то

$$|y'-y''|\leq|y'-\lambda_k(x')|+|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|+|\lambda_k(x'')-y''|$$

$$\leq\lambda_k(x')-\lambda_{k-1}(x')+|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|+\lambda_k(x'')-\lambda_{k-1}(x'').$$

При това

$$\lambda_k(x')-\lambda_{k-1}(x')=\frac{1}{n}[\psi(x')-\varphi(x')]\leq\frac{2K}{n}<\frac{\delta}{8}.$$

Аналогично

$$\lambda_k(x'')-\lambda_{k-1}(x'')<\frac{\delta}{8}.$$

От друга страна, $|x'-x''|<\frac{b-a}{n}<\rho$, поради което

$$|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|=\left|\left(1-\frac{k}{n}\right)(\varphi(x')-\varphi(x''))+\frac{k}{n}(\psi(x')-\psi(x''))\right|$$

$$\leq|\varphi(x')-\varphi(x'')|+|\psi(x')-\psi(x'')|<\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{8}=\frac{\delta}{4}.$$

От друга страна, имаме

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x,\ y)\,dy,$$

откъдето

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx.$$

Като вземем пред вид, че в множеството R_{ik} е изпълнено неравенството $f(x,\ y)\leqq M_{ik}$, ще получим

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}M_{ik}(\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x))\right]dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x)]\,dx.$$

Съгласно формулата (2), приложена за криволинейния трапец R_{ik}, имаме

$$\mu(R_{ik})=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x)]\,dx.$$

Следователно

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx\leqq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\,\mu(R_{ik})=S,$$

Ето защо ще имаме

$$|y'-y''|<\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{8}=\frac{\delta}{2}.$$

Като вземем пред вид, че $|x'-x''|<\frac{b-a}{n}<\frac{\delta}{2}$, най-сетне за разстоянието между точките $(x',\ y')$ и $(x'',\ y'')$ ще получим

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}}=\frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Оттук заключаваме, че диаметърът на множеството R_{ik} е по-малък от δ.

където S е голямата сума на Дарбу, отговаряща на разглежданото разделяне на областта R на подобласти. Аналогично се получава

$$\int_a^b F(x)\,dx \geqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\,\mu(R_{ik}) = s,$$

където s е малката сума на Дарбу за същото разделяне. И така изпълнени са неравенствата

$$s \leqq \int_a^b F(x)\,dx \leqq S.$$

Но в сила са също тъй и неравенствата

$$s \leqq \iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy \leqq S.$$

Следователно ще имаме

$$\left|\iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy - \int_a^b F(x)\,dx\right| \leqq S - s$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (M_{ik} - m_{ik})\,\mu(R_{ik})$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu(R)} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{ik}) = \frac{\varepsilon}{\mu(R)} \cdot \mu(R) = \varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε заключаваме, че е в сила равенството

$$\iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx,$$

което не е нищо друго освен равенството (9).

Пример 1. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy,$$

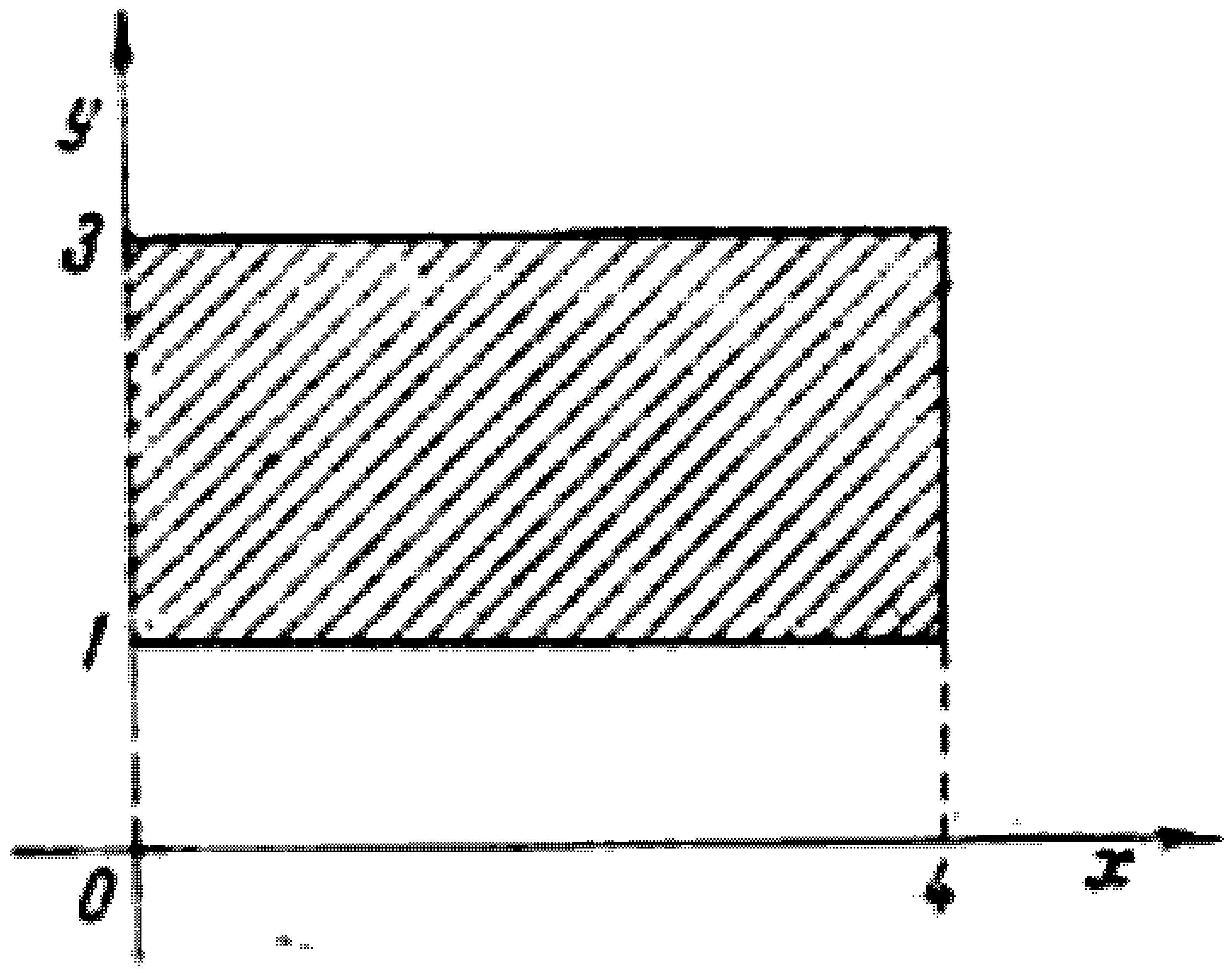
където R е правоъгълникът (черт. 74), даден с неравенствата

$$0 \leqq x \leqq 4, \qquad 1 \leqq y \leqq 3.$$

Съгласно формулата (9) ще имаме

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\int_1^3 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 x \left[\int_1^3 \frac{dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x \left| 2\sqrt{x^2+y^2} \right|_1^3 dx$$



Черт. 74

$$= \int_0^4 x(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+1})\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx^2 - \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+1}\,dx^2$$

$$= \frac{1}{3}\left|(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right|_0^4 - \frac{1}{3}\left|(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right|_0^4 = \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\left(17^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$= \frac{1}{3}(125-27) - \frac{1}{3}(17\sqrt{17}-1) = 33 - \frac{17}{3}\sqrt{17}.$$

Пример 2. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R xy^2\,dx\,dy,$$

където R е триъгълникът (черт. 75), образуван от пресичането на правите с уравнения

$$y=0, \quad x=1, \quad y=x.$$

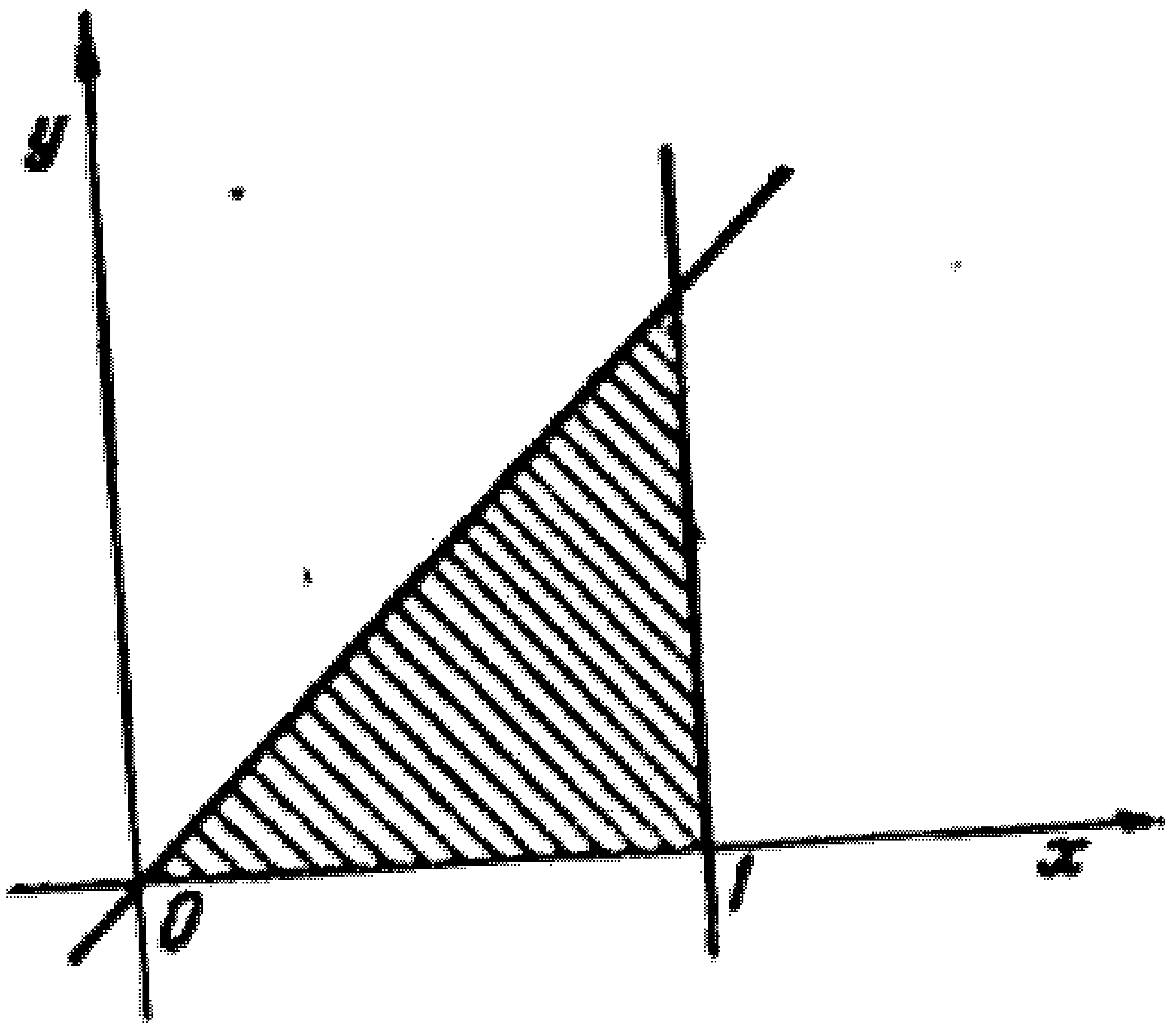
Тук областта R е криволинеен трапец, който се определя от неравенствата

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq x.$$

Тогава формулата (9) ще ни даде

$$\iint\limits_R xy^2\,dx\,dy=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^x xy^2\,dy\right]dx$$

$$=\int\limits_0^1 x\left|\frac{1}{3}y^3\right|_0^x dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{15}\left|x^5\right|_0^1=\frac{1}{15}.$$



Черт. 75

Пример 3. Да пресметнем интеграла

$$\iint\limits_R (x+y)\,dx\,dy,$$

където областта R е оградена от параболата с уравнение $y^2=x$ и правата с уравнение $x=2$ (черт. 76).

Тук криволинейният трапец R се задава с неравенствата

$$0\leqq x\leqq 2,\quad -\sqrt{x}\leqq y\leqq\sqrt{x}.$$

Тогава ще имаме

$$\iint\limits_R (x+y)\,dx\,dy=\int\limits_0^2\left[\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\right]dx$$

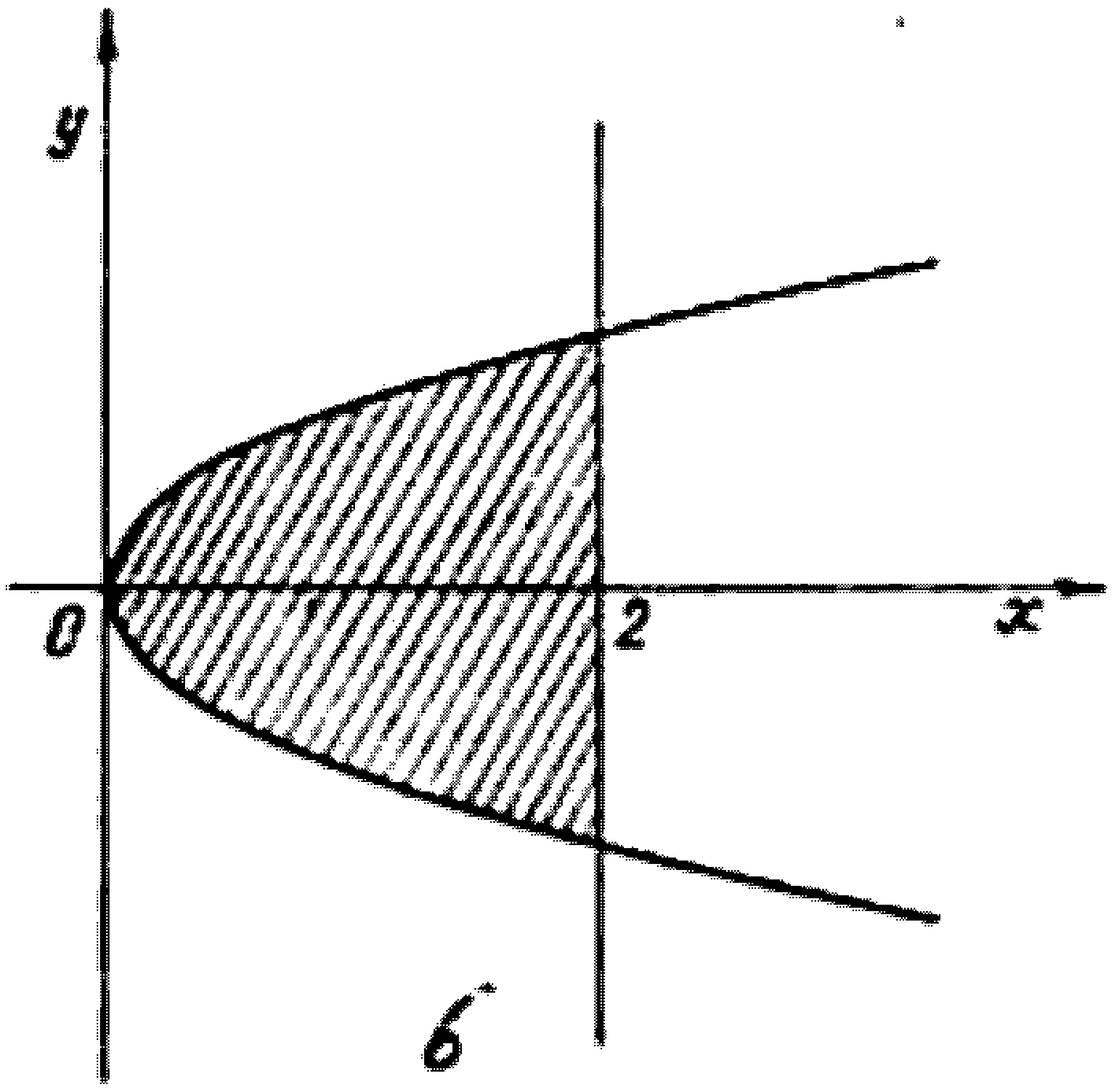
$$=\int\limits_0^2\left(x\left|y\right|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\left|y^2\right|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\right)dx=2\int\limits_0^2 x^{\frac{3}{2}}dx=2\cdot\frac{2}{5}\left|x^{\frac{5}{2}}\right|_0^2=\frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

Пример 4. Да се пресметне лицето на елипсата (черт. 77), зададена с уравнението

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Съгласно формула (2) от § 87 търсеното лице се дава с двойния интеграл

$$\iint_K dx\,dy,$$



Черт 76

взет върху областта, заградена от дадената елипса. Тази област е един криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$-a\leqq x\leqq a,\quad -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\leqq y\leqq\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Получаваме

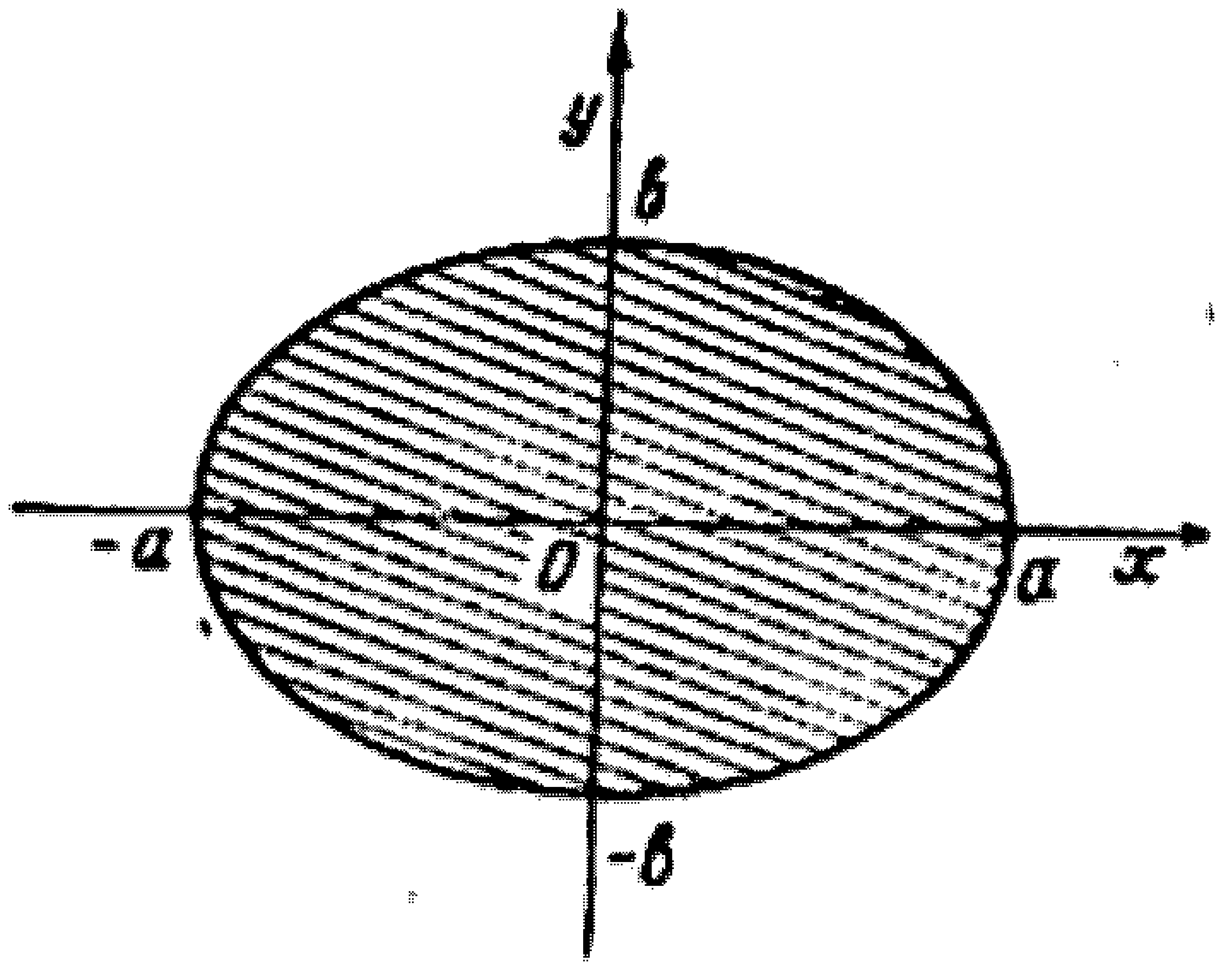
$$\iint_K dx\,dy=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right]dx=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

В получения определен интеграл правим субституцията $x=a\sin t$:

$$\iint_K dx\,dy=2\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt$$

$$=2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=ab\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=ab\Big|\,t\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{ab}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,d2t=\pi ab+\frac{ab}{2}\Big|\sin 2t\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$



Черт. 77

Пример 5. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от повърхнините с уравнения $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y^2=x$, $z=0$.

Това е едно цилиндрично тяло с образуващи, успоредни на оста Oz, което отгоре се огражда от параболоида $z=x^2+y^2$, а отдолу от онази област в равнината Oxy, която е заключена между двете параболи $y=x^2$ и $y^2=x$ (черт. 78). Тази област е един криволинеен трапец R, който може да бъде зададен с неравенствата

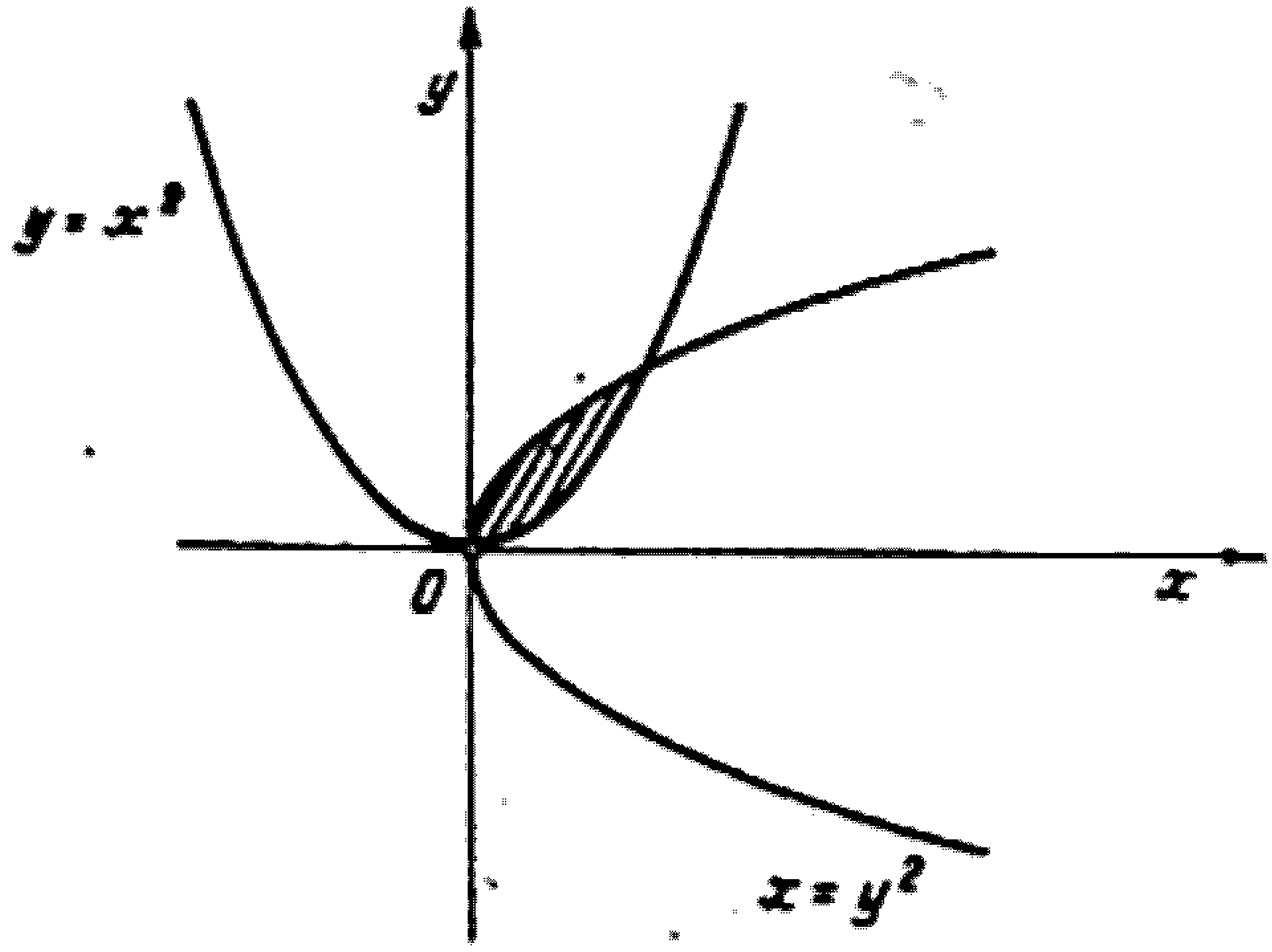
$$0\leqq x\leqq 1,\quad x^2\leqq y\leqq\sqrt{x}.$$

Следователно за търсения обем ще получим

$$\iint\limits_{R}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_{0}^{1}\left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy\right]dx$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\Big|\,x^2y+\frac{1}{3}y^3\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^2\sqrt{x}-x^4+\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^6\right)dx$$

$$=\left|\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{21}x^7\right|_0^1=\frac{2}{7}-\frac{1}{5}+\frac{2}{15}-\frac{1}{21}=\frac{6}{35}.$$



Черт. 78

Нека отбележим, че един криволинеен трапец R може да бъде зададен и с две функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, които са дефинирани и непрекъснати в някой интервал $[a, b]$, лежащ върху оста Oy, и които удовлетворяват в този интервал неравенството

$$\varphi(y) \leqq \psi(y).$$

В такъв случай областта R се задава с неравенствата

$$(10) \qquad a \leqq y \leqq b, \qquad \varphi(y) \leqq x \leqq \psi(y)$$

(черт. 79) и вместо формулата (9) имаме следната формула:

$$(11) \qquad \iint\limits_R f(x, y)\,dxdy = \int\limits_b^b \left[\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Пример 6. Да пресметнем интеграла

$$\iint\limits_R y^2\,dx\,dy,$$

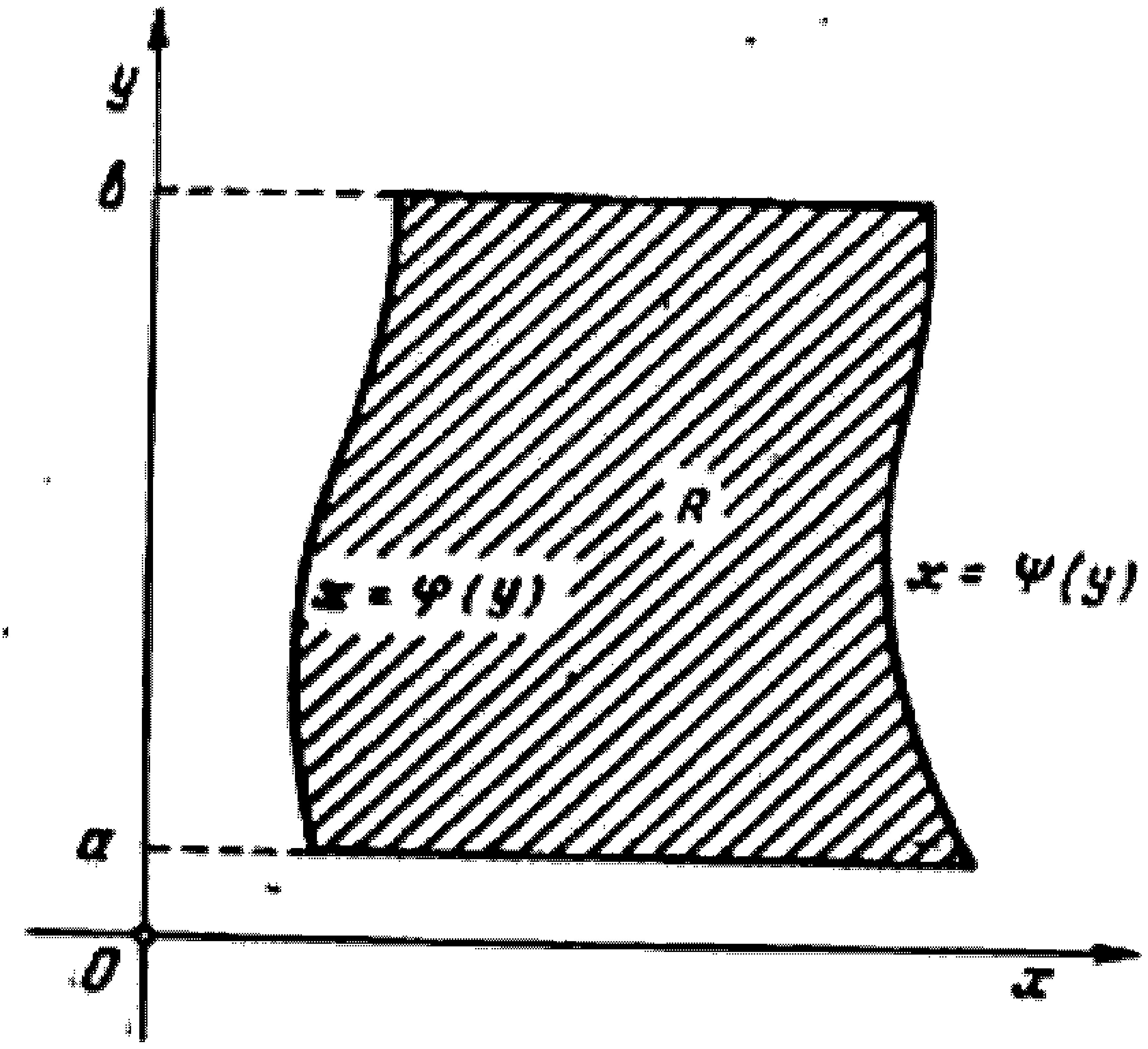
където областта R е оградена от хиперболата с уравнение $xy=1$ и правите с уравнения $x=0$, $y=1$ и $y=2$ (черт. 80).

Тук R е криволинеен трапец, определен с неравенствата

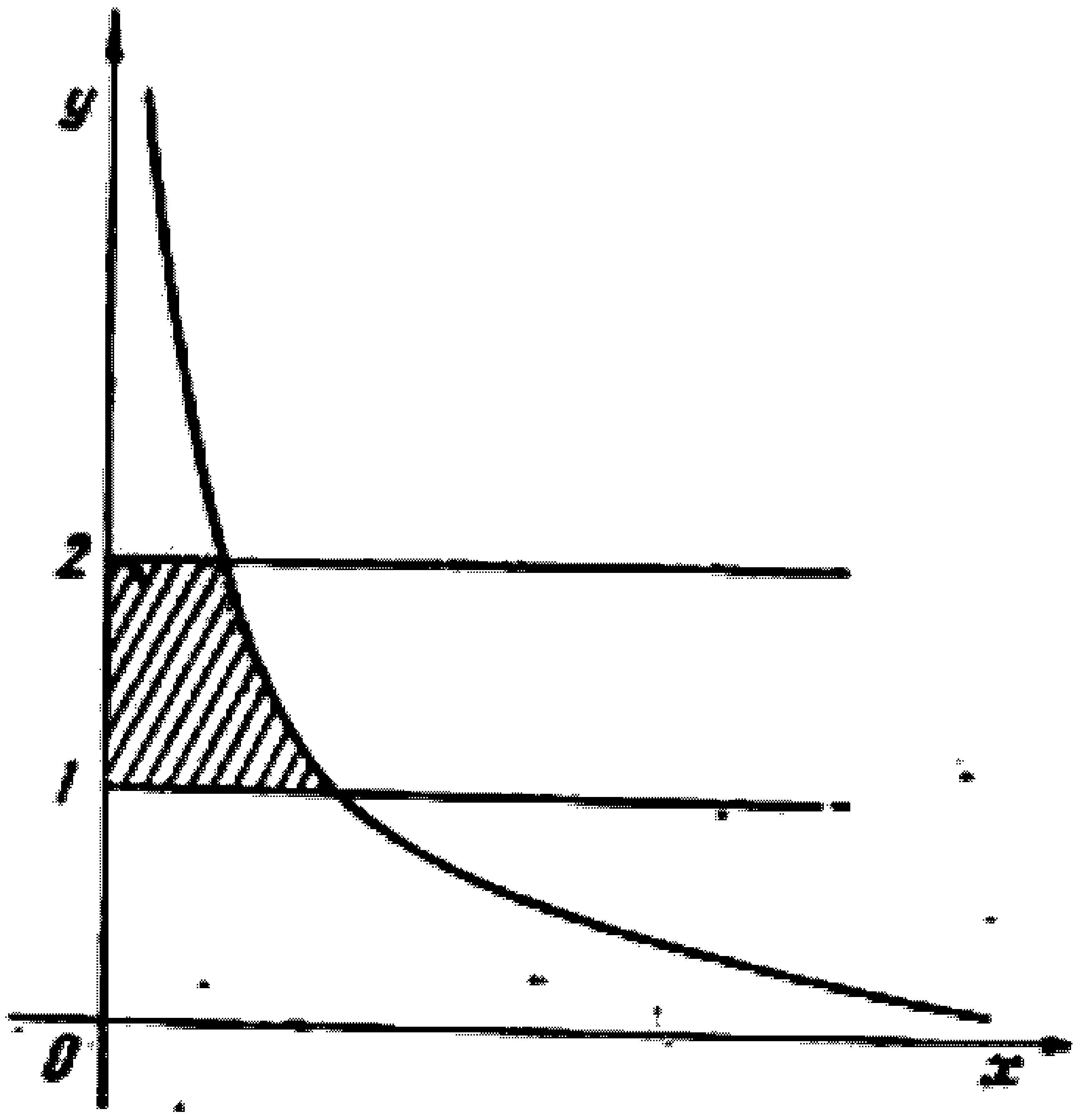
$$1 \leqq y \leqq 2, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{y},$$

и формулата (11) ни дава

$$\iint\limits_R y^2\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{1}{y}} y^2\,dx\right] dy = \int_1^2 y^2 \left| x \right|_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_1^2 y\,dy = \left|\frac{y^2}{2}\right|_1^2 = \frac{3}{2}.$$



Черт. 79



Черт. 80

По-нататък за краткост ще наричаме един криволинеен трапец *нормално разположен относно оста* Ox, когато той е зададен с неравенства от вида (1), и *нормално разположен* относно оста Oy, когато той е зададен с неравенства от вида (10).

Упражнения. Пресметнете следните двойни интеграли:

1. $\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=1$.

Отг. $\frac{5}{24}$.

2. $\iint\limits_R xy\,dx\,dy$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $x=1$, $y=1$, $x+y=3$.

Отг. $\frac{7}{8}$.

3. $\iint\limits_R y\,dx\,dy$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $y=0$, $y=x$, $y=2-x$.

Отг. $\frac{1}{3}$.

4. $\iint\limits_R xy^2\,dx\,dy$, където R е кръгът, ограден от окръжността с уравнение $x^2+y^2=4$.

Отг. 0.

5. $\iint\limits_R (x+y)\,dx\,dy$, където R е частта от първия квадрант на равнината, която е оградена от елипсата с уравнение $2x^2+y^2=1$.

Отг. $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$.

6. $\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $y=x$, $x=2$ и хиперболата с уравнение $xy=1$.

Отг. $\frac{27}{8}$.

7. Пресметнете лицето на областта, оградена от параболата с уравнение $y=x^2$ и правата $y=2$.

Отг. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

8. Да се пресметне лицето на областта, заградена от астроидата с уравнение $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$.

Отг. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

9. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от равнините $x=0$, $y=0$, $z=0$, цилиндъра $x^2+y^2=1$ и хиперболичния параболоид $z=xy$.

Отг. $\frac{1}{8}$.

10. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от равнините $y=1$, $z=0$, параболичния цилиндър $y=x^2$ и параболоида $z=x^2+y^2$.

Отг. $\frac{88}{105}$.

§ 94. Смяна на променливите в двойните интеграли

Смяната на променливите в двойните интеграли е свързана с понятието за трансформация на едно двумерно множество (т. е. на едно множество, лежащо в равнината) в друго. Ако функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани в едно множество R', разположено в равнината Ouv, то казваме, че равенствата

$$(1) \qquad x=f(u, v), \qquad y=g(u, v)$$

дефинират една трансформация, изобразяваща множеството R' в някакво множество R, лежащо в равнината Oxy. Когато е дадена една точка (u, v) от R', точката (x, y), чиито координати удовлетворяват равенствата (1), се нарича образ на точката (u, v). Множеството R, състоящо се от всички точки (x, y), получени като образи на точките (u, v) от R', се нарича образ на множеството R' при трансформацията (1).

Една трансформация, дефинирана с равенствата (1), се нарича обратима в дадено множество G' от равнината Ouv, ако всеки две различни точки от G' имат различни образи, т. е. ако винаги когато (u_1, v_1) и (u_2, v_2) са две различни точки от G', различни са и точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2), определени от равенствата

$$x_1=(f(u_1, v_1), \quad y_1=g(u_1, v_1)$$

и

$$x_2=f(u_2, v_2), \quad y_2=g(u_2, v_2).$$

Ще казваме, че трансформацията (1) е регулярна в дадено множество R' от равнината Ouv, ако са изпълнени следните условия:

а) функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати и притежават непрекъснати първи и втори частни производни в някое отворено множество U', съдържащо R';

б) трансформацията (1) е обратима във вътрешността на множеството R';

в) детерминантата

$$\Delta(u, v)=\begin{vmatrix} f_u'(u, v) & f_v'(u, v) \\ g_u'(u, v) & g_v'(u, v) \end{vmatrix}$$

е различна от нула във вътрешността на R'.

Смяната на променливите в двойните интеграли се извършва въз основа на следната

Теорема. *Нека трансформацията*

$$(1) \qquad x=f(u,\ v), \qquad y=g(u,\ v)$$

е регулярна в измеримото и затворено множество R' от равнината Ouv, което се изобразява чрез (1) в измеримото и затворено множество R от равнината Oxy. Ако функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в множеството R, то

$$(2) \qquad \iint\limits_{R} F(x,\ y)\,dx\,dy=\iint\limits_{R'} F\,[f(u,\ v),\ g(u,\ v)]\,|\Delta(u,\ v)|\,du\,dv.$$

Ние ще прилагаме тази теорема най-често, когато множеството R' е криволинеен трапец в равнината Ouv, в който случай знаем как да пресмятаме двойния интеграл, стоящ в дясната страна на формулата (2).

Доказателството на изказаната по-горе теорема е доста сложно и няма да го излагаме. Ще скицираме само един път за изработването на такова доказателство (далеч не единствено възможен, разбира се), който се отличава с това, че извършените за целта разсъждения ще ни помогнат да възприемем формулата (2) като естествена.

Да разделим правилно множеството R' на подмножества R_1', R_2', ..., R_m' и да вземем по една вътрешна точка $(u_i,\ v_i)$ във всяко от множествата R_i'. При фиксирано i да приложим относно точката $(u_i,\ v_i)$ към функциите $f(u,\ v)$ и $g(u,\ v)$ формулата на Тейлор с остатъчен член, изразен чрез първите частни производни. Ако $(u,\ v)$ е точка от R_i' и ако $h=u-u_i$, $k=v-v_i$, ще получим

$$f(u,\ v)=f(u_i,\ \ v_i)+f_u'(u_i+\theta_1 h,\ v_i+\theta_1 k)h+f_v'(u_i+\theta_1 h,\ v_i+\theta_1 k)k,$$
$$g(u,\ v)=g(u_i,\ v_i)+g_u'(u_i+\theta_2 h,\ v_i+\theta_2 k)h+g_v'(u_i+\theta_2 h,\ v_i+\theta_2 k)k,$$

където $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. Когато диаметърът на множеството R_i' е малък, малки ще бъдат и $|h|$ и $|k|$ и поради непрекъснатостта на частните производни стойностите на тези производни в точките $(u_i+\theta_1 h,\ v_i+\theta_1 k)$ и $(u_i+\theta_2 h,\ v_i+\theta_2 k)$ ще бъдат близки до стойностите им в точката $(u_i,\ v_i)$. Ето защо образът на всяка точка $(u,\ v)$ от R_i' при трансформацията (1) ще бъде точка, близка до образа на $(u,\ v)$ при следната линейна трансформация:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda(u,\ v)&=f(u_i,\ v_i)+f_u'(u_i,\ v_i)\ (u-u_i)+f_v'(u_i,\ v_i)\ (v-v_i),\\ \mu(u,\ v)&=g(u_i,\ v_i)+g_u'(u_i,\ v_i)\,(u-u_i)+g_v'\,(u_i,\ v_i)\,(v-v_i).\end{aligned}$$

Тъй като съгласно условието в) за регулярна трансформация детерминантата

$$\Delta(u_i,\ v_i)=\begin{vmatrix} f_u'(u_i,\ v_i) & f_v'(u_i,\ v_i)\\ g_u'(u_i,\ v_i) & g_v'(u_i,\ v_i)\end{vmatrix}$$

е различна от нула, тази линейна трансформация е обратима и преобразува, както е известно от аналитичната геометрия, всяка многоъгълна фигура A' с лице $s(A')$ от равнината Ouv в многоъгълна фигура A в равнината Oxy с лице

$$s(A)=|\Delta(u_i,\ v_i)|.s(A').$$

Оттук лесно можем да заключим, че образът M на всяко измеримо множество M' в равнината $(u,\ v)$ е също измеримо множество в равнината Oxy и при това

$$\mu(M)=|\Delta(u_i,\ v_i)|.\mu(M').$$

Нека R_i е образът на R_i' при трансформацията (1). Тъй като образите на точките от R_i' при тази трансформация, както отбелязахме, са близки до образите им при трансформацията (3), множеството R_i ще има мярка, приблизително равна на $|\Delta(u_i,\ v_i)|.\mu(R_i')$.

Ако сега предположим, че множествата R_i образуват от своя страна също така правилно разделяне на множеството R, и ако $f(u_i,\ v_i)=\xi_i$, $g(u_i,\ v_i)=\eta_i$, то сумата

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i,\ \eta_i)\,\mu(R_i)$$

ще бъде приблизително равна на сумата

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{m} F\,[(f(u_i,\ v_i),\ g(u_i,\ v_i)]\,|\Delta(u_i,\ v_i)|\,\mu(R_i').$$

Но сумата (4) е една риманова сума за функцията $F(x,\ y)$, а сумата (5) — риманова сума за функцията $F[f(u,\ v),\ g(u,\ v)].|\Delta(u,\ v)|$. Както знаем от § 91, ако разгледаме една издребняваща редица от разделяния на множеството R', съответната редица от риманови суми (5) ще клони към двойния интеграл, написан в дясната страна на равенството (2). При това лесно може да се види, че разделянията на R' от една издребняваща редица ще преминат при трансформацията (1) в такива разделяния на множеството R, които от своя страна образуват също тъй издребняваща редица, и следователно съответните им риманови суми (4) ще клонят към двойния интеграл, написан в лявата страна на равенството (2). Най-сетне остава да покажем, че разликата между сумите (4) и (5) ще стане колкото си пожелаем малка по абсолютна стойност, стига да вземем достатъчно малки диаметрите на множествата R_i', образуващи разделяне на R'. Оттук след всичко казано ще следва и равенството (2).

Изложените тук разсъждения могат да бъдат разработени подробно до степента на редовно доказателство, но това е свързано с известни технически трудности, поради което няма да го правим.

Пример 1. Да се пресметне двойният интеграл

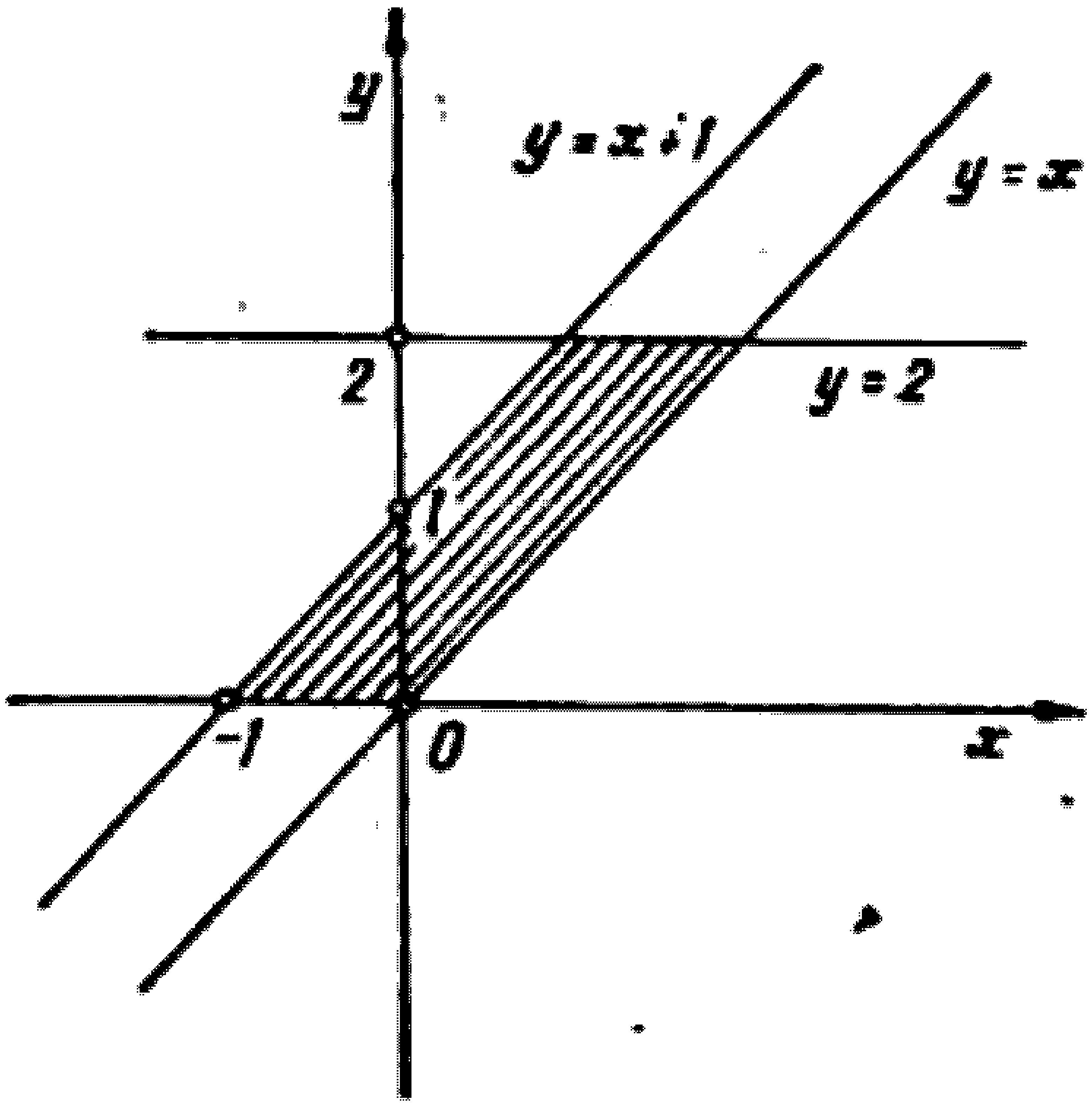
$$\iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2-2xy+y^2}},$$

където R е успоредникът, заключен между правите с уравнения $y=0$, $y=2$, $y=x$, $y=x+1$ (черт. 81). Тук областта R може да бъде зададена с неравенствата

$$0 \leqq y \leqq 2, \qquad 0 \leqq y - x \leqq 1.$$

От друга страна, подинтегралната функция може да бъде записана така:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y-x)^2}}.$$



Черт. 81

Това ни помага да съобразим, че задачата ще се опрости, ако въведем нови променливи u и v посредством равенствата $y = u$, $y - x = v$, откъдето получаваме трансформацията

(4) $$x = u - v, \qquad y = u.$$

Областта R е образ при разглежданата трансформация на правоъгълника R', зададен в равнината Ouv с неравенствата

$$0 \leqq u \leqq 2, \qquad 0 \leqq v \leqq 1.$$

Лесно се вижда, че трансформацията (4) е регулярна в R' (тя е регулярна във всяко множество от равнината Ouv). Тук $\Delta(u, v) = 1$. Ето защо ще имаме

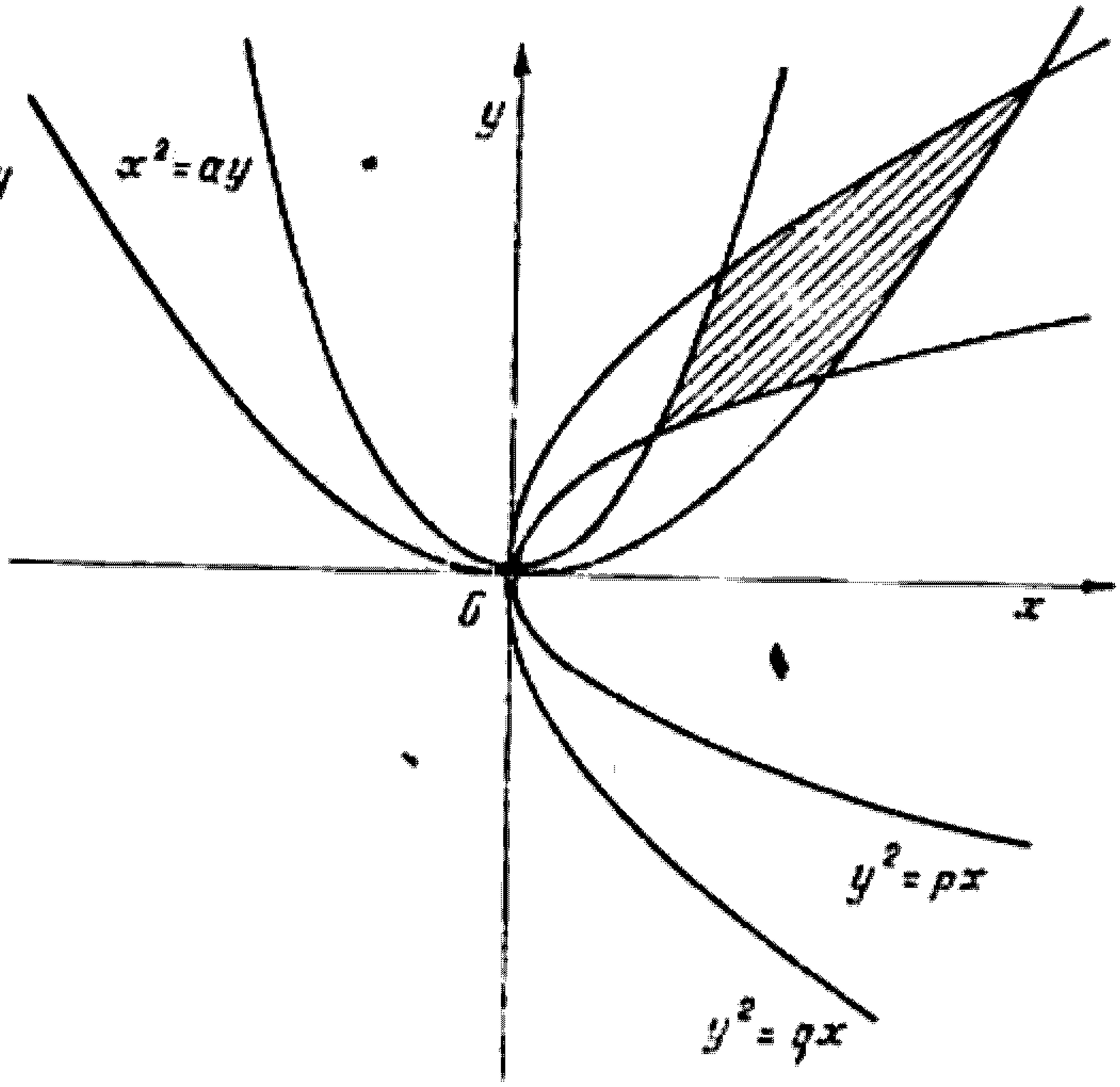
$$\iint_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 + x^2 - 2xy + y^2}} = \iint_{R'} \frac{du\,dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \right] du = \ln(1+\sqrt{2}) \cdot \int_0^2 du = 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 2. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R x^2 y^2 \, dx \, dy$$

в частта R от равнината, заключена между четирите параболи с уравнения $y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$ (където $0<p<q$, $0<a<b$) (черт. 82). Областта R може да бъде зададена посредством неравенствата



Черт. 82

$$p \leqq \frac{y^2}{x} \leqq q, \quad a \leqq \frac{x^2}{y} \leqq b.$$

Това ни навежда на мисълта да въведем нови променливи u и v с равенствата

$$\frac{y^2}{x}=u, \qquad \frac{x^2}{y}=v,$$

от които достигаме до трансформацията

$$(5) \qquad x=\sqrt[3]{uv^2}, \qquad y=\sqrt[3]{u^2 v}.$$

Областта R се явява при тази трансформация образ на правоъгълника R', зададен с неравенствата

$$p \leqq u \leqq q, \qquad a \leqq v \leqq b.$$

Читателят лесно ще провери, че трансформацията (5) е регулярна в R'. Също тъй лесно се пресмята, че $\Delta(u,\ v) = -\frac{1}{3}\cdot$ Ето защо ще получим

$$\iint\limits_{R} x^2 y^2\, dx\, dy = \frac{1}{3}\iint\limits_{R'} u^2 v^2\, du\, dv = \frac{1}{3}\int_p^q \left[\int_a^b v^2 dv\right] u^2\, du$$

$$= \frac{1}{27}(a^3 - b^3)(q^3 - p^3).$$

Упражнения. 1. Да се пресметне двойният интеграл $\iint\limits_{R} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $y = ax$, $y = bx$, $x + y = p$, $x + y = q$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

Отг. $(\operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a) \ln \frac{q}{p}\cdot$

2. Да се пресметне лицето на областта, оградена от правите $y = ax$, $y = bx$ и хиперболите $xy = p$, $xy = q$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

Отг. $\frac{1}{2}(q - p) \ln \frac{b}{a}\cdot$

§ 95. Смяна чрез полярни координати

Една много често използувана смяна на променливите в двойните интеграли се състои във въвеждането на т. нар. полярни координати. Всяка точка $P(x,\ y)$ в равнината освен чрез своите две декартови координати x и y може да бъде определена и със следните две числа (черт. 83):

1) неотрицателното число ρ, даващо разстоянието на точката P до началото на координатната система O;

2) ъгълът θ, който сключва векторът $\overrightarrow{OP}$, наречен радиус-вектор, с положителната полуос на оста Ox, измерен в посока от оста Ox към $\overrightarrow{OP}$. Той се приема за положителен, когато е измерен в посоката на часовниковата стрелка, и за отрицателен в противния случай.

Числата ρ и θ се наричат **полярни координати** на точката P. (Когато точката P съвпада с точката O, ъгълът θ се взема произволен.)

От геометрични съображения се получава следната връзка между декартовите координати x и y на точката P и нейните полярни координати:

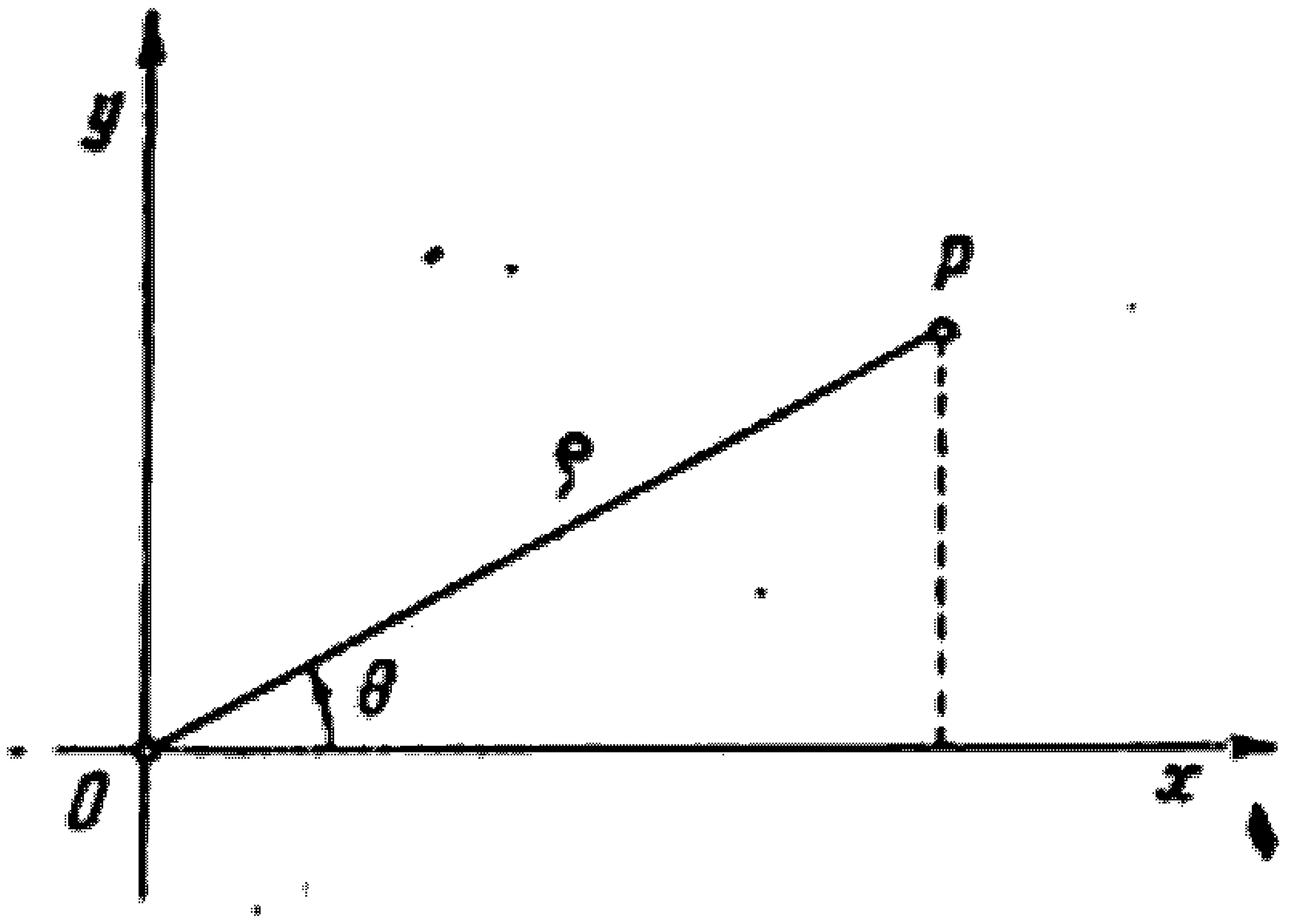
$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta. \tag{1}$$

Ние ще разглеждаме равенствата (1) като една трансформация. Функциите $f(\theta, \rho) = \rho\cos\theta$ и $g(\theta,\ \rho) = \rho\sin\theta$ притежават очевидно непрекъснати първи и втори частни производни в цялата равнина $O\theta\rho$ (в която θ и ρ играят ролята на декартови координати). За детерминантата $\Delta(\theta,\ \rho)$ получаваме

$$\Delta(\theta,\ \rho) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

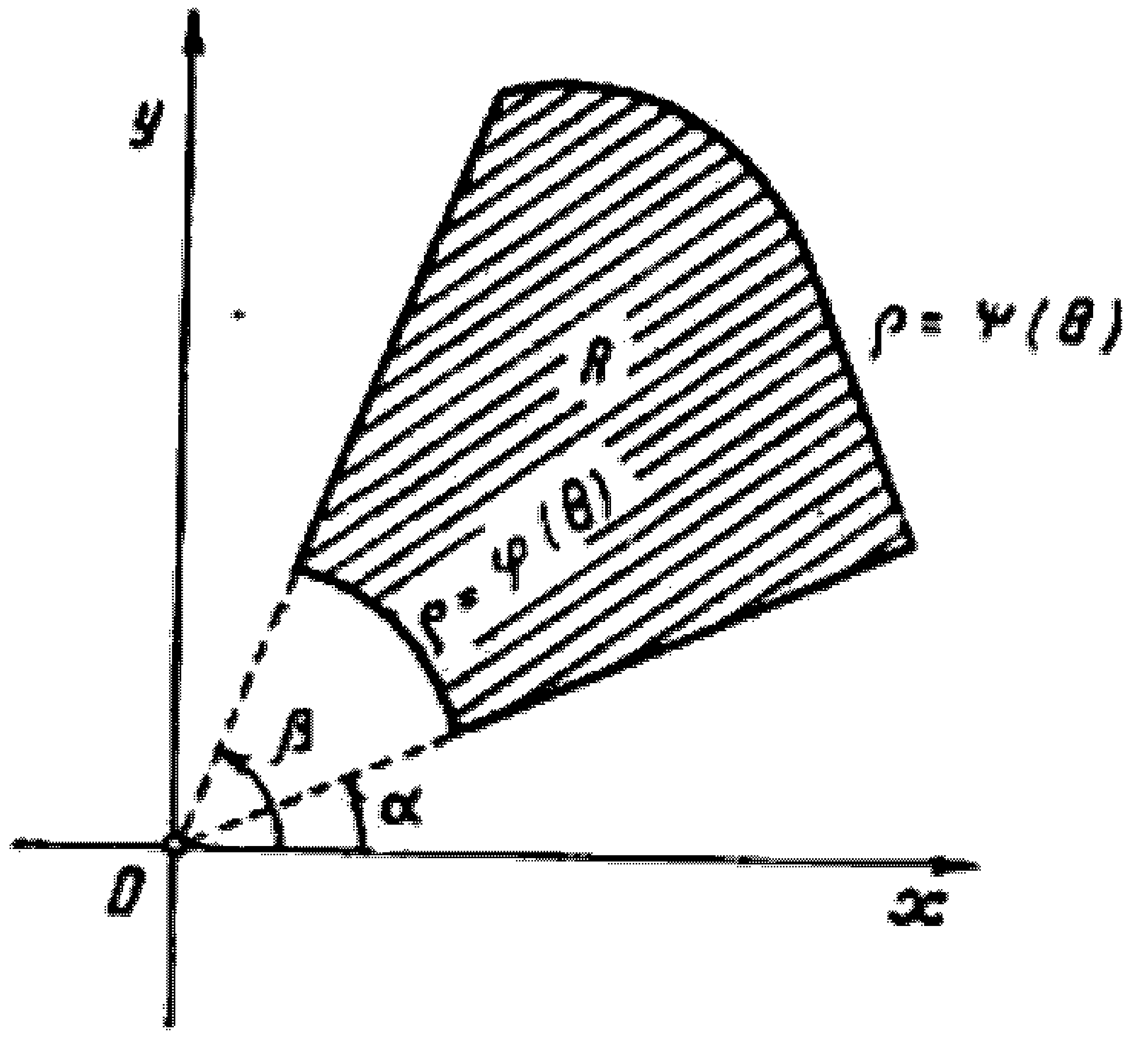
Ако $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ са две неотрицателни функции, дефинирани и непрекъснати в някой интервал $[\alpha, \beta]$, то множеството R в равнината Oxy, състоящо се от точките, чиито полярни координати θ и ρ удовлетворяват неравенствата

(2) $$\alpha \leqq \theta \leqq \beta, \quad \varphi(\theta) \leqq \rho \leqq \psi(\theta)$$



Черт. 83

(черт. 84), се явява образ (при трансформацията (1)) на един криволинеен трапец R', лежащ в равнината $O\theta\rho$ и съставен от точките, чиито декартови координати θ и ρ удовлетворяват същите неравенства (2) (черт. 85).



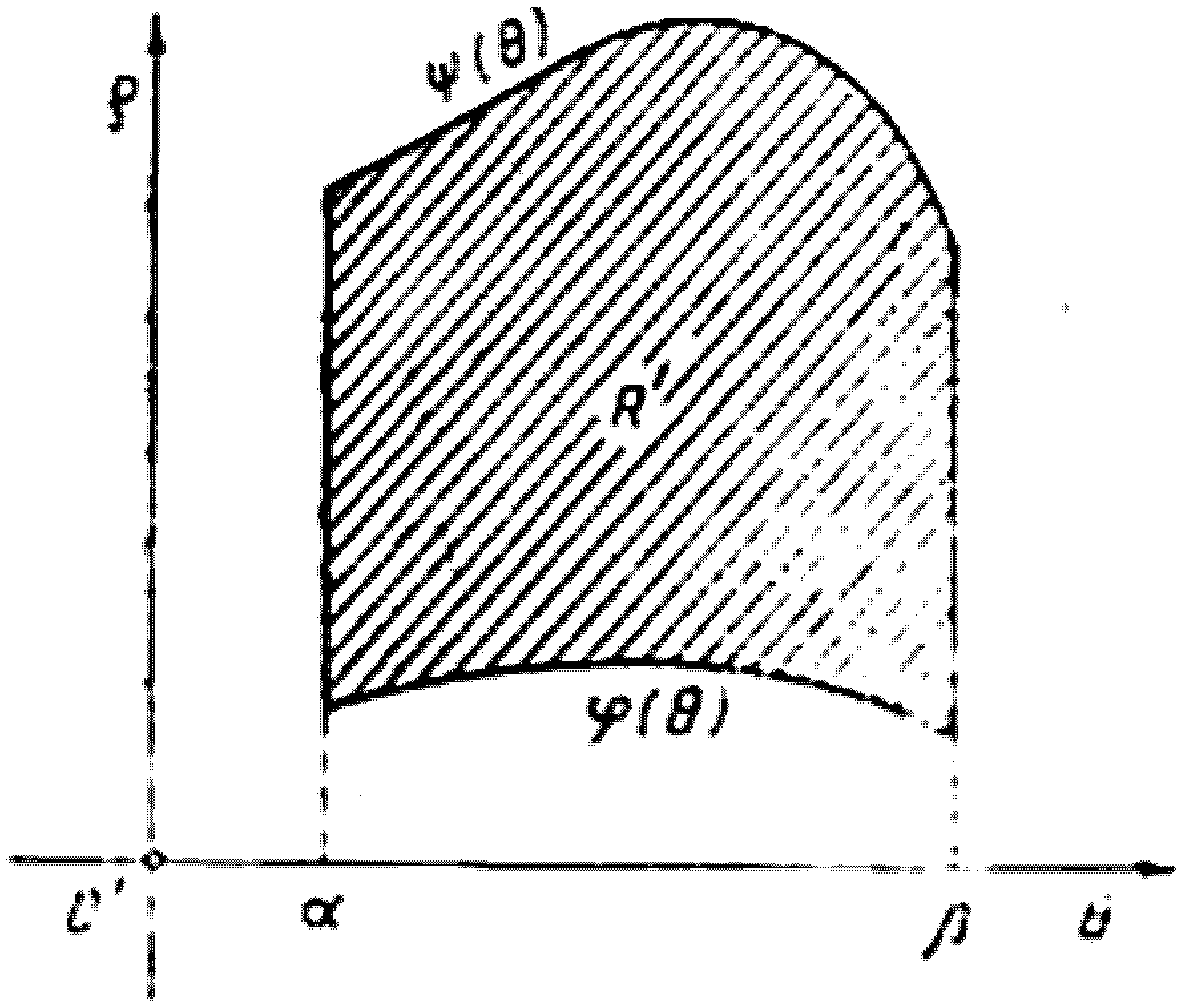
Черт. 84

В случай, че

(3) $$\beta - \alpha \leqq 2\pi,$$

не е трудно да се провери, че трансформацията (1) е регулярна в криволинейния трапец R'. Ето защо винаги когато е изпълнено неравенството (3), можем да извършваме смяна на променливите чрез трансформацията (1), прилагайки теоремата към криволинеен трапец R', зададен в равнината $O\theta\rho$ чрез неравенства от вида (2).

Нека забележим, че въвеждането на полярни координати при пресмятане на даден двоен интеграл е особено целесъобразно, когато било в подинтегралната функция, било в дефиницията на интеграционната област участвува изразът x^2+y^2, тъй като този израз, както показва равенството $x^2+y^2=\rho^2$, се опростява много при тази трансформация.



Черт. 85

Пример 1. Да се пресметне двойният интеграл

$$\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

където R е кръгът, ограничен от окръжността с уравнение $x^2+y^2=1$ (черт. 86).

Тук областта R може да бъде зададена чрез следните неравенства относно полярните координати θ и ρ в равнината Oxy:

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \rho \leqq 1.$$

Същите неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ един правоъгълник R', чийто образ се явява R. Съгласно казаното по-рано можем да приложим теоремата за смяна на променливите и да извършим трансформацията (1). Ще получим

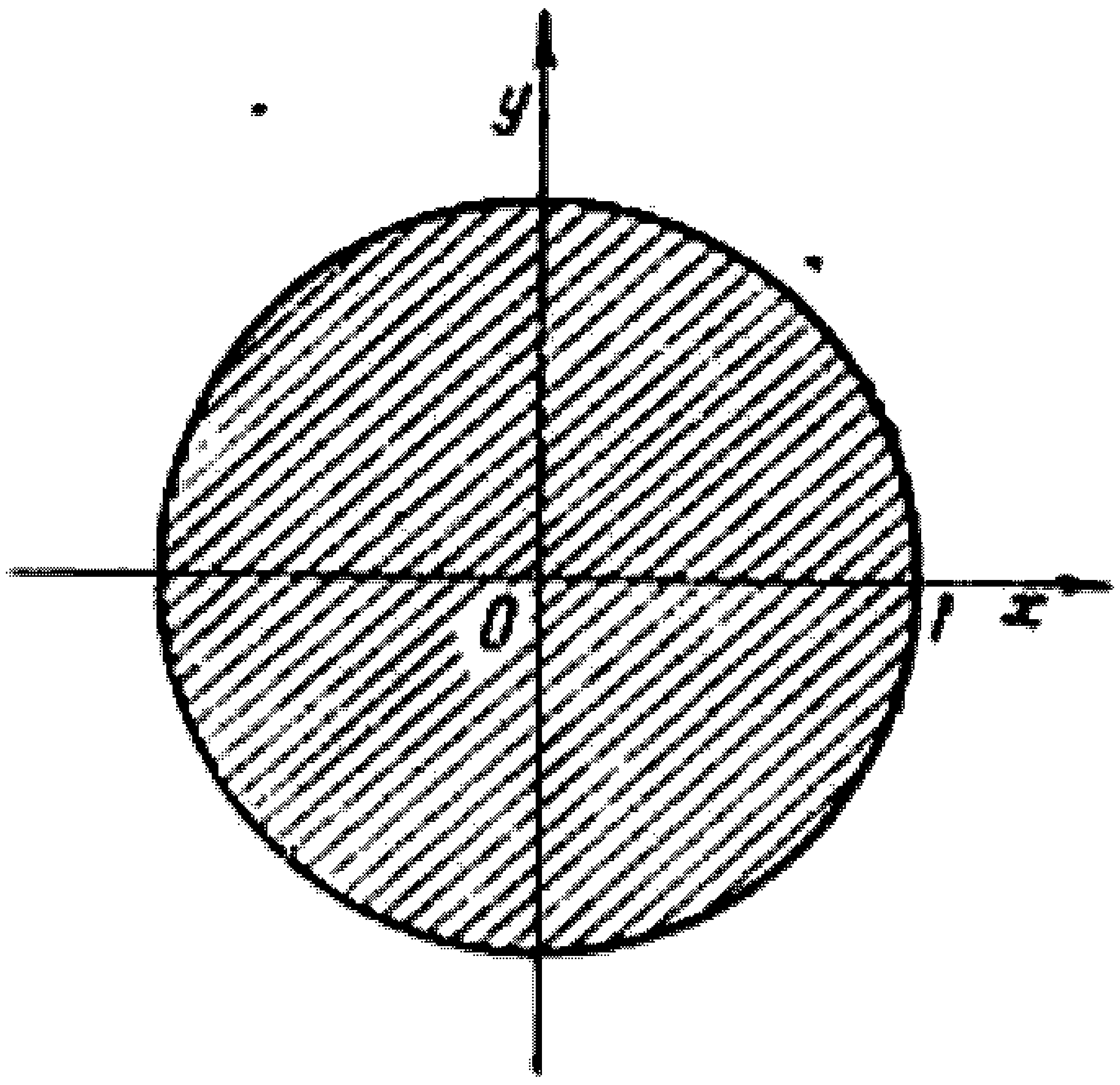
$$\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \iint\limits_{R'} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1+\rho^2}}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^1 \rho\,(1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho\right]d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^1 (1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho^2\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} \right|_0^1 d\theta = 2(\sqrt{2}-1)\pi.$$

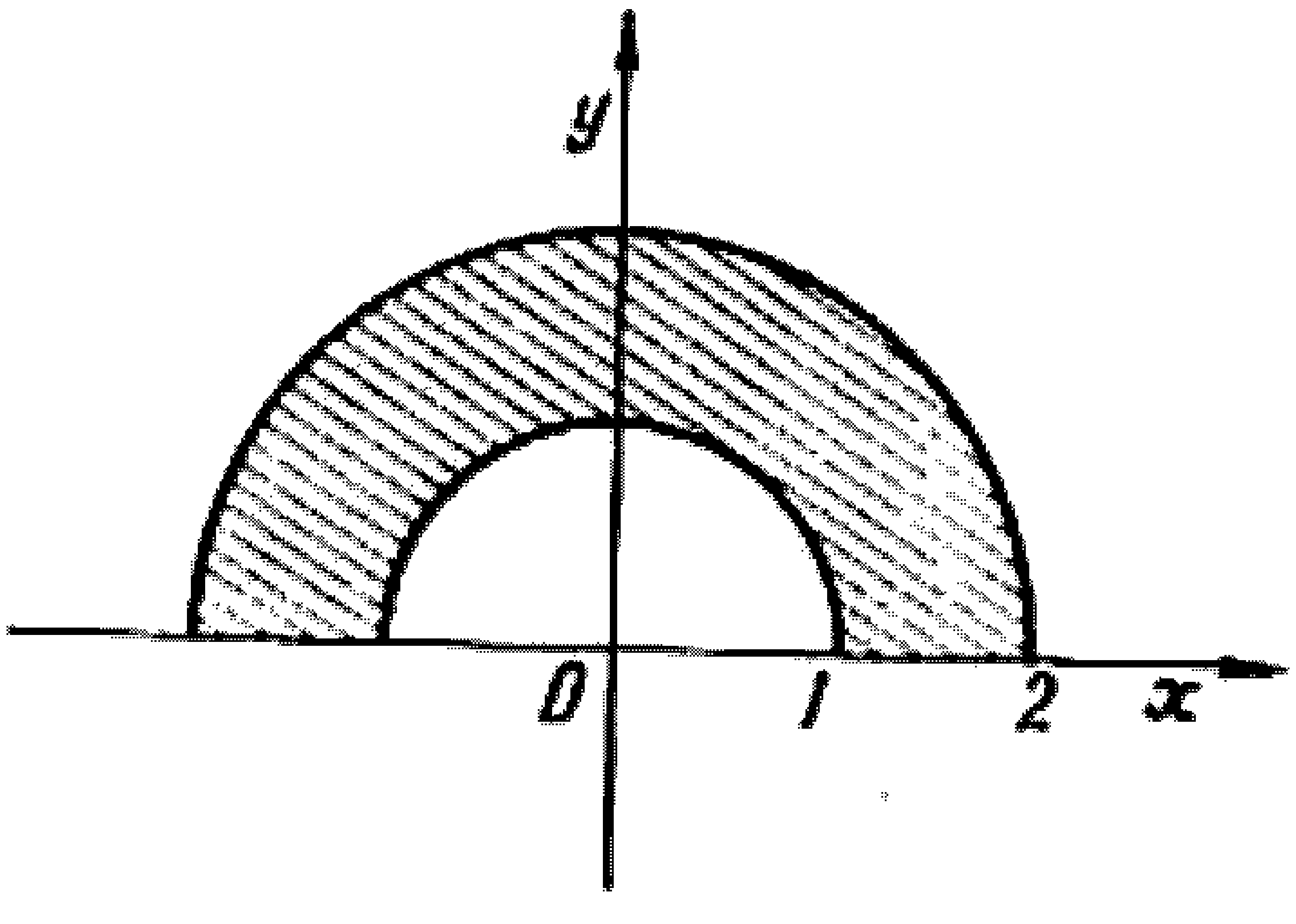
Пример 2. Да пресметнем интеграла

$$\iint_R y\,dx\,dy,$$



Черт. 86

ако R е областта, която лежи над оста Ox и се намира между двете концентрични окръжности с уравнения $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (черт. 87).



Черт. 87

Тук областта R може да бъде зададена със следните неравенства относно полярните координати θ и ρ в равнината Oxy:

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 1 \leqq \rho \leqq 2.$$

Същите неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ един правоъгълник R', който при трансформацията (1) се изобразява в R. Ето защо, извършвайки тази трансформация в дадения двоен интеграл, ще получим

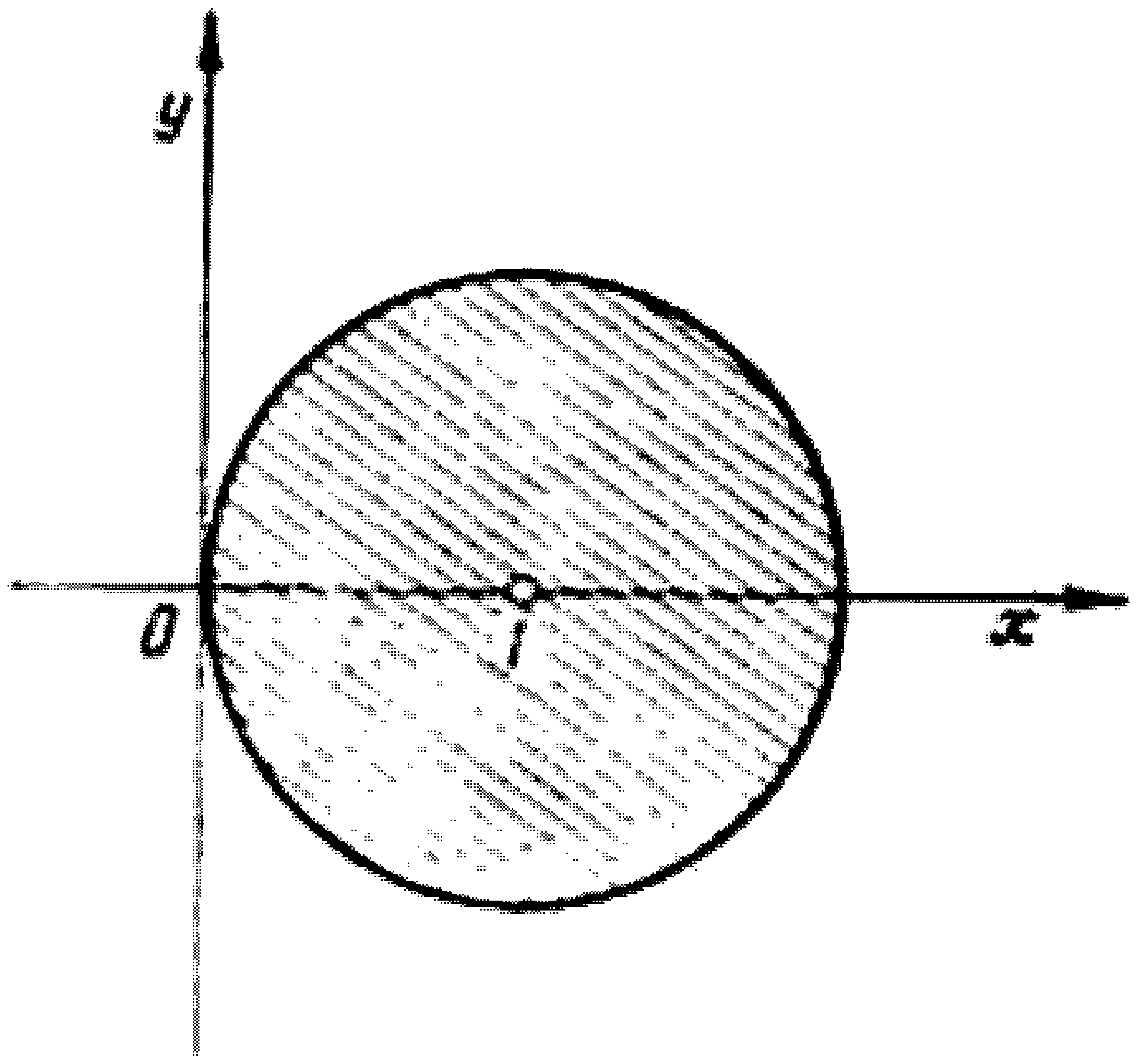
$$\iint\limits_R y\,dx\,dy=\iint\limits_{R'}\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\rho=\int\limits_0^\pi\left[\int\limits_1^2\rho^2\,d\rho\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^\pi\left.\rho^3\right|_1^2\sin\theta\,d\theta=\frac{7}{3}\int\limits_0^\pi\sin\theta\,d\theta=-\frac{7}{3}\left.\cos\theta\right|_0^\pi=\frac{14}{3}.$$

Пример 3. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint\limits_R\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

взет в кръга R, определен от окръжността с уравнение $x^2+y^2-2x=0$ (черт. 88).



Черт. 88

Ако въведем полярни координати, уравнението на дадената окръжност придобива вида

$$\rho=2\cos\theta.$$

Ето защо областта R може да бъде зададена с помощта на следните неравенства относно полярните координати в равнината Oxy:

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq\rho\leqq2\cos\theta.$$

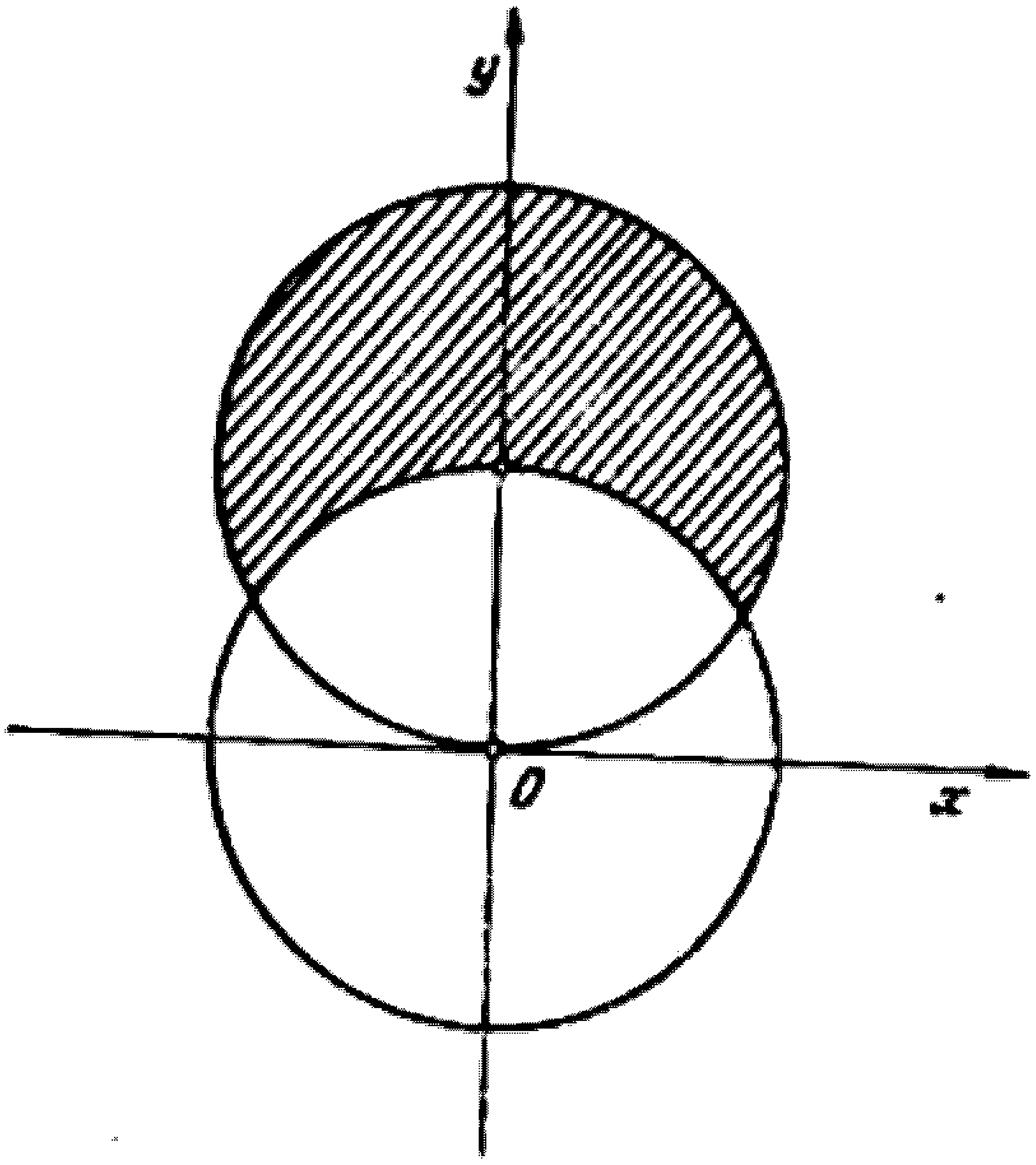
В равнината $O\theta\rho$ тези неравенства определят един криволинеен трапец R' чийто образ при трансформацията (1) се явява областта R. Ето защо, извършвайки смяна на променливите посредством тази трансформация, ще имаме

$$\iint_{R} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{R'} \rho^2\,d\theta\,d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{0}^{2\cos\theta} \rho^2\,d\rho\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\rho^3\right|_{0}^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left|\sin\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{9}\left|\sin^3\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{16}{9} = \frac{32}{9}.$$

Пример 4. Да пресметнем лицето на областта R, намираща се във вътрешността на окръжността $x^2+y^2-2y=0$, но вън от окръжността $x^2+y^2=1$ (черт. 89).



Черт. 89

Уравненията на двете окръжности, написани в полярни координати, са съответно $\rho=2\sin\theta$ и $\rho=1$. За пресечните им точки ще имаме $1=2\sin\theta$, или $\sin\theta=\frac{1}{2}$. Значи тези пресечни точки ще имат полярен ъгъл съответно $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ и $\theta_2=\frac{5}{6}\pi$. Ето защо областта ще се задава с неравенствата

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad 1\leqq\rho\leqq 2\sin\theta.$$

Тези неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ един криволинеен трапец R'. Извършвайки смяна на променливите чрез трансформацията (1), за търсеното лице ще получим

$$\iint_R dx\,dy=\iint_{R'}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[\int_1^{2\sin\theta}\rho\,d\rho\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left|\rho^2\right|_1^{2\sin\theta}d\theta=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta-\frac{1}{3}\pi=\left|\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}-\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 5. Да пресметнем обема на тялото, оградено от параболоида с уравнение

$$x^2+y^2+z=1$$

и равнината Oxy (черт. 90).

Това тяло е оградено от равнината с уравнение $z=0$ и парболоида, чието уравнение можем да напишем във вида

$$z=1-(x^2+y^2).$$

Ето защо търсеният обем ще се дава с двойния интеграл

$$\iint_R(1-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

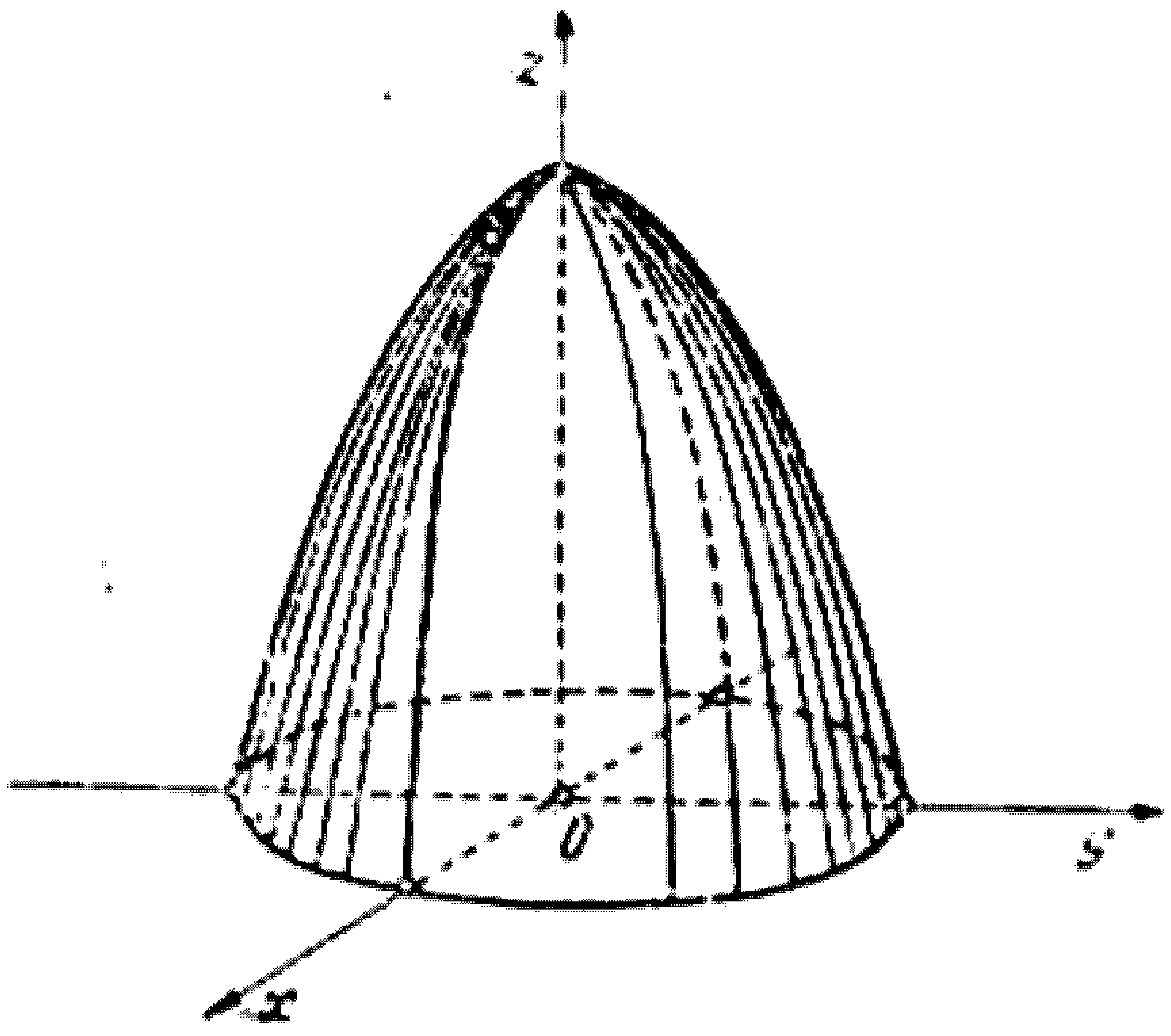
където R е областта, определена от сечението на параболоида с равнината Oxy. Това сечение е окръжността с уравнение $x^2+y^2=1$, следователно R е кръгът, определен от тази окръжност. Въвеждайки полярни координати, можем да зададем този кръг чрез неравенствата

$$0\leqq\theta\leqq 2\pi,\qquad 0\leqq\rho\leqq 1,$$

които определят в равнината $O\theta\rho$ един правоъгълник R'. Тогава, извършвайки смяна посредством трансформацията (1), ще получим

$$\iint_R (1-x^2-y^2)\,dx\,dy=\iint_{R'} (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1(\rho-\rho^3)\,d\rho\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right|_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{2}.$$



Черт. 90

Пример 6. Несобственият интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(който е очевидно сходящ) играе важна роля в теорията на вероятностите и носи името **интеграл на Поасон**. Неговото непосредствено пресмятане е невъзможно поради това, че неопределеният интеграл от функцията e^{-x^2} не може да бъде изразен с елементарни функции. Тук ще посочим един метод за пресмятане на интеграла на Поасон, при който добра услуга ни оказва теоремата за смяна на променливите в двойните интеграли.

Като представим интересуващия ни интеграл във вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx+\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

и извършим в първия от интегралите, написани в дясната страна на това равенство, субституцията $x=-t$, виждаме, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Поради това ще имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\lim_{n} I_n,$$

където

$$I_n = \int_{0}^{n} e^{-x^2}dx.$$

Умножавайки почленно равенствата

$$I_n = \int_{0}^{n} e^{-x^2}\,dx, \quad I_n = \int_{0}^{n} e^{-y^2}\,dy,$$

получаваме

$$I_n^2 = \int_{0}^{n} e^{-x^2}\,dx \int_{0}^{n} e^{-y^2}\,dy = \int_{0}^{n}\left[\int_{0}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right]dx.$$

Като си спомним формулата за пресмятане на двойни интеграли, можем да пишем

$$I_n^2 = \iint_{R_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy, \tag{4}$$

където R_n е квадратът, зададен в равнината Oxy с неравенствата

$$0 \leq x \leq n, \quad 0 \leq y \leq n.$$

Ако в двойния интеграл от равенството (4) извършим смяна на променливите, въвеждайки полярни координати посредством трансформацията

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \tag{1}$$

ще получим

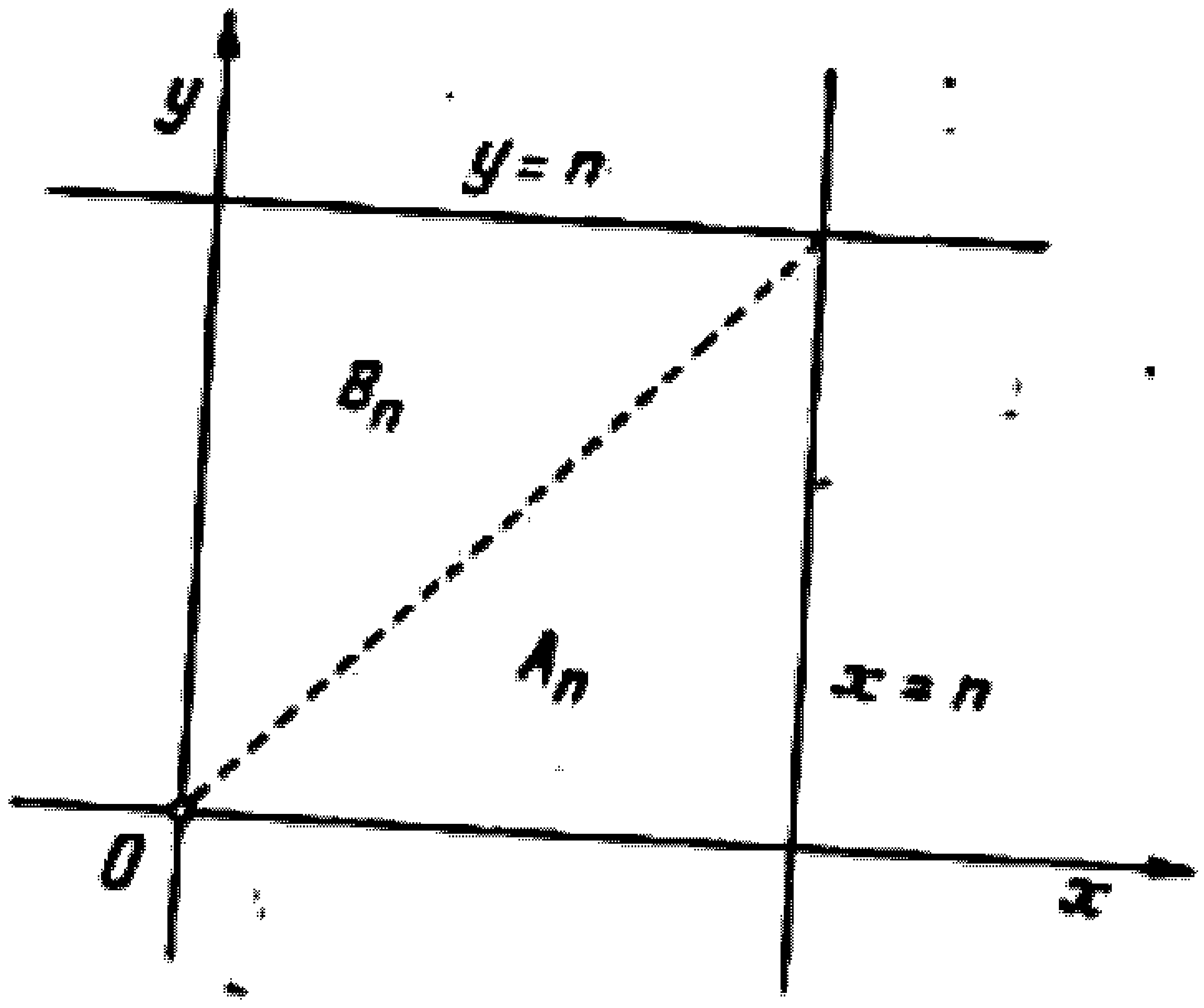
$$I_n^2 = \iint_{R_n'} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta,$$

където R_n' е онази област в равнината $O\theta\rho$, чийто образ при трансформацията (1) се явява R_n. Тъй като уравненията на правите $x=n$ и $y=n$, записани с полярни координати, придобиват съответно вида $\rho = \frac{n}{\cos\theta}$ и $\rho = \frac{n}{\sin\theta}$, ясно е от геометрични съображения, че квадратът R_n може да се разглежда като съставен от два триъгълника A_n и B_n (черт. 91), които се задават съответно чрез следните неравенства относно полярните координати θ и ρ:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{n}{\cos\theta},$$

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \rho \le \frac{n}{\sin\theta}.$$

Тези неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ два криволинейни трапеца A_n' и B_n', непритежаващи общи вътрешни точки. Ето защо ще имаме



Черт. 91

$$I_n^2 = \iint_{A_n'} e^{-\rho^2} d\rho\, d\theta + \iint_{B_n'} e^{-\rho^2} d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{n}{\cos\theta}} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{n}{\sin\theta}} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{-\rho^2} \right|_0^{\frac{n}{\cos\theta}} d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-\rho^2} \right|_0^{\frac{n}{\sin\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} \right) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{-\frac{n^2}{\sin^2\theta}} \right) d\theta.$$

Извършвайки във втория от последните два интеграла субституцията $\theta = \frac{\pi}{2} -$ виждаме, че той се равнява на първия от тях. Така получаваме

$$I_n^2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} d\theta.$$

От друга страна, поради очевидното неравенство $e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} \leq e^{-n^2}$ имаме

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta \leq \frac{\pi}{4} e^{-n^2}.$$

Оттук заключаваме, че

$$\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta = 0,$$

откъдето

$$\lim_n I_n^2 = \frac{\pi}{4}$$

или най-сетне

$$\lim_n I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Упражнения. Пресметнете следните двойни интеграли:

1. $\displaystyle\iint_R \frac{dx\, dy}{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}$, където R е частта от кръга, определен от окръжността с уравнение $x^2+y^2=2$, която се намира над оста Ox.

Отг. $\frac{\pi}{2}\ln(2+\sqrt{5})$.

2. $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\, dx\, dy$, където R е кръгът, определен от окръжността с уравнение $x^2+y^2-4y=0$.

Отг. 24π.

3. $\displaystyle\iint_R xy\, dx\, dy$, където R е частта от първия квадрант на равнината, която е заключена между правите с уравнения $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$ и окръжностите с уравнения $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$.

Отг. $\frac{5}{2}$.

4. $\displaystyle\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, където R е областта, заключена между двете окръжности с уравнения $x^2+y^2-2x=0$ и $x^2+y^2-4x=0$.

Отг. $\frac{224}{9}$.

5. Пресметнете лицето на областта, оградена от лемнискатата на Бернули, зададена с уравнението $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

Отг. $2a^2$.

6. Пресметнете обема на „тялото на Вивиани", лежащо във вътрешността на сферата $x^2+y^2+z^2=r^2$ и на цилиндъра $x^2+y^2=rx$.

Отг. $\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}\right)r^3$.

§ 96. Тройни интеграли

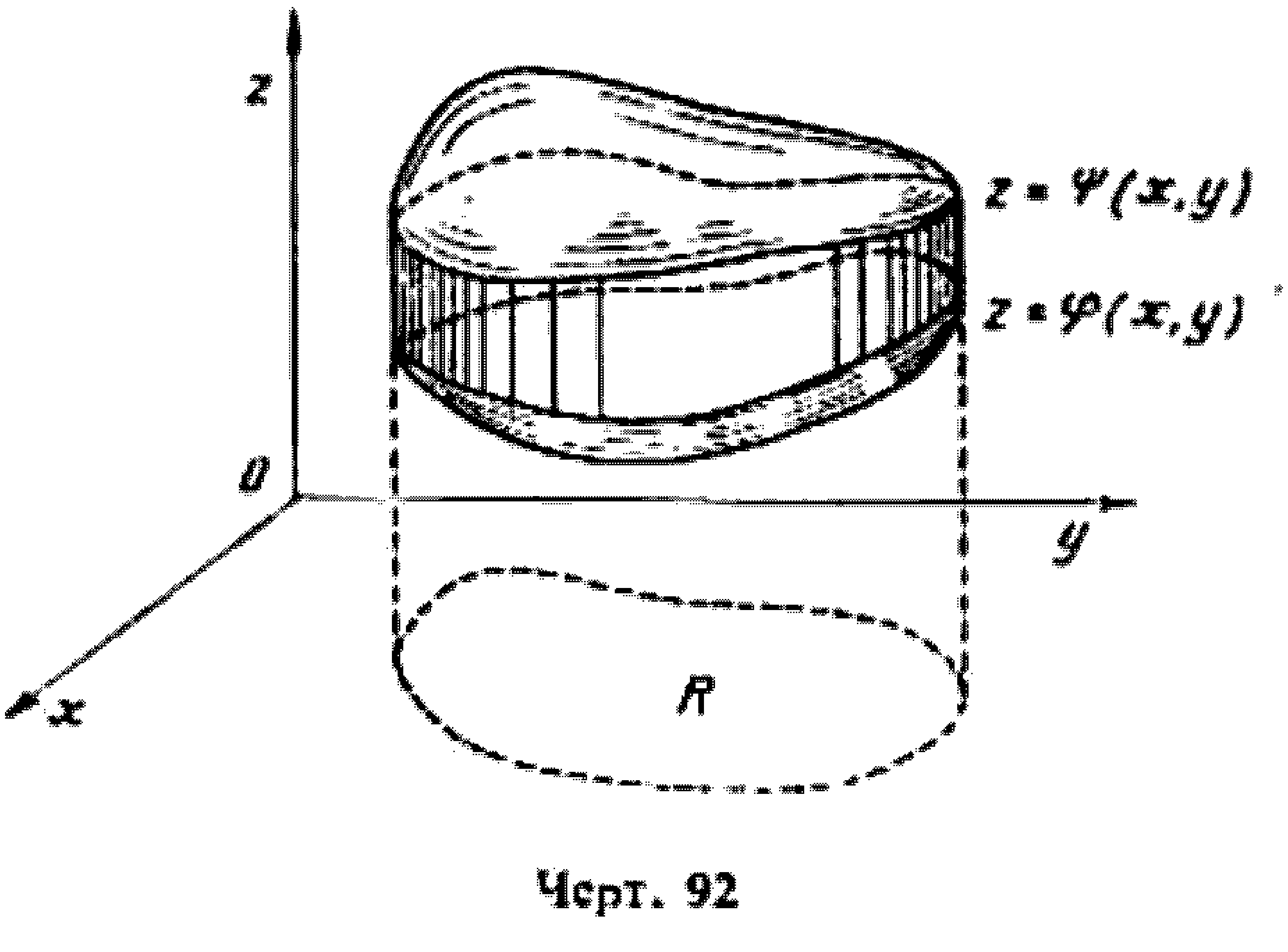
Нека е дадена функцията $f(x, y, z)$, дефинирана и ограничена в една измерима област Q в тримерното пространство. Като разделяме по различни начини множеството Q на краен брой измерими подобласти и образуваме след това съответните малки и големи суми на Дарбу, достигаме до понятието троен интеграл. Тройният интеграл се означава така:

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

и има основни свойства, напълно аналогични на свойствата на двойния интеграл. По-специално стойността на интеграла

$$\iiint\limits_Q dx\,dy\,dz$$

е равна на обема (тримерната мярка) на областта („тялото") Q.

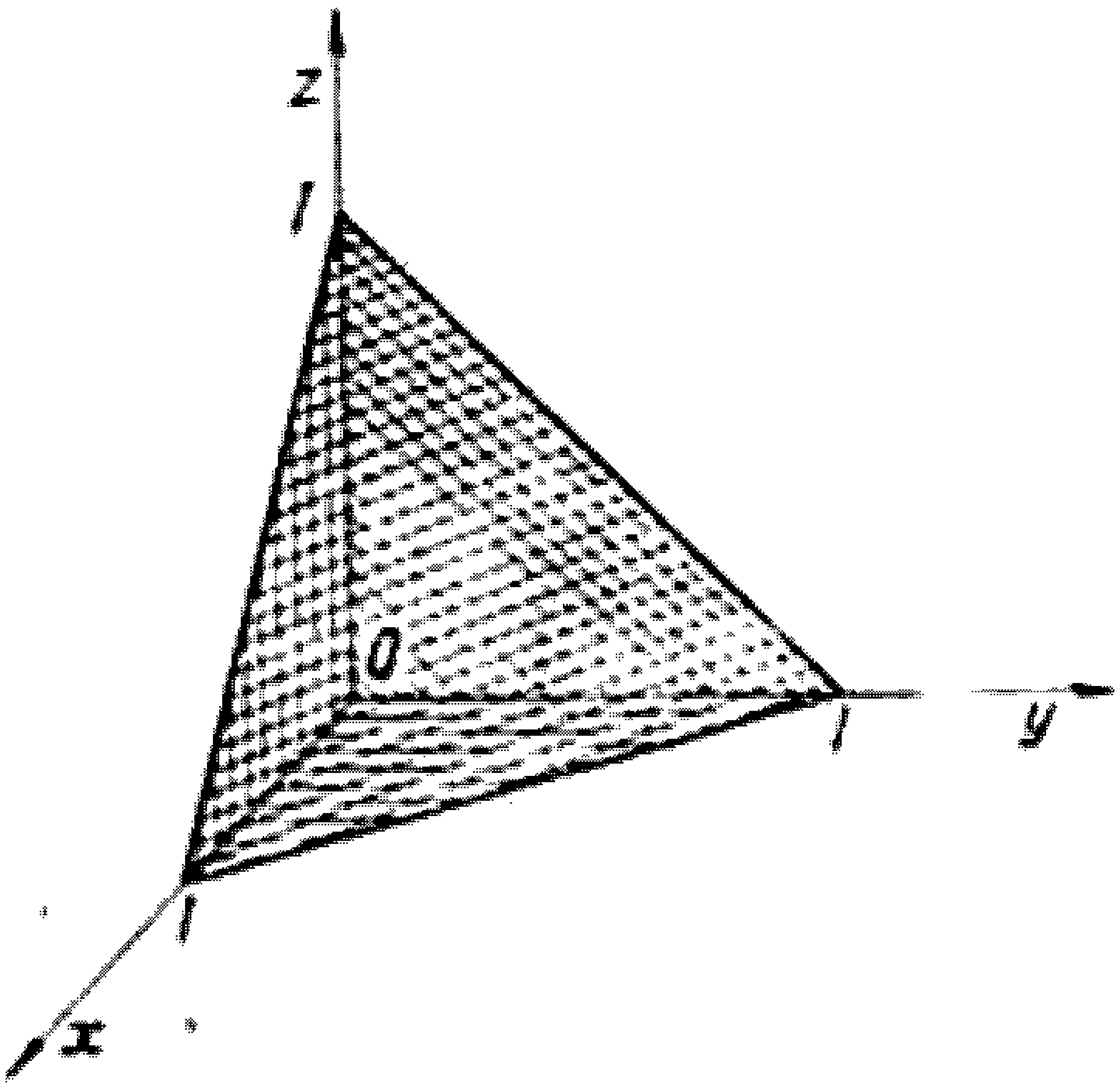


Черт. 92

Функцията $f(x, y, z)$ е сигурно интегруема в множеството Q, когато тя е непрекъсната в него, а самото множество Q е измеримо и затворено.

Да се спрем на следния специален случай. В координатната равнина Oxy е дадено едно равнинно измеримо множество R. Дадени са и две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, дефинирани и непрекъснати в R и удовлетворяващи в R следното неравенство:

$$\varphi(x, y) \leqq \psi(x, y). \tag{1}$$



Черт. 93

Да прекараме през всички точки на множеството R прави, успоредни на оста Oz, и да разгледаме множеството Q, съставено от отсечките, които се отсичат от тези прави и са заключени между графиката на функцията $\varphi(x, y)$ — отдолу, и графиката на функцията $\psi(x, y)$ — отгоре (черт. 92). Точките (x, y, z), принадлежащи на множеството Q, се характеризират със следните условия:

$$(x, y) \in R, \quad \varphi(x, y) \leqq z \leqq \psi(x, y). \tag{2}$$

За множества от вида на описаното множество Q е в сила следната теорема, даваща метод за пресмятане на тройните интеграли.

Теорема. *Нека R е измеримо и затворено множество в равнината Oxy и нека $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ са две функции, дефинирани и непрекъснати в R и удовлетворяващи в R неравенството (1). Ако функцията $f(x, y, z)$ е непрекъсната в областта Q, зададена посредством неравенствата (2), то определеният интеграл*

$$\int\limits_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

съществува при всяка фиксирана точка (x, y) от R и представлява непрекъсната функция в R. При това е в сила следното равенство:

$$\iiint\limits_{Q} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{R} \left[\int\limits_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy. \tag{3}$$

Пример 1. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint\limits_{Q} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3},$$

където Q е областта, оградена от равнините с уравнения $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (черт. 93).

Тук Q се определя от условията

$$(x,\ y)\in R,\qquad 0\leqq z\leqq 1-x-y,$$

където R пък от своя страна се задава с неравенствата

$$0\leqq x\leqq 1,\qquad 0\leqq y\leqq 1-x.$$

Следователно формулата (3) ще ни даде

$$\iiint\limits_{Q} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}=\iint\limits_{R}\left[\int\limits_{0}^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right]dx\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_{R}\left|\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right|_{0}^{1-x-y}dx\,dy$$

$$=-\frac{1}{8}\iint\limits_{R}dx\,dy+\frac{1}{2}\iint\limits_{R}\frac{dx\,dy}{(1+x+y)^2}$$

$$=-\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{1}\left[\int\limits_{0}^{1-x}dy\right]dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left[\int\limits_{0}^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{1}(1-x)\,dx-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

Пример 2. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint\limits_{Q} z\,dx\,dy\,dz,$$

където областта Q е оградена от конуса $z^2=x^2+y^2$ и равнината $z=a$ $(a>0)$ (черт. 94).

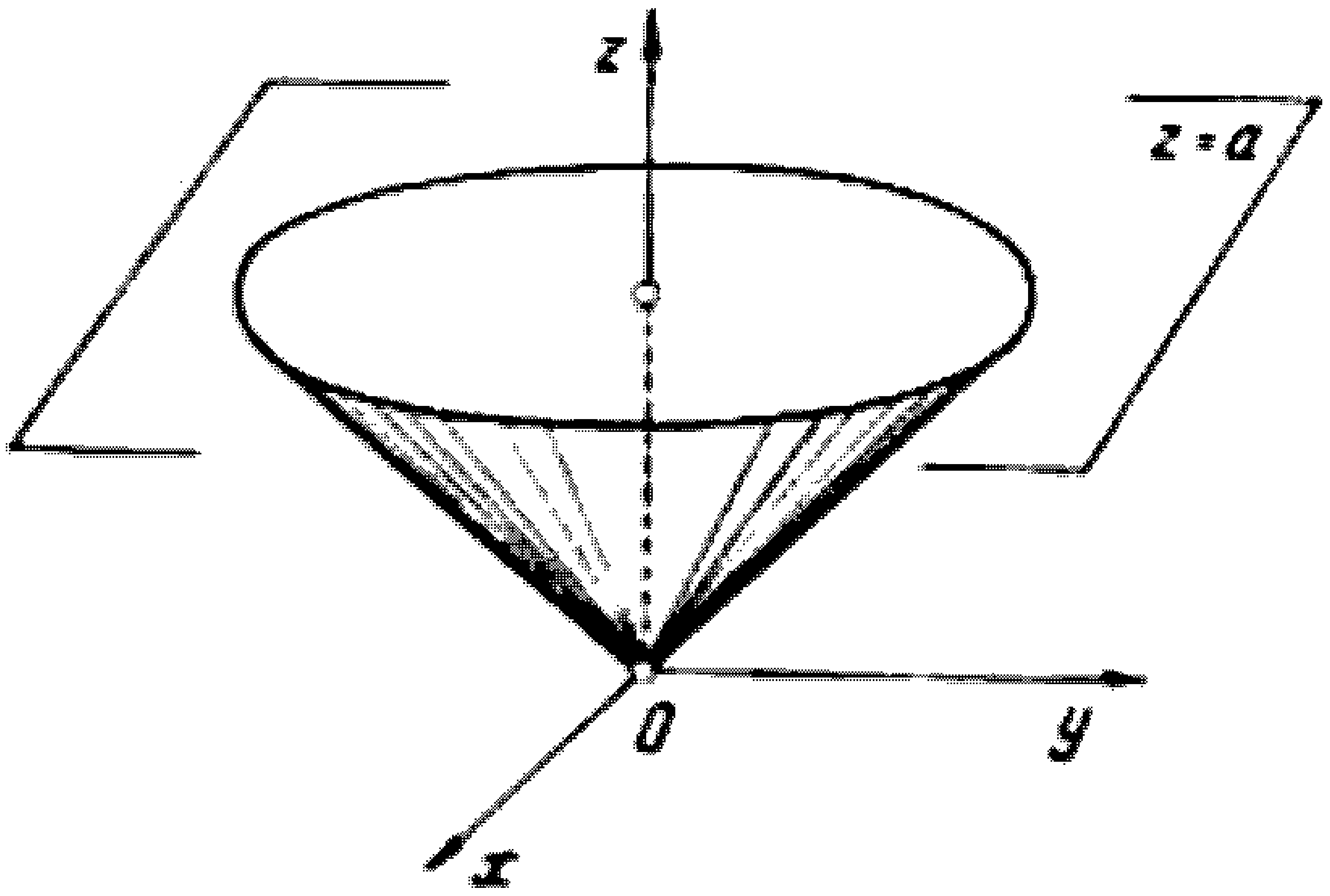
Областта Q се задава с условията

$$(x,\ y)\in R,\qquad \sqrt{x^2+y^2}\leqq z\leqq a,$$

където R е кръгът в равнината Oxy, определен от окръжността $x^2+y^2=a^2$. Ето защо ще имаме

$$\iiint\limits_{Q} z\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{R}\left[\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} z\,dz\right]dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{R}\left|z^2\right|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a}dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{R}(a^2-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$



Черт. 94

Извършвайки в получения двоен интеграл смяна на променливите посредством трансформацията

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta,$$

ще получим

$$\iiint\limits_{Q} z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{R'}(a^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta,$$

където R' е правоъгълникът в равнината $O\,\theta\rho$, определен от неравенствата

$$0\leq\theta\leqq 2\pi,\quad 0\leqq\rho\leqq a.$$

И тъй

$$\iiint\limits_{Q} z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{a}(a^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta$$

$$=-\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|(a^2-\rho^2)^2\right|_{0}^{a}d\theta=\frac{a^4}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}d\theta=\frac{a^4\pi}{4}.$$

Упражнения. Да се пресметнат тройните интеграли:

1. $\iiint\limits_{Q} x\,dx\,dy\,dz$, където Q е призмата, оградена от равнините $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$, $x+z=a\,(a>0,\ h>0)$.

Отг. $\dfrac{a^3h}{6}$.

2. $\iiint\limits_{Q} z\,dx\,dy\,dz$, където Q е областта, оградена от елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Отг. $\frac{\pi}{4}abc^2$.

3. $\iiint\limits_{Q}(x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, където Q е областта, оградена от конуса $x^2+y^2-z^2=0$ и сферата $x^2+y^2+z^2=1$ и намираща се над равнината Oxy.

Отг. $\frac{\pi}{24}$.

§ 97. Смяна на променливите в тройните интеграли

Смяната на променливите в тройните интеграли се извършва въз основа на теорема, аналогична на тази при двойните интеграли. Една трансформация

$$(1)\qquad x=f(u,\ v,\ w),\quad y=g(u,\ v,\ w),\quad z=h(u,\ v,\ w)$$

ще наричаме **регулярна** в дадено множество Q' от пространството $Ouvw$, ако: а) функциите $f(u,v,w)$, $g(u,\ v,\ w)$ и $h(u,\ v,\ w)$ са непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни в някое отворено множество, съдържащо Q'; б) трансформацията (1) е обратима във вътрешността на Q'; в) детерминантата

$$\Delta(u,\ v,\ w)=\begin{vmatrix} f_u'(u,\ v,\ w) & f_v'(u,\ v,\ x) & f_w'(u,\ v,\ w)\\ g_u'(u,\ v,\ w) & g_v'(u,\ v,\ w) & g_w'(u,\ v,\ w)\\ h_u'(u,\ v,\ w) & h_v'(u,\ v,\ w) & h_w'(u,\ v,\ w)\end{vmatrix}$$

е различна от нула във вътрешността на Q'.

Ако трансформацията (1) е регулярна в измеримото и затворено множество Q' в пространството $Ouvw$, което се изобразява в измеримото и затворено множество Q в пространството $Oxyz$, и ако функцията $F(x,\ y,\ z)$ е непрекъсната в Q, то

$$\iiint\limits_{Q} F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

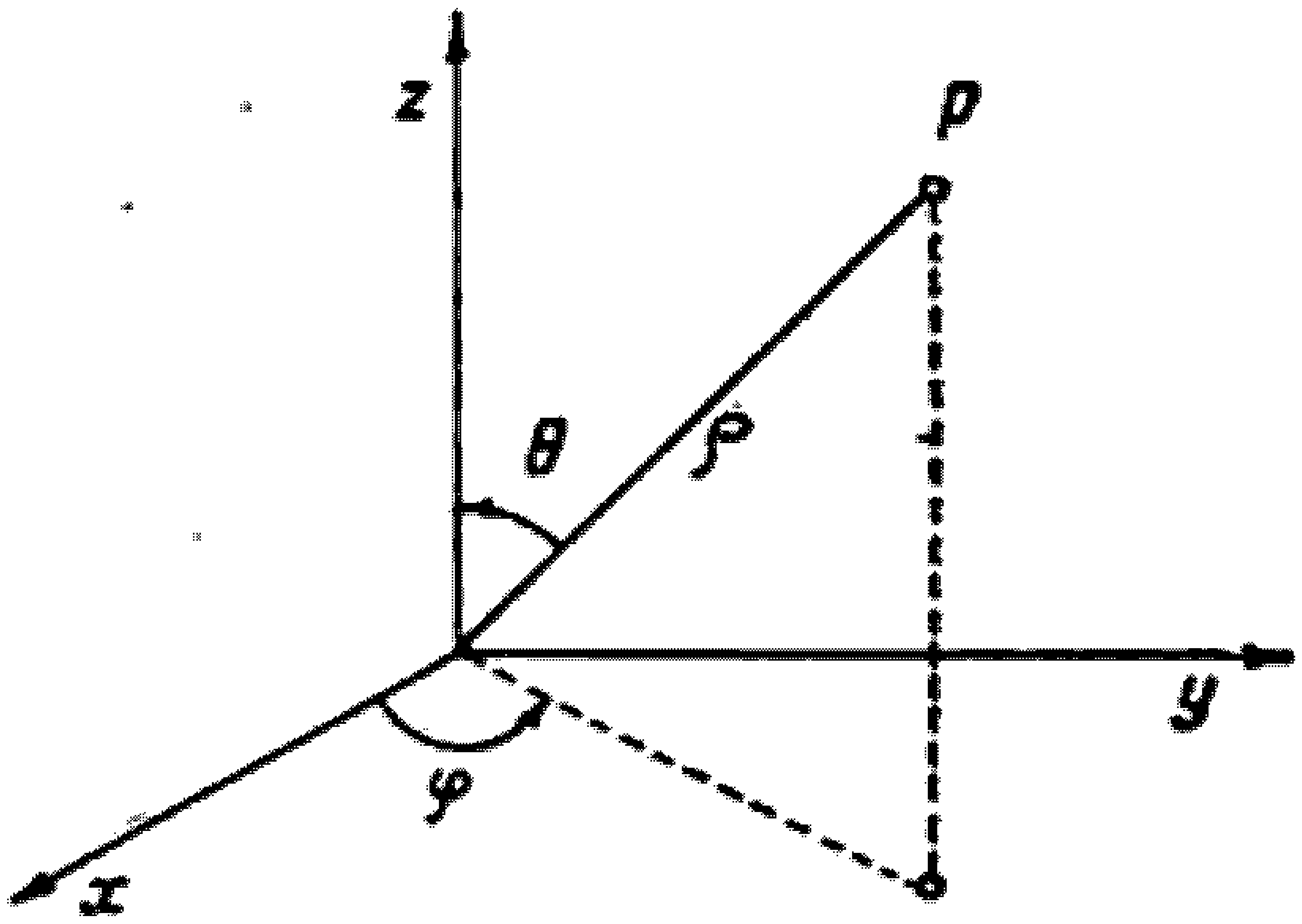
$$=\iiint\limits_{Q'} F[f(u,\ v,\ w),\ g(u,\ v,\ w),\ h(u,\ v,\ w)]\,|\Delta(u,\ v,\ w)|\,du\,dv\,dw.$$

Една често използвана смяна на променливите е въвеждането на т. нар. **полярни координати в пространството** (или **сферични координати**). Всяка точка $P(x,\ y,\ z)$ в пространството $Oxyz$ се определя от следните три числа, наречени полярни координати (черт. 95):

1) разстоянието ρ на точката P до началото O на координатната система;

2) ъгъла θ, който сключва радиус-векторът $\overrightarrow{OP}$ с положителната полуос Oz, измерен в посока от оста Oz към вектора $\overrightarrow{OP}$;

3) ъгъла φ, който сключва положителната полуос Ox с проекцията $\overrightarrow{OP'}$ на вектора $\overrightarrow{OP}$ в равнината Oxy, измерен в посока от оста Ox към вектора $\overrightarrow{OP'}$.



Черт. 95

От геометрични съображения лесно се получават следните връзки между декартовите координати x, y, z и полярните координати ρ, θ, φ на една точка P от пространството $Oxyz$:

(2) $$x=\rho \sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Равенствата (2) могат да се разглеждат като една трансформация. Тя се оказва особено удобна за пресмятане на тройните интеграли, когато било в подинтегралната функция, било в дефиницията на интеграционната област участвува изразът $x^2+y^2+z^2$, който много се опростява благодарение на равенството $x^2+y^2+z^2=\rho^2$.

За детерминантата $\Delta(\rho, \theta, \varphi)$ при трансформацията (2) получаваме

$$\Delta(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\rho^2\sin\theta.$$

Пример 1. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

в кълбото Q, оградено от сферата $x^2+y^2+z^2=1$.

Кълбото Q може да бъде зададено чрез следните неравенства за полярните координати в пространството $Oxyz$:

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \rho \leqq 1.$$

Тези неравенства определят един паралелепипед Q' в пространството $O\theta\varphi\rho$ (където θ, φ и ρ се разглеждат като декартови координати). Не е трудно да се провери, че трансформацията (2) е регулярна в този паралелепипед. Ето защо ще получим

$$\iiint\limits_{Q} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{Q'} \rho^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \iint\limits_{R'} \left[\sin\theta \int\limits_{0}^{1} \rho^3\, d\rho \right] d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4} \iint\limits_{R'} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Тук R' е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Поради това ще имаме

$$\iiint\limits_{Q} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \int\limits_{0}^{2\pi} \left[\int\limits_{0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_{0}^{2\pi} \left| -\cos\theta \right|_{0}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = \pi.$$

Пример 2. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint\limits_{Q} z\, dx\, dy\, dz,$$

взет в кълбото Q, оградено от сферата $x^2+y^2+z^2-2z=0$.

Уравнението на сферата, записано с помощта на полярни координати в пространството $Oxyz$, е $\rho=2\cos\theta$. Ето защо кълбото Q може да се зададе посредством неравенствата

$$0 \leq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leqq 2\cos\theta.$$

Означавайки с Q' областта, която тези неравенства определят в пространството $O\theta\varphi\rho$ (където θ, φ и ρ са декартови координати), лесно е да видим, че трансформацията (2) е регулярна в Q'. Поради това ще имаме

$$\iiint\limits_{Q} z\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{Q'} \rho^3 \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

Последният интеграл въз основа на формулата от предишния параграф ще бъде равен на

$$\iint\limits_{R'} \left[\int\limits_0^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho\right] \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

където R' е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Следователно

$$\iiint\limits_Q z\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \iint\limits_{R'} \rho^4 \Big|_0^{2\cos\theta} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 4 \iint\limits_{R'} \sin\theta \cos^5\theta \, d\theta \, d\varphi = 4 \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d(-\cos\theta)\right] d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi.$$

Пример 3. Да пресметнем обема на тялото Q, оградено от елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Търсеният обем се дава с интеграла

$$\iiint\limits_Q dx\, dy\, dz.$$

Извършвайки трансформацията

$$x = au, \qquad y = bv, \qquad z = cw,$$

за която $\Delta(u, v, w) = abc$ (и която е очевидно регулярна във всяка област), получаваме

$$\iiint\limits_Q dx\, dy\, dz = abc \iiint\limits_{Q'} du\, dv\, dw,$$

където Q' е кълбото, определено от сферата $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Тъй като интегралът

$$\iiint\limits_{Q'} du\, dv\, dw$$

дава в същност обема на това кълбо, той е равен на $\frac{4}{3}\pi$. Следователно търсеният обем е равен на $\frac{4}{3}\pi abc$.

Упражнения. 1. Да се пресметне тройният интеграл $\iiint\limits_{Q} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, където Q е областта, намираща се между сферите с уравнения $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=9$.

Отг. 4π.

2. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от сферите с уравнения $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и съдържащо се във вътрешността на всяка от тях.

Отг. $\frac{19}{12}\pi$.

ГЛАВА XIII

КРИВОЛИНЕЙНИ ИНТЕГРАЛИ

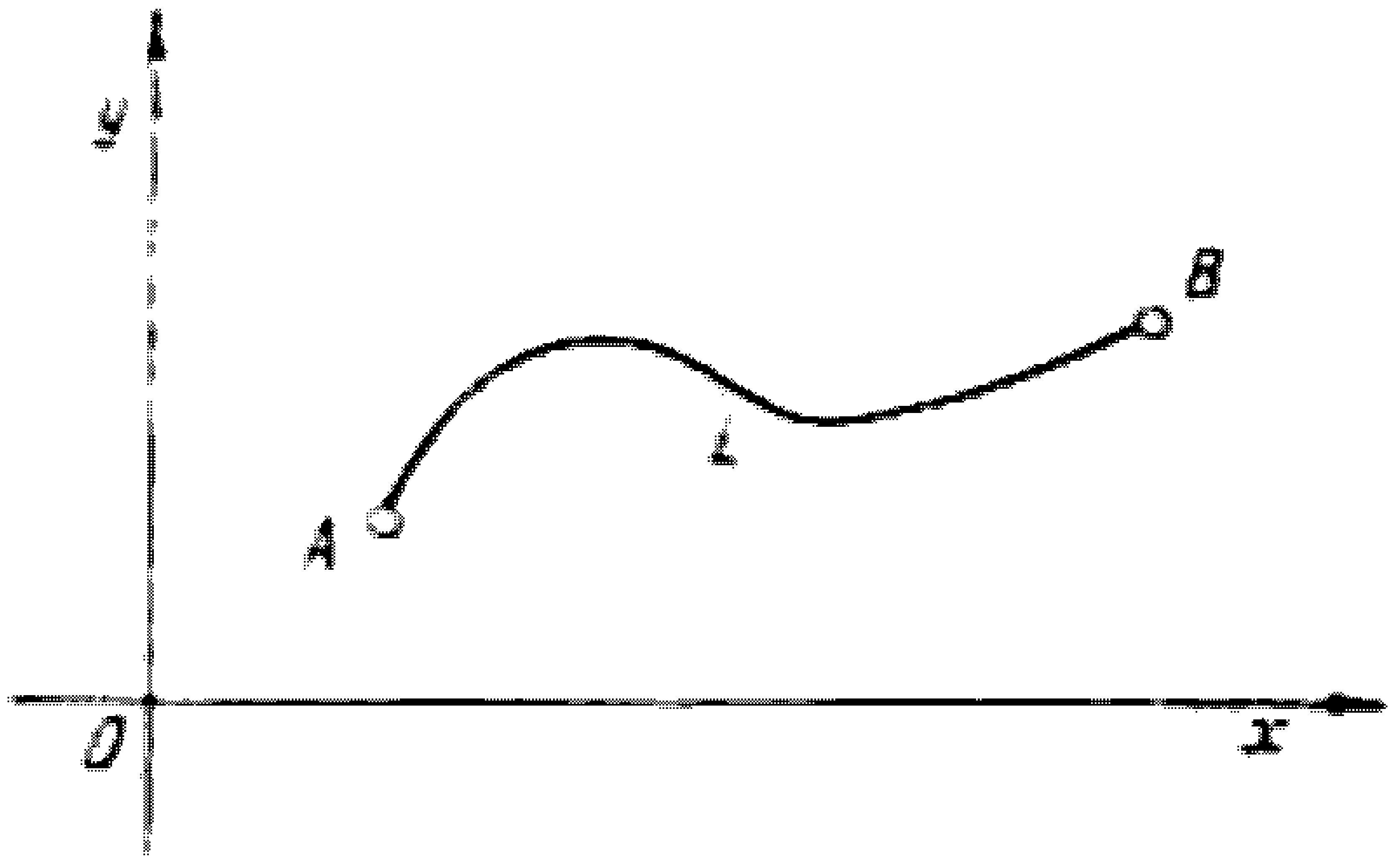
Понятието криволинеен интеграл играе важна роля в приложенията на математическия анализ — преди всичко във физиката, където редица въпроси естествено довеждат до неговото използуване.

§ 98. Криви

Нека $f(t)$ и $g(t)$ са две функции, дефинирани в един интервал $[\alpha, \beta]$. Когато променливата t приема всички стойности от α до β или, както казваме, когато тя описва интервала $[\alpha, \beta]$, точката $P(x, y)$, чиито координати се определят от равенствата

(1) $$x=f(t), \qquad y=g(t),$$

ще опише в равнината Oxy едно множество от точки L, което наричаме *крива*. Равенствата (1) се наричат *параметрични уравнения* на кривата L, а променливата t — *параметър*. Точките $A(f(\alpha), g(\alpha))$



Черт. 96

и $B(f(\beta), g(\beta))$ пък се наричат съответно начална и крайна точка на кривата L (черт. 96). Понякога вместо термина крива се използува и терминът *дъга*.

Една и съща крива L може да бъде зададена с различни параметрични уравнения. Така например, ако $u(t)$ е строго растяща и непрекъсната функция, дефинирана в един интервал $[\alpha_1, \beta_1]$, за която $u(\alpha_1)=\alpha$ и $u(\beta_1)=\beta$, то уравненията

$$(2)\qquad x=f[u(t)],\quad y=g[u(t)]$$

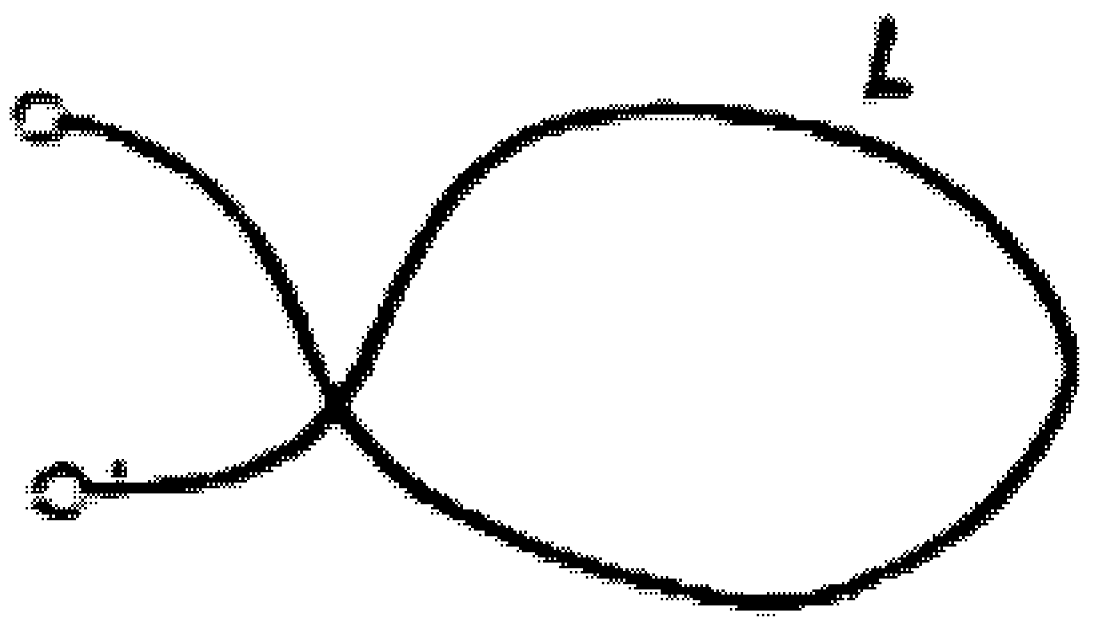
представят същата крива L, която се дава с уравненията (1).

Когато функциите $f(t)$ и $g(t)$, участвуващи в параметричните уравнения (1) на кривата L, са непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, ще наричаме и самата крива L непрекъсната; когато те са диференцуеми в този интервал (при което в точката α се има пред вид дясна, а в точката β — лява диференцуемост), ще наричаме кривата L диференцуема; когато $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми, а техните производни $f'(t)$ и $g'(t)$ — непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, ще казваме, че кривата L е непрекъснато диференцуема; най-сетне, когато интервалът $[\alpha, \beta]$ се разпада на няколко подинтервала, във всеки от които кривата L е диференцуема, съответно непрекъснато диференцуема, ще наричаме L частично диференцуема, съответно частично непрекъснато диференцуема. Ако пък условието за диференцуемост, непрекъсната диференцуемост или частична непрекъсната диференцуемост се удовлетворява само от функцията $f(t)$, ще наричаме кривата L диференцуема относно x, съответно непрекъснато диференцуема относно x или частично непрекъснато диференцуема относно x; аналогично въвеждаме термините: крива L, диференцуема относно y, непрекъснато диференцуема относно y и частично непрекъснато диференцуема относно y.

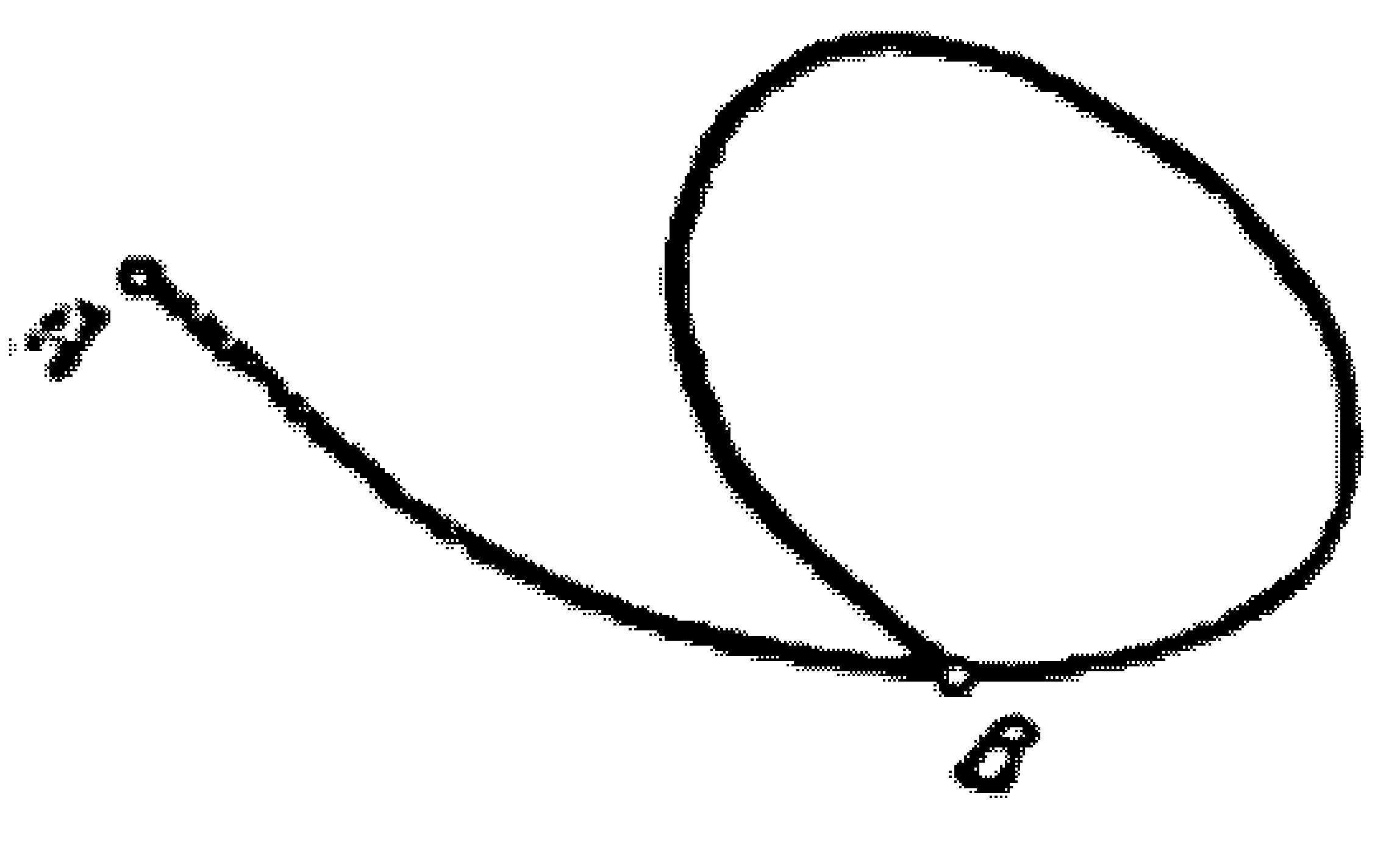
Кривата L ще наричаме проста, когато равенствата

$$(3)\qquad f(t')=f(t'') \quad \text{и} \quad g(t')=g(t'')$$

не могат да бъдат едновременно изпълнени за две различни стойности t' и t'' на параметъра t от интервала $[\alpha, \beta]$, ако поне една от тях е



Черт. 97



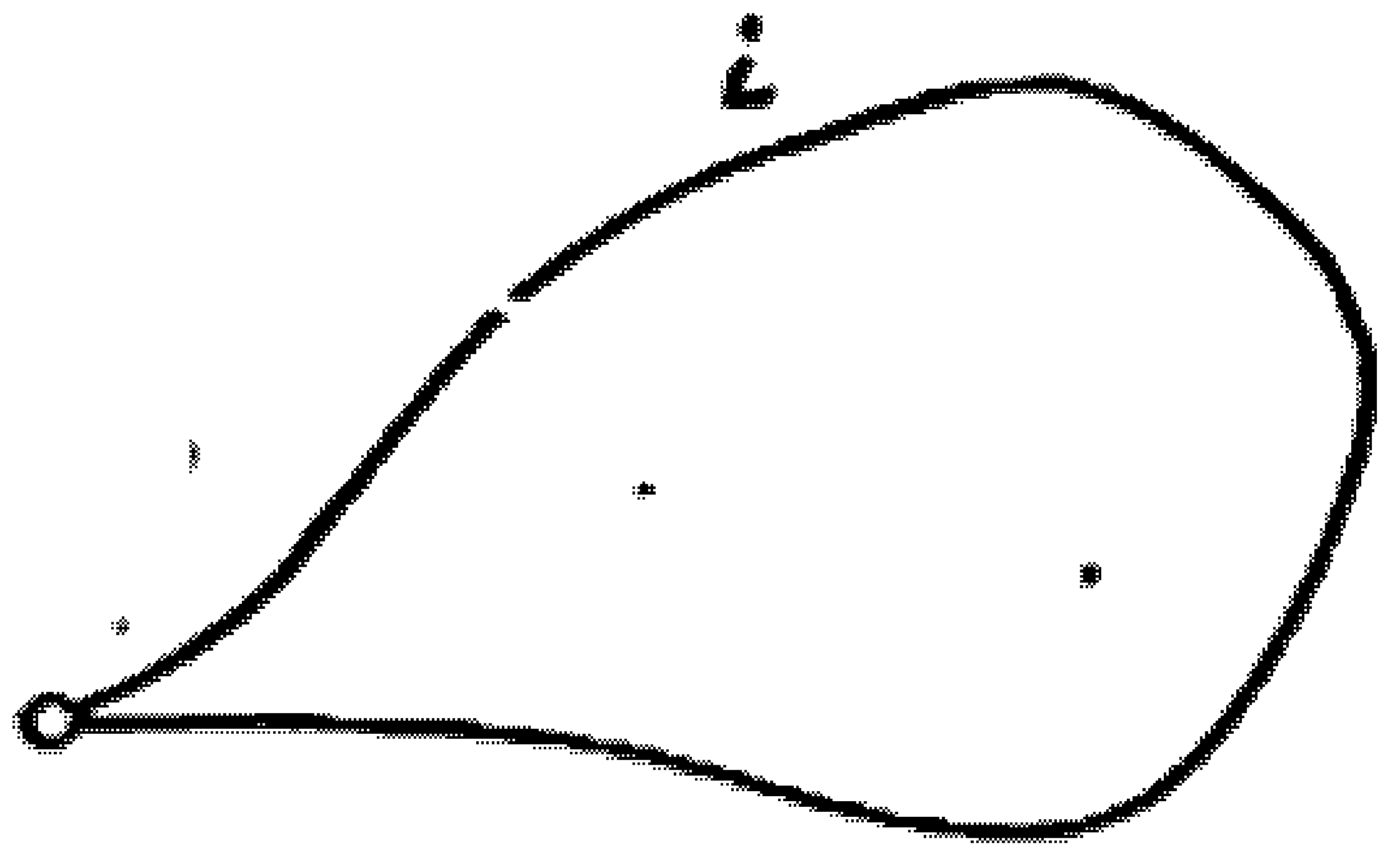
Черт. 98

различна от краищата на този интервал. Геометрично това означава, че кривата L не се самопресича, т. е. няма вид, подобен на показания на черт. 97 или пък на показания на черт. 98.

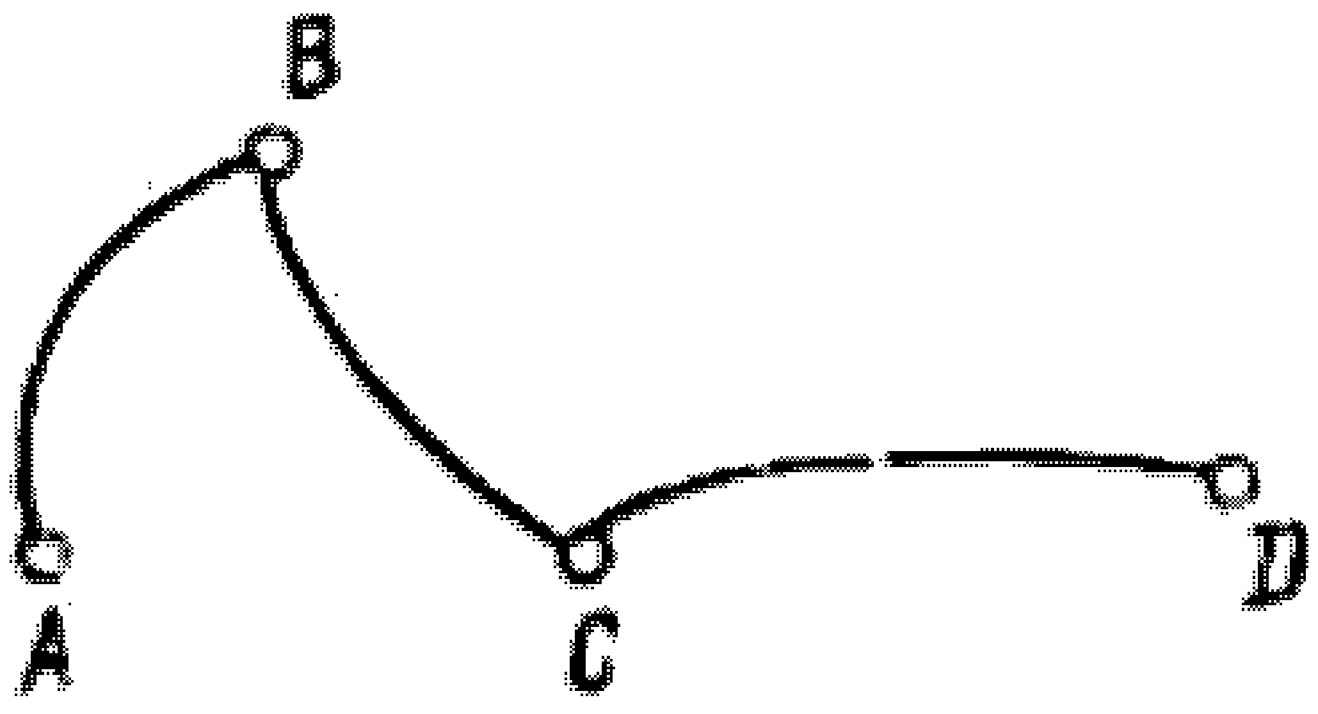
Нека обърнем внимание, че при дефиницията на понятието проста крива не се забранява равенствата (3) да бъдат изпълнени, когато $t'=\alpha$ и $t''=\beta$, т. е. допускат се равенствата

$$f(\alpha)=f(\beta),\qquad g(\alpha)=g(\beta). \tag{4}$$

Такава проста крива, за която са изпълнени равенствата (4), т. е. началната и крайната точка на която съвпадат (черт. 99), се нарича



Черт. 99

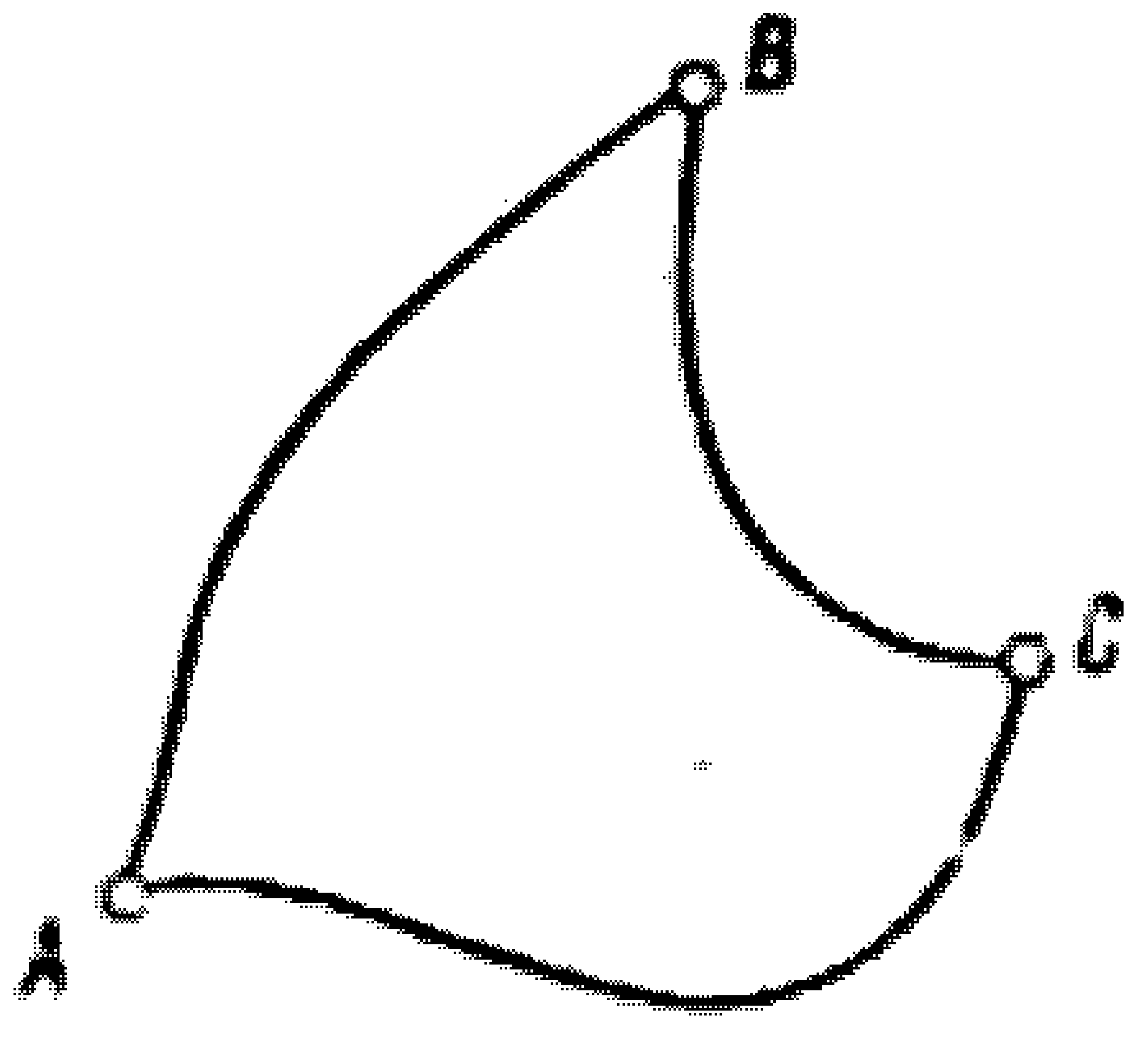


Черт. 100

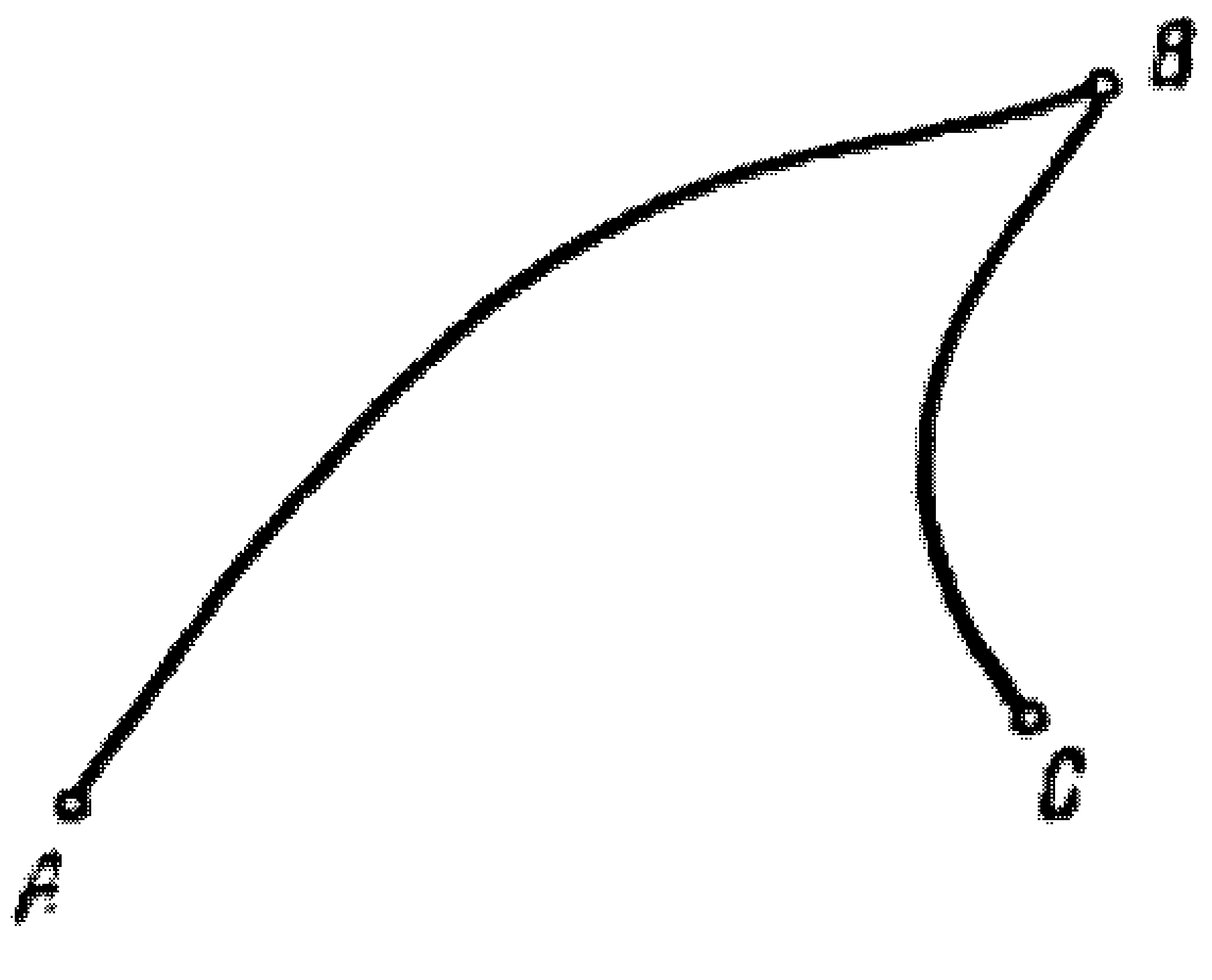
затворена (това понятие не трябва да се смесва с понятието затворено точково множество в равнината).

Ако една проста крива L не е затворена и ако A е нейната начална точка, а B — нейната крайна точка, то тя се означава също и така: $\overset{\frown}{AB}$ (макар това означение да не е съвсем точно). В такъв случай $\overset{\frown}{BA}$ ще означава същата крива, но описана в обратната посока — от B към A. Ако

$$x=f(t),\quad y=g(t)\quad (\alpha\leqq t\leqq\beta)$$



Черт. 101



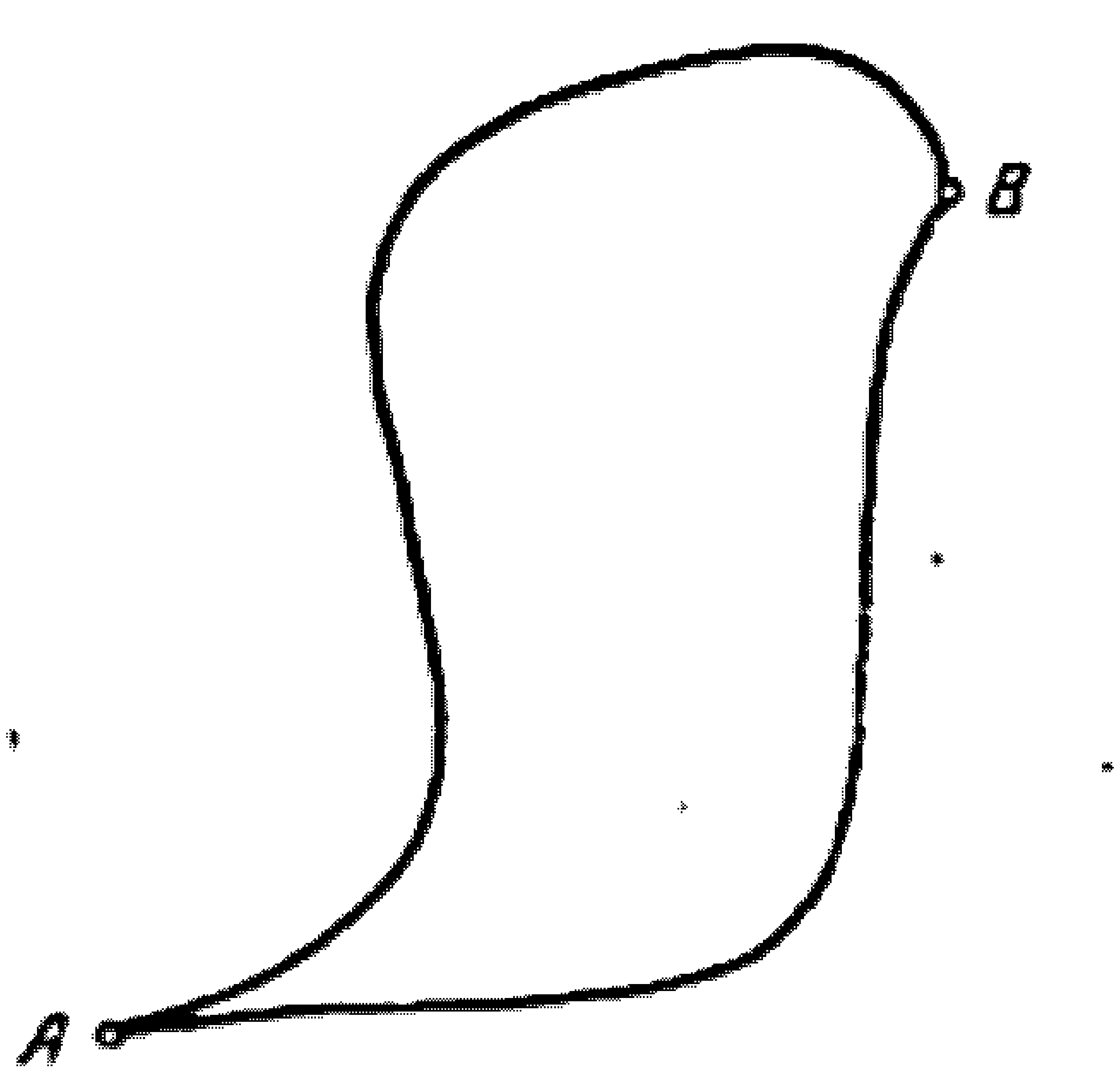
Черт. 102

са параметричните уравнения на кривата $\overset{\frown}{AB}$ (описана в посока от A към B), то лесно се съобразява, че уравненията

$$x=f(-t),\quad y=g(-t)\quad (-\beta\leqq t\leqq -\alpha)$$

ще представят кривата $\overset{\frown}{BA}$ (описана в посока от B към A).

Ако простата крива L е затворена, то също така можем да говорим за две посоки на описване на тази крива — положителна и отрицателна. Една, макар и немного точна, но нагледна дефиниция е следната: Считаме, че дадената проста и затворена крива се описва в положителна посока, когато при нейното обхождане областта, която тя загражда, остава отляво.



Черт. 103

Ако $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ са две такива незатворени криви, че крайната точка на първата от тях съвпада с началната точка на втората (черт. 102), ще считаме, че те образуват, заедно взети, една крива*, която ще означаваме с $\widehat{ABC}$ или просто с $\widehat{AC}$. Ако допуснем че началната точка A на първата крива съвпада с крайната точка C на втората, ще получим една затворена крива, която ще означаваме в този случай с $\widehat{ABA}$. Тази крива ще бъде проста, ако двете криви $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ нямат други общи точки освен точките A и B (черт. 103).

Изобщо, ако $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \ldots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ са n незатворени криви, взети в такъв ред, че началната точка на всяка от тях, като се започне от втората, съвпада с крайната точка на предишната крива, ще считаме, че те образуват също една крива — кривата $\widehat{A_1A_{n+1}}$. Ако при това A_1 съв-

---

* Основание за това ни дава обстоятелството, че в посочения случай ние лесно можем да си съставим параметрични уравнения на така получената крива. Наистина нека

$$x=f_1(t),\quad y=g_1(t)\quad (\alpha_1\leqq t\leqq\beta_1)$$

са параметрични уравнения на кривата $\widehat{AB}$, а

$$x=f_2(t),\quad y=g_2(t)\quad (\alpha_2\leqq t\leqq\beta_2)$$

са параметрични уравнения на кривата $\widehat{BC}$. Тогава, въвеждайки функциите

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & \text{при}\quad \alpha_1\leqq t\leqq\beta_1,\\ f_2(t-\beta_1+\alpha_2) & \text{при}\quad \beta_1\leqq t\leqq\beta_1+(\beta_2-\alpha_2),\end{cases}$$

и

$$g(t)=\begin{cases} g_1(t) & \text{при}\quad \alpha_1\leqq t\leqq\beta_1,\\ g_2(t-\beta_1+\alpha_2) & \text{при}\quad \beta_1\leqq t\leqq\beta_1+(\beta_2-\alpha_2),\end{cases}$$

можем да запишем параметричните уравнения на кривата $\widehat{AC}$ във вида

$$x=f(t),\quad y=g(t),$$

където t се мени в интервала $[\alpha_1, \beta_1+(\beta_2-\alpha_2)]$.

пада с A_{n+1}, ще получим затворена крива. На черт. 100 простата крива $\overset{\frown}{AD}$ е съставена от простите криви $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CD}$, а на черт. 101 простата затворена крива L е съставена от простите криви $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CA}$.

Нека L е непрекъсната крива, зададена с параметричните уравнения

$$(1) \qquad x=f(t), \quad y=g(t), \quad \alpha\leqq t\leqq\beta,$$

и нека $P_0(x_0, y_0)$ е точката от тази крива, получена за стойност на параметъра t_0, т. е. $x_0=f(t_0)$, $y_0=g(t_0)$. Ако $P(x, y)$, където $x=f(t)$, $y=g(t)$, е друга точка от кривата L, то правата, определена от точките P_0 и P, има уравнение

$$(\xi-x_0)(y-y_0)-(\eta-y_0)(x-x_0)=0$$

(тук ξ и η са текущи координати). Това уравнение може да се запише и така:

$$(\xi-f(t_0))(g(t)-g(t_0))-(\eta-g(t_0))(f(t)-f(t_0))=0,$$

или пък още така:

$$(5) \qquad \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}(\xi-f(t_0))-\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}(\eta-g(t_0))=0.$$

Ако сега оставим точката P да се приближава към P_0 (другояче казано ако t клони към t_0), то правата P_0P ще мени своето положение. Тази права ще се стреми към едно гранично положение, когато коефициентите пред ξ и η в уравнението (5) (представляващи функции на t) притежават при t, клонящо към t_0, граници, при това такива, които не са и двете нули. Това ще бъде така, когато функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0 и $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$ не са едновременно нули. Тогава уравнението

$$(6) \qquad g'(t_0)(\xi-x_0)-f'(t_0)(\eta-y_0)=0$$

ще бъде уравнение на една права, минаваща през точката P_0, която е естествено да наречем **тангента** или **допирателна** към кривата L в точката P_0.

Когато функциите $f(t)$ и $g(t)$ от параметричните уравнения (1) са диференцуеми и $f'(t)$ и $g'(t)$ не са едновременно нули за никое t от интервала $[\alpha, \beta]$, кривата L има допирателна във всяка своя точка. Такава крива се нарича **гладка**. Ако интервалът $[\alpha, \beta]$ се разпада на няколко подинтервала, във всеки от които е изпълнено условието за гладкост, кривата L ще наричаме **частично гладка**.

Ето няколко примера за криви:

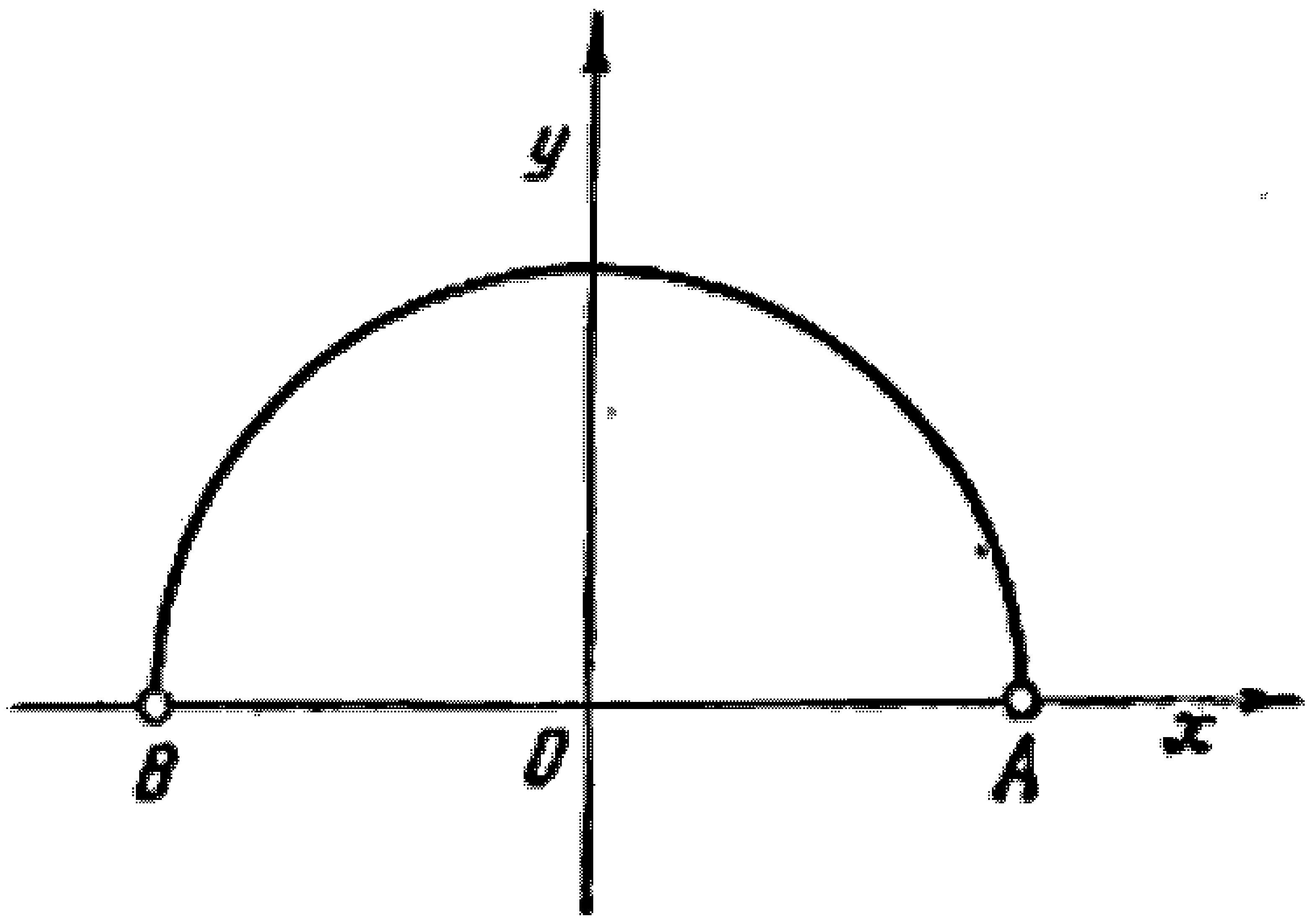
1. Параметричните уравнения

$$(7) \qquad x=\cos t, \qquad y=\sin t$$

при $0\leqq t\leqq\pi$ ни дават една проста и гладка крива, в същност една полуокръжност — онази полуокръжност L от окръжността с уравнение

$x^2+y^2=1$, която се намира над оста Ox, и то описана в посока от точката $A(1, 0)$ към точката $B(-1, 0)$ (черт. 104).

2. Същите параметрични уравнения (7) при $0 \leqq t \leqq 2\pi$ ни дават една проста, гладка и затворена крива — окръжността с уравнение $x^2+y^2=1$, описана в положителна посока (черт. 105).



Черт. 104

3. Параметричните уравнения

$$(8) \qquad x=a\cos t, \qquad y=b\sin t$$

при $0 \leqq t \leqq 2\pi$ ни дават също една затворена, проста и гладка крива — елипсата с уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, описана в положителна посока (черт. 106).

4. Всяка отсечка в равнината е проста и гладка крива. Както знаем от аналитичната геометрия, отсечката, съединяваща двете различни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, притежава следното параметрично представяне:

$$(9) \qquad x=x_1+t(x_2-x_1), \qquad y=y_1+t(y_2-y_1),$$

където $0 \leqq t \leqq 1$.

Когато отсечката AB е успоредна на оста Ox, например свързва точките $A(a, c)$ и $B(b, c)$, където $a<b$, параметричните ѝ уравнения могат да бъдат записани най-просто по следния начин:

$$(10) \qquad x=t, \qquad y=c \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

Когато пък отсечката AB е успоредна на оста Oy и свързва например точките $A(c, a)$ и $B(c, b)$, където $a<b$, тя може да бъде зададена с параметричните уравнениия

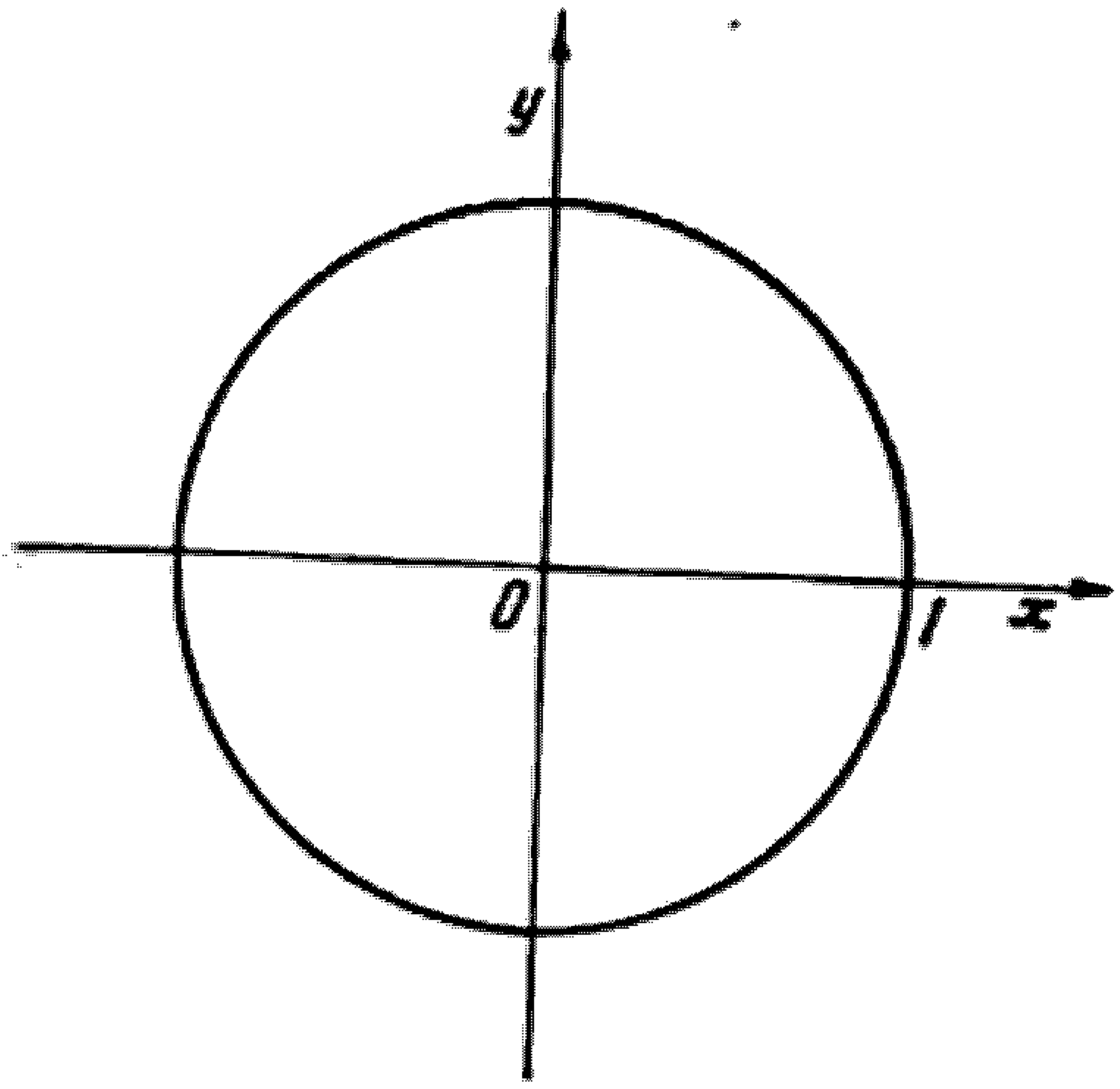
$$(11) \qquad x=c, \qquad y=t \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

5. Графиката на всяка функция $f(x)$, дефинирана в един интервал $[a, b]$, представлява проста крива. Тази проста крива е непрекъсната и е непрекъснато диференцуема относно x, когато $f'(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Тя е гладка, когато $f(x)$ е диференцуема с непрекъсната производна в този интервал. Наистина графиката на $f(x)$ може да бъде зададена с помощта на следните параметрични уравнения:

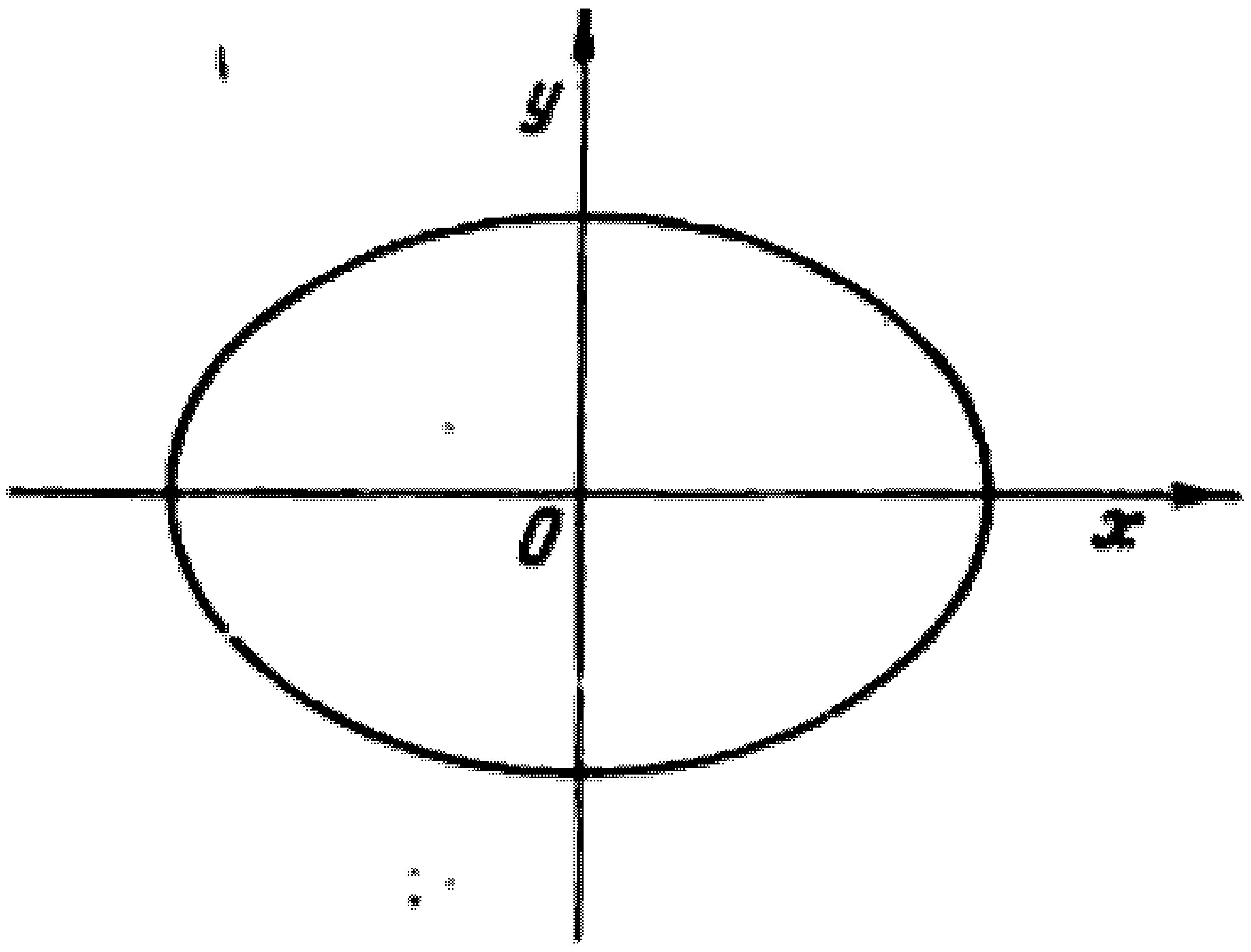
(12) $$x=t, \qquad y=f(t),$$
където $a \leqq t \leqq b$.

6. Ако $\varphi(\theta)$ е една неотрицателна функция, дефинирана в един интервал $[\alpha, \beta]$, то множеството от точките, чиито полярни координати θ и ρ удовлетворяват уравнението

$$\rho=\varphi(\theta),$$



Черт. 105



Черт. 106

представлява също една крива. Тя може да бъде зададена със следните параметрични уравнения:

$$x=\varphi(\theta) \cos \theta, \qquad y=\varphi(0) \sin 0.$$

Тази крива е непрекъсната или непрекъснато диференцуема тогава, когато функцията $\varphi(\theta)$ е такава.

В заключение на настоящия параграф ще покажем как въведеното тук понятие крива позволява да пренесем за функциите на две променливи теоремата на Болцано от § 24.

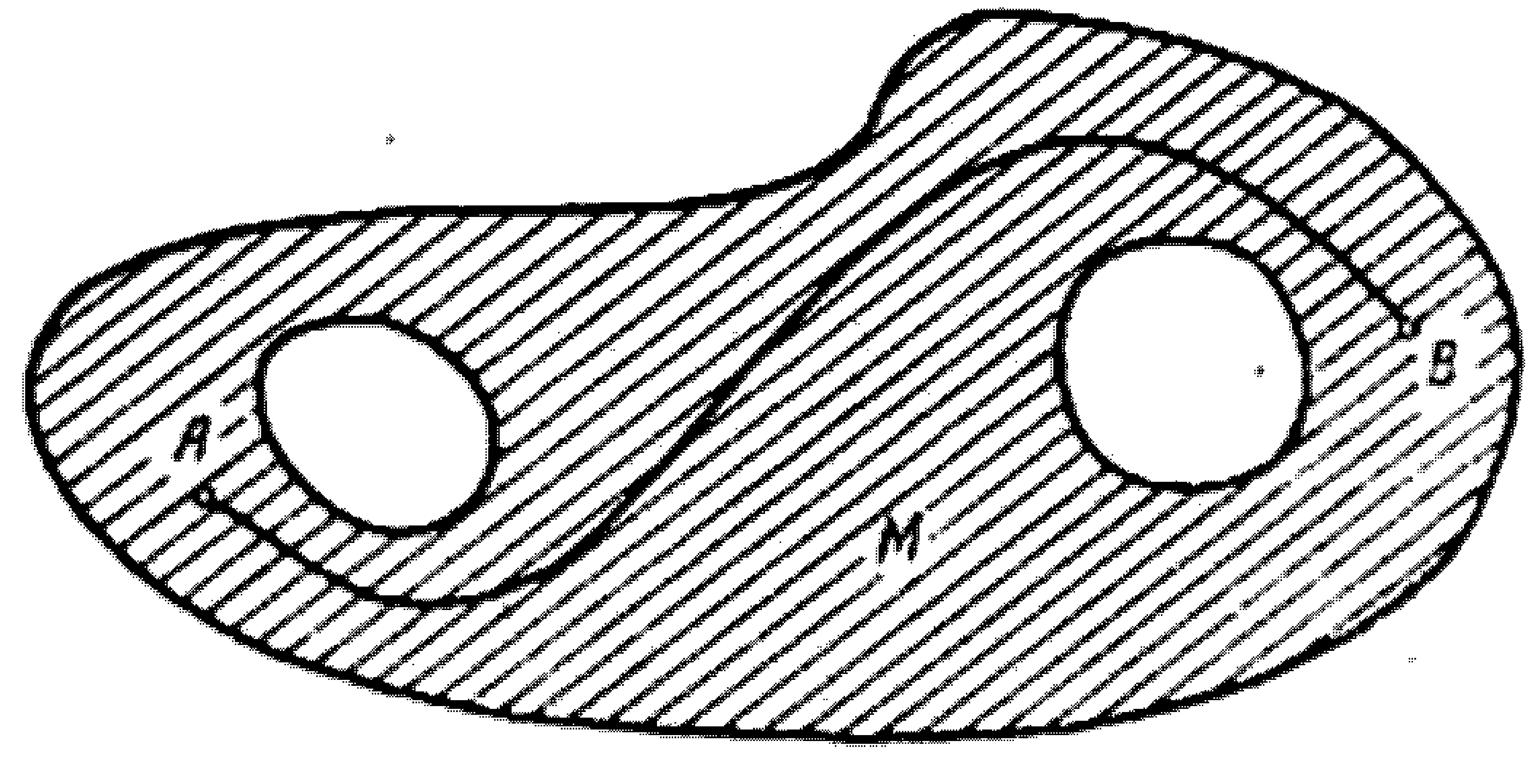
Едно множество M от точки в равнината ще наричаме **линейно свързано**, *ако всеки две негови точки могат да бъдат свързани посредством непрекъсната крива, лежаща изцяло в M.* Това означава, по-подробно казано, че винаги когато $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ са две точки от M, съществува такава непрекъсната крива L с начална точка A и крайна точка B, всички точки на която са точки от M (черт. 107).

Сега можем да докажем следната

Теорема на Болцано. *Нека функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в едно линейно свързано множество M и нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са две точки от M. Ако $F(x_1, y_1) < \lambda < F(x_2, y_2)$, то съществува такава точка (ξ, η) от M, за която имаме $F(\xi, \eta)=\lambda$.*

Доказателство. Тъй като точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат на линейно свързаното множество M, те ще могат да се свържат посредством такава непрекъсната крива L, всички точки на която принадлежат на M. Ако

$$x=f(t), \quad y=g(t),$$



Черт. 107

където $\alpha \leqq t \leqq \beta$, са параметрични уравнения на кривата L, то функциите $f(t)$ и $g(t)$ ще бъдат непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, като при това ще имаме

$$x_1=f(\alpha), \quad y_1=g(\alpha); \quad x_2=f(\beta), \quad y_2=g(\beta).$$

Тогава функцията $\varphi(t)=F[f(t), g(t)]$ ще бъде дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[\alpha, \beta]$. Тъй като

$$\varphi(\alpha)=F(x_1, y_1) \quad \text{и} \quad \varphi(\beta)=F(x_2, y_2),$$

то $\varphi(\alpha) < \lambda < \varphi(\beta)$ и съгласно теоремата за междинните стойности от § 24 ще съществува такава точка τ от интервала $[\alpha, \beta]$, за която ще имаме $\varphi(\tau)=\lambda$. Ако $\xi=f(\tau)$, $\eta=g(\tau)$, то

$$F(\xi, \eta)=F[f(\tau), \quad g(\tau)]=\varphi(\tau)=\lambda.$$

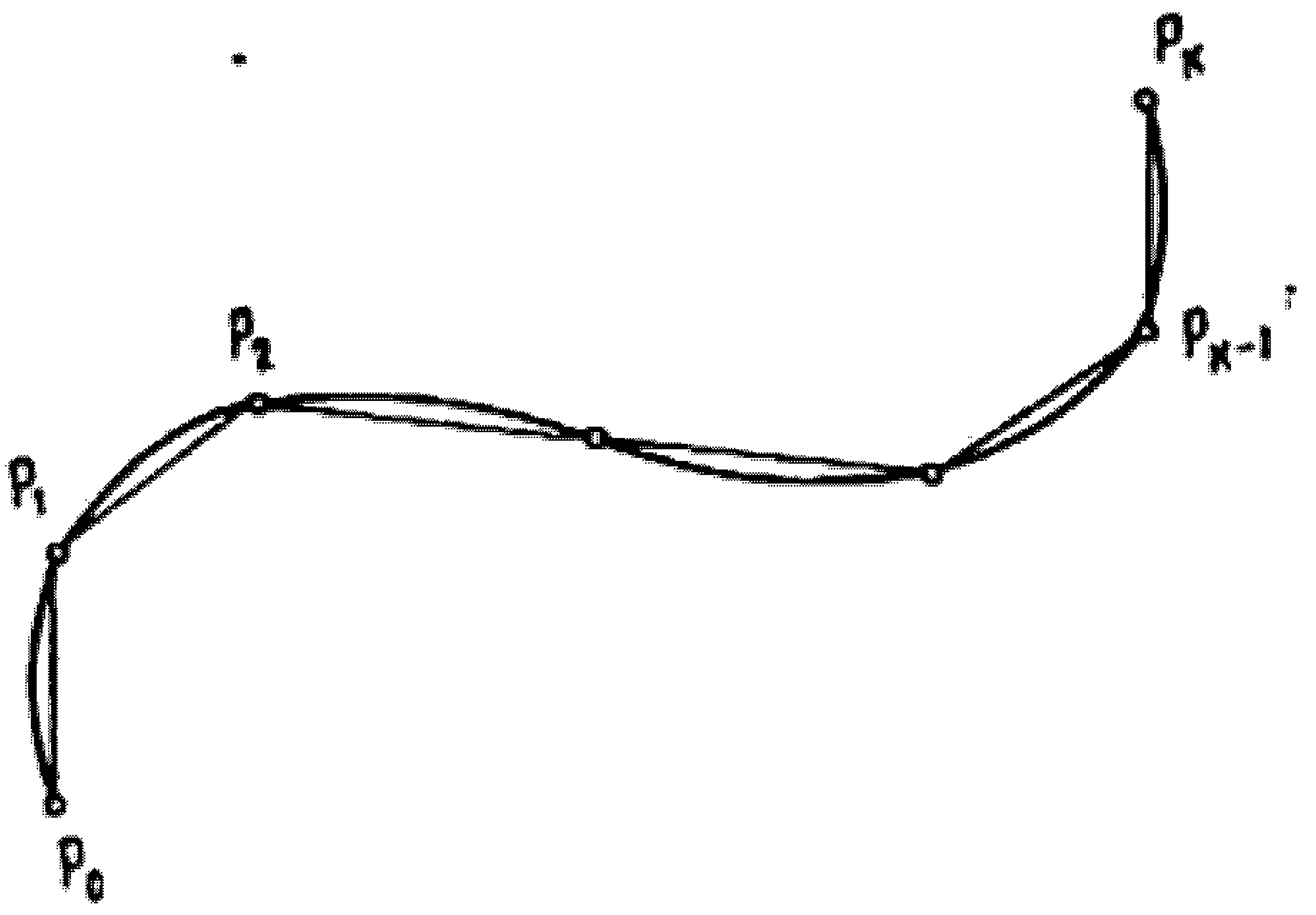
С това теоремата е доказана.

§ 99*. Дължина на крива

Нашата задача сега ще бъде да дефинираме по целесъобразен начин понятието дължина на крива и да посочим метод за нейното пресмятане. Нека L е крива, зададена с параметрични уравнения

$$x=f(t), \qquad y=g(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta.$$

Да разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали посредством точките $\alpha=t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k=\beta$, където $t_{i-1} < t_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, и за всяко i да означим с P_i точката с координати $x_i=f(t_i)$, $y_i=g(t_i)$. Ако съединим последователно точките $P_0, P_1, \ldots, P_k$ с отсечки, ще получим една начупена линия, която ще наречем вписана в кривата L (черт. 108). Желаейки да определим едно число, което да наречем дължина на кривата L, естествено е да смятаме, че дължината на получената по този начин начупена линия е по-малка от дължината на кривата L, но че в същото време можем да направим дължината на вписаната начупена линия кол-



Черт. 108

кото пожелаем близка до „истинската“ дължина на кривата L, стига да вземем точките P_i достатъчно гъсто върху L. Така по естествен начин идваме до следната

Дефиниция. *За една крива L ще казваме, че има крайна дължина (или просто, че има дължина), ако множеството от дължините на вписаните в нея начупени линии е ограничено отгоре. Точната горна граница на това множество ще наричаме дължина на кривата L.*

С оглед на онова, което следва, ще направим една бележка. Нека чрез някое разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали сме получили начупената линия L', вписана в дадената крива L. Ако към взетите точки на деление добавим нови, ще стигнем до ново, по-дребно разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$, на което ще отговаря нова начупена линия L'', също вписана в L. В такъв случай дължината на начупената линия L'' ще бъде по-голяма или равна на дължината на начупената линия L'. Това е така, защото при построяването на линията L'' всяка от отсечките $P_{i-1}P_i$, съставящи линията L', се замества с някоя начупена линия, свързваща точките P_{i-1} и P_i.

Главният резултат на настоящия параграф се съдържа в следната

Теорема. *Всяка непрекъснато диференцируема крива L има дължина. Ако*

$$x=f(t), \qquad y=g(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{1}$$

са параметричните ѝ уравнения, то нейната дължина $d(L)$ се дава с интеграла

$$(2) \qquad d(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt.$$

Доказателство. Нека L е непрекъснато диференцуема крива с параметрични уравнения (1). Да разделим по произволен начин интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали. Ако

$$\alpha=t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_k=\beta,$$

където $t_{i-1}<t_i\ (i=1,\ldots,k)$ са точките на деление при това разделяне, и ако P_i за всяко i е точката от кривата L с координати $x_i=f(t_i)$, $y_i=g(t_i)$, то дължината на вписаната в L начупена линия $P_0P_1\ldots P_k$ е равна на

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}.$$

Използувайки теоремата за крайните нараствания, можем да пишем

$$x_i-x_{i-1}=f(t_i)-f(t_{i-1})=f'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$

и

$$y_i-y_{i-1}=g(t_i)-g(t_{i-1})=g'(\tau_i^*)(t_i-t_{i-1}),$$

където τ_i и τ_i^* са точки от интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Тъй като функциите $f'(t)$ и $g'(t)$ са по предположение непрекъснати и следователно ограничени в интервала $[\alpha, \beta]$, то неравенствата $|f'(t)|\leqq K$ и $|g'(t)|\leqq K$ ще бъдат изпълнени за всички точки на този интервал при подходящ избор на константата K. Ето защо за дължината на начупената линия $P_0P_1\ldots P_k$ ще имаме

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{f'^2(\tau_i)+g'^2(\tau_i^*)}\,(t_i-t_{i-1})$$

$$\leqq\sqrt{2K}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\sqrt{2}\,K(\beta-\alpha).$$

Виждаме, че дължината на вписаната в кривата L начупена линия, която получихме при едно произволно разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали, не надминава една константа, независеща от начина, по който е извършено това разделяне. Това показва, че множеството от дължините на всевъзможните начупени линии, вписани в L, е ограничено отгоре и че следователно кривата L има дължина.

Нека сега ε е произволно положително число. Поради равномерната непрекъснатост на функциите $g'(t)$ и $\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$ в интервала $[\alpha, \beta]$

можем да намерим такова положително число δ, че осцилацията на всяка от тези две функции да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$ във всеки подинтервал на $[\alpha, \beta]$ с дължина, по-малка от δ.

От друга страна, дължината $d(L)$ на кривата L по дефиниция е точната горна граница на множеството от дължините на всички начупени линии, вписани в L. Ето защо ще съществува такова разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали, че ако означим с λ дължината на онази начупена линия, вписана в L, която се получава при това разделяне, да имаме

$$\lambda > d(L) - \varepsilon. \tag{3}$$

Нека приемем, че точките на деление при това разделяне са означени, както по-преди, с $\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_k = \beta$, където $t_{i-1} < t_i$. При това можем да считаме, че са изпълнени още и неравенствата

$$t_i - t_{i-1} < \delta \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{4}$$

Наистина, ако за някое разделяне на $[\alpha, \beta]$, за което е изпълнено неравенството (3), неравенствата (4) не са изпълнени, то ние винаги можем да добавим нови точки на деление, така че при новото по-дребно разделяне (4) вече да са изпълнени. В същото време дължината на новата начупена линия, вписана в L, която ще получим при новото разделяне, съгласно направената по-рано бележка ще бъде по-голяма или равна на λ и следователно по-голяма и от $d(L) - \varepsilon$.

За стойността на λ бяхме получили израза

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i^*)}\,(t_i - t_{i-1}),$$

където τ_i и τ_i^* са точки, принадлежащи на интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Да образуваме и сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i)}\,(t_i - t_{i-1}),$$

получена, като за всяко i на мястото на τ_i^* сме поставили τ_i. Ако сравним тези две суми, ще имаме*

$$|\lambda - \sigma| \leqq \sum_{i=1}^{k} \left| \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i^*)} - \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i)} \right| (t_i - t_{i-1})$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} |g'(\tau_i) - g'(\tau_i^*)|\,(t_i - t_{i-1}).$$

---

* Тук използваме лесното за доказване неравенство

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| \leqq |b - c|,$$

валидно за произволни реални числа a, b и c.

Тъй като $|\tau_i-\tau_i^*|<\delta$ за всяко i, то като си спомним как бяхме подбрали числото δ, ще заключим, че

(5) $$|\lambda-\sigma|\leqq\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\varepsilon.$$

От друга страна, сумата σ, както веднага се вижда, се явява една риманова сума на функцията $\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$, образувана за разглежданото разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали. Ако S и s са сумите на Дарбу, отговарящи на същото разделяне, то

(6) $$s\leqq\sigma\leqq S.$$

Също така имаме обаче и

(7) $$s\leqq\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt\leqq S.$$

Да означим с m_i и M_i точната долна и точната горна граница на функцията $\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$ в интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Вземайки пред вид неравенствата (4) и условието, на което подчинихме δ, ще видим въз основа на неравенствата (6) и (7), че

$$\left|\sigma-\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt\right|\leqq S-s=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\varepsilon.$$

Оттук поради (5) ще имаме

$$\left|\lambda-\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt\right|$$

$$\leqq|\lambda-\sigma|+\left|\sigma-\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt\right|<2\varepsilon,$$

или

(8) $$\lambda-2\varepsilon<\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt<\lambda+2\varepsilon.$$

Най-сетне, като комбинираме неравенствата (8) с неравенството (3), както и с очевидното неравенство $\lambda\leqq d(L)$, ще получим

$$d(L)-3\varepsilon<\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^{2}(t)+g'^{2}(t)}\,dt<d(L)+2\varepsilon,$$

откъдето следва, че

$$\left|d(L)-\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^{2}(t)+g'^{2}(t)}\,dt\right|<3\varepsilon.$$

Тъй като ε беше произволно взето положително число, от последното неравенство следва равенството (2). С това теоремата е доказана.

Накрая нека видим какъв вид придобива формулата (2) в два важни частни случая.

Както вече отбелязахме, ако $f(x)$ е функция, притежаваща непрекъсната производна в даден интервал $[a, b]$, нейната графика е гладка крива L, притежаваща параметричните уравнения $x=t$, $y=f(t)$, където $a\leqq t\leqq b$. Тогава за нейната дължина получаваме

$$d(L)=\int_{a}^{b}\sqrt{1+f'^{2}}(x)\,dx. \tag{9}$$

Когато пък кривата L е зададена с уравнение от вида $\rho=\varphi(\theta)$, $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$, където θ и ρ са полярните координати, а φ е диференцуема функция с непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$, кривата L се представя, както знаем, с параметричните уравнения $x=\varphi(\theta)\cos\theta$, $y=\varphi(\theta)\sin\theta$. Тогава

$$(\varphi(\theta)\cos\theta)'^{2}+(\varphi(\theta)\sin\theta)'^{2}=\varphi'^{2}(\theta)\cos^{2}\theta+\varphi^{2}(\theta)\sin^{2}\theta$$
$$+\varphi'^{2}(\theta)\sin^{2}\theta+\varphi^{2}(\theta)\cos^{2}\theta=\varphi'^{2}(\theta)+\varphi^{2}(\theta)$$

и за дължината на L получаваме

$$d(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi^{2}(\theta)+\varphi'^{2}(\theta)}\,d\theta. \tag{10}$$

Формулите (2), (9) и (10) най-кратко се записват така:

$$d(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^{2}+y'^{2}}\,dt,$$

където $x=f(t)$, $y=g(t)$, $\alpha\leqq t\leqq\beta$;

$$d(L)=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^{2}}\,dx,$$

където $y=f(x)$, $a \leqq x \leqq b$;

$$d(L)=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\theta,$$

където $\rho=\varphi(\theta)$, $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$.

Упражнения. Пресметнете дължината на следните криви.

1. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $0 \leqq t \leqq 2\pi$ (циклоида). Отг. $8a$.

2. $\rho=a(1+\cos\theta)$ (кардиоида). Отг. $8a$.

3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (астроида). Упътване. Представете кривата параметрично Отг. $6a$.

Начертайте посочените по-горе криви.

§ 100. Дефиниция на криволинеен интеграл

Нека е дадена една крива L с параметрични уравнения

$$x=f(t), \qquad y=g(t), \tag{1}$$

където $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Нека освен това е дадена функцията $F(x, y)$, за която ще предположим, че дефиниционната ѝ област съдържа L. Да разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на краен брой подинтервали, например следните:

$$[t_0, t_1], \quad [t_1, t_2], \ldots, [t_{k-1}, t_k], \tag{2}$$

където

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k=\beta,$$

и във всеки от тези подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ да си изберем по една точка τ_i. Ще въведем следните означения:

$$\begin{aligned} x_i&=f(t_i), & y_i&=g(t_i), \\ \xi_i&=f(\tau_i), & \eta_i&=g(\tau_i). \end{aligned} \tag{3}$$

Точките $P_i(x_i, y_i)$ очевидно разделят кривата L на по-малки дъги, като при това за всяко i точката $Q_i(\xi_i, \eta_i)$ лежи на дъгата $\overset{\frown}{P_{i-1}P}$ (черт. 109).

Нека сега образуваме сумата

$$\lambda=\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i, \eta_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{4}$$

В следващия параграф ще видим, че има въпроси, при които естествено се стига до суми от такъв вид. Предмет на този параграф е следната

Теорема. *Нека кривата L, зададена с параметричните уравнения*

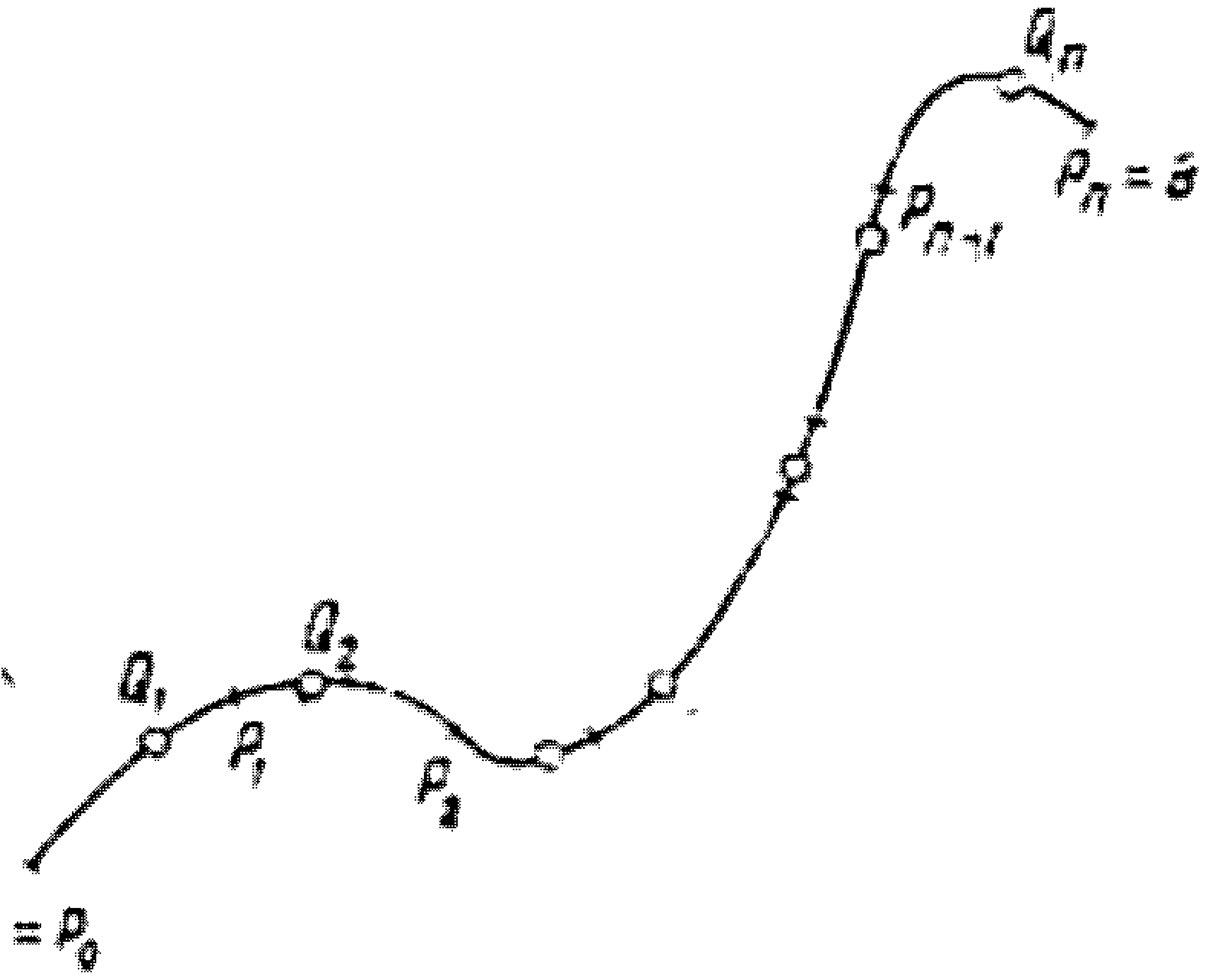
$$x=f(t), \quad y=g(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta),$$

е непрекъсната и освен това непрекъснато диференцуема относно x и нека $F(x, y)$ е функция, дефинирана и непрекъсната във всички точки на кривата L. Ако е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервали

$[\alpha, \beta]$ на подинтервали и ако за всяко от тези разделяния си образуваме по една сума λ от вида (4), *то така получената редица от суми*

$$(5) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

е сходяща и нейната граница не зависи нито от начина, по който са из-



Черт. 109

вършени отделните разделяния, нито от начина, по който сме избрали по една точка в отделните подинтервали при тези разделяния.

Доказателство. Нека излезем от едно фиксирано разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали, имащо вида (2). Избираме по едно τ_i във всеки от подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ и като използуваме отново означенията (3), образуваме сумата (4), която може по-подробно да се напише по следния начин:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} F\,[f(\tau_i), g(\tau_i)]\,[f(t_i) - f(t_{i-1})].$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания към разликите $f(t_i) - f(t_{i-1})$, ще получим

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} F\,[f(\tau_i), g(\tau_i)]\,f'(\tau_i^*)\,(t_i - t_{i-1}),$$

където τ_i^* е число, което, както и τ_i, се намира в интервала $[t_{i-1}, t_i]$.

От друга страна, да разгледаме функцията

$$\varphi(t) = F[f(t), g(t)]f'(t),$$

която съгласно условията на теоремата е непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$. Ако образуваме римановата сума σ за тази функция, отговаряща на разглежданото разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ и на направения избор на точките τ_i, ще получим

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k} F(f(\tau_i),\ g(\tau_i)]f'(\tau_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Тогава ще имаме

$$\lambda-\sigma=\sum_{i=1}^{k} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]\,[f'(\tau_i^*)-f'(\tau_i)]\,(t_i-t_{i-1}).$$

Нека K е някаква горна граница на абсолютната стойност на непрекъснатата функция $F[f(t), g(t)]$ в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ и нека означим с ε най-голямата от осцилациите, които функцията $f'(t)$ притежава в отделните подинтервали (2). Тогава

$$|\lambda-\sigma|\leqq\sum_{i=1}^{k}|F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]|\,.\,|f'(\tau_i^*)-f'(\tau_i)|(t_i-t_{i-1})$$

$$\leqq\varepsilon\,.\,K\,.\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\varepsilon K(\beta-\alpha).$$

Нека сега си спомним, че ни беше дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[\alpha, \beta]$. Да вземем n-тото от тези разделяния и да образуваме за него сумите λ и σ при някакъв избор на точките τ_i. Тези две суми да означим сега съответно с λ_n и σ_n. Ако освен това означим с ε_n най-голямата от осцилациите на функцията $f'(t)$ в отделните подинтервали, участвуващи в n-тото разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$, то съгласно това, което вече видяхме, ще имаме

$$|\lambda_n-\sigma_n|\leqq\varepsilon_n K(\beta-\alpha). \tag{6}$$

Поради непрекъснатостта на функцията $f'(t)$ в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ можем с помощта на теоремата за осцилациите да заключим, че $\lim\varepsilon_n=0$. Ето защо от неравенството (6) следва, че

$$\lim(\lambda_n-\sigma_n)=0.$$

От друга страна, поради непрекъснатостта на функцията $\varphi(t)$ редицата от нейните риманови суми

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

клони към $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt$. Тогава от равенството

$$\lambda_n-\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\,dt=(\lambda_n-\sigma_n)+\left(\sigma_n-\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\,dt\right)$$

заключаваме, че редицата (5) е сходяща и

$$\lim \lambda_n = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,dt.$$

С това теоремата е доказана, тъй като е очевидно, че намерената граница на редицата (5) зависи само от функциите $f(t)$, $g(t)$ и $F(x, y)$ и от интервала $[\alpha, \beta]$.

Нека забележим, че доказаната теорема остава валидна и ако заменим условието за непрекъсната диференцуемост на кривата L относно x с условието за частична непрекъсната диференцуемост относно x. Необходимите за случая допълнителни разглеждания могат да се предоставят на читателя.

Всичко изложено дотук ни дава основание да разглеждаме границата, към която клони редицата (5), като число, което е напълно определено, когато са дадени кривата L и функцията $F(x, y)$ (стига те да удовлетворяват условията на доказаната теорема). Това число ще наричаме криволинеен интеграл от $F(x, y)dx$, взет върху кривата L, и ще го означаваме така:

$$\int_{L} F(x, y)\,dx,$$

или ако A и B са съответно началната и крайната точка на кривата L:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y)\,dx.$$

При това ние видяхме, че това число е равно на един определен интеграл. Като напишем подробно функцията $\varphi(t)$, ще получим

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), g(t)]\,f'(t)\,dt. \tag{7}$$

Ако кривата L е частично непрекъснато диференцуема относно y и ако вместо от сумата (4) излезем от сумата

$$\lambda' = \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

то като разсъждаваме по същия начин, ще стигнем до понятието криволинеен интеграл от $F(x, y)dy$ върху кривата L, който ще означаваме така:

$$\int_{L} F(x, y)\,dy \quad \text{или} \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y)\,dy.$$

При това ще имаме равенството

$$\int_{\widehat{AB}} F(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), g(t)]\,g'(t)\,dt. \tag{8}$$

Пример 1. Да пресметнем криволинейния интеграл

$$\int_L y^2\,dx,$$

където L е полуокръжността, зададена с уравненията

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \leqq t \leqq \pi \quad (a > 0).$$

Ще имаме

$$\int_L y^2\,dx = a^2\int_0^{\pi} \sin^2 t\,d\,a\cos t = -a^3\int_0^{\pi} \sin^3 t\,dt.$$

Пресмятаме този определен интеграл и получаваме

$$\int_L y^2\,dx = -\frac{4}{3}a^3.$$

Пример 2. Да пресметнем криволинейния интеграл

$$\int_L (x^3 + y)\,dy,$$

където L е частта от параболата с уравнение $y = x^2$, свързваща точките $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Тук имаме параметричните уравнения

$$x = t,\quad y = t^2,\quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Тогава

$$\int_L (x^3 + y)\,dy = \int_0^1 (t^3 + t^2)\,dt^2 = 2\int_0^1 (t^4 + t^3)\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\left| t^5 \right|_0^1 + \frac{2}{4}\left| t^4 \right|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}.$$

Ако вземем кривата L, зададена с параметричните уравнения (1), но описана в обратна посока, т. е. от точката $B(f(\beta), g(\beta))$ към точката $A(f(\alpha), g(\alpha))$, то като напишем параметричните уравнения на дъгата $\widehat{BA}$ във вида

$$x = f(-t),\quad y = g(-t),$$

където $-\beta \leqq t \leqq -\alpha$, ще получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,\ y)\,dx = -\int\limits_{-\beta}^{-\alpha} F[f(-t),\ g(-t)]\,f'(-t)\,dt$$

$$= -\int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt,$$

т. е.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,\ y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y)\,dx. \tag{9}$$

По същия начин получаваме

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,\ y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y)\,dy. \tag{10}$$

Ако при условията на теоремата от този параграф е дадена и една функция $u(s)$, която е строго растяща и диференцуема с непрекъсната производна в някакъв интервал $[\alpha_1,\ \beta_1]$ и за която са изпълнени равенствата $u(\alpha_1)=\alpha$, $u(\beta_1)=\beta$, то параметричните уравнения

$$x = f(u(s)),\quad y = g(u(s)), \tag{11}$$

където $\alpha_1 \leqq s \leqq \beta_1$, представят, както имахме случай вече да отбележим, същата крива L, която бе зададена с уравненията (1). Като изхождахме от параметричните уравнения (1), получихме

$$\int\limits_{L} F(x,\ y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt.$$

Но ако в определения интеграл, написан в дясната страна на това равенство, извършим смяна на променливите посредством субституцията $t = u(s)$, то ще получим

$$\int\limits_{L} F(x,\ y)\,dx = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F[f(u(s)),\ g(u(s))]\,f'(u(s))\,u'(s)\,ds,$$

т. е. ще стигнем до същия интеграл, който бихме получили, ако бяхме излезли от параметричните уравнения (11). Същата бележка се отнася, разбира се, и за криволинейния интеграл $\int\limits_{L} F(x,\ y)dy$.

Друга също почти очевидна забележка е следната: Ако $\alpha < \gamma < \beta$, то точката $C(f(\gamma),\ g(\gamma))$ разделя кривата $\overset{\frown}{AB}$, зададена с уравненията (1), на две дъги — дъгите $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{CB}$. Тогава от равенството

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt+\int_{\gamma}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt$$

получаваме равенството

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx=\int_{\widehat{AC}} F(x,\ y)\,dx+\int_{\widehat{CB}} F(x,\ y)\,dx. \tag{12}$$

Аналогично имаме

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy=\int_{\widehat{AC}} F(x,\ y)\,dy+\int_{\widehat{CB}} F(x,\ y)\,dy. \tag{13}$$

От друга страна, когато една крива L е съставена от краен брой незатворени, непрекъснати и частично непрекъснато диференцуеми относно x, респективно относно y, дъги $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \dots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ по дефиниция приемаме, че*

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{A_1A_{n+1}}} F(x,\ y)\,dx\\ =\int_{\widehat{A_1A_2}} F(x,\ y)\,dx+\int_{\widehat{A_2A_3}} F(x,\ y)\,dx+\cdots+\int_{\widehat{A_nA_{n+1}}} F(x,\ y)\,dx\end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{A_1A_{n+1}}} F(x,\ y)\,dy\\ =\int_{\widehat{A_1A_2}} F(x,\ y)\,dy+\int_{\widehat{A_2A_3}} F(x,\ y)\,dy+\cdots+\int_{\widehat{A_nA_{n+1}}} F(x,\ y)\,dy.\end{aligned} \tag{15}$$

Нека забележим още, че когато кривата L е затворена, означенията

$$\int_{L} F(x,\ y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{L} F(x,\ y)\,dy$$

трябва да бъдат придружени с указание в коя посока е описана тази крива. Ако L е една проста затворена крива и ако с L^{+} означим кривата L, описана в положителна посока, а с L^{-} — същата крива, описана в отрицателна посока, то очевидно

---

* Лесно се вижда, че до същите равенства бихме стигнали, ако бихме взели онова параметрично представяне на кривата $\widehat{A_1A_{n+1}}$, което се получава от параметричните представяния на кривите $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \dots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ по начина, показан в бележката под линия на стр. 410

$$\int_{L^+} F(x,\ y)\,dx = -\int_{L^-} F(x,\ y)\,dy, \quad \int_{L^-} F(x,\ y)\,dy = -\int_{L^-} F(x,\ y)\,dy.$$

Най-сетне ще пишем по дефиниция

$$\int_L [P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy] = \int_L P(x,\ y)\,dx + \int_L Q(x,\ y)\,dy.$$

Нека споменем специално няколко прости примера на криволинейни интеграли, които ще срещаме и по-нататък в нашата работа. Когато $\widehat{AB}$ е отсечката, свързваща двете точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, използувайки параметричните ѝ уравнения

(16) $$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$

където $0 \leqq t \leqq 1$, ще получим

(17) $$\int_{\widehat{AB}} 1\,.\,dx = \int_0^1 (x_2 - x_1)\,dt = x_2 - x_1$$

и

(18) $$\int_{\widehat{AB}} 1\,.\,dy = \int_0^1 (y_2 - y_1)\,dt = y_2 - y_1.$$

Ако отсечката $\widehat{AB}$ е успоредна на оста Oy (и следователно $x_1 = x_2$), то първата от двете функции, участвуващи в параметричното представяне (16), е константа. Ето защо за всяка функция $F(x,\ y)$ тогава ще имаме

(19) $$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx = 0;$$

когато пък отсечката $\widehat{AB}$ е успоредна на оста Ox, ще имаме

(20) $$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy = 0.$$

Накрая нека забележим, че ако L е непрекъснато диференцуема крива и ако $|F(x,y)| \leqq K$, то в сила е неравенството

$$\left|\int_L F(x,\ y)\,dx\right| \leqq K\,.\,d(L),$$

където $d(L)$ е дължината на кривата L.

Наистина, ако

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

са параметричните уравнения на кривата L, ще имаме

$$\left|\int\limits_{L} F(x, y)\,dx\right| = \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt\right|$$

$$\leqq K\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f'(t)|\,dt \leqq K\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,dt = K\,.\,d\,(L).$$

Аналогично се установява и неравенството

$$\left|\int\limits_{L} F(x,\ y)\,dy\right| \leqq K\,.\,d\,(L).$$

Упражнения. Пресметнете следните криволинейни интеграли:

1. $\int\limits_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2)\,dx$, където $\widehat{AB}$ е частта от елипсата с уравнение $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

свързваща точките $A(0,\ 1)$ и $B(\sqrt{2},\ 0)$ и лежаща в първия квадрант.

Отг. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

2. $\int\limits_{\widehat{AB}} (1 + xy)\,dy$, където $\widehat{AB}$ е отсечката, определена от точките $A(0,\ 2)$ и $B(1,\ 1)$.

Отг. $-\frac{5}{3}$.

3. $\int\limits_{\widehat{AB}} (y\,dx - x\,dy)$, където $\widehat{AB}$ е онази част от хиперболата с уравнение $xy = 1$,

която свързва точките $A(1,\ 1)$ и $B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$.

Отг. $2\ln 2$.

4. $\int\limits_{L} (xy\,dx + e^x\,dy)$, където L е триъгълникът, определен от точките $A(1,\ 1)$,

$B(2,\ 1)$ и $C(1,\ 3)$ и описан в посока, обратна на посоката на часовниковата стрелка.

Отг. $2e^2 - 4e - \frac{4}{3}$.

§ 101. Един пример от физиката

Тук ще се спрем на един въпрос от физиката, при който се стига до криволинеен интеграл. Както е известно, ако върху една материална точка, движеща се праволинейно, действува постоянна сила, чиято посока съвпада с посоката на движението на материалната точка, то работата, която тази сила извършва за даден период от време, е равна на произведението от големината на силата и изминатия път. По-сложен е случаят, когато посоката на действуващата постоянна сила $\vec{F}$ не съвпада с посоката на движението на материалната точка. В такъв случай, ако P и Q са съответно проекциите на вектора $\vec{F}$ върху координатните оси Ox и Oy и ако движещата се праволинейно точка е изминала отсечката A_1A_2 в посока от точката $A_1(x_1, y_1)$ към точката $A_2(x_2, y_2)$, то извършената раработа се дава с израза

$$P(x_2-x_1)+Q(y_2-y_1).$$

Тук x_2-x_1 и y_2-y_1 са съответно проекциите на вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ върху осите Ox и Oy.

Нека сега параметричните уравнения

$$x=f(t),\ y=g(t),\ \alpha\leqq t\leqq\beta \tag{1}$$

представят една проста и гладка крива L с начална точка $A(f(\alpha), g(\alpha))$ и крайна точка $B(f(\beta), g(\beta))$ и нека една материална точка описва тази крива в посока от A към B под действието на някаква сила $\vec{F}$, която не е постоянна. Тъй като силата $\vec{F}$ се мени, нейните проекции върху координатните оси Ox и Oy ще бъдат функции на двете координати x и y на подвижната точка. Да означим тези проекции съответно с $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и да предположим, че те са непрекъснати функции на x и y. Задачата е да се дефинира понятието работа, извършена през време на движението на материалната точка по кривата L, и да се намери начин за пресмятането на тази работа.

За да решим тази задача, ние първоначално я заместваме с една по-проста, която ни е позната. За целта разделяме интервала $[\alpha, \beta]$ на краен брой подинтервали. Нека тези подинтервали са

$$[t_0, t_1],\ [t_1, t_2], \dots, [t_{k-1}, t_k], \tag{2}$$

където

$$\alpha=t_0<t_1<\dots<t_k=\beta,$$

и нека изберем числата $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ така, че $\tau_i\in[t_{i-1}, t_i]$ при $i=1, 2, \dots, k$. Да въведем означенията

$$x_i=f(t_i),\ y_i=g(t_i)\quad (i=0, 1, \dots, k),$$

$$\xi_i=f(\tau_i),\ \eta_i=g(\tau_i)\quad (i=0, 1, \dots, k) \tag{3}$$

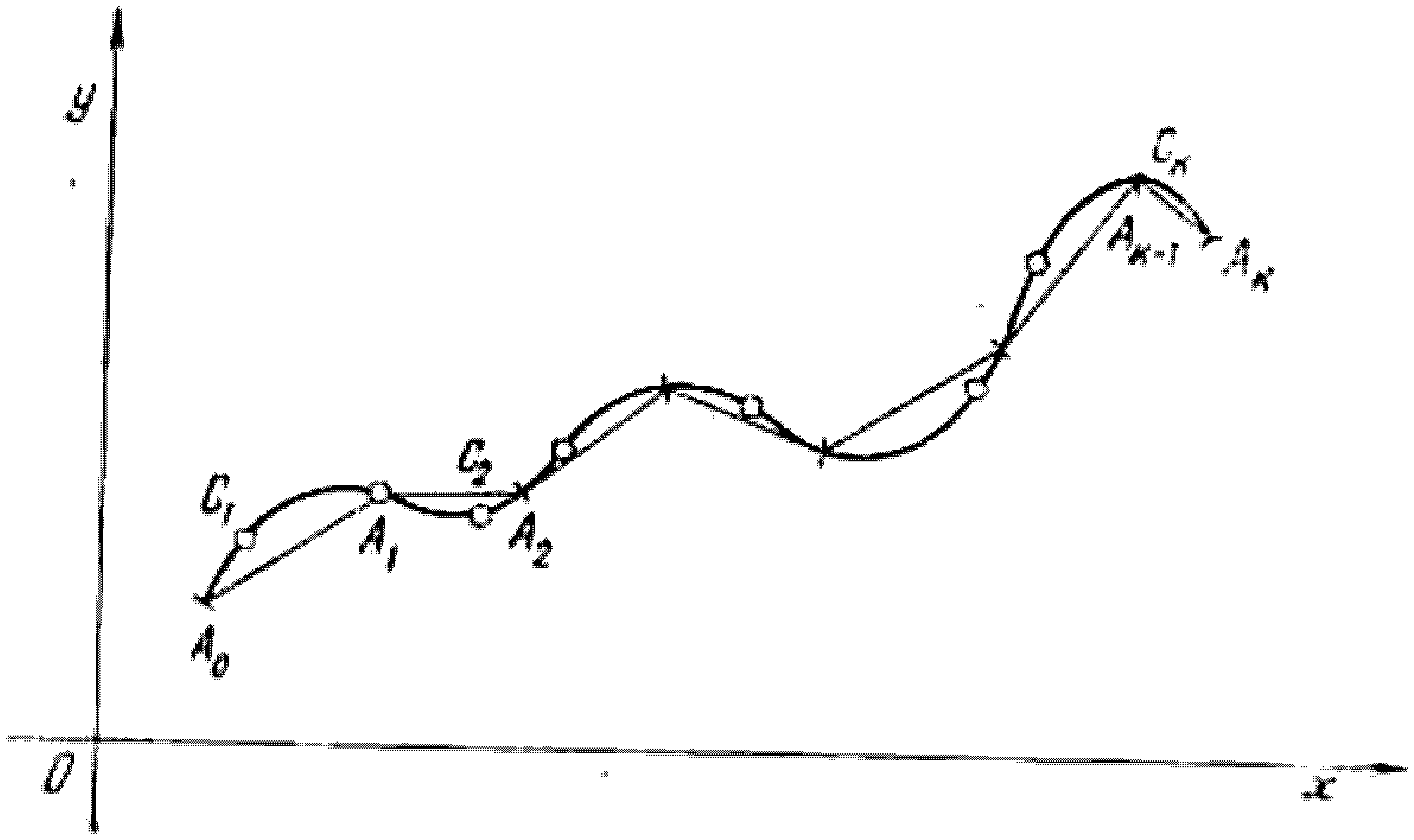
и да разгледаме точките

$$A=A_0(x_0, y_0),\ A_1(x_1, y_1), \dots, A_k(x_k, y_k)=B$$

и

$$C_1(\xi_1, \eta_1), \quad C_2(\xi_2, \eta_2), \ldots, C_k(\xi_k, \eta_k).$$

Нашият метод се състои в това, че заместваме кривата L, по която се движи разглежданата материална точка, с начупената линия, съставена от отсечките $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{k-1}A_k$ (черт. 110).



Черт. 110

Като считаме, че материалната точка описва тази начупена линия ще приемем освен това, че когато тя се движи по дадена отсечка $A_{i-1}A_i$, върху нея действува постоянна сила и за проекции на тази постоянна сила върху координатните оси ще приемем проекциите на силата $\vec{F}$, които отговарят на точката C_i, лежаща на дъгата $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, т. е. ще приемем, че те са съответно $P(\xi_i, \eta_i)$ и $Q(\xi_i, \eta_i)$. Тогава работата, която материалната точка извършва при движението си по отсечката $A_{i-1}A_i$, ще бъде равна на

$$P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + Q(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

а работата, извършена от нея след описването на цялата начупена линия, ще се дава с израза

$$\sum_{i=1}^{k} [P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + Q(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1})].$$

Ние имаме основание да считаме така получената сума за приблизителна стойност на търсената работа, толкова по-близка до „истинската", колкото по-гъсто е разделянето (2) на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали. Тази сума обаче, когато вземем една издребняваща редица от разделяния на интервала $[\alpha, \beta]$, клони, както знаем, към криволинейния интеграл

$$\int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy].$$

Ето защо ние по дефиниция приемаме, че работата, която се извършва, когато материалната точка описва кривата L под действието на дадената сила $\vec{F}$, се дава с горния криволинеен интеграл.

§ 102. Случай, когато криволинейният интеграл не зависи от пътя на интегрирането

Има един важен случай, при който стойността на криволинейния интеграл

$$(1) \qquad \int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]$$

зависи само от началната и крайната точка на непрекъснатата и частично непрекъснато диференцуема крива L, по която се извършва интегрирането, но не и от самата крива L, стига тя да лежи изцяло в някоя отнапред дадена област D в равнината Oxy. В този случай ние ще казваме накратко, че криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в областта D.

Ще докажем следната

Теорема. *Нека D е едно отворено и линейно свързано множество в равнината Oxy и нека функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. За да не зависи интегралът (1) от пътя на интегрирането в областта D, е необходимо и достатъчно да съществува такава функция $\Phi(x, y)$, дефинирана и диференцуема частно както спрямо x, така и спрямо y в D, която удовлетворява в D равенствата*

$$(2) \qquad \Phi_x'(x, y) - P(x, y), \qquad \Phi_y'(x, y) = Q(x, y).$$

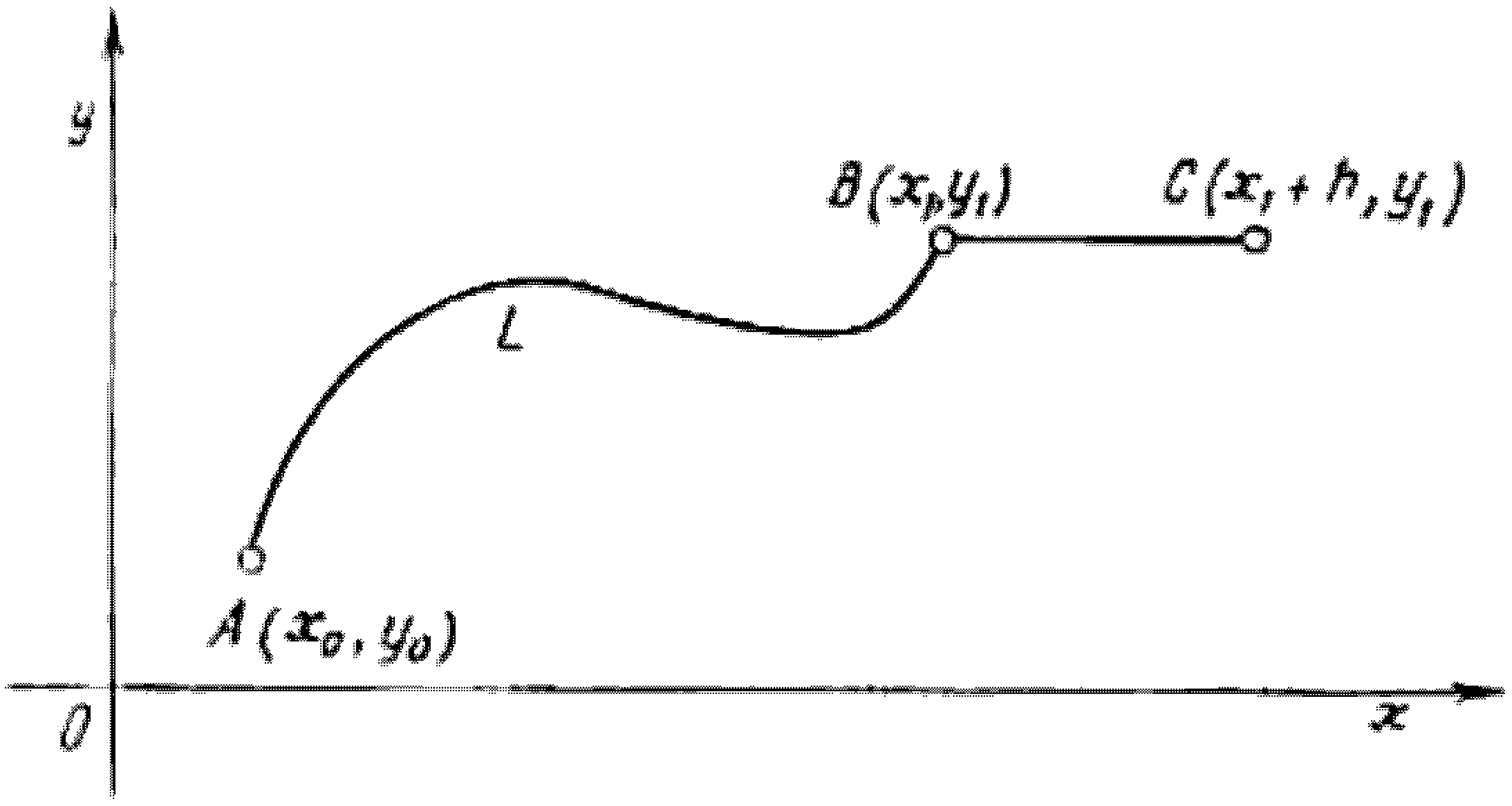
В такъв случай, ако $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ са съответно началната и крайната точка на кривата L, лежаща в D, имаме

$$(3) \qquad \int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] - \Phi(b_1, b_2) - \Phi(a_1, a_2).$$

Доказателство. Ще установим най-напред необходимостта на условието на теоремата. Да предположим, че криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в областта D и да вземем една фиксирана точка $A(x_0, y_0)$ от тази област. Ако (x, y) е произволна точка от областта D, то криволинейният интеграл (1), взет върху която и да било непрекъсната и частично непрекъснато диференцуема крива L, свързваща тези две точки и лежаща в D, ще зависи само от точката (x, y) и може да бъде означен по следния начин:

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy].$$

Ще покажем, че функцията $\Phi(x, y)$, дефинирана с помощта на това равенство в областта D, е диференцуема частно както спрямо x, тъй и спрямо y във всички точки на тази област. Наистина нека $B(x_1, y_1)$ е една произволна точка от областта D и нека числото h е взето така, че



Черт. 111

точката $C(x_1+h, y_1)$ също да лежи в D. Ще запишем стойностите $\Phi(x_1, y_1)$ и $\Phi(x_1+h, y_1)$ с помощта на равенствата

$$\Phi(x_1, y_1)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

и

$$\Phi(x_1+h, y_1)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1+h, y_1)}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy],$$

където първият криволинеен интеграл е взет по някаква диференцуема крива L, свързваща точките $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ и лежаща* в D, а вторият — по кривата, съставена от същата дъга L и от отсечката BC (черт. 111). Поради това, че отсечката BC е успоредна на оста Ox, ще имаме

$$\Phi(x_1+h, y_1)-\Phi(x_1, y_1)=\int\limits_{BC}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

$$=\int\limits_{BC}P(x, y)\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_1+h}P(x, y_1)\,dx.$$

---

* Поради това, че линейно свързаното множество D е отворено, всеки две негови точки могат да бъдат свързани с крива, която е не само непрекъсната, но и диференцуема — тук обаче няма да се спираме на доказателството на този факт.

Към последния получен интеграл (който е обикновен определен интеграл, а не криволинеен) прилагаме теоремата за средните стойности и получаваме

$$\Phi(x_1+h,\ y_1)-\Phi(x_1,\ y_1)=hP(\xi,\ y_1),$$

където ξ е число, намиращо се между x_1 и x_1+h.

Като използуваме непрекъснатостта на функцията $P(x,\ y)$, ще получим

$$\Phi_x'(x_1,\ y_1)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_1+h,\ y_1)-\Phi(x_1,\ y_1)}{h}=\lim_{h\to 0}P(\xi,\ y_1)=P(x_1,\ y_1).$$

Тъй като точката $(x_1,\ y_1)$ беше избрана произволно в областта D, то с това равенството

$$\Phi_x'(x,\ y)=P(x,\ y)$$

е доказано за всички точки от тази област. По аналогичен начин се вижда, че

$$\Phi_y'(x,\ y)=Q(x,\ y).$$

Ще преминем сега към доказателството на достатъчността на условието на теоремата. Нека ни е известно, че съществува една функция $\Phi(x,\ y)$, дефинирана и диференцуема частно спрямо x и спрямо y в областта D и удовлетворяваща в тази област равенствата (2). Нека е дадена и една диференцуема крива L с параметрични уравнения

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad \alpha\leqq t\leqq\beta,$$

лежаща изцяло в областта D, началната и крайната точка на която са съответно $A(a_1,\ a_2)$ и $B(b_1,\ b_2)$. Съставната функция

$$\varphi(t)=\Phi(f(t),\ g(t)),$$

дефинирана в интервала $[\alpha,\ \beta]$, е диференцуема в този интервал и

$$\varphi'(t)=\Phi_x'(f(t),\ g(t))f'(t)+\Phi_y'(f(t),\ g(t))g'(t).$$

Като вземем пред вид равенствата (2), получаваме

$$\varphi'(t)=P(f(t),\ g(t))f'(t)+Q(f(t),\ g(t))g'(t).$$

Тогава ще имаме

$$\int_L[P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy]$$

$$=\int_\alpha^\beta[P(f(t),\ g(t))f'(t)+Q(f(t),\ g(t))g'(t)]\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\varphi'(t)\,dt=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\Phi(b_1,\ b_2)-\Phi(a_1,\ a_2).$$

С това равенството (3) е доказано в случая на диференцуема крива L. Ако L е непрекъсната и частично непрекъснато диференцуема крива, съставена от незатворените дъги $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \dots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ (където $A_1=A$, $A_{n+1}=B$) и лежаща изцяло в D, то като запишем всяка от точките A_i съответно чрез (a^i_1, a^i_2), ще имаме

$$\int\limits_L [P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy]=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\widehat{A_iA_{i+1}}}[P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\Phi(a_1^{i+1},\ a_2^{i+1})-\Phi(a_1^i,\ a_2^i)]$$

$$=\Phi(a_1^{n+1},\ a_2^{n+1})-\Phi(a_1^1,\ a_2^1)=\Phi(b_1,\ b_2)-\Phi(a_1,\ a_2).$$

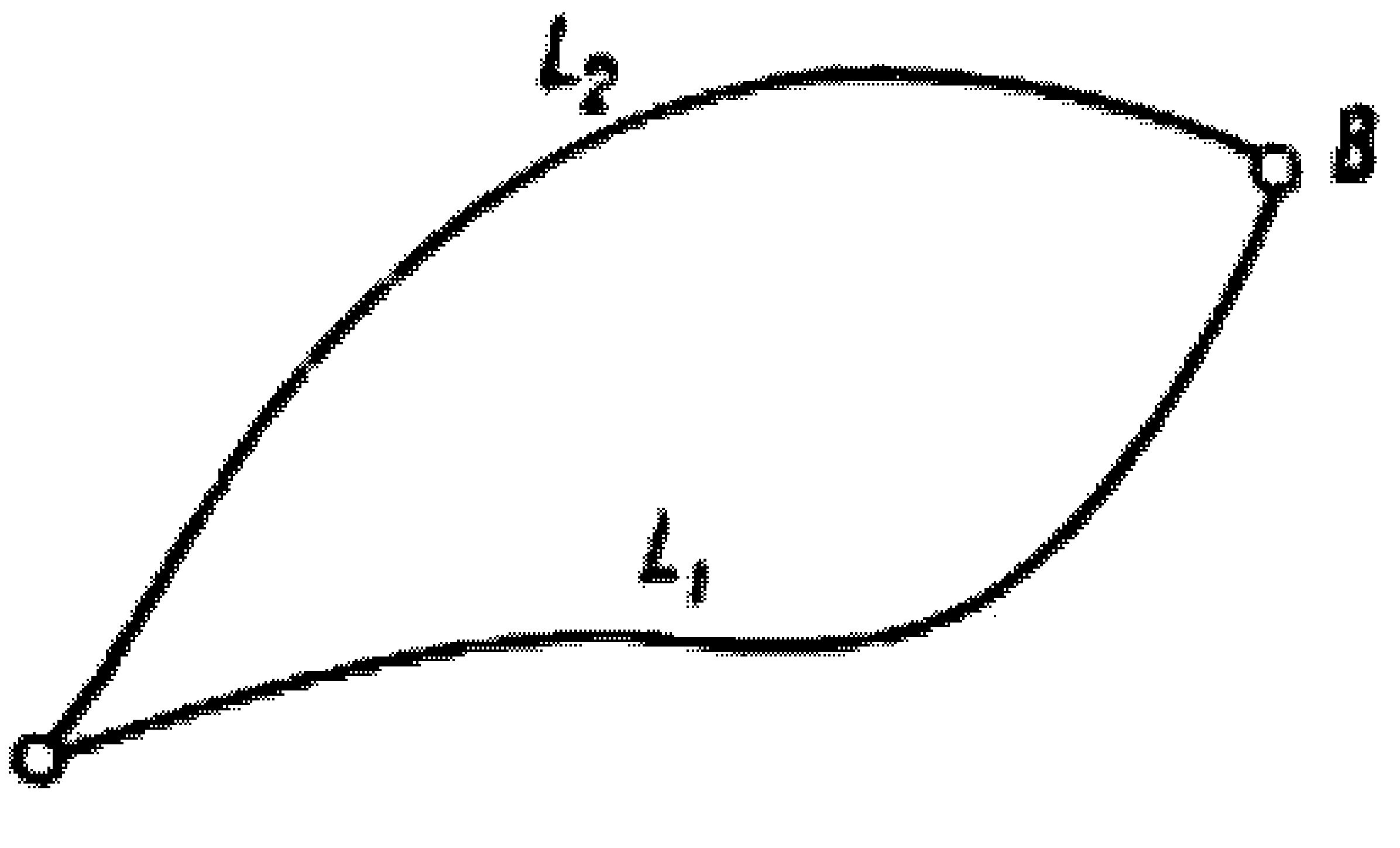
По такъв начин равенството (3) е доказано в общия случай, а от това равенство непосредствено следва, че криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в областта D. С това доказателството на теоремата е завършено.

Често, за да отбележим факта, че една функция $\Phi(x,\ y)$ удовлетворява равенствата (2), казваме, че изразът

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy \tag{4}$$

представлява неин пълен диференциал. Ето защо току-що доказаната теорема понякога се изказва накратко така:

За да не зависи криволинейният интеграл (1) *от пътя на интегрирането в дадена отворена и линейно свързана област D, е необходимо и достатъчно подинтегралният израз* (4) *да представлява пълен диференциал на някоя функция.*



Черт. 112

Нека отбележим още следното: Когато кривата L е затворена, началната и крайната й точка съвпадат и равенството (3) ни дава

$$\int\limits_L [P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy]=0. \tag{5}$$

И така, ако криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в дадена област D, той е равен на нула върху всяка затворена, непрекъсната и частично непрекъснато диференцуема крива или, както казваме накратко, върху всеки затворен контур, лежащ в D. Вярно е и обратното — ако криволинейният интеграл (1) е равен на нула върху всеки затворен контур в D, той не зависи от пътя на интегрирането в областта D. Наистина нека L_1 и L_2 са две непрекъснати и частично непрекъснато диференцуеми криви с обща начална точка A и обща крайна точка B. Ако означим с L_2' кривата L_2, описана в посока от B към A, то кривите L_1 и L_2' ще образуват, заедно взети, един затворен контур L (черт. 112). Тогава ще имаме

$$0=\int\limits_{L}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

$$=\int\limits_{L_1}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]+\int\limits_{L_2'}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

$$=\int\limits_{L_1}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]-\int\limits_{L_2}[P(x, y)dx+Q(x, y)\,dy],$$

откъдето

$$\int\limits_{L_1}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]=\int\limits_{L_2}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]. \tag{6}$$

§ 103. Намиране на функция, пораждаща пълен диференциал

Във връзка с доказаната в предишния параграф теорема възникват следните два въпроса:

а) Когато е даден един криволинеен интеграл от вида

$$\int\limits_{L}[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy], \tag{1}$$

как може да се узнае дали подинтегралният израз представлява пълен диференциал на някоя функция, т. е. дали съществува такава функция $\Phi(x, y)$, която да удовлетворява равенствата

$$\Phi_x'(x, y)=P(x, y), \qquad \Phi_y'(x, y)=Q(x, y) \tag{2}$$

в дадената област D.

б) Ако знаем, че такава функция съществува, как може тя да се намери.

Отговорите на тези два въпроса се дават с помощта на една теорема, към която сега ще преминем. При това отговорът на първия от тях се съдържа в самата формулировка на теоремата, а що се отнася до отговора на втория въпрос, той се получава в процеса на доказателството на тази теорема. За простота ще докажем теоремата само за случая, когато областта D е правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, или пък съвпада с цялата равнина, въпреки че твърдението ѝ може да бъде доказано и за области от по-сложен вид.

Теорема. *Нека областта D е отворен правоъгълник, зададен с неравенствата*

$$(3) \qquad a<x<b, \qquad c<y<d,$$

или пък е цялата равнина и нека са дадени две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрекъснати и притежаващи непрекъснати частни производни в областта D. За да съществува функция $\Phi(x, y)$, дефинирана и диференцуема частно спрямо x и спрямо y в D и удовлетворяваща в D равенствата

$$(2) \qquad \Phi_x'(x, y)=P(x, y), \qquad \Phi_y'(x, y)=Q(x, y),$$

е необходимо и достатъчно за всички точки от D да бъде изпълнено равенството

$$(4) \qquad P_y'(x, y)=Q_x'(x, y).$$

Доказателство. Необходимостта на условието (4) се вижда веднага. Наистина от равенствата (2) получаваме

$$\Phi''_{xy}=P_y'(x, y), \quad \Phi''_{yx}(x, y)=Q_x'(x, y),$$

откъдето поради непрекъснатостта на функциите $P_y'(x, y)$ и $Q_x'(x, y)$ следва равенството (4) въз основа на теоремата за равенство на смесените производни от § 76.

Ще се занимаем сега с въпроса за достатъчността на условието (4). Като предполагаме, че това условие е изпълнено в областта D, ще намерим такава функция $\Phi(x, y)$, дефинирана в D, която удовлетворява равенствата (2). При това ще имаме пред вид случая, когато областта D е правоъгълник, зададен с неравенствата (3), но разсъжденията по съвсем очевиден начин се пренасят и за случая, когато D е цялата равнина, който случай в същност е по-прост.

Да вземем едно фиксирано x_0 от интервала (a, b) и при някакво фиксирано y, взето от интервала (c, d), да образуваме определения интеграл

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt,$$

където x е произволна точка от интервала (a, b). Този интеграл представлява очевидно функция на x и y, дефинирана в областта D. Ние ще си поставим за цел да намерим една такава функция $\psi(y)$ на променливата y, дефинирана и диференцуема в интервала (c, d), че функцията

$$\Phi(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt+\psi(y)$$

да притежава свойствата на търсената от нас функция. При това ясно е, че както и да изберем $\psi(y)$, равенството

$$\Phi_x'(x, y)=P(x, y)$$

ще бъде изпълнено във всички точки на областта D. Нека изразим сега, че в D е изпълнено и равенството

$$\Phi_y'(x, y)=Q(x, y).$$

Ще използуваме теоремата за диференциране под знака на интеграла от § 84, приложена при фиксирано x към интеграла (5), като диференцираме* относно y. Ще получим

$$(6) \qquad Q(x, y)=\int_{x_0}^{x} P_y'(t, y)\,dt+\psi'(y).$$

Оттук ще намерим $\psi(y)$ като примитивна функция на разликата

$$(7) \qquad Q(x, y)-\int_{x_0}^{x} P_y'(t, y)\,dt$$

в интервала (c, d). Това е възможно да бъде направено само ако разликата (7) е функция на единствената променлива y. Но случаят е именно такъв, тъй като частната производна на тази функция спрямо x е равна на

$$Q_x'(x, y)-P_y'(x, y),$$

израз, който поради равенството (4) е равен на нула за всички точки от областта D. Това показва, че функцията (7) е константа по отношение на x в интервала (a, b) при всяко фиксирано y от интервала (c, d), т. е. че тя фактически не зависи от x, а е функция само на y.

Обикновено при решаването на конкретни задачи от този вид интегралът (5) се записва като неопределен интеграл, тъй като това не довежда до никаква неяснота.

Пример. Да се намери функцията $\Phi(x, y)$, пораждаща пълния диференциал

$$(8) \qquad (x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy.$$

Полагаме

$$P(x, y)=x^3+3xy^2, \quad Q(x, y)=y^3+3x^2y$$

---

* По-подробно това става така. Нека допуснем, че $x>x_0$, и нека y_0 е една произволна точка от интервала (c, d). Избираме $\delta>0$ така, че интервалът $[y_0-\delta, y_0+\delta]$ да се съдържа изцяло в интервала (c, d), и разглеждаме функцията $P(t, y)$ в затворения правоъгълник, определен от неравенствата

$$x_0\leqq t\leqq x, \quad y_0-\delta\leqq y\leqq y_0+\delta.$$

Този правоъгълник лежи изцяло в D, поради което по отношение на него са изпълнени условията на теоремата за диференциране под знака на интеграла. Това ни позволява да извършим в интеграла (5) диференциране относно y в точката y_0. Но тъй като y_0 бе взето произволно от интервала (c, d), то това важи за всички точки от този интервал.

Случаят, когато $x<x_0$, се разглежда по същия начин. Що се отнася до случая $x=x_0$, то той е по-прост, тъй като тогава равенството (6) се получава, без изобщо да се прибягва към диференциране под знака на интеграла.

и виждаме, че условието (4) е изпълнено. Следователно търсената функция $\Phi(x, y)$ сигурно съществува. Съгласно описания метод за нейното намиране ще имаме

$$\Phi(x, y)=\int(x^3+3xy^2)\,dx+\psi(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\psi(y).$$

Ще диференцираме това равенство относно y и ще вземем пред вид, че

$$\Phi_y'(x, y)=Q(x, y).$$

Тогава ще получим

$$y^3+3x^2y=3x^2y+\psi'(y)$$

или

$$\psi'(y)=y^3,$$

откъдето

$$\psi(y)=\frac{1}{4}y^4.$$

Следователно

$$\Phi(x, y)=\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2. \tag{9}$$

Лесно е да се провери, че така намерената функция $\Phi(x, y)$ действително поражда дадения пълен диференциал.

Като използуваме получения резултат, нека пресметнем например криволинейния интеграл

$$\int_L[(x^3+3xy^2)\,dx+(y^3+3x^2y)\,dy], \tag{10}$$

където L е някаква гладка крива, свързваща точките $(-1, 1)$ и $(3, 0)$. Тъй като изразът (8), който стои под интеграла, представлява, както вече видяхме, пълният диференциал на функцията $\Phi(x, y)$, даваща се с равенството (9), то съгласно формулата (3) от § 102 стойността на интеграла (10) ще бъде

$$\Phi(3, 0)-\Phi(-1, 1)=\frac{81}{4}-2=\frac{74}{4}.$$

Упражнения. Пресметнете следните криволинейни интеграли, взети върху произволна гладка крива L, свързваща посочените две точки, като предварително покажете, че под интеграла стои навсякъде пълен диференциал, и намерите съответната функция, пораждаща този диференциал:

1. $\int_L[(2x+3y)\,dx+(3x-4y)\,dy]$, където L свързва точките $(0, 0)$ и $(2, 4)$.

   Отг. -4.

2. $\int_L(2y\sin x\,dx-\cos 2x\,dy)$, където L свързва точките $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$.

   Отг. $\frac{1}{2}$.

3. $\int [yxe^x\,dx+(x-1)e^x\,dy]$, където L свързва точките (0, 1) и (1, 2).

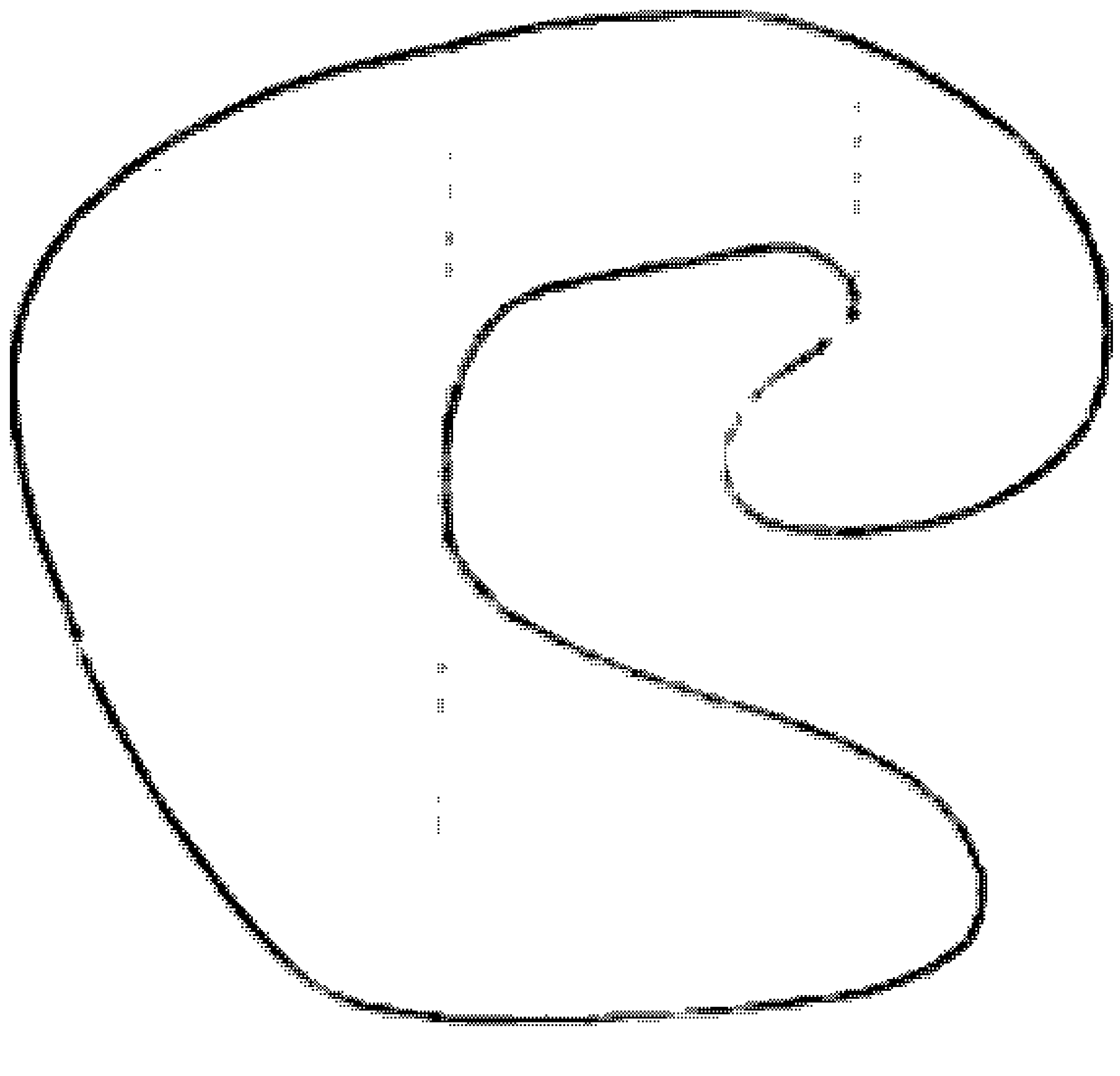
Отг. 1.

§ 104. Формула на Грин

Забележителната формула на Грин дава една връзка между понятията криволинеен и двоен интеграл.

За удобство ние ще наричаме една област в равнината нормално разположена относно оста Ox, ако нейният контур представлява проста затворена крива и ако тя може да бъде разделена с помощта на отсечки, успоредни на оста Oy, на краен брой подобласти, представляващи криволинейни трапеци, нормално разположени относно оста Ox, всеки два от които или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки. (На черт. 113 е показана една такава област, която е разделена на пет криволинейни трапеца.)

Аналогично една област ще наричаме нормално разположена относно оста Oy, когато контурът ѝ е проста затворена крива и когато тя може да бъде разделена посредством отсечки, успоредни на оста Ox, на краен брой криволинейни трапеци, нормално разположени относно оста Oy.



Черт. 113

Когато една област в равнината е нормално разположена както относно оста Ox, така и относно оста Oy, ще я наричаме нормално разположена в равнината. Именно за такива области се отнася и формулата на Грин, която се основава на следната

Теорема. *Нека R е една затворена област, нормално разположена относно оста Ox, и нека функцията $P(x, y)$ е непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $P_y'(x, y)$ в някаква отворена област D, съдържаща R. Ако с L е означен контурът на R, описан в положителна посока, то*

$$(1)\qquad \int_L P(x, y)\,dx = -\iint_R P_y'(x, y)\,dx\,dy.$$

Ако пък областта R е нормално разположена относно оста Oy, а Q(x, y) е функция, която е непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $Q_x'(x, y)$ в D, то

$$(2)\qquad \int_L Q(x, y)\,dy = \int\int_R Q_x'(x, y)\,dx\,dy.$$

Доказателство. Нека най-напред R е криволинеен трапец, нормално разположен относно оста Ox, зададен с неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \qquad f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x).$$

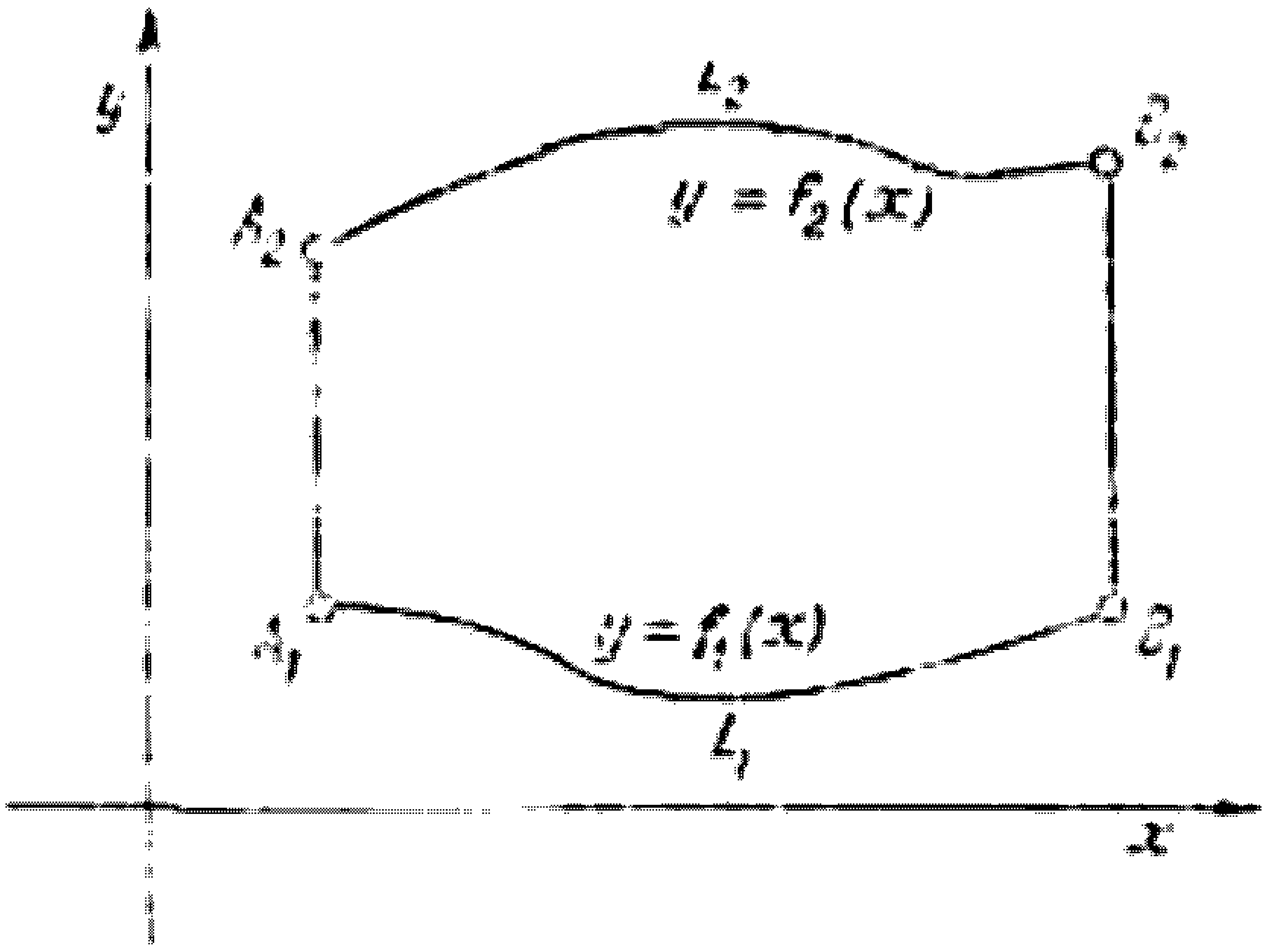
Тук $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са две функции, непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$.

Както знаем, имаме

$$(3)\qquad \int\int_R P_y'(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y'(x, y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]\,dx.$$

От друга страна, ако означим с L_1 графиката на функцията $y = f_1(x)$ а с L_2 графиката на функцията $y = f_2(x)$ и ако A_1 и B_1 са съответно началната и крайната точка на L_1, а A_2 и B_2 — началната и крайната точка на L_2 (черт. 114), то



Черт. 114

$$\int_L P(x, y)\,dx = \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x, y)\,dx + \int_{B_1B_2} P(x, y)\,dx +$$

$$+ \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x, y)\,dx + \int_{A_2A_1} P(x, y)\,dx.$$

Като вземем пред вид, че отсечките B_1B_2 и A_2A_1 са успоредни на оста Oy, и като използуваме за кривите L_1 и L_2 параметрични уравнения от типа на уравненията (12) от § 98, получаваме

$$\begin{aligned}\int_L P(x,\ y)\,dx &= \int_{L_1} P(x,\ y)\,dx - \int_{L_2} P(x,\ y)\,dx \\ &= \int_a^b P(x,\ f_1(x))\,dx - \int_a^b P(x,\ f_2(x))\,dx.\end{aligned} \tag{4}$$

Равенствата (3) и (4) ни дават равенството (1), което по този начин е доказано за случая, когато R е криволинеен трапец, разположен нормално относно оста Ox.

Нека сега R е произволна област, нормално разположена относно оста Ox. Като я разделим на криволинейни трапеци $R_1, R_2, \dots, R_n$, ще имаме, от една страна,

$$\begin{aligned}\iint_R P_y'(x,\ y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} P_y'(x,\ y)\,dx\,dy + \cdots + \\ + \iint_{R_n} P_y'(x,\ y)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{5}$$

От друга страна, ако с L_i означим контура на областта R_i, описан в положителна посока, ще имаме за всяко i (където $i=1, 2, \dots, n$) съгласно формулата (1) за криволинеен трапец

$$\int_{L_i} P(x,\ y)\,dx = -\iint_{R_i} P_y'(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

Всеки от интегралите

$$\int_{L_i} P(x,\ y)\,dx$$

може да бъде представен като сума от няколко криволинейни интеграла, едни от които са взети върху отсечки, успоредни на оста Oy, и следователно са равни на нула, а други — върху части от контура L на областта R, и то в посока, съвпадаща с положителната посока на описване на затворената крива L. Ето защо ще имаме

$$\int_{L_1} P(x,\ y)\,dx + \cdots + \int_{L_n} P(x,\ y)\,dx = \int_L P(x,\ y)\,dx. \tag{7}$$

Като съберем равенствата (6), където $i=1, 2, \dots, n$, и вземем пред вид (5) и (7), получаваме отново равенството (1), сега вече доказано за всяка област R, нормално разположена относно оста Ox.

По аналогичен начин се установява и равенството (2), отнасящо се за области R, нормално разположени относно оста Oy.

Най-сетне, *когато R е една област, нормално разположена в равнината, чрез събиране на равенствата* (1) *и* (2) *получаваме*

$$(8)\qquad \int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] = \iint_R [Q_x'(x, y) - P_y'(x, y)]\,dx\,dy,$$

което и представлява именно т. нар. формула на Грин.

ДОПЪЛНЕНИЕ

РЕАЛНИ ЧИСЛА

В основата на нашия курс по математически анализ лежи понятието реално число. Основните свойства на реалните числа бяха изброени в уводната част на настоящия учебник. Сега си поставяме за задача да покажем как може да бъде построено множеството на реалните числа, предполагайки, че читателят познава добре множеството на рационалните числа. (Да припомним, че рационални наричаме ония числа, които могат да се представят като частно на две цели числа.)

И така ще считаме, че разполагаме с множеството на рационалните числа и познаваме техните свойства. Използувайки тези числа, тъй да се каже, като градивен материал, ние ще построим някакви нови обекти, които също ще наречем числа — реални числа. Отъждествявайки някои от така построените реални числа с известните ни от по-рано рационални числа, ще можем да разглеждаме множеството на реалните числа като едно разширение на множеството на рационалните числа. Същевременно ще видим, че множеството на реалните числа наистина притежава всички онези свойства, които бяха изброени в уводната част на курса. Разбира се, можем да си спестим проверката на ония свойства, които се отнасят само до естествените, целите или рационалните числа, тъй като ще считаме, че тези свойства, както вече казахме, са известни от по-рано.

Построяването на множеството на реалните числа, извършено, като се тръгне от множеството на рационалните числа, може да бъде осъществено по различни начини. Методът, който ще използуваме за целта, е известен под името метод на Дедекинд.

§ 1. Дефиниция на реално число

За две непразни множества A и B от рационални числа ще казваме, че образуват *база на реално число* или просто *база*, ако те притежават следните свойства:

1) за всяко число a от A и за всяко число b от B имаме $a \leqq b$;

2) при всеки избор на положителното (рационално) число ε съществуват такова число a от A и такова число b от B, че $b-a<\varepsilon$.

Когато две множества A и B от рационални числа образуват база на реално число, ще изразяваме това, като въведем за тази база означението (A, B). Ще считаме, че всяка база (A, B) представя едно реално число α, и ще пишем $\alpha=(A, B)$. Множеството A ще наречем **ляво**, а множеството B — **дясно множество** на базата (A, B).

Ще дадем сега следната дефиниция:

Ще казваме, че две бази (A, B) и (A', B') са **еквивалентни** помежду си, и ще пишем $(A, B)=(A', B')$, ако от

$$a \in A,\quad b \in B,\quad a' \in A',\quad b' \in B'$$

следва, че

$$a \leqq b' \quad \text{и} \quad a' \leqq b.$$

За да имаме обаче правото да пишем знака „=“ между две еквивалентни бази, трябва да покажем, че ако (A, B), (A', B'), (A'', B'') са три бази и ако $(A, B)=(A', B')$, $(A, B)=(A'', B'')$, то $(A', B')=(A'', B'')$. Да допуснем, че последното равенство не е изпълнено. Тогава или ще съществуват числа a' от A' и b'' от B'', такива, че $a'>b''$, или ще съществуват числа a'' от A'' и b' от B', такива, че $a''>b'$. Да разгледаме първия от тези два случая (вторият се разглежда аналогично). Тъй като числото $\varepsilon=a'-b''$ в този случай е положително, то съгласно свойство 2) от дефиницията на база ще съществуват числа a от A и b от B, такива, че $b-a<\varepsilon$.
Но от равенството $(A, B)=(A', B')$ следва, че $a'\leqq b$, а от равенството $(A, B)=(A'', B'')$ — че $a\leqq b''$. Така получаваме

$$b-a<a'-b''\leqq b-a,$$

т. е. $b-a<b-a$. Полученото противоречие показва, че $(A', B')=(A'', B'')$.

Ще считаме, че всички еквивалентни помежду си бази представят едно и също реално число. Ако например (A, B) и (A', B') са две еквивалентни помежду си бази, те представят едно и също число α и ние можем да пишем $\alpha=(A, B)$ или пък $\alpha=(A', B')$. По този начин вече сме построили множеството на реалните числа.[*]

Когато ни е дадена една база (A, B), има две възможности: или съществува едно рационално число r, такова, че за всяко a от A е изпълнено неравенството $a\leqq r$, а за всяко b от B — неравенството $r\leqq b$ (т. е. такова число r, което се намира, така да се каже, между множествата A и B), или пък такова число r не съществува. Ще видим веднага с примери, че тези два случая наистина се срещат. В първия случай ще казваме, че базата (A, B) е рационална и че тя представя едно рационално число — именно онова рационално число r, което удовлетворява посочените по-горе неравенства. Във втория случай ще казваме, че базата (A, B) е ирационална и че тя представя едно ирационално число.

Необходимо е при това да отбележим, че когато една база (A, B) е рационална, тя представя едно единствено рационално число r, т. е. че не е възможно да съществуват две различни рационални числа r и r', удовлетворяващи едновременно неравенствата $a\leqq r$ и $a\leqq r'$ за всички числа a от A и неравенствата $b\geqq r$ и $b\geqq r'$ за всички b от B. Наистина, ако това би било възможно и ако например $r<r'$, то при всеки избор на числата a от A и b от B бихме имали $b-a\geqq r'-r$, което противоречи на свойството 2) от дефиницията на база.

Също така е необходимо да знаем, че ако една база (A, B) представя едно рационално число r, то всяка еквивалентна на нея база (A', B') представя същото рационално число r. Но ако това не е така, то или ще съществува число a_0' от A', за което $a_0'>r$, или ще съществува число b_0' от B', за което $b_0'<r$. Да разгледаме първия от тези два случая (във втория случай се разсъждава аналогично). Тогава от неравенството $a\leqq r$, валидно за всяко a от A, и от неравенството $b\geqq a_0'$, изпълнено за всяко b от B, ще следва, че неравенството $b-a\geqq a_0'-r$ е в сила при всеки избор на числата a от A и b от B, което отново противоречи на свойството 2) от дефиницията на база.

Ще посочим сега примери за рационални и ирационални бази. Нека r е рационално число. То може да бъде представено по различни начини чрез база на реално число. Ето няколко примера за такова представяне:

1) множеството A се състои от числата от вида $r-\frac{1}{n}$, а множеството B — от числата от вида $r+\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$;

---

[*] За читателя, привикнал към по-абстрактни разсъждения и запознат с понятието релация на еквивалентност, ще отбележим следното. Въведеното по-горе понятие еквивалентност между две бази представлява наистина една релация на еквивалентност — рефлексивността и симетричността на тази релация са очевидни, а нейната транзитивност бе току-що установена. Вместо да казваме, че еквивалентните помежду си бази „представят“ едно реално число, по-добре би било, разбира се,

2) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a<r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b>r$;

3) множеството A е съставено от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a \leq r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b>r$;

4) множеството A е съставено от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a<r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b \geq r$;

5) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a \leq r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b \geq r$;

6) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a<r$, а множеството B — от единственото число r;

7) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a \leq r$, а множеството B — от единственото число r;

8) множеството A се състои от единственото число r, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b>r$;

9) множеството A се състои от единственото число r, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b \geq r$;

10) множеството A се състои от единственото число r, а множеството B — също от единственото число r.

Читателят би могъл сам да продължи този списък от различни начини за построяване на бази, представящи дадено рационално число r. В същност лесно се разбира, че тези различни начини са безбройно много. Измежду всички еквивалентни помежду си бази, представящи дадено рационално число r, ще отбележим една специална — онази, която поставихме на последно място в посочените току-що примери и при която както лявото множество A, така и дясното множество B се състоят от единственото число r. Тази база, която е в известен смисъл най-проста от всички възможни, ще наричаме **стандартна база** на числото r.

Нека сега разгледаме пример на ирационална база. Да означим с A множеството от всички положителни рационални числа a, за които $a^2<2$, а с B — множеството от ония положителни рационални числа b, за които $b^2>2$. Да се убедим най-напред в това, че множествата A и B образуват база. Свойството 1) от дефиницията на база е очевидно изпълнено. За да проверим свойството 2), да вземем едно произволно положително рационално число ε, а след това едно такова естествено число n, че $\frac{1}{n}<\varepsilon$, и да разгледаме числата от вида $1+\frac{i}{n}$, където $i=0, 1, 2, \ldots, n$. Тъй като тези числа са рационални, квадратът на всяко от тях е или по-малък, или по-голям от 2 (както знаем, не съществува рационално число, чийто квадрат е 2), т. е. всяко от тях принадлежи или на A, или на B. При това първото от тези числа — числото 1, очевидно принадлежи на A, а последното — числото 2, на множеството B. Нека $1+\frac{k}{n}$ е най-голямото от числата $1+\frac{i}{n}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, което принадлежи на множеството A. Тогава $k \leq n-1$ и числото $1+\frac{k+1}{n}$ принадлежи на B. Но

$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

С това и свойството 2) е установено. И така множествата A и B образуват база.

Да допуснем, че така построената база (A, B) представя някое рационално число r. За числото r (което очевидно е положително) имаме две възможности — или $r^2<2$, или $r^2>2$ (равенството $r^2=2$, както знаем, е невъзможно). Нека разгледаме най-напред случая $r^2<2$. Да изберем положителното рационално число h по такъв начин,

---

да се каже, че реалните числа — това са просто класовете на еквивалентност, на които с помощта на тази релация за еквивалентност се разпада множеството от всички бази.

че $(r+h)^2<2$. Това е възможно, тъй като желаното неравенство

$$r^2+2rh+h^2<2$$

ще бъде удовлетворено, ако вземем $h<1$ и освен това си осигурим неравенството

$$r^2+2rh+h<2,$$

което пък е равносилно с неравенството

$$h<\frac{2-r^2}{2r+1}.$$

Тъй като в дясната страна на последното неравенство стои положително число (поради неравенството $r^2<2$), ясно е, че то може да бъде удовлетворено. Но числото $r+h$ ще принадлежи тогава на множеството A и следователно трябва да удовлетворява неравенството $r+h\leqq r$, което е невъзможно, понеже $h>0$. И така случаят $r^2<2$ е невъзможен.

Да разгледаме случая $r^2>2$. Да потърсим сега такова положително рационално число h_1, че да имаме $(r-h_1)^2>2$, или все едно

$$r^2-2rh_1+h_1^2>2.$$

Това неравенство сигурно ще бъде изпълнено, ако

$$r^2-2rh_1>2.$$

Последното неравенство пък е равносилно с неравенството

$$h_1<\frac{r^2-2}{2r},$$

което (поради условието $r^2>2$) очевидно може да бъде удовлетворено за някое положително число h_1. Тогава числото $r-h_1$ ще принадлежи на множеството B и следователно ще удовлетворява неравенството $r-h_1\geqq r$. Това обаче противоречи на неравенството $h_1>0$. И така случаят $r^2>2$ е също невъзможен. Всичко това показва, че нашето допускане, според което базата (A, B) е рационална, е погрешно. Следователно тази база е ирационална — тя представя едно ирационално число. (Читателят се досеща, разбира се, че това е числото $\sqrt{2}$.)

Реалните числа ние разделихме на две категории: рационални — които се представят посредством рационални бази, и ирационални — които се представят от ирационални бази. Както вече отбелязахме, всяко рационално число r може да бъде представено посредством някоя база (фактически посредством безброй много еквивалентни помежду си бази), т. е. всяко рационално число r поражда, така да се каже, едно реално (или, ако се изразим с горната терминология, едно рационално реално) число. Ще отъждествим рационалното число r с породеното от него реално число и ще бележим това реално число също с r, т. е. ако (A, B) е една база, представяща рационалното число r, ще пишем $r=(A, B)$. По такъв начин ще разглеждаме множеството от рационалните числа като част от множеството на реалните числа. При това множеството на реалните числа, както вече се убедихме, е едно истинско разширение на множеството на рационалните числа — то не само съдържа в себе си всички рационални числа, но съдържа и такива числа, които не са рационални и които нарекохме ирационални.*

---

* Във връзка с въведената дефиниция на понятието реално число нека забележим следното: Колкото и сложна да изглежда на пръв поглед идеята, според която едно реално число се представя с помощта на безбройно много различни (но еквивалентни помежду си) бази, тази идея не би трябвало да се схваща от читателя като съ-

Тъй като в по-нататъшното изложение ще срещаме както рационални числа, разбирани в стария смисъл, така и рационални реални числа, ние, макар че обикновено няма да правим разлика между тези две понятия, когато все пак се налага да ги различим, ще означаваме първото от тях с термина *аритметично рационално число*, а второто — с термина *реално рационално число*.

§ 2. Сума и разлика на реални числа

Нека $\alpha_1=(A_1, B_1)$ и $\alpha_2=(A_2, B_2)$ са две реални числа. Да означим с A множеството на всички аритметични рационални числа, имащи вида a_1+a_2, където $a_1\in A_1$, а $a_2\in A_2$, а с B — множеството на всички аритметични рационални числа от вида b_1+b_2, където $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$. Лесно се вижда, че множествата A и B образуват база. Наистина от неравенствата $a_1\leqq b_1$, $a_2\leqq b_2$ следва неравенството $a_1+a_2\leqq b_1+b_2$. Освен това, ако ε е произволно положително (аритметично рационално) число, ще съществуват a_1 от A_1 и b_1 от B_1, такива, че $b_1-a_1<\frac{\varepsilon}{2}$, и също тъй ще съществуват a_2 от A_2 и b_2 от B_2, такива, че $b_2-a_2<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогава $(b_1+b_2)-(a_1+a_2)<\varepsilon$. Числото $\alpha=(A, B)$ ще наречем по дефиниция *сума* на числата α_1 и α_2 и ще пишем

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \quad \text{или} \quad (A, B)=(A_1, B_1)+(A_2, B_2).$$

Преди всичко необходимо е да се убедим, че дадената дефиниция на сума на две реални числа е коректна, т. е. че тя не зависи от избора на базите, с които сме си послужили за представянето на тези две числа. Наистина, ако

$$(A_1, B_1)=(A_1', B_1'), \qquad (A_2, B_2)=(A_2', B_2'), \tag{1}$$

то

$$(A_1, B_1)+(A_2, B_2)=(A_1', B_1')+(A_2', B_2'). \tag{2}$$

Това се вижда веднага, тъй като при $a_1\in A_1$, $b_1\in B_1$, $a_1'\in A_1'$, $b_1'\in B_1'$, $a_2\in A_2$, $b_2\in B_2$ ($a_2'\in A_2'$, $b_2'\in B_2'$ неравенствата $a_1\leqq b_1'$, $a_1'\leqq b_1$, $a_2\leqq b_2'$, $a_2'\leqq b_2$, които са в сила поради равенствата (1), осигуряват неравенствата

$$a_1+a_2\leqq b_1'+b_2' \quad \text{и} \quad a_1'+a_2'\leqq b_1+b_2,$$

които пък означават, че е в сила равенството (2).

Да отбележим още, че, както не е трудно да се види, в случая на рационални реални числа въведената дефиниция на сума води до същия резултат, до който стигаме при събирането на аритметичните рационални числа, т. е. че ако r_1 и r_2 са две аритметични рационални числа и $r_1+r_2=r$ и ако, от друга страна,

$$r_1=(A_1, B_1), \quad r_2=(A_2, B_2), \tag{3}$$

то

$$r=(A_1, B_1)+(A_2, B_2). \tag{4}$$

вършено нова за него. И същност по подобен начин стоят нещата и при дефиницията на рационалните числа. Това, че например дробите $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ и т. н. са равни помежду си, фактически означава, че едно рационално число е представено посредством безбройно много различни двойки цели числа. Разбира се, при реалните числа случаят е все пак по-сложен, тъй като базата на едно реално число вече не е двойка числа, а двойка множества, всяко от които се състои от едно или повече (в общия случай безбройно много) рационални числа.

Наистина поради равенствата (3) при $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$ ще имаме винаги

$$a_1 \leqq r_1 \leqq b_1, \quad a_2 \leqq r_2 \leqq b_2,$$

откъдето получаваме

$$a_1 + a_2 \leqq r_1 + r_2 \leqq b_1 + b_2,$$

а оттук следва равенството (4).

Като вземем пред вид, че за аритметичните рационални числа са валидни комутативният и асоциативният закон, лесно е да се убедим (ще предоставим тук подробните разсъждения на читателя), че тези закони остават в сила и за реалните числа. Комутативният закон, както е известно, се изразява с равенството

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1,$$

а асоциативният — с равенството

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3),$$

валидни при всеки избор на реалните числа α_1, α_2, α_3. Асоциативният закон ни дава възможност да дефинираме понятието сума (посредством метода на пълната математична индукция) не само за две, а за произволен краен брой събираеми.

Нека сега $\alpha = (A, B)$ е никакво произволно взето реално число. Да означим с B^- множеството на всички числа от вида $-b$, където $b \in B$, а с A^- — множеството на всички числа от вида $-a$, където $a \in A$, и да проверим, че двойката (B^-, A^-) е една база. Наистина от неравенството $a \leqq b$, валидно винаги когато $a \in A$, $b \in B$, следва неравенството $-b \leqq -a$. Ако $\varepsilon > 0$, то съществуват $a \in A$ и $b \in B$, такива, че $b - a < \varepsilon$. Но тогава ще имаме също $(-a) - (-b) < \varepsilon$. Реалното число, определено от базата (B^-, A^-), ще наречем противоположно на реалното число $\alpha = (A, B)$ и ще го бележим с $-\alpha$.

Лесно се съобразява (нека читателят сам извърши необходимите разсъждения), че:

а) дадената дефиниция на реалното число $-\alpha$ е коректна, т. е. не зависи от избора на базата, с която сме представили реалното число α;

б) за всяко рационално число r, разглеждано като реално число, неговото противоположно реално число $-r$ съвпада с онова, което се определя от аритметичното рационално число $-r$;

в) за всяко реално число α имаме $-(-\alpha) = \alpha$.

Също така лесно се вижда, че за всяко реално число е изпълнено равенството

$$(5) \qquad \alpha + (-\alpha) = 0.$$

Наистина нека $\alpha = (A, B)$. Съгласно дефиницията за сума на две реални числа ще получим една база (C, D) на реалното число $\alpha + (-\alpha)$, ако означим с C множеството, което се състои от всички числа, имащи вида $a - b$, а с D — множеството, състоящо се от числата от вида $b - a$, където $a \in A$, $b \in B$. Тъй като очевидно имаме винаги

$$a - b \leqq 0 \leqq b - a,$$

базата (C, D) представя рационалното число 0. И така равенството (5) е доказано.

Друго равенство, което съгласно нашата програма от уводната част на курса следва да бъде установено за всяко реално число α, е равенството

$$(6) \qquad \alpha + 0 = \alpha.$$

То обаче е очевидно, тъй като, ако $\alpha = (A, B)$ и ако съберем базата (A, B) със стандартната база, представяща числото 0, ще получим за сумата $\alpha + 0$ отново базата (A, B).

Сега вече можем да докажем и следното свойство на реалните числа: ако α и β са две реални числа, то съществува, и то едно единствено реално число ξ, удовлетворяващо равенството

$$(7) \qquad \alpha + \xi = \beta.$$

Бихме могли да се изразим също и така: съществува едно единствено решение на уравнението (7), в което α и β са две дадени реални числа, а ξ е неизвестно.

Наистина да поставим на мястото на ξ реалното число β+(−α). Ще имаме

$$\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0+\beta=\beta+0=\beta.$$

По този начин е показано, че реалното число β+(−α) е решение на уравнението (7). За да видим, че това уравнение няма други решения, нека означим с γ кое да е негово решение, т. е. нека α+γ=β. Тогава ще имаме

$$\begin{aligned}\gamma=\gamma+0&=\gamma+[\alpha+(-\alpha)]\\&=(\gamma+\alpha)+(-\alpha)\\&=(\alpha+\gamma)+(-\alpha)=\beta+(-\alpha).\end{aligned}$$

И така реалното число β+(−α) е единственото решение на уравнението (7). Това число ще означаваме за по-кратко с β−α и ще наричаме *разлика* на реалните числа β и α. Следователно можем да пишем

$$\alpha+(\beta-\alpha)=\beta.$$

От дефиницията на разлика непосредствено следва например, че за всяко реално число α имаме

$$\alpha-0=\alpha \quad \text{и} \quad 0-\alpha=-\alpha.$$

Лесно се вижда също, че ако α и β са две реални числа, то

$$-(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta)$$

и

$$-(\alpha-\beta)=\beta-\alpha.$$

§ 3. Нареждане на реалните числа.
Абсолютна стойност

Дадено реално число α=(A, B) ще наричаме по дефиниция положително и ще пишем α>0 или (A, B)>0, когато множеството A съдържа поне едно положително (аритметично рационално) число a. За да се убедим, че току-що дадената дефиниция е коректна, да допуснем, че (A, B)=(A₁, B₁) и че (A, B)>0. Тогава съществува такова a от A, за което имаме a>0. Съгласно свойството 2) от дефиницията на база ще съществуват такива a_1 от A_1 и b_1 от B_1, че $b_1-a_1<a$. Оттук получаваме $a_1>b_1-a$. Но поради равенството (A, B)=(A₁, B₁) ще имаме $a\leq b_1$, поради което заключаваме, че $a_1>0$. И така $(A_1, B_1)>0$. С това коректността на дефиницията на понятието положително реално число е установена.

Ще казваме, че реалното число α е отрицателно, и ще пишем α<0, когато имаме −α>0. Очевидно тази дефиниция е равносилна на следната: реалното число α=(A, B) ще наричаме отрицателно, когато множеството B съдържа поне едно отрицателно (аритметично рационално) число b.

От казаното е ясно, че противоположното на едно положително реално число е отрицателно и обратно. Ясно е също, че всяко различно от нула реално число е или положително, или отрицателно. Единствено числото 0 не е нито положително, нито отрицателно.

Когато са ни дадени две реални числа α и β, ще казваме, че α е по-голямо от β (или че β е по-малко от α), и ще пишем α>β или β<α тогава, когато реалното число α−β е положително.

Ясно е, че ако α≠β, то сигурно α>β или β>α. По такъв начин реалните числа могат да се сравняват по големина. Това имаме пред вид, когато казваме, че в множеството на реалните числа е въведено едно *нареждане* или че това множество е *наредено*.

С цел да придадем на дефиницията на неравенството α>β такава форма, която да бъде по-удобна за работа, да предположим, че α=(A, B), β=(C, D). Като си спомним дефиницията на разлика на две числа, виждаме, че реалното число α−β може да бъде представено чрез една база, първото множество на която се състои от всички числа от вида $a-d$, където $a\in A$, $d\in D$. Тогава, вземайки пред вид дефиницията на положително реално число, можем да изкажем следното правило: ако α=(A, B) и β=(C, D), то неравенството $\alpha > \beta$ означава, че съществуват поне едно a от A и поне едно d от D, такива, че $a > d$.

С помощта на изказаното правило може лесно да се покаже, че:

ако $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$;
ако $\alpha < \beta$ и $\gamma < \delta$, то $\alpha + \gamma < \beta + \delta$;
ако $\alpha < \beta$, то $-\alpha > -\beta$.

Ще казваме, че за две реални числа α и β е изпълнено нестрогото неравенство $\alpha \leqq \beta$, когато имаме или $\alpha < \beta$, или $\alpha = \beta$. Нека $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$. Спомняйки си дефиницията на равенството $(A, B) = (C, D)$ и на строгото неравенство $(A, B) < (C, D)$, можем да заключим, че нестрогото неравенство $\alpha \leqq \beta$, или $(A, B) \leqq (C, D)$, е равносилно с изискването за всяко a от A и за всяко d от D да е изпълнено неравенството $a \leqq d$.

От последната бележка непосредствено следва, че ако $\alpha \leqq \beta$ и $\alpha \geqq \beta$, то $\alpha = \beta$.

Без труд се проверява също, че:

ако $\alpha \leqq \beta$ и $\beta \leqq \gamma$, то $\alpha \leqq \gamma$;
ако $\alpha \leqq \beta$ и $\gamma \leqq \delta$, то $\alpha + \gamma \leqq \beta + \delta$;
ако $\alpha \leqq \beta$, то $-\alpha \geqq -\beta$.

Когато едното от двете реални числа, които сравняваме, е рационално, дадените по-горе дефиниции за неравенства могат малко да се опростят. А именно ако $\alpha = (A, B)$ е едно реално, а r — едно рационално число, то неравенството $\alpha > r$ е равносилно с изискването да съществува такова a от A, за което да имаме $a > r$, а неравенството $\alpha < r$ — с изискването за някое b от B да имаме $b < r$. Нестрогото пък неравенство $\alpha \leqq r$ означава, че имаме $a \leqq r$ за всяко a от A, а нестрогото неравенство $\alpha \geqq r$ — аналогично, че имаме $b \geqq r$ за всяко b от B. Оттук между другото следва, че ако $\alpha = (A, B)$, то

$$a \leqq \alpha \leqq b$$

за всяко a от A и за всяко b от B.

Най-сетне, ако r_1 и r_2 са две реални рационални числа, то неравенството $r_1 < r_2$ (както и нестрогото неравенство $r_1 \leqq r_2$) очевидно е изпълнено тогава и само тогава, когато то е изпълнено между тях, разглеждани като аритметични рационални числа.

По-голямото от числата α и $-\alpha$ наричаме *абсолютна стойност* на числото α и го бележим с $|\alpha|$. Ясно е, че винаги $|\alpha| \geqq 0$, като при това $|\alpha| > 0$, ако $\alpha \neq 0$. От друга страна, $|0| = 0$.

Нека α и β са две реални числа. От неравенствата

$$\alpha \leqq |\alpha| \quad \text{и} \quad \beta \leqq |\beta|$$

следва, че

$$\alpha + \beta \leqq |\alpha| + |\beta|,$$

а от неравенствата

$$-\alpha \leqq |\alpha| \quad \text{и} \quad -\beta \leqq |\beta|$$

следва неравенството

$$-(\alpha + \beta) \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

Оттук получаваме важното неравенство

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

От равенството пък

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

следва

$$|\alpha| \leqq |\alpha - \beta| + |\beta|,$$

откъдето получаваме

$$|\alpha - \beta| \geqq |\alpha| - |\beta|.$$

§ 4. Произведение и частно на реални числа

Като си спомним дефиницията за база на реално число, както и тази за еквивалентност на две бази, лесно можем да се убедим (подробностите предоставяме на читателя) във верността на следното твърдение:

Нека (A, B) е база и нека $a'\in A$, $b'\in B$. Ако A' е множеството от всички числа a от A, удовлетворяващи неравенството $a\geqq a'$, а B' — множеството от всички b от B, които удовлетворяват неравенството $b\leqq b'$, то двойките множества (A', B), (A, B') и (A', B') са също бази и при това бази, еквивалентни на базата (A, B).

Ако $\alpha=(A, B)$ е едно положително реално число, то, избирайки числото a', за което се говори в горното твърдение, по такъв начин, че да имаме $a'>0$, можем да получим една база (A', B), която представя същото реално число α, но която има още следното свойство — както нейното ляво, така и нейното дясно множество се състоят само от положителни числа. Такава база ще наричаме положително редуцирана. И така всяко положително реално число притежава поне една положително редуцирана база.

Нека сега $\alpha_1=(A_1, B_1)$ и $\alpha_2=(A_2, B_2)$ са две положителни реални числа, представени с някои свои положително редуцирани бази. Да означим с A множеството на всички числа от вида a_1a_2, където $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, а с B — множеството на всички числа от вида b_1b_2, където $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$. Нека проверим сега, че множествата A и B образуват база. Като вземем пред вид, че (A_1, B_1) и (A_2, B_2) бяха положително редуцирани бази, веднага виждаме, че от неравенствата $a_1\leqq b_1$, $a_2\leqq b_2$ следва неравенството $a_1a_2\leqq b_1b_2$, с което свойството 1) от дефиницията на база е проверено. За да проверим свойството 2), да вземем едно произволно положително (аритметично рационално) число ε и да фиксираме след това (също по произволен начин) едно число b_1' от B_1 и едно число b_2' от B_2. За положителното число $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{b_1'+b_2'}$ ще съществуват числа a_1 от A_1, b_1 от B_1, a_2 от A_2 и b_2 от B_2, такива, че $b_1-a_1<\varepsilon'$ и $b_2-a_2<\varepsilon'$. При това можем очевидно да считаме, че $b_1\leqq b_1'$.

Тогава

$$b_1b_2-a_1a_2=b_1b_2-b_1a_2+b_1a_2-a_1a_2$$

$$=b_1(b_2-a_2)+a_2(b_1-a_1)<b_1'\varepsilon'+b_2'\varepsilon'=\varepsilon'(b_1'+b_2')=\varepsilon.$$

И така множествата A и B наистина образуват база. Реалното число $\alpha=(A, B)$ ще наречем по дефиниция *произведение* на числата $\alpha_1=(A_1, B_1)$ и $\alpha_2=(A_2, B_2)$ и ще пишем

$$\alpha=\alpha_1\alpha_2, \qquad \text{или} \qquad (A, B)=(A_1, B_1)(A_2, B_2).$$

Не е трудно да се убедим, че току-що дадената дефиниция е коректна, т. е. че тя не зависи от специалния избор на базите (A_1, B_1) и (A_2, B_2), стига те да са положително редуцирани. Наистина нека $(A_1, B_1)=(A_1', B_1')$ и $(A_2, B_2)=(A_2', B_2')$, като при това и четирите бази, които участвуват в тези равенства, са положително редуцирани. Ако $a_1\in A_1$, $b_1\in B_1$, $a_1'\in A_1'$, $b_1'\in B_1'$, $a_2\in A_2$, $b_2\in B_2$, $a_2'\in A_2'$, $b_2'\in B_2'$, то от дефиницията за равенство на две бази ще следва, че

$$a_1\leqq b_1', \qquad a_1'\leqq b_1, \qquad a_2\leqq b_2', \qquad a_2'\leqq b_2,$$

откъдето ще получим

$$a_1a_2\leqq b_1'b_2', \qquad a_1'a_2'\leqq b_1b_2.$$

А това означава, че е в сила равенството

$$(A_1, B_1)(A_2, B_2)=(A_1', B_1')(A_2', B_2').$$

Нека отбележим веднага, че ако r_1 и r_2 са две рационални положителни реални числа, то произведението им, построено съгласно горната дефиниция, съвпада, както веднага се вижда, с реалното число, породено от аритметичното рационално число r_1r_2.

(За да се убедим и това, достатъчно е да представим тези две рационални числа посредством техните стандартни бази.)

Също така лесно се установява, че:

ако $0<\alpha<\beta$ и $0<\gamma<\delta$, то $\alpha\gamma<\beta\delta$,
ако $0<\alpha\leqq\beta$ и $0<\gamma\leqq\delta$, то $\alpha\gamma\leqq\beta\delta$.

След като разполагаме с дефиницията за произведение на две положителни реални числа, произведението на две произволни реални числа ще дефинираме по следния начин:

$$(1) \qquad \alpha\beta=\begin{cases} |\alpha|.|\beta|, \text{ ако } \alpha>0,\ \beta>0 \text{ или } \alpha<0,\ \beta<0; \\ -(|\alpha|.|\beta|), \text{ ако } \alpha>0,\ \beta<0 \text{ или } \alpha<0,\ \beta>0; \\ 0, \text{ ако } \alpha=0 \text{ или } \beta=0. \end{cases}$$

От тази дефиниция следва веднага, че за всеки две реални числа α и β имаме

$$|\alpha\beta|=|\alpha|.|\beta|.$$

Лесно може да се види, че за произведението на реални числа остават в сила комутативният и асоциативният закон, изразени чрез равенствата

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

и

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

Най-напред тези две равенства се установяват в случая, когато всички участвуващи в тях реални числа са положителни (в този случай те се явяват следствие от факта, че комутативният, съответно асоциативният закон е в сила за произведението на аритметични рационални числа), а след това общата им валидност се проверява въз основа на дефиниционното равенство (1). Нека споменем още, че асоциативният закон ни позволява да говорим за произведение не само на две, но и на произволен краен брой реални числа.

Валиден е също и т. нар. дистрибутивен закон, изразяващ се с равенството

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

Той може да бъде установен най-напред в случая, когато $\alpha>0$ и $\beta, \gamma>0$ въз основа на дистрибутивния закон при аритметичните рационални числа, и след това в общия случай с помощта на дефиниционното равенство (1).

Нека сега отново $\alpha=(A, B)$ е едно положително реално число и базата (A, B) е положително редуцирана. Ще означим с B^* множеството на всички аритметични рационални числа, имащи вида $\frac{1}{b}$, където $b\in B$, а с A^* — множеството на всички аритметични рационални числа от вида $\frac{1}{a}$, където $a\in A$. Лесно се вижда, че двойката (B^*, A^*) е една база на реално число. Наистина от неравенството $a\leqq b$ следва (тъй като $a>0$) неравенството $\frac{1}{b}\leqq\frac{1}{a}$ и с това е проверено свойство 1) от дефиницията на база. За да проверим свойството 2), нека вземем едно произволно положително аритметично рационално число ε и нека освен това означим с a_0 едно такова положително аритметично рационално число, което принадлежи на A. След това да вземем такова число a от A и b от B, че $b-a<\varepsilon a_0^2$. Можем при това да считаме, че $a\geqq a_0$. Но тогава

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<\frac{\varepsilon a_0^2}{a_0^2}=\varepsilon.$$

И така двойката (B^*, A^*) е база на едно реално число (което при това е очевидно положително). Това число ще наречем обратно на положителното реално число $\alpha=(A, B)$ и ще го бележим с $\frac{1}{\alpha}$.

Лесно се вижда (отново ще предоставим на читателя сам да се увери в това), че дадената дефиниция на реалното число $\frac{1}{\alpha}$ е коректна, т. е. че тя не зависи от избора на базата (A, B), с помощта на която сме представили положителното реално число α (стига тази база да е положително редуцирана).

Ако α е едно отрицателно реално число, то неговото обратно число $\frac{1}{\alpha}$ ще дефинираме с равенството

$$\frac{1}{\alpha} = -\left(\frac{1}{-\alpha}\right).$$

Очевидно обратното на едно отрицателно реално число е също отрицателно. За числото 0 не дефинираме обратно число.

Читателят лесно ще установи, че когато r е рационално реално число, различно от 0, неговото обратно реално число съвпада с онова, което се определя от аритметичното рационално число $\frac{1}{r}$.

Също така лесно се показва, че за всяко реално число $\alpha \neq 0$ имаме

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha$$

и че ако $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}.$$

Нека да установим сега, че ако $\alpha \neq 0$, винаги имаме

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = 1. \tag{2}$$

Най-напред ще разгледаме случая, когато $\alpha > 0$. Ако $\alpha = (A, B)$, където (A, B) е някоя положително редуцирана база, то, както знаем, $\frac{1}{\alpha} = (B^*, A^*)$, където B^* и A^* са множествата, които бяха въведени по-горе. Съгласно дефиницията на произведение на положителни реални числа ще получим една база (C, D) на реалното число $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$, ако означим с C множеството на всички числа от вида $\frac{a}{b}$, а с D — множеството на всички числа от вида $\frac{b}{a}$, където $a\in A$, $b\in B$. Но очевидно имаме винаги

$$\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a},$$

което показва, че базата (C, D) представя рационалното число 1. С това равенството (2) е доказано, когато $\alpha > 0$. Когато пък $\alpha < 0$, равенството (2) се проверява по следния начин:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = \alpha\cdot\left(-\frac{1}{-\alpha}\right) = (-\alpha)\left(\frac{1}{-\alpha}\right) = 1.$$

Друго важно за нас равенство е

(3)
$$\alpha.1=\alpha,$$

валидно за всяко реално число α. То се проверява непосредствено в случая, когато $\alpha>0$, като за целта представяме числото 1 чрез неговата стандартна база. Когато пък $\alpha<0$, то се получава така:

$$\alpha.1=-(|\alpha|.1)=-|\alpha|=-(-\alpha)=\alpha.$$

Най-сетне, когато $\alpha=0$, равенството (3) е очевидно.

От равенството (3) лесно можем да получим за произволно реално число α и равенството

(4)
$$\alpha.(-1)=-\alpha.$$

Наистина, ако $\alpha>0$, то

$$\alpha(-1)=-(\alpha.|-1|)=-(\alpha.1)=-\alpha,$$

а ако $\alpha<0$, то

$$\alpha(-1)=|\alpha|.|-1|=(-\alpha).1=-\alpha.$$

Когато пък $\alpha=0$, равенството (4) е очевидно.

Да разгледаме сега уравнението

(5)
$$\alpha\xi=\beta,$$

където α и β са дадени реални числа и при това $\alpha\neq0$. Ще покажем, че това уравнение има, и то едно единствено решение относно неизвестното ξ. Наистина да поставим на мястото на ξ реалното число $\frac{1}{\alpha}\cdot\beta$. Ще имаме

$$\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\beta\right)=\left(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right)\beta=1.\beta=\beta.1=\beta.$$

И така числото $\frac{1}{\alpha}\beta$ се оказа решение на уравнението (5). Това уравнение не притежава други решения, защото, ако γ е някакво произволно взето негово решение (т. е. такова реално число, за което е изпълнено равенството $\alpha\gamma=\beta$), то ще имаме

$$\gamma=\gamma.1=\gamma\left(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right)=(\gamma\alpha)\frac{1}{\alpha}=(\alpha\gamma)\frac{1}{\alpha}=\beta\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\beta.$$

Числото $\frac{1}{\alpha}\beta$, което, както видяхме, е единственото решение на уравнението (5), ще наречем *частно* на числата β и α и ще го бележим за по-кратко с $\frac{\beta}{\alpha}$. Ето защо можем да пишем

$$\alpha\frac{\beta}{\alpha}=\beta.$$

От дефиницията на частно следва например веднага, че за всяко реално число α имаме

$$\frac{\alpha}{1}=\alpha.$$

Лесно се вижда също, че при $\alpha=0$ и $\beta\neq0$ е в сила равенството

(6)
$$\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Наистина, като вземем пред вид, че $\alpha=\beta\frac{\alpha}{\beta}$, получаваме

$$\alpha\cdot\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=\left(\beta\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}\right)=\beta.1=\beta,$$

откъдето следва равенството (6).

Ако $\alpha_1\neq0$ и $\alpha_2\neq0$, то при произволни реални числа β_1 и β_2 е в сила равенството

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}. \tag{7}$$

Наистина равенството (7) следва веднага от това, че

$$(\alpha_1\alpha_2)\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)=\left(\alpha_1\cdot\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)=\beta_1\beta_2.$$

Най-сетне при $\alpha_1\neq0$, $\alpha_2\neq0$ и $\beta_2\neq0$ имаме

$$\frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}=\frac{\beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_2}. \tag{8}$$

Равенството (8) се получава като следствие от равенствата (6) и (7) по следния начин:

$$\frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_2}.$$

§ 5. Принцип на Архимед и гъстота на рационалните и ирационалните числа

В предишните два параграфа бяха установени редица свойства на реалните числа, изразяващи се с помощта на неравенства. Това бяха свойства, даващи връзки между въведеното в § 3 нареждане на реалните числа, от една страна, и операциите събиране и умножение, от друга. Сега ще се спрем на други някои свойства, свързани също с нареждането на реалните числа.

Първото от тях, известно като *принцип на Архимед*, гласи: Не съществува реално число, което да бъде по-голямо от всички естествени числа. (Другояче казано, множеството на естествените числа, разглеждано като множество от реални числа, не е ограничено отгоре.)

Наистина нека $a=(A, B)$ е произволно реално число и нека $b\in B$. Аритметичното рационално число b (което можем да считаме положително) има вида $b=\frac{p}{q}$, където p и q са естествени числа. Ясно е, че са в сила неравенствата $a\leq b\leq p$, откъдето получаваме $a<p+1$. И тъй съществува естествено число, по-голямо от произволно взетото реално число a. С това принципът на Архимед е доказан.

Друго свойство на реалните числа е следното: Сред целите числа, ненадминаващи дадено реално число a, има винаги едно най-голямо.

За да се убедим в това, да вземем някое цяло число n_0, ненадминаващо α. Ако допуснем, че не съществува най-голямо цяло число, ненадминаващо α, то ще намерим безбройно много цели числа $n_1, n_2, n_3, \ldots$, такива, че да имаме

$$n_0<n_1<n_2<n_3<\ldots$$

и $n_k\leqq\alpha$ $(k=1, 2, \ldots)$. Но $n_k\geqq n_0+k$, откъдето ще следва, че неравенството $n_0+k\leqq\alpha$, или $k\leqq\alpha-n_0$, е изпълнено за всяко естествено число k. Това обаче противоречи на доказания принцип на Архимед.

Следващото свойство, което ще установим, се нарича *гъстота на рационалните и ирационалните числа*. То се изразява чрез следното твърдение: Между всеки две реални числа се намират безбройно много рационални и безбройно много ирационални числа.

За да докажем това твърдение, достатъчно е да покажем, че е в сила следното: ако α и β са две реални числа, при което $\alpha<\beta$, то съществуват поне едно рационално число r и поне едно ирационално число ρ, които удовлетворяват неравенствата $\alpha<r<\beta$ и $\alpha<\rho<\beta$.

И така нека α и β са две реални числа и нека $\alpha<\beta$. Съгласно принципа на Архимед можем да намерим такова естествено число q, което да удовлетворява неравенството $q>\frac{1}{\beta-\alpha}$. Тогава ще имаме $q\beta-q\alpha>1$. Лесно е да се убедим, че между числата $q\alpha$ и $q\beta$ се намира поне едно цяло число p. Ако допуснем, че такова цяло число не съществува, то означавайки с m най-голямото цяло число, ненадминаващо $q\alpha$, бихме имали $m\leqq q\alpha<q\beta\leqq m+1$, откъдето $q\beta-q\alpha\leqq 1$. И така съществува цяло число p, такова, че $q\alpha<p<q\beta$. Тогава за рационалното число $r=\frac{p}{q}$ ще имаме $\alpha<r<\beta$.

Да вземем сега някое ирационално число σ. Поради неравенството $\alpha<\beta$ ще имаме $\alpha-\sigma<\beta-\sigma$. Съгласно доказаното по-горе ще съществува рационално число r', удовлетворяващо неравенствата $\alpha-\sigma<r'<\beta-\sigma$. Оттук получаваме $\alpha<\sigma+r'<\beta$. Но числото $\rho=\sigma+r'$ е сигурно ирационално — ако допуснем, че то е рационално, то и числото $\sigma=\rho-r'$, явявайки се в такъв случай разлика на две рационални числа, би било също рационално.

С това гъстотата на рационалните и ирационалните числа е установена.

§ 6. Принцип за непрекъснатост

За едно множество M от реални числа казваме, че е ограничено отгоре, ако съществува такова реално число a_1, че за всяко a от M да имаме $a\leqq a_1$. Числото a_1 се нарича горна граница на множеството M. Аналогично едно множество M от реални числа се нарича ограничено отдолу, когато съществува такова реално число a_2, което удовлетворява неравенството $a\geqq a_2$ за всяко a от M. Числото a_2 се нарича в този случай долна граница на множеството M. Когато едно множество от реални числа е ограничено и отгоре, и отдолу, наричаме го накратко ограничено. Ясно е, че всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава безбройно много горни граници, а всяко ограничено отдолу множество — безбройно много долни граници. Ще установим сега следното важно твърдение, известно под името *принцип за непрекъснатост на реалните числа*:

***В**сяко ограничено отгоре множество от реални числа има една най-малка горна граница.*

Наистина нека M е едно ограничено отгоре множество от реални числа. Да означим с C множеството на всички онези аритметични рационални числа c, които (разглеждани като реални числа) не са горни граници на множеството M (такива числа c очевидно има), а с D — множеството на всички аритметични рационални числа d, които (разглеждани като реални числа) са горни граници на множеството M (такива числа d също има, понеже множеството M е ограничено отгоре). Ще докажем, че множествата C и D образуват база на реално число, т. е. че са изпълнени свойствата 1) и 2) от дефиницията в § 4. Нека $c\in C$ и $d\in D$. Тъй като рационалното число c не е горна граница на множеството M, то ще съществува такова реално число $a=(A, B)$, принадлежащо на M, щото $c<a$. Това ще рече, че съществува число a от A, такова, че $c<a$. От друга страна, имаме $\alpha\leqq d$, откъдето $a\leqq d$. И тъй $c<d$. С това свойството 1) е проверено. За да установим свойството 2), нека вземем едно произволно положително (аритметично рационално) число ε и нека c_0 е някое число, принадлежащо на множеството C, а d_0 — някое число от множеството D. Да изберем цялото положително число n толкова голямо, че $\frac{d_0-c_0}{n}<\varepsilon$, и да разгледаме числата $c_0+\frac{k}{n}(d_0-c_0)$, $k=0, 1, \dots, n$. Между тези числа има такива, които се съдържат в множеството D (такова е например числото d_0, което се получава при $k=n$), и такива, които не се съдържат в D (такова е например числото c_0, получаващо се при $k=0$). Да означим с d_1 най-малкото от числата $c_0+\frac{k}{n}(d_0-c_0)$, принадлежащи на множеството D. Ако $d_1=c_0+\frac{k_1}{n}(d_0-c_0)$, то рационалното число $c_1=c_0+\frac{k_1-1}{n}(d_0-c_0)$ вече не принадлежи на D и следователно не е горна граница на множеството M, т. е. то принадлежи на C. И така ние намерихме едно число d_1 от D и едно число c_1 от C, за които имаме

$$d_1-c_1=\frac{1}{n}(d_0-c_0)<\varepsilon$$

С това е проверено и свойството 2) от дефиницията на база.

След като доказахме, че въведените от нас множества C и D образуват база, да разгледаме реалното число $\beta=(C, D)$. Ако $\alpha=(A, B)$ е произволно число от множеството M, то за всяко d от D имаме $\alpha\leqq d$. Оттук следва, че при $a\in A$ и $d\in D$ имаме винаги $a\leqq d$, което означава, че $\alpha\leqq\beta$. С това е показано, че реалното число $\beta=(C, D)$ е горна граница на множеството M.

От друга страна, нека реалното число $\gamma=(E, F)$ е някоя горна граница на множеството M и нека c е някое число от C. Тъй като c не е горна граница на M, ще съществува число $\alpha=(A, B)$ от M, за което $\alpha>c$. Оттук ще следва, че за някое a от A е изпълнено неравенството $a>c$. Но поради неравенството $\alpha\leqq\gamma$ ще имаме $a\leqq f$ за всяко f от F. И тъй $c\leqq f$ за произволно c от C и произволно f от F. Това пък означава, че е в сила неравенството $\beta\leqq\gamma$. И така реалното число β е най-малката горна граница на множеството M.

Най-малката горна граница на едно ограничено отгоре множество от реални числа се нарича негова *точна горна граница*. Аналогично най-голямата долна граница на едно ограничено отдолу множество от реални числа се нарича негова *точна долна граница*.

Съществуването на точна долна граница следва непосредствено от показания принцип за непрекъснатост. Наистина нека M е едно ограничено отдолу множество от реални числа. Да разгледаме множеството M', съставено от всички реални числа от вида $-\alpha$, където $\alpha\in M$. Лесно се вижда, че множеството M' е ограничено отгоре и че ако реалното число γ е неговата точна горна граница, то числото $-\gamma$ ще бъде точна долна граница на множеството M.

Нека забележим, че установеният в настоящия параграф принцип за непрекъснатост е едно характерно свойство на множеството на реалните числа. Той не е валиден например в множеството на рационалните числа. Наистина в § 1 на настоящото Допълнение ние построихме пример на база (A, B) с ляво множество A, състоящо се от всички положителни рационални числа a, за които $a^2<2$, и с дясно множество B, състоящо се от всички положителни рационални числа b, за които $b^2>2$. Множеството A е очевидно едно ограничено отгоре множество от рационални числа — всяко рационално число b от B е негова горна граница. Ако допуснем, че множеството A притежава за своя най-малка горна граница някое рационално число r, то това число тогава ще удовлетворява неравенствата $a\leqq r\leqq b$ за всяко a от A и за всяко b от B и базата (A, B) ще представя именно това рационално число r. Както видяхме обаче още при тогавашните наши разглеждания, базата (A, B) е ирационална, тя не може да представа никое рационално число. Следователно за ограниченото отгоре множество A от рационални числа никое рационално число не е точна горна граница — другояче казано, множеството A, разглеждано като подмножество на множеството на рационалните числа, не притежава точна горна граница.*

§ 7. Степен с рационален степенен показател

За всяко реално число α и всяко естествено число n, по-голямо от 1, под α^n (α в степен n) ще разбираме произведението на n множителя, всеки от които е равен на α. Дефинирайки отделно α^1 с равенството $\alpha^1=\alpha$, ние разполагаме с дефиницията на α^n при произволно α и за всички естествени (т. е. цели положителни) степенни показатели n. Когато реалното число α е различно от 0, а n е цяло отрицателно число, ще приемем по дефиниция, че

$$\alpha^n=\frac{1}{\alpha^{-n}}.$$

Най-сетне при $\alpha \neq 0$ ще приемем, че $\alpha^0=1$.

По такъв начин степента α^n е дефинирана за произволно, различно от 0 реално число α и всички цели степенни показатели n. Читателят лесно ще провери, че ако α и β са две реални числа, различни от нула, а m и n са две цели числа, то в сила са равенствата

$$(\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n,$$
$$\alpha^{m+n}=\alpha^m\alpha^n,$$
$$(\alpha^m)^n=\alpha^{mn}.$$

Нека сега α е положително реално число, а n — естествено число. Да означим с A множеството на всички положителни аритметични рационални числа a, за които $a^n \leqq \alpha$ (такива числа има — ако например естественото число k удовлетворява неравенството $k>\frac{1}{\alpha}$, то $\left(\frac{1}{k}\right)^n \leqq \frac{1}{k}<\alpha$), а с B множеството на всички положителни аритметични рационални числа b, за които $b^n \geqq \alpha$ (такива числа също има — ако за естественото число k имаме $k>\alpha$, то $k^n \geqq k>\alpha$). Множествата A и B образуват база на реално число. Наистина неравенството $a \leqq b$ при произволни a от A и b от B е очевидно и с това е проверено първото от двете свойства, които трябва да притежава една база. За да проверим второто свойство, нека вземем най-напред едно произволно положително (аритметично рационално) число ε, а след това такова естествено число k, че $\frac{1}{k}<\varepsilon$. Можем при това да считаме, че числото k е взето толкова голямо, че да имаме едновременно $\left(\frac{1}{k}\right)^n<\alpha$ и $k^n>\alpha$. Тогава измежду аритметичните рационални числа от вида $\frac{i}{k}$, където $i=1, 2, \ldots, k^2$, ще има както такива, които принадлежат на множеството A $\left(\text{такова е например числото } \frac{1}{k}\right)$, така и такива, които принадлежат на множеството B $\left(\text{такова е например числото } \frac{k^2}{k}=k\right)$. Ако $\frac{i_0}{k}$ е най-голямото от числата $\frac{i}{k}$, принадлежащи на A, то числото $\frac{i_0+1}{k}$ няма да принадлежи на A и следо-

---

* За читателя, започнал с основните понятия на абстрактната математика, ще отбележим, че съгласно изложеното в § 2 и § 4 на настоящото Допълнение, в което въведохме събирането и умножението на реални числа и изведохме основните свойства на тези операции, множеството на реалните числа представлява едно поле (комутативно тяло). Въведеното в § 3 нареждане на реалните числа и свойствата му, които го съгласуват с операциите събиране и умножение, превръщат това поле в наредено, по-точно в напълно наредено или линейно наредено поле. Най-сетне току-що доказаният принцип за непрекъснатост относно въведеното нареждане показва, че множеството от реалните числа е едно непрекъснато линейно наредено поле.

вателно ще принадлежи на B. Но тогава ще имаме

$$\frac{l_0+1}{k}-\frac{l_0}{k}=\frac{1}{k}<\varepsilon.$$

И така множествата A и B образуват база на едно (очевидно положително) реално число.

Реалното число $\beta=(A, B)$ удовлетворява равенството $\beta^n=\alpha$. За да се убедим в това, достатъчно е да отбележим, че съгласно това, което знаем за умножението на положителни реални числа, ние ще получим една база (C, D) на реалното число β^n, ако съставим лявото множество C на тази база от всички числа, имащи вида a^n, където $a\in A$, а дясното ѝ множество D — от всички числа от вида b^n, където $b\in B$. Тогава от неравенствата $a^n\leq\alpha\leq b^n$, изпълнени за всяко a от A и всяко b от B, следва, че $\beta^n=\alpha$.

Нека забележим още, че β очевидно е единственото положително реално число, чиято n-та степен е равна на α — ако $\beta_1>\beta$, то $\beta_1^n>\beta^n=\alpha$, а ако $0<\beta_1<\beta$, то $\beta_1^n<\beta^n=\alpha$.

И така за всяко положително реално число α и за всяко естествено число n съществува, и то едно единствено положително реално число β, удовлетворяващо равенството $\beta^n=\alpha$. Това число β по-нататък ще наричаме *корен n-ти от α* и ще го бележим с $\alpha^{\frac{1}{n}}$ или $\sqrt[n]{\alpha}$ (при $n=2$ вместо $\sqrt[2]{\alpha}$ пишем $\sqrt{\alpha}$). Следователно имаме (при $\alpha>0$ и n — естествено число)

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n=\alpha. \tag{1}$$

От друга страна (отново при $\alpha>0$ и n — естествено число), в сила е и равенството

$$(\alpha^n)^{\frac{1}{n}}=\alpha. \tag{2}$$

То следва от обстоятелството, че числото $(\alpha^n)^{\frac{1}{n}}$ съгласно казаното по-горе е единственото положително число, чиято n-та степен е равна на α^n.

Ако $\alpha>0$ и $\beta>0$ са две реални числа, а n е естествено число, то ще имаме

$$(\alpha\beta)^{\frac{1}{n}}=\alpha^{\frac{1}{n}}\beta^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Наистина числото $(\alpha\beta)^{\frac{1}{n}}$ е единственото положително число, чиято n-та степен е равна на $\alpha\beta$, а в същото време имаме

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\beta^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n\left(\beta^{\frac{1}{n}}\right)^n=\alpha\beta.$$

По-нататък, ако $\alpha>0$, а p и q са две естествени числа, в сила е и равенството

$$\alpha^{\frac{1}{pq}}=\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Действително числото $\alpha^{\frac{1}{pq}}$ е единственото положително число β, за което имаме $\beta^{pq}=\alpha$. Но, от друга страна, имаме

$$\left(\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{pq}=\left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p=\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^p=\alpha,$$

с което равенството (4) е установено.

Също тъй, ако $\alpha > 0$, p е цяло число, а q — естествено число, то валидно е и равенството

$$(5)\qquad \left(\alpha^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Неговата вярност следва от това, че, от една страна, числото $(\alpha^p)^{\frac{1}{q}}$ е единственото положително реално число β, за което имаме $\beta^q = \alpha^p$, и че, от друга страна,

$$\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left(\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p = \alpha^p.$$

Равенството (5) ни позволява, когато α е **положително** реално число, а p и q — две цели числа, такива, че $q > 0$, да въведем означението $\alpha^{\frac{p}{q}}$, разбирайки под това означение което и да било от числата $(\alpha^p)^{\frac{1}{q}}$ и $\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Тъй като всяко рационално число r може да се представи във вида $r = \frac{p}{q}$, където p и q са цели числа и $q > 0$, по този начин стигаме до дефиницията на степента α^r, където α е положително, а r — рационално число. За да бъде тази дефиниция коректна, трябва да се убедим, че тя не зависи от представянето на рационалното число r във вид на частно на две цели числа с положителен знаменател. Това обаче е така, защото, ако p, q и s са три цели числа и ако $q > 0$ и $s > 0$, то

$$\alpha^{\frac{sp}{sq}} = \left(\alpha^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp} = \left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}\right)^s\right)^p = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

И така вече разполагаме с дефиницията на степента α^r винаги когато α е положително реално число, а r — рационално число. Нека отбележим, че числото α^r е винаги положително.

Освен това е ясно, че ако $r \geqq 0$, то при $0 < \alpha \leqq 1$ имаме $\alpha^r \leqq 1$, а при $\alpha \geqq 1$ имаме $\alpha^r \geqq 1$. (Тези неравенства се проверяват най-напред за случая $r = \frac{1}{n}$, където n е естествено число, а след това за произволно положително рационално число r. При $r = 0$ те са очевидни.) Оттук следва че:

1) ако $r_1 \leqq r_2$, то при $\alpha \geqq 1$ ще бъде изпълнено неравенството $\alpha^{r_1} \leqq \alpha^{r_2}$, а при $0 < \alpha \leqq 1$ — неравенството $\alpha^{r_1} \geqq \alpha^{r_2}$;

2) ако $r \geqq 0$ и $0 < \alpha \leqq \beta$, то $\alpha^r \leqq \beta^r$.

Лесно се вижда, че ако α и β са две положителни реални числа, а r — рационално число, то в сила е равенството

$$(6)\qquad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \beta^r.$$

Наистина, ако $r = \frac{p}{q}$, където p и q са цели числа и $q > 0$, ще имаме

$$(\alpha\beta)^r = (\alpha\beta)^{\frac{p}{q}} = \left((\alpha\beta)^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\beta^{\frac{1}{q}}\right)^p$$
$$= \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p\left(\beta^{\frac{1}{q}}\right)^p = \alpha^{\frac{p}{q}}\beta^{\frac{p}{q}} = \alpha^r\beta^r.$$

Ако α е положително реално число, а r_1 и r_2 са две рационални числа, то валидни са и равенствата

$$\alpha^{r_1+r_2} = \alpha^{r_1}\alpha^{r_2}$$

$$(\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 r_2}. \tag{8}$$

Наистина нека $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, където p_1 и p_2 са цели, а q_1 и q_2 — цели положителни числа. Тогава

$$\alpha^{r_1+r_2} = \alpha^{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}} = \alpha^{\frac{p_1q_2+q_1p_2}{q_1q_2}} = \left(\alpha^{\frac{1}{q_1q_2}}\right)^{p_1q_2+q_1p_2}$$

$$= \left(\alpha^{\frac{1}{q_1q_2}}\right)^{p_1q_2}\left(\alpha^{\frac{1}{q_1q_2}}\right)^{q_1p_2} = \alpha^{\frac{p_1q_2}{q_1q_2}}\alpha^{\frac{q_1p_2}{q_1q_2}} = \alpha^{\frac{p_1}{q_1}}\alpha^{\frac{p_2}{q_2}} = \alpha^{r_1}\alpha^{r_2},$$

с което равенството (7) е доказано. Равенството (8) пък се получава така:

$$(\alpha^{r_1})^{r_2} = \left(\alpha^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} = \left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q_1}}\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{q_2}}\right)^{p_2} = \left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}\right)^{p_1}\right)^{p_2}$$

$$= \left(\alpha^{\frac{1}{q_1q_2}}\right)^{p_1p_2} = \alpha^{\frac{p_1p_2}{q_1q_2}} = \alpha^{r_1r_2}.$$

В заключение на настоящия параграф нека отбележим следното. Ние дефинирахме степента $\alpha^{\frac{1}{n}}$, когато α е положително реално число, а n — произволно естествено число. Когато естественото число n е нечетно, можем да дефинираме $\alpha^{\frac{1}{n}}$ и за отрицателни реални числа α с помощта на равенството

$$\alpha^{\frac{1}{n}} = -(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

В този случай равенствата (1) и (2) отново са в сила. Наистина при $\alpha < 0$ и нечетно n имаме

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(-(-\alpha)^{\frac{1}{n}}\right)^n = (-1)^n\left((-\alpha)^{\frac{1}{n}}\right)^n = (-1)(-\alpha) = -(-\alpha) = \alpha,$$

с което равенството (1) е доказано. Преди да проверим валидността на равенството (2), нека покажем, че и равенството (3) остава в сила, когато α и β са отрицателни числа. Наистина при нечетно n и $\alpha < 0$, $\beta < 0$ ще имаме

$$\alpha^{\frac{1}{n}}\beta^{\frac{1}{n}} = \left[-(-\alpha)^{\frac{1}{n}}\right]\left[-(-\beta)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}(-\beta)^{\frac{1}{n}} = ((-\alpha)(-\beta))^{\frac{1}{n}} = (\alpha\beta)^{\frac{1}{n}}.$$

Сега равенството (2) при $\alpha < 0$ и n нечетно се проверява така:

$$(\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = -(-\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = -((-1)\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = -((-1)^n\alpha^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= -((-\alpha)^n)^{\frac{1}{n}} = -(-\alpha) = \alpha.$$

Читателят лесно ще се убеди, че равенствата (6), (7) и (8) остават в сила при произволни, различни от нула реални числа α и β, стига степенните показатели, които участвуват в тях, да са рационални числа, допускащи представяния във вид на дроби с положителни нечетни знаменатели.

Най-сетне, ако приемем по дефиниция, че $0^{\frac{1}{n}}=0$ за всяко естествено число n, то лесно се вижда, че равенствата (6), (7) и (8) остават валидни винаги когато α и β са две неотрицателни (а не непременно положителни) реални числа, стига степенните показатели, участвуващи в тези равенства, да са положителни рационални числа.

§ 8. Степен с произволен степенен показател

Всяка база на реално число (A, B) е съставена, както знаем, от две множества A и B, всяко от които от своя страна се състои от краен брой или безбройно много аритметични рационални числа, като при това тези множества са подчинени на две специални условия. Нека сега разгледаме две множества A и B, съставени вече от реални (а не непременно от рационални) числа, но така, че да удовлетворяват същите две условия, които участвуваха в дефиницията на база на реално число. По-точно нека A и B са две непразни множества от реални числа, такива, че:

1) за всяко α от A и всяко β от B да имаме $\alpha \leqq \beta$;

2) за всяко положително (реално) число ε да съществуват такова число α от A и такова число β от B, че $\beta-\alpha<\varepsilon$.

Ще покажем, че в такъв случай съществува едно единствено реално число γ, удовлетворяващо неравенствата $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$ за всяко α от A и всяко β от B. Наистина от условието 1) се вижда, че множеството A е ограничено отгоре и че всяко число β от B е горна граница за A. Да означим с γ точната горна граница на множеството A. Тогава, от една страна, $\gamma \geqq \alpha$, за всяко α от A, и, от друга страна, поради това, че γ е най-малката горна граница на A, ще имаме $\gamma \leqq \beta$ за всяко β от B. И тъй числото γ ще удовлетворява неравенствата $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$ за всяко α от A и за всяко β от B. Ако допуснем, че съществува друго реално число γ', удовлетворяващо неравенствата $\alpha \leqq \gamma' \leqq \beta$, би следвало, че за всяко α от A и за всяко β от B ще имаме $\beta-\alpha \geqq |\gamma-\gamma'|$, което пък противоречи на условието 2).

Нека забележим още, че числото γ, което определихме като точна горна граница на множеството A, се явява в същото време точна долна граница на множеството B. Наистина от неравенството $\gamma \leqq \beta$, валидно за всяко β от B, се вижда, че γ е долна граница на множеството B. Ако допуснем, че някоя друга долна граница γ_1 на B удовлетворява неравенството $\gamma<\gamma_1$, ще имаме $\alpha \leqq \gamma_1 \leqq \beta$ за всяко α от A и всяко β от B, което, както видяхме, е невъзможно.

Въз основа на изложеното дотук, когато две множества A и B от реални числа удовлетворяват посочените по-горе условия 1) и 2), ще казваме, че тези множества определят едно реално число — числото γ, явяващо се едновременно точна горна граница на множеството A и точна долна граница на множеството B — или че A и B образуват една определяща двойка множества за реалното число γ. Множеството A ще наречем ляво, а множеството B — дясно множество на тази определяща двойка.

Когато две множества A и B са определяща двойка за едно положително реално число γ, сред числата, принадлежащи на лявото множество A, има непременно положителни — ако всички числа α от A са по-малки или равни на нула, то за всяко α от A и за всяко β от B бихме получили $\beta-\alpha \geqq \gamma$, което противоречи на условието 2). Ясно е, че ако с A' означим множеството на всички положителни числа α, принадлежащи на A (това множество може да не съвпада с A — в случай че в A се съдържат и неположителни α), то множествата A' и B образуват също така определяща двойка за числото γ. Ето защо, когато ни е дадена някоя определяща двойка множества A и B за едно положително реално число, винаги можем да считаме, че и двете множества A и B са съставени само от положителни числа.

Като използуваме горната бележка, ще докажем следното: Ако множествата A_1 и B_1 са една определяща двойка за положителното реално число γ_1, а множествата A_2 и B_2 — определяща двойка за положителното реално число γ_2, при това такива, че множествата A_1 и A_2 се състоят само от положителни реални числа, то ще получим една определяща двойка множества A и B за реалното число $\gamma_1\gamma_2$, ако към множеството A отнесем всички реални числа от вида $\alpha_1\alpha_2$, където $\alpha_1\in A_1$ и $\alpha_2\in A_2$, а към множеството B всички реални числа, имащи вида $\beta_1\beta_2$, където $\beta_1\in B_1$ и $\beta_2\in B_2$. Преди всичко нека се убедим, че така построените множества A и B удовлетворяват условията 1) и 2). Условието 1) е очевидно изпълнено, тъй като от неравенствата $0<\alpha_1\leqq\beta_1$ и $0<\alpha_2\leqq\beta_2$ следва неравенството $\alpha_1\alpha_2\leqq\beta_1\beta_2$. За да проверим условието 2), да вземем най-напред едно положително число ε, а след това едно число $\beta_1{}^0$ от B_1 и едно число $\beta_2{}^0$ от B_2. За положителното число $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{\beta_1{}^0+\beta_2{}^0}$ ще съществуват такива α_1' от A_1 и β_1' от B_1 и също такива α_2' от A_2 и β_2' от B_2, че да имаме $\beta_1'-\alpha_1'<\varepsilon'$ и $\beta_2'-\alpha_2'<\varepsilon'$. При това можем да считаме, че $\beta_1'\leqq\beta_1{}^0$. Тогава

$$\beta_1'\beta_2'-\alpha_1'\alpha_2'=\beta_1'\beta_2'-\beta_1'\alpha_2'+\beta_1'\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2'=\beta_1'(\beta_2'-\alpha_2')+\alpha_2'(\beta_1'-\alpha_1')$$
$$<\beta_1{}^0\varepsilon'+\beta_2{}^0\varepsilon'=\varepsilon.$$

И така множествата A и B са определяща двойка за някое реално число. От неравенствата $\alpha_1\alpha_2\leqq\gamma_1\gamma_2\leqq\beta_1\beta_2$ обаче, изпълнени винаги когато $\alpha_1\in A_1$, $\beta_1\in B_1$, $\alpha_2\in A_2$, $\beta_2\in B_2$, е ясно, че това число е числото $\gamma_1\gamma_2$.

Преди да преминем към дефиницията на степен с произволен степенен показател, което е непосредствената ни цел в настоящия параграф, ще докажем още едно необходимо за нас твърдение, а именно следното: За всяко положително реално число α имаме

$$\lim \alpha^{\frac{1}{n}}=1. \tag{1}$$

Да разгледаме най-напред случая, когато $\alpha\geqq 1$. Тогава за всяко естествено число n имаме $\alpha^{\frac{1}{n}}-1=h_n\geqq 0$. Оттук получаваме $\alpha^{\frac{1}{n}}=1+h_n$ и $\alpha=(1+h_n)^n$. Използувайки неравенството на Бернули*, получаваме

$$\alpha\geqq 1+nh_n,$$

откъдето

$$0\leqq h_n\leqq\frac{\alpha-1}{n},$$

или все едно

$$0\leqq\alpha^{\frac{1}{n}}-1\leqq\frac{\alpha-1}{n}.$$

Ако сега ε е произволно положително число, то очевидно за всички естествени числа n, удовлетворяващи неравенството $n>\dfrac{\alpha-1}{\varepsilon}$, ще имаме

$$\left|\alpha^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon,$$

---

* Неравенството

$$(1+h)^n\geqq 1+nh$$

е известно под името неравенство на Бернули и е валидно за всички $h\geqq -1$ и произволно естествено число n. Читателят ще го докаже лесно с помощта на пълната математична индукция.

с което равенството (1) е установено при $\alpha \geqq 1$. В случая, когато $0 < \alpha < 1$, същото равенство се получава въз основа на разгледания вече случай по следния начин.

$$\lim \alpha^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Пристъпваме сега към дефиницията на степен с произволен степенен показател. Нека α е едно положително реално число, а ρ — произволно реално число и нека $\rho = (A, B)$, т. е. (A, B) е една база на реалното число ρ. Да означим с A^* множеството от всички реални числа от вида α^a, където $a \in A$, а с B^* — множеството от всички реални числа от вида α^b, където $b \in B$. (Тук степените α^a и α^b са дефинирани вече от нас, тъй като a и b са аритметични рационални числа.) Ще покажем, че множествата A^* и B^* образуват определяща двойка множества за някое реално число. При това, ако $\alpha \geqq 1$, то A^* е лявото, а B^* — дясното множество на тази определяща двойка, а ако $\alpha \leqq 1$, то обратно, B^* е лявото, а A^* — дясното ѝ множество. (Когато $\alpha = 1$, както множеството A^*, така и множеството B^* се състоят очевидно от единственото число 1.) Ще разгледаме случая, когато $\alpha \geqq 1$. (Случаят $0 < \alpha \leqq 1$ се разглежда аналогично и се предоставя на читателя.) От неравенството $a \leqq b$, изпълнено за всяко a от A и всяко b от B, следва неравенството $\alpha^a \leqq \alpha^b$, с което условието 1) е проверено. За да проверим условието 2), да вземем най-напред едно положително число ε, а след това — едно число b_0 от B. Поради това, че $\lim \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$, ще съществува такова естествено число n, за което $\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \alpha^{-b_0}\varepsilon$. Ако сега числата a от A и b от B са взети така, че $b - a < \frac{1}{n}$, то ще имаме

$$\alpha^b - \alpha^a = \alpha^a(\alpha^{b-a} - 1) < \alpha^{b_0}\left(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon.$$

И така множествата A^* и B^* определят едно съвсем определено положително реално число γ. Това число ще наречем степен на α със степенен показател ρ и ще го бележим с α^ρ. За да бъде обаче тази дефиниция коректна, трябва да се убедим, че тя не зависи от базата (A, B), с помощта на която сме представили числото ρ. Наистина, ако (A_1, B_1) е някоя друга база на реалното число ρ, то с нейна помощ ще дефинираме, както по-горе, две множества A_1^* и B_1^* от реални числа, които ще определят едно реално число γ_1. Тогава от неравенствата $\alpha^a \leqq \alpha^{b_1}$, изпълнени за всяко a от A и всяко b_1 от B_1, ще заключим, имайки пред вид, че γ е точната горна граница на A^*, а γ_1 — точната долна граница на B_1^*, че е в сила неравенството $\gamma \leqq \gamma_1$. От неравенствата пък $\alpha^{a_1} \leqq \alpha^b$, валидни за всяко a_1 от A_1 и всяко b от B, ще следва, че $\gamma_1 \leqq \gamma$. И тъй $\gamma = \gamma_1$, с което коректността на дефиницията на α^ρ е доказана.

По този начин направихме последната стъпка в разширяването на понятието степен, осъществено последователно от началото на предишния параграф. Сега вече разполагаме с такава дефиниция, която ни позволява да говорим за степента α^ρ винаги когато основата ѝ α е положително реално число, и то при произволно реално число ρ за степенен показател. Както вече отбелязахме, числото α^ρ е винаги положително. При това, ако $\rho \geqq 0$, то

2) $$\alpha^\rho \geqq 1 \text{ при } \alpha \geqq 1 \text{ и } \alpha^\rho \leqq 1 \text{ при } 0 < \alpha \leqq 1.$$

Остава да докажем основните свойства на степенуването.

Нека α е положително реално число, а ρ_1 и ρ_2 са две реални числа. Ако $\rho_1 = (A_1, B_1)$, $\rho_2 = (A_2, B_2)$, да означим с A_1^*, B_1^*, A_2^*, B_2^* множествата, състоящи се съответно от числата от вида α^{a_1}, α^{b_1}, α^{a_2}, α^{b_2}, където $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$. Тогава A_1^* и B_1^* са една определяща двойка множества за числото α^{ρ_1}, а A_2^* и където ,

$$\alpha^{a_1}\alpha^{a_2} \leq \alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2} \leq \alpha^{b_1}\alpha^{b_2},$$

от друга —

$$\alpha^{a_1+a_2} \leq \alpha^{\rho_1+\rho_2} \leq \alpha^{b_1+b_2}.$$

(В случай че $\alpha < 1$, всички тези неравенства трябва да бъдат написани в обратна посока.) Но тъй като $\alpha^{a_1+a_2}=\alpha^{a_1}\alpha^{a_2}$ и $\alpha^{b_1+b_2}=\alpha^{b_1}\alpha^{b_2}$, оттук следва равенството

$$\alpha^{\rho_1+\rho_2} = \alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2}. \tag{3}$$

Сега можем да отбележим и следното: Ако $\rho_1 \leqq \rho_2$, то при $\alpha \geqq 1$ е изпълнено неравенството $\alpha^{\rho_1} \leqq \alpha^{\rho_2}$, а при $0<\alpha \leqq 1$ — неравенството $\alpha^{\rho_1} \geqq \alpha^{\rho_2}$.

За да се убедим в тези неравенства, достатъчно е да разгледаме частното $\dfrac{\alpha^{\rho_1}}{\alpha^{\rho_2}}$, което въз основа на равенството (3) може да се напише във вида $\alpha^{\rho_1-\rho_2}$, и да вземем пред вид неравенствата (2).

Да преминем към доказателство на равенството

$$(\alpha\beta)^{\rho} = \alpha^{\rho}\beta^{\rho}, \tag{4}$$

изпълнено винаги когато α и β са положителни, а ρ — произволно реално число. Нека $\rho=(A, B)$. Да разгледаме най-напред случая, когато $\alpha \geqq 1$ и $\beta \geqq 1$. В този случай множеството от числата α^a, където $a \in A$, и множеството от числата α^b, където $b \in B$, определят реалното число α^{ρ}, докато множеството от числата β^a, където $a \in A$, и множеството от числата β^b, където $b \in B$, определят реалното число β^{ρ}. Оттук пък следва, че множеството от числата $\alpha^a\beta^a$ и множеството от числата $\alpha^b\beta^b$ образуват определяща двойка за реалното число $\alpha^{\rho}\beta^{\rho}$. Но за всяко a от A и всяко b от B имаме

$$\alpha^a\beta^a = (\alpha\beta)^a \leq (\alpha\beta)^{\rho} \leq (\alpha\beta)^b = \alpha^b\beta^b.$$

Оттук следва равенството (4). Случаят, когато $0<\alpha<1$ и $0<\beta<1$, се разглежда аналогично.

Остава да разгледаме случая, когато $\alpha \geqq 1$, но $0<\beta<1$. Сега за реалното число $\alpha^{\rho}\beta^{\rho}$ ще получим една определяща двойка множества, ако за ляво множество на тази двойка вземем множеството на числата от вида $\alpha^a\beta^b$, а за дясно нейно множество — множеството на числата от вида $\alpha^b\beta^a$, където $a \in A$, $b \in B$. При това, ако $\alpha\beta \geqq 1$, ще имаме неравенствата

$$\alpha^a\beta^b \leq \alpha^a\beta^a = (\alpha\beta)^a \leq (\alpha\beta)^{\rho} \leq (\alpha\beta)^b = \alpha^b\beta^b \leq \alpha^b\beta^a,$$

а ако $\alpha\beta < 1$ — неравенствата

$$\alpha^a\beta^b \leq \alpha^b\beta^b = (\alpha\beta)^b \leq (\alpha\beta)^{\rho} \leq (\alpha\beta)^a = \alpha^a\beta^a \leq \alpha^b\beta^a.$$

И в двата случая заключаваме отново, че е в сила равенството (4).

Най-сетне ще докажем и равенството

$$(\alpha^{\rho})^{\sigma} = \alpha^{\rho\sigma}. \tag{5}$$

където α е положително, а ρ и σ са произволни реални числа. Нека $\rho=(A, B)$, $\sigma=(C, D)$ и нека предположим, че $\alpha \geqq 1$ (ако $\alpha < 1$, неравенствата, които ще следват, трябва да бъдат написани в обратна посока). От дефиницията на числото α^ρ е ясно, че при $a\in A$ и $b\in B$ имаме

$$\alpha^a \leqq \alpha^\rho \leqq \alpha^b .$$

Оттук следва, че при $c\in C$ и $d\in D$ ще имаме

$$\alpha^{ac} = (\alpha^a)^c \leqq (\alpha^\rho)^c \leqq (\alpha^\rho)^\sigma \leqq (\alpha^\rho)^d \leqq (\alpha^b)^d = \alpha^{bd}$$

Обаче множеството, състоящо се от числата от вида α^{ac}, където $a\in A$, $c\in C$, и множеството, съставено от числата от вида α^{bd}, където $b\in B$, $d\in D$, образуват една определяща двойка за числото $\alpha^{\rho\sigma}$. Оттук поради неравенствата $\alpha^{ac} \leqq (\alpha^\rho)^\sigma \leqq \alpha^{bd}$, които доказахме по-горе, следва, че числото $\alpha^{\rho\sigma}$ съвпада с числото $(\alpha^\rho)^\sigma$. С това равенството (5) е доказано. ■

§ 9. Логаритми на реални числа

Нека α и β са две реални числа. Ще докажем, че ако $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ и $\beta > 0$, то уравнението

$$(1) \qquad \alpha^\xi = \beta$$

има, и то едно единствено решение относно ξ.

Ако $\alpha > 1$, то от равенството

$$\alpha^n = (1 + (\alpha-1))^n$$

и от неравенството

$$(1 + (\alpha-1))^n \geqq 1 + n(\alpha-1)$$

виждаме, че числото α^n може да стане колкото пожелаем голямо, стига да вземем достатъчно голямо естественото число n. Да изберем n така, че да имаме $\alpha^n > \beta$ и $\alpha^n > \frac{1}{\beta}$. Виждаме, че за достатъчно големи естествени числа n са изпълнени неравенствата

$$\alpha^n > \beta \quad \text{и} \quad \alpha^{-n} < \beta.$$

Ако пък $0 < \alpha < 1$, то, вземайки естественото число n така, че да са валидни неравенствата $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n > \beta$ и $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-n} < \beta$, заключаваме, че за достатъчно големи n имаме

$$\alpha^n < \beta \quad \text{и} \quad \alpha^{-n} > \beta.$$

По-нататък ще считаме, че $\alpha > 1$ (случаят, когато от $0 < \alpha < 1$, се третира аналогично и се предоставя на читателя). Да разгледаме множеството A, съставено от всички аритметични рационални числа a, за които $\alpha^a \leqq \beta$, и множеството B, състоящо се от всички аритметични рационални числа b, за които $\alpha^b \geqq \beta$. Извършените по-горе разглеждания ни убеждават, че нито едно от тези две множества не е празно. Ние ще покажем, че множествата A и B образуват база на едно реално число. Наистина за всяко a от A и всяко b от B имаме $a \leqq b$ (понеже $\alpha > 1$, от неравенството $a > b$ би следвало $\alpha^a > \alpha^b$). Да вземем едно произволно положително число ε, след което да изберем естественото число n толкова голямо, че да имаме $\alpha^{-n} < \beta$, $\alpha^n > \beta$ и освен това $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Да разгледаме сега рационалните числа от вида $\frac{k}{n}$, където $k = -n^2$, $-n^2+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n^2$. Поради избора на n числото $\frac{-n^2}{n} = -n$ принадлежи на A, а числото $\frac{n^2}{n} = n$ принадлежи на B. Ето защо ще съществува едно най-голямо цяло число k между [illegible], за което $\frac{k}{n}$ принадлежи на A. Да означим тази стойност с k_n. Тогава $\frac{k_n}{n} \in A$, $\frac{k_n}{n} + \frac{1}{n} \in B$ и

$$\frac{k_n + 1}{n} - \frac{k_n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

С това е показано, че множествата A и B образуват база на едно реално число γ. Но в такъв случай, както знаем от предишния параграф, множеството A^*, съставено от числата от вида α^a, където $a \in A$, и множеството B^* от числата α^b, където $b \in B$, образуват определяща двойка за числото α^γ. От друга страна, при $a \in A$ и $b \in B$ имаме

$$\alpha^a \leq \beta \leq \alpha^b,$$

което показва, че

$$\alpha^\gamma = \beta.$$

И така числото γ е решение на уравнението (1). Разбира се, това уравнение не може да има друго решение, тъй като при $\gamma' > \gamma$ ще бъде изпълнено неравенството $\alpha^{\gamma'} > \alpha^{\gamma}$, а при $\gamma' < \gamma$ — неравенството $\alpha^{\gamma'} < \alpha^{\gamma}$.

Числото γ, явяващо се единствено решение на уравнението (1), ще наричаме логаритъм на числото β при основа α и ще го означаваме с $\log_\alpha \beta$.

Свойствата на логаритмите се извеждат лесно от свойствата на степените на реалните числа. Така, ако β_1 и β_2 са две положителни реални числа, а α е положително и различно от 1 реално число и ако $\gamma_1 = \log_\alpha \beta_1$, $\gamma_2 = \log_\alpha \beta_2$, то от равенството

$$\alpha^{\gamma_1 + \gamma_2} = \alpha^{\gamma_1} \alpha^{\gamma_2}$$

и от равенствата

$$\alpha^{\gamma_1} = \beta_1 \text{ и } \alpha^{\gamma_2} = \beta_2$$

следва равенството

$$\log_\alpha \beta_1 \beta_2 = \log_\alpha \beta_1 + \log_\alpha \beta_2.$$

Също така, ако α е положително и различно от 1, β е положително, а ρ е произволно реално число и ако $\gamma = \log_\alpha \beta$, то от равенствата

$$(\alpha^\gamma)^\rho = \alpha^{\gamma\rho}$$

и

$$\alpha^\gamma = \beta$$

следва равенството

$$\log_\alpha \beta^\rho = \rho \log_\alpha \beta.$$

Привършихме изложението и доказателството на основните свойства на реалните числа. На читателя предоставяме педантично да провери верността на всички техни свойства, които бихме изложили в уводната част на курса. При това нека напомним отново, че свойствата, отнасящи се само до естествените, целите и рационалните числа, предполагаме за известни от по-рано.

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава IX

Редици и редове от функции. Степенни редове

ЧАСТ III

ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ДВЕ НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

Глава X

Диференциално смятане на функции на две променливи

Глава XI

Мярка на равнинни множества

Глава XII

Двойни интеграли

Глава XIII

Криволинейни интеграли

ДОПЪЛНЕНИЕ

Реални числа