

Борис
Коцев

Пламен
Сидеров

Комутативна алгебра

Второ
преработено издание

Издателство ВЕДИ
София, 2016

Съдържанието на тази книга е тясно свързано с курса по комутативна алгебра, който многократно е четен като избираем във ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски". Изложението се базира на първите осем глави на книгата на М. Atiyah, I. Macdonald, Introduction to commutative algebra [1]. Задачите след всеки параграф значително разширяват и задълбочават основния материал, като някои от тях са класически теореми от комутативната алгебра. Изложението в цялата книга е лаконично и предполага активно отношение от страна на читателя.

© Борис Василев Коцев
© Пламен Николов Сидеров
© Издателство ВЕДИ
ISBN 978-954-8857-38-3
София, 2016

§ 0. Предварителни означения и понятия

В цялата книга под пръстен ще разбираме *комутативен пръстен с 1*.

Предполага се, че читателят свободно владее материала от курсовете по линейна и висша алгебра, които се четат във ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски" и особено §§ 6, 7, 8, 9, както и §§ 22, 23, 25 от [4].

Пръстените и идеалите най-често ще означаваме с главни латински букви, а елементите им – с малки. Включването на множества ще означаваме със знака \subseteq , а знакът \subset показва, че включването е строго. Ако I е идеал в пръстена A , ще пишем $I \trianglelefteq A$ (или $I \triangleleft A$, ако искаме да подчертаем, че включването е строго). Факторпръстена A/I често ще бележим с \bar{A} , а елементите му – с \bar{x}, \bar{y}, \dots ($x, y, \dots \in A$).

Ако $I, J \trianglelefteq A$, под *произведение* на идеалите I и J ще разбираме множеството IJ , състоящо се от всички крайни суми на елементи от вида xu , $x \in I, u \in J$. Множеството IJ отново е идеал на A . Аналогично се дефинира произведение на повече от два идеала. Очевидно $IJ \subseteq I \cap J$ (по-общо, $I_1 \dots I_n \subseteq I_1 \cap \dots \cap I_n$).

Ако A е пръстен, $I \trianglelefteq A$ и $x, y \in A$, ще пишем $x \equiv y \pmod{I}$, ако $x - y \in I$, т.е. ако $\bar{x} = \bar{y}$ във факторпръстена A/I .

Нека $I \trianglelefteq A$ и $\pi: A \rightarrow A/I = \bar{A}$ е естественят хомоморфизъм от A върху \bar{A} ($\pi(x) = x + I = \bar{x}$). Изображението, което съпоставя на всеки идеал J на A , $J \supseteq I$, идеала $J/I = \bar{J}$ на \bar{A} е биекция между множеството от всички идеали на A , съдържащи I и множеството от всички идеали на \bar{A} . Ако J_1 е произволен идеал на A (не непременно съдържащ I), то множеството $\pi(J_1) = \{\pi(x) \in \bar{A} \mid x \in J_1\}$ е идеал на \bar{A} ; при това са в сила равенствата $\pi(J_1) = \pi(J_1 + I) = (J_1 + I)/I$. Прието е да се казва, че идеалът $J_1 + I$ е пълният праобраз на $\pi(J_1)$. Изобщо, ако K е произволен идеал на \bar{A} , под пълнен праобраз на K се разбира множеството $\pi^{-1}(K) = \{x \in A \mid \pi(x) \in K\}$, което е идеал на A , съдържащ I .

Следващото твърдение е следствие от теоремата за хомоморфизмите.

Твърдение. Нека A е пръстен и $I, J, K \trianglelefteq A$. Тогава:

а) $J/(J \cap I) \cong (J+I)/I$;

б) ако $K \supseteq J \supseteq I$, то $(K/I)/(J/I) \cong K/J$.

Един елемент a на пръстена A се нарича *делител на нулата*, ако съществува ненулев елемент $b \in A$, такъв че $ab = 0$. Един ненулев пръстен A се нарича *област*, ако не притежава ненулеви делители на нулата. В област можем да съкращаваме на ненулев елемент: ако $ab = cb$ и $b \neq 0$, то $a = c$. Всяко поле е област. Ако A е област и всеки идеал на A е главен, A се нарича *област на главни идеали*.

Определение. Нека A и B са пръстени. Ще казваме, че B е A -алгебра (или алгебра над A), ако на всеки елемент $a \in A$ и $x \in B$ е съпоставен елемент $ax \in B$, като се изпълняват следните аксиоми ($a, b \in A$; $x, y \in B$):

1) $a(x+y) = ax + ay$;

2) $(a+b)x = ax + bx$;

3) $(ab)x = a(bx)$;

4) $1.x = x$;

5) $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

Това означава, че адитивната група на B има структура на A -модул (аксиоми 1) – 4)) и тази структура е съгласувана с умножението в B (аксиома 5)). (Определението за модул се появява в §5.)

Примери. 1. Всеки пръстен е \mathbb{Z} -алгебра (ако $n \geq 0$, полагаме $nx = x + \dots + x$ и $(-n)x = (-x) + \dots + (-x)$).

2. Ако A е подпръстен на B , пръстенът B по естествен начин е A -алгебра.

3. Пръстенът на полиномите на n променливи $k[x_1, \dots, x_n]$ (k може и да не е поле) е k -алгебра.

Ако B е A -алгебра, изображението $\varphi: A \rightarrow B$, дефинирано чрез равенството $\varphi(a) = a.1$ е хомоморфизъм на пръстени. Пръстенът $A_0 = \varphi(A)$ е подпръстен на B и B е A_0 -алгебра. При това, ако $a \in A, x \in B$, то $ax = a(1.x) = (a.1)x = \varphi(a)x$. Това показва, че структурата

на B като A -алгебра и като A_0 -алгебра е една и съща. Освен това всеки идеал на B издържа умножения с елементи от A , защото те всъщност са умножения с елементи от $A_0 \subseteq B$.

Ако B е k -алгебра, k – поле, горното изображение $\varphi: k \rightarrow B$ е с нулево ядро и тогава $k_0 = \varphi(k) \cong k$. В този случай просто считаме, че $k \subseteq B$. Ако M е собствен идеал на B , M не съдържа обратими елементи и значи $k \cap M = (0)$. Тогава при естественния хомоморфизъм $\pi: B \rightarrow B/M$ имаме $\pi(k) \cong k$ и отново можем да считаме, че $k \subseteq B/M$.

Определение. Ще казваме, че B е *крайнопородена A -алгебра*, ако съществуват краен брой елементи $b_1, \dots, b_n \in B$, такива че всеки елемент на B е полином с коефициенти от A на тези елементи.

За един пръстен B ще казваме, че е *крайнопороден пръстен*, ако B е крайнопороден като \mathbb{Z} -алгебра (т.е. всеки елемент на B е полином с цели коефициенти на краен брой елементи $b_1, \dots, b_n \in B$).

Ако B и C са A -алгебри, ще казваме, че едно изображение $\psi: B \rightarrow C$ е *хомоморфизъм на A -алгебри*, ако ψ е хомоморфизъм на пръстени и освен това $\psi(ax) = a\psi(x)$ ($a \in A, x \in B$).

Нека Σ е *частично наредено множество*. Това означава, че в Σ е въведена релация $x \leq y$, която притежава следните три свойства:

- 1) $x \leq x \quad \forall x \in \Sigma$;
- 2) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$;
- 3) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.

Ако за всеки два елемента $x, y \in \Sigma$ е изпълнено $x \leq y$ или $y \leq x$ (т.е. всеки два елемента са сравними), Σ се нарича *линейно наредено множество*. Едно подмножество S на Σ се нарича *верига*, ако е линейно наредено относно въведената в Σ наредба. *Горна граница* на S се нарича всеки елемент $x \in \Sigma$, такъв че $t \leq x \quad \forall t \in S$. Един елемент $m \in \Sigma$ се нарича *максимален*, ако не съществува елемент $x \in \Sigma$, такъв че $m \leq x$ и $m \neq x$.

Примери. 1. Полето на реалните числа \mathbb{R} с обичайната наредба \leq е линейно наредено множество.

2. Множеството на естествените числа \mathbb{N} с релацията делимост на естествени числа е частично (но не линейно) наредено множество.

3. Нека X е произволно множество и Σ е множество, чиито елементи са подмножества на X (например всички подмножества на X). Множеството Σ е частично (но не винаги линейно) наредено относно релацията включване на подмножества.

Лема на Цорн. *Ако всяка верига в едно непразно частично наредено множество Σ притежава горна граница, то в Σ съществува (поне един) максимален елемент.*

Ще отбележим, че ако само изброимите вериги на Σ притежават горна граница, то в Σ може и да няма максимални елементи. Такова е например множеството Σ , състоящо се от всички изброими подмножества на произволно неизброимо множество (наредбата в Σ е относно включване на множества).

§ 1. Прости и максимални идеали

Определение. Нека A е пръстен и P е идеал на A . Ще казваме, че P е *прост идеал*, ако $P \neq A$ и от $xu \in P$ следва $x \in P$ или $u \in P$.

Условието един идеал $P \neq A$ да е прост е еквивалентно на всяко едно от следните две условия:

- а) $x \notin P, u \notin P \Rightarrow xu \notin P$ (по-общо, $x_1, \dots, x_n \notin P \Rightarrow x_1 \dots x_n \notin P$);
- б) $x_1 \dots x_n \in P \Rightarrow$ поне едно $x_i \in P$.

В частност, ако $x^n \in P$, то $x \in P$.

Определение. Ще казваме, че един идеал M на пръстена A е *максимален*, ако $M \neq A$ и не съществува идеал I на A , такъв че $M \subset I \subset A$ (т.е. ако $M \subset I$, то $I = A$).

Твърдение 1.1. а) Един идеал P на пръстена A е прост точно когато факторпръстенът A/P е област.

б) Един идеал M на пръстена A е максимален точно когато факторпръстенът A/M е поле.

В частност, всеки максимален идеал е прост. Освен това (0) е прост (максимален) идеал точно когато A е област (поле).

Доказателство. а) Условието за простота на идеала P е еквивалентно на условието: във факторпръстена A/P от $\bar{x}\bar{y} = 0$ следва $\bar{x} = 0$ или $\bar{y} = 0$. Това от своя страна означава, че A/P е област.

б) Съществува биекция между множеството на идеалите на A , съдържащи M и множеството от всички идеали на факторпръстена A/M . Така условието M да е максимален идеал точно означава, че A/M няма нетривиални идеали, т.е. че A/M е поле.

Примери. 1. В пръстена на целите числа \mathbb{Z} нулевият идеал е прост, защото \mathbb{Z} е област, но не е максимален, защото \mathbb{Z} не е поле. Ненулевите прости идеали на \mathbb{Z} се изчерпват с идеалите от вида (p) , където p е просто число. Това са и всички максимални идеали на \mathbb{Z} .

Аналогично, ако k е поле, нулевият идеал на пръстена $k[x]$ е прост, но не е максимален, а ненулевите прости идеали (които са и всички максимални идеали) на $k[x]$ се изчерпват с идеалите от вида (f) , където f е неразложим над k полином.

2. Ако p е просто число, идеалът (p) в пръстена $\mathbb{Z}[x]$ е ненулев прост идеал, който не е максимален (съобразете, че $\mathbb{Z}[x]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[x]$ и този пръстен е област, но не е поле).

3. Ако k е поле и $i < n$, идеалът (x_1, \dots, x_i) в пръстена $k[x_1, \dots, x_n]$ е прост, но не е максимален (съобразете, че $k[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_i) \cong k[x_{i+1}, \dots, x_n]$ и този пръстен е област, но не е поле).

Твърдение 1.2. Ако A е област на главни идеали, всеки ненулев прост идеал на A е максимален.

Доказателство. Нека $P = (x)$ е ненулев прост идеал на A и $I = (y)$ е идеал, строго съдържащ P . От $x \in (y)$ следва $x = yz$ за някое $z \in A$. Тъй като P е прост идеал и $y \notin P$, то $z \in P$ и тогава $z = xt$, $t \in A$. Сега имаме $x = yz = yxt$. Тъй като A е област, можем да съкратим на $x \neq 0$ и получаваме $yt = 1$. Така y е обратим елемент и значи $I = (y) = A$. Следователно P е максимален идеал.

Твърдение 1.3. а) Нека P_1, \dots, P_n са прости идеали в пръстена A и I е идеал на A , такъв че $I \subseteq \bigcup_{k=1}^n P_k$. Тогава $I \subseteq P_k$ за някое k .

б) Нека P е прост идеал на A , а I_1, \dots, I_n са идеали на A , такива че $P \supseteq \bigcap_{k=1}^n I_k$. Тогава $P \supseteq I_k$ за някое k . При това, ако $P = \bigcap_{k=1}^n I_k$, то $P = I_k$ за някое k .

Доказателство. а) С индукция по n ще докажем еквивалентно твърдение: ако $I \not\subseteq P_k$ за $k = 1, \dots, n$, то $I \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n P_k$.

Това е очевидно при $n = 1$. Нека $n > 1$ и да допуснем, че за $n - 1$ твърдението е доказано. Нека $I \not\subseteq P_k$, $k = 1, \dots, n$. За всяко $k = 1, \dots, n$ прилагаме индукционното предположение за идеалите $P_1, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}, \dots, P_n$: съществува елемент $x_k \in I$, но $x_k \notin P_j$ при $j \neq k$. Ако за някое k имаме още и $x_k \notin P_k$, твърдението е доказано. В противен случай за всяко $k = 1, \dots, n$ имаме $x_k \in P_k$. Да разгледаме елемента

$$y = \sum_{k=1}^n x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n.$$

Очевидно $y \in I$. Освен това k -тото събираемо в записа на y не принадлежи на P_k , тъй като P_k е прост идеал, докато всяко от останалите събираеми принадлежи на P_k (защото съдържа x_k като множител). Така $y \notin P_k$ ($1 \leq k \leq n$) и следователно $I \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n P_k$.

б) Да допуснем, че $P \not\supseteq I_k$ за всяко $k = 1, \dots, n$. Тогава съществуват елементи $x_k \in I_k$, $x_k \notin P$ ($1 \leq k \leq n$). Така $y = x_1 \cdots x_n \in \prod_{k=1}^n I_k \subseteq \bigcap_{k=1}^n I_k$, но $y \notin P$, защото P е прост идеал. Следователно $P \not\supseteq \bigcap_{k=1}^n I_k$, противоречие.

Накрая, нека $P = \bigcap_{k=1}^n I_k$. Според доказаното $P \supseteq I_k$ за някое k и (очевидно) $P \subseteq I_k$, така че $P = I_k$.

Теорема 1.4. *Всеки ненулев пръстен A притежава (поне един) максимален идеал.*

(Напомниме, че разглеждаме само пръстени с 1.)

Доказателство. Ще използваме лемата на Цорн. Да означим със Σ множеството от всички собствени (т.е. различни от A) идеали на A . Множеството Σ е частично наредено относно релацията включване на идеали и е непразно, защото $(0) \in \Sigma$. Нека (I_α) е верига от идеали от Σ (т.е. за всяка двойка индекси α, β имаме $I_\alpha \subseteq I_\beta$ или $I_\beta \subseteq I_\alpha$). Да означим $I = \bigcup_{\alpha} I_\alpha$. Тъй като (I_α) е верига, множеството I също е идеал на A (предоставяме проверката на читателя). При това $1 \notin I_\alpha$ за всеки индекс α и значи $1 \notin I$. Така I е собствен идеал на A , т.е. $I \in \Sigma$. Очевидно I е горна граница на разглежданата верига. От лемата на Цорн

следва, че в Σ съществува максимален елемент, т.е. A притежава максимален идеал.

Следствие 1.5. а) *Всеки собствен (различен от A) идеал на A се съдържа в максимален идеал на A .*

б) *Всеки необратим елемент x на A се съдържа в максимален идеал на A .*

Доказателство. а) Според теорема 1.4 ненулевият пръстен A/I притежава максимален идеал и тогава неговият пълен праобраз е максимален идеал на A , съдържащ I . (Доказателството може да се извърши и пряко, като се приложи лемата на Цорн за множеството Σ от всички собствени идеали на A , съдържащи I .)

б) Тъй като x е необратим елемент, то главният идеал (x) на A е собствен и значи се съдържа в максимален идеал на A .

Определение. Ще казваме, че един пръстен A е *локален*, ако A притежава единствен максимален идеал.

Примери. 1. Всяко поле k е локален пръстен ((0) е единственият максимален идеал на k).

2. Нека p е просто число и

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1, p \nmid n \right\}, \quad M = \left\{ \frac{m}{n} \in A \mid p \mid m \right\}.$$

Тогаво A е локален пръстен с единствен максимален идеал M (съобразете, че всеки елемент извън M е обратим, откъдето следва, че M съдържа всички собствени идеали на A).

3. Ако p е просто число, пръстенът \mathbb{Z}_{p^n} е локален с максимален идеал (\bar{p}) (съобразете, че всеки елемент извън (\bar{p}) е обратим).

Твърдение 1.6. *Нека M е собствен идеал на пръстена A и всеки елемент $x \in A \setminus M$ е обратим. Тогаво A е локален пръстен с максимален идеал M . Обратно, ако A е локален пръстен с максимален идеал M , то всеки елемент $x \in A \setminus M$ е обратим.*

Така максималният идеал на един локален пръстен A се състои от всички необратими елементи на A .

Доказателство. Всеки собствен идеал на A се състои от необратими елементи и значи се съдържа в M . Следователно M е единствен максимален идеал на A .

Обратно, нека M е единственият максимален идеал на локалния пръстен A . Тогава всички необратими елементи на A се съдържат в M (следствие 1.5, б)) и значи всички елементи извън M са обратими.

Задачи

Задача 1.1. Нека I е идеал на пръстена A . Да се докаже, че идеалът I не е прост тогава и само тогава, когато съществуват идеали I_1 и I_2 на A , такива че $I \subset I_1$, $I \subset I_2$ и $I_1 I_2 \subseteq I$.

Задача 1.2. Да се докаже, че всеки пръстен притежава минимални прости идеали.

Задача 1.3. Да се докаже, че ако P е прост идеал в пръстена A , то $P[x]$ е прост идеал в пръстена $A[x]$. Вярно ли е аналогично твърдение за максимални идеали?

Задача 1.4. Нека I и $P_i, i=1, \dots, n$, са идеали на пръстена A , като идеалите P_i за $i=3, \dots, n$ са прости. Да се докаже, че ако $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$, то $I \subseteq P_k$ за някое k ($1 \leq k \leq n$). Сравнете с твърдение 1.3, а).

Задача 1.5. Нека $\mathbb{C}[x, y]$ е пръстенът на полиномите на две променливи с коефициенти от \mathbb{C} и нека $P_j = (f_j)$, $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$, $j \in J$, са всички прости главни идеали, които се съдържат в идеала $I = (x, y)$. Да се докаже, че:

а) множеството $\{P_j\}_{j \in J}$ е безкрайно;

б) $I = \bigcup_{j \in J} P_j$;

в) I не се съдържа в никой от простите идеали P_j , $j \in J$.

Сравнете с твърдение 1.3, а).

Определение (пръстен с размерност на Крул, равна на 0). Казваме, че пръстенът A има *размерност на Крул*, равна на 0, ако всеки прост идеал на A е максимален.

Задача 1.6. Да се докаже, че ако $\forall x \in A \exists n = n(x) > 1$, такова че $x^n = x$, то размерността на Крул на A е равна на 0.

Задача 1.7. Пръстенът A се нарича *булев*, ако $x^2 = x \forall x \in A$. Да се докаже, че за всеки булев пръстен е в сила:

- а) $2x = 0 \forall x \in A$;
- б) размерността на Крул на A е равна на 0;
- в) $A/P \cong \mathbb{Z}_2$ за всеки прост идеал P на A .

Задача 1.8. Да се докаже, че всяка крайномерна алгебра A над поле k има размерност на Крул, равна на 0. В частност, ако A е област, то A е поле.

Определение (полулокален пръстен). Един пръстен A се нарича *полулокален*, ако A има само краен брой максимални идеали.

Задача 1.9. Нека $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ са различни максимални идеали в пръстена A . Да се докаже, че $\bigcap_{i=1}^{k+1} \mathfrak{M}_i \subset \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{M}_i$ за всяко $k = 1, \dots, n-1$.

Задача 1.10. Нека A е крайномерна алгебра над поле k . Да се докаже, че A е полулокален пръстен и броят на различните максимални идеали на A не надминава размерността на A над k .

Задача 1.11. Нека \mathfrak{M} е максимален идеал в пръстена A . Да се докаже, че:

- а) ако $\mathfrak{M}^n = (0)$ за някое $n > 0$, то A е локален пръстен с размерност на Крул, равна на 0;
- б) A/\mathfrak{M}^n е локален пръстен с размерност на Крул, равна на 0.

Задача 1.12. Нека $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ са (не непременно различни) максимални идеали в пръстена A и $I = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n$. Да се докаже, че:

- а) ако $I = (0)$, то A е полулокален пръстен с размерност на Крул, равна на 0;
- б) A/I е полулокален пръстен с размерност на Крул, равна на 0.

§ 2. Нилрадикал и радикал на Джекобсън

Определение. Ще казваме, че един елемент x в пръстен A е *нилпотентен*, ако съществува естествено число $n = n(x)$, такова че $x^n = 0$.

Твърдение 2.1. Множеството \mathfrak{N} от всички nilпотентни елементи на един пръстен A е идеал на A и във факторпръстена A/\mathfrak{N} няма ненулеви nilпотентни елементи.

Доказателство. Очевидно, ако $x \in \mathfrak{N}$ и $a \in A$, то $ax \in \mathfrak{N}$. Нека сега $x, y \in \mathfrak{N}$, като $x^n = 0$ и $y^k = 0$. По формулата за нютоновия бином (валидна във всеки комутативен пръстен) изразът $(x - y)^{n+k-1}$ е сума на произведения (с цели коефициенти) от вида $x^r y^s$, като $r + s = n + k - 1$. Ясно е, че или $r \geq n$, или $s \geq k$ и тогава всяко събираемо в тази сума е равно на 0. Така $(x - y)^{n+k-1} = 0$, т.е. $x - y \in \mathfrak{N}$. Следователно \mathfrak{N} е идеал.

По-нататък, нека $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}$ е nilпотентен елемент ($x \in A$). За някое m имаме $\bar{x}^m = 0$, т.е. $x^m \in \mathfrak{N}$. Тогава за някое t е изпълнено $(x^m)^t = 0$ и значи $x \in \mathfrak{N}$. Следователно $\bar{x} = 0$.

Определение. Идеалът $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ се нарича *нилрадикал* на пръстена A .

Втората част на твърдение 2.1 означава, че $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{N}(A)) = (0)$.

Теорема 2.2. Нилрадикалът на пръстена A съвпада със сечението на всички прости идеали на A .

Доказателство. Нека $x \in \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$. Ако P е прост идеал на A , от $x^n = 0 \in P$ следва $x \in P$. Така x принадлежи на всеки прост идеал на A .

Обратно, нека $x \notin \mathfrak{N}$. Ще докажем, че съществува прост идеал P на A , такъв че $x \notin P$.

Нека Σ е множеството от всички идеали J на A , за които $x^n \notin J$ за всяко $n = 1, 2, \dots$. Множеството Σ е непразно, защото $(0) \in \Sigma$ (тъй като x не е nilпотентен елемент). По стандартния начин (както в доказателството на теорема 1.4) се проверява, че Σ удовлетворява условията на лемата на Цорн относно наредбата включване на идеали и следователно притежава максимален елемент. Нека P е максимален

елемент на Σ . От определението на Σ имаме, че $x \notin P$. Ще докажем, че P е прост идеал.

Да допуснем противното и нека $a \notin P, b \notin P$, но $ab \in P$. Тогава $P+(a) \supset P, P+(b) \supset P$ и от избора на P следва $P+(a) \notin \Sigma, P+(b) \notin \Sigma$. Следователно за подходящи естествени числа n и k имаме $x^n \in P+(a)$ и $x^k \in P+(b)$, т.е. $x^n = u + ar$ и $x^k = v + bs$, където $u, v \in P; r, s \in A$. Оттук $x^{n+k} = uv + u.bs + v.ar + ab.rs \in P+(ab) = P$, което е противоречие. Следователно P е прост идеал.

Определение. Сечението на всички максимални идеали на пръстена A се нарича *радикал на Джекобсън* на A . Ще го бележим с $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$.

Тъй като всеки максимален идеал е прост, от теорема 2.2 следва включването $\mathfrak{N}(A) \subseteq \mathfrak{R}(A)$.

Твърдение 2.3. *В сила е равенството*

$$\mathfrak{R}(A) = \{a \in A \mid 1 - au \text{ е обратим елемент } \forall u \in A\}.$$

В частност, ако $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{R}(A)}$, то x е обратим елемент.

Доказателство. Нека $a \in \mathfrak{R}(A)$ и да допуснем, че $1 - au$ не е обратим елемент за някое $u \in A$. Тогава (следствие 1.5, б)) $1 - au \in M$ за някой максимален идеал M . Но $a \in \mathfrak{R}(A) \subseteq M$, откъдето $1 \in M$ и следователно $M = A$, противоречие.

Обратно, нека $1 - au$ е обратим елемент за всяко $u \in A$. Да допуснем, че $a \notin \mathfrak{R}(A)$, т.е. $a \notin M$ за някой максимален идеал M . Тогава $M+(a) = A$, откъдето $t + au = 1, t \in M, u \in A$. Така елементът $t = 1 - au$ се оказва обратим и следователно $M = A$, което е противоречие.

Накрая, нека $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{R}(A)}$. Това означава, че $a = 1 - x \in \mathfrak{R}(A)$ и тогава $x = 1 - a$ е обратим елемент.

Определение. Пръстенът A се нарича *полупрост*, ако $\mathfrak{R}(A) = (0)$.

От съответствието между идеалите на A , съдържащи $\mathfrak{R}(A)$ и идеалите на факторпръстена $A/\mathfrak{R}(A)$ следва, че $\mathfrak{R}(A/\mathfrak{R}(A)) = (0)$, т.е. че $A/\mathfrak{R}(A)$ е полупрост пръстен.

Упражнение 2.4. а) В пръстена на целите числа \mathbb{Z} са в сила равенствата $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{R}(\mathbb{Z}) = (0)$. Същите равенства са в сила и за пръстена $k[x]$ (k – поле).

б) Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n в произведение на прости множители. Тогава

$$\mathfrak{N}(\mathbb{Z}_n) = \mathfrak{R}(\mathbb{Z}_n) = (\bar{p}_1 \dots \bar{p}_k) = \bigcap_{i=1}^k (\bar{p}_i).$$

В частност, \mathbb{Z}_n е полупрост пръстен точно когато $n = p_1 \dots p_k$ (такива числа n се наричат полупрости). Аналогичен факт е в сила за пръстена $k[x]$ (k – поле).

в) В пример 2 преди твърдение 1.6 пръстенът A е числов и тогава $\mathfrak{N}(A) = (0)$. От друга страна, A е локален пръстен с единствен максимален идеал M и следователно $\mathfrak{R}(A) = M$. Така в този пръстен $\mathfrak{N}(A) \subset \mathfrak{R}(A)$.

Нека I е идеал в пръстена A и

$$r(I) = \{x \in A \mid \exists n = n(x) \in \mathbb{N} : x^n \in I\}.$$

Твърдение 2.5. Множеството $r(I)$ е идеал на A , съдържащ I и $\mathfrak{N}(A/I) = r(I)/I$.

Доказателство. Следва от твърдение 2.1, приложено за пръстена $\bar{A} = A/I$, като се вземе предвид, че един елемент $x \in r(I)$ точно когато образът му $\bar{x} \in \mathfrak{N}(\bar{A})$. (Доказателството може да се извърши и директно, аналогично на доказателството на твърдение 2.1.)

Определение. Идеалът $r(I)$ се нарича *радикал на идеала* I .

Ясно е, че $r(0) = \mathfrak{N}(A)$. Освен това, ако P е прост идеал, то $r(P) = P$ (съобразете, че и $\forall n \in \mathbb{N} \ r(P^n) = P$).

Твърдение 2.6. *Радикалът $r(I)$ на идеала I съвпада със сечението на всички прости идеали на A , съдържащи I .*

Доказателство. Следва от равенството $\mathfrak{N}(A/I) = r(I)/I$ и от теорема 2.2 (приложена за пръстена A/I).

Упражнение 2.7. Нека I и J са идеали в пръстена A . Да се докаже, че:

- а) $r(r(I)) = r(I)$;
- б) $r(I) = A \Leftrightarrow I = A$;
- в) $r(IJ) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$;
- г) $r(I + J) = r(r(I) + r(J))$.

Твърдение 2.8. Ако I и J са идеали в пръстена A и $r(I) + r(J) = A$, то $I + J = A$ (обратното е очевидно).

Доказателство. Използвайки упражнение 2.7, г) и б), получаваме

$$r(I + J) = r(r(I) + r(J)) = r(A) = A \Rightarrow I + J = A.$$

Задачи

Задача 2.1. Да се докаже, че ако x е нилпотентен елемент в пръстена A , елементът $1 + x$ е обратим. По-общо, сума на обратим и нилпотентен елемент е обратим елемент.

Задача 2.2. Нека A е пръстен и $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in A[x]$. Да се докаже, че:

- а) f е обратим елемент в $A[x]$ точно когато a_0 е обратим елемент в A , а a_1, \dots, a_n са нилпотентни;
- б) f е нилпотентен точно когато a_0, a_1, \dots, a_n са нилпотентни.

Задача 2.3. Да се докаже, че $\mathfrak{N}(A[x]) = \mathfrak{N}[x] = \mathfrak{N}(A[x])$.

Задача 2.4. Да се докаже, че ако A е област, то $\mathfrak{R}(A[x]) = (0)$. Вижте също задачи 9.6 и 9.8.

Задача 2.5. Нека $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът на полиномите на n променливи с коефициенти в полето k . Да се докаже, че $\mathfrak{R}(A) = (0)$.

Задача 2.6. Нека $A[[x]]$ е пръстенът на формалните степенни редове с коефициенти от пръстена A и $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Да се докаже, че:

- а) f е обратим точно когато a_0 е обратим в A ;
- б) f е нилпотентен $\Rightarrow a_n$ са нилпотентни $\forall n \geq 0$;

в) $f \in \mathfrak{R}(A[[x]])$ точно когато $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$.

Задача 2.7. Да се докаже, че $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ за всяка крайномерна алгебра над поле k . Вижте също задачи 9.4 и 9.5.

Задача 2.8. Нека $X \in M_n(A)$ е квадратна матрица с елементи в пръстена A . Да се докаже, че матрицата X е обратима тогава и само тогава, когато $\det X$ е обратим елемент на A .

§ 3. Взаимно прости идеали. Китайска теорема за остатъците

Определение. Ще казваме, че идеалите I и J на пръстена A са *взаимно прости*, ако $I + J = A$. Това означава, че съществуват елементи $x \in I$, $y \in J$, такива че $x + y = 1$. (По-общо, идеалите I_1, \dots, I_n се наричат *взаимно прости*, ако $I_1 + \dots + I_n = A$.)

Пример. В пръстена \mathbb{Z} идеалите (m) и (n) са взаимно прости точно когато $(m, n) = 1$. Това следва от твърдеството на Безу. Аналогичен факт е в сила за пръстена $k[x]$, k – поле.

Твърдение 3.1. Ако идеалите I_1 и I_2 на пръстена A са взаимно прости, то $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$. По-общо, ако I_1, \dots, I_n са два по два взаимно

прости идеала, то $\prod_{k=1}^n I_k = \bigcap_{k=1}^n I_k$.

Доказателство. Включването $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ е изпълнено за всеки два идеала на A (както и за произволен краен брой идеали). Обратно, нека $I_1 + I_2 = A$ и $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$ са елементи, за които $i_1 + i_2 = 1$. Да умножим това равенство с произволен елемент $x \in I_1 \cap I_2$: $x i_1 + x i_2 = x$. Очевидно $x i_1, x i_2 \in I_1 I_2$. Тогава и $x \in I_1 I_2$ и значи $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1 I_2$. Следователно $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$.

Общия случай ще докажем с индукция по n . Случаят $n = 2$ вече е разгледан. Нека $n > 2$. Да допуснем, че твърдението е вярно за идеалите

I_1, \dots, I_{n-1} и да положим $J = \prod_{k=1}^{n-1} I_k = \bigcap_{k=1}^{n-1} I_k$. Тъй като $I_k + I_n = A$ за $k =$

$1, \dots, n-1$, съществуват елементи $x_k \in I_k, y_k \in I_n$, такива че $x_k + y_k = 1$.

Тогава $x = x_1 \dots x_{n-1} \in \prod_{k=1}^{n-1} I_k = J$, а от друга страна $x = (1 - y_1) \dots (1 - y_{n-1})$

$= 1 - y$, където $y \in I_n$. Така $x + y = 1$ и значи $J + I_n = A$. Използвайки доказаното за $n = 2$, получаваме

$$\prod_{k=1}^n I_k = JI_n = J \cap I_n = \bigcap_{k=1}^n I_k.$$

Нека A_1, \dots, A_n са пръстени и да означим

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n = \sum_{k=1}^n A_k = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in A_k, k = 1, \dots, n\}.$$

Множеството A се превръща в пръстен с покомпонентно събиране и умножение. Този пръстен се нарича *директна сума на пръстените* A_1, \dots, A_n .

Можем да считаме, че $A_k \subseteq A$, отъждествявайки елемента $x_k \in A_k$ с елемента $(0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) \in A$. При това A_k е идеал на A . Очевидно $A_k \cap \sum_{j \neq k} A_j = (0)$. В същото време A_k е и факторпръстен на A .

Действително, изображението $\pi_k : A \rightarrow A_k$, дефинирано посредством равенството $\pi_k((x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)) = x_k$ е хомоморфизъм на A върху A_k (π_k се нарича проекция на A върху A_k). При това

$$\text{Ker } \pi_k = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)\} \cong \sum_{j \neq k} A_j.$$

Така $A_k \cong A / \text{Ker } \pi_k$.

Нека сега A е пръстен и $I_1, \dots, I_n \trianglelefteq A$. Разглеждаме изображението $\varphi : A \rightarrow \sum_{k=1}^n A / I_k$, дефинирано посредством равенството

$$\varphi(x) = (x + I_1, \dots, x + I_n) \quad (x \in A).$$

Директно се проверява, че φ е хомоморфизъм на пръстени. От определението е ясно, че един елемент $(x_1 + I_1, \dots, x_n + I_n) \in \sum_{k=1}^n A / I_k$ е образ на елемента $x \in A$, когато $x + I_k = x_k + I_k$, т.е. когато $x \equiv x_k \pmod{I_k}$, $k = 1, \dots, n$. В частност, $\varphi(x) = 0$ означава, че $x \in I_k$ за

всяко $k = 1, \dots, n$, така че $\text{Ker } \varphi = \bigcap_{k=1}^n I_k$. Следователно φ е инективен

хомоморфизъм точно когато $\bigcap_{k=1}^n I_k = (0)$.

Теорема 3.2 (китайска теорема за остатъците). *Хомоморфизмът φ е сюрективен (т.е. върху) точно когато идеалите I_1, \dots, I_n са два по два*

взаимно прости (и тогава $\text{Ker } \varphi = \bigcap_{k=1}^n I_k = \prod_{k=1}^n I_k$).

Доказателство. \Rightarrow) Ще докажем, че (например) I_1 и I_2 са взаимно прости. Тъй като φ е сюрективен хомоморфизъм, съществува елемент $x \in A$, такъв че $\varphi(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Тогава $x \equiv 1 \pmod{I_1}$ и $x \equiv 0 \pmod{I_2}$, т.е. $1 - x \in I_1$ и $x \in I_2$. При това $(1 - x) + x = 1$. Следователно $I_1 + I_2 = A$.

\Leftarrow) Първо ще докажем, че за всяко $k = 1, \dots, n$ съществува елемент $e_k \in A$, такъв че $\varphi(e_k) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (елементът 1 стои на k -та позиция). Ще разгледаме само случая $k = 1$. Тъй като идеалът I_1 е взаимно прост с всеки от останалите идеали, съществуват елементи $u_2, \dots, u_n \in I_1$ и $v_2 \in I_2, \dots, v_n \in I_n$, такива че $u_2 + v_2 = 1, \dots, u_n + v_n = 1$. Да положим $e_1 = v_2 \dots v_n = (1 - u_2) \dots (1 - u_n)$. От $e_1 = v_2 \dots v_n$ следва $e_1 \equiv 0 \pmod{I_k}$, $k = 2, \dots, n$. От друга страна, от $e_1 = (1 - u_2) \dots (1 - u_n)$ следва $e_1 \equiv 1 \pmod{I_1}$. Следователно $\varphi(e_1) = (1, 0, \dots, 0)$. Аналогично се конструират елементите e_2, \dots, e_n .

Нека сега $(x_1 + I_1, \dots, x_n + I_n)$ е произволен елемент от $\sum_{k=1}^n A/I_k$. Да положим $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. От доказаното по-горе следва, че

$$\varphi(x) = (x_1 + I_1, \dots, x_n + I_n).$$

Следователно φ е сюрективен хомоморфизъм.

Забележка. Древните китайци са познавали горната теорема в следния вид: *Нека i_1, \dots, i_n са две по две взаимно прости цели числа, а*

x_1, \dots, x_n са произволни цели числа. Тогава съществува цяло число x , такова че $x \equiv x_1 \pmod{i_1}, \dots, x \equiv x_n \pmod{i_n}$.

Задачи

Задача 3.1. Нека I_1, \dots, I_n са два по два взаимно прости идеала в пръстена A и $d_k > 0, k = 1, \dots, n$. Да се докаже, че идеалите $I_1^{d_1}, \dots, I_n^{d_n}$ също са два по два взаимно прости.

Задача 3.2. а) Нека $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на естественото число $n > 1$ в произведение на прости множители. Да се докаже, че

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

б) Нека k е поле и $f = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на неконстантния полином $f \in k[x]$ в произведение на неразложими над k полиноми. Да се докаже, че

$$k[x]/(f) \cong k[x]/(p_1^{\alpha_1}) \oplus \dots \oplus k[x]/(p_k^{\alpha_k}).$$

Задача 3.3. Нека A^* е мултипликативната група на пръстена A . Да се докаже, че ако I и J са взаимно прости идеали в A , то

$$(A/IJ)^* \cong (A/I)^* \times (A/J)^*.$$

Задача 3.4. Нека $\varphi(n)$ е функцията на Ойлер (броят на естествените числа, ненадминаващи n и взаимно прости с n). Да се докаже, че ако a и b са взаимно прости естествени числа, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (мултипликативност на функцията на Ойлер).

Задача 3.5. Нека A_1, \dots, A_n са пръстени и I е идеал в пръстена $A = \sum_{k=1}^n A_k$. Нека π_k е проекцията $A \rightarrow A_k$ и $I_k = \pi_k(I), k = 1, \dots, n$. Да се докаже, че:

$$\text{а) } I = \sum_{k=1}^n I_k \text{ и } A/I \cong \sum_{k=1}^n A_k/I_k;$$

б) ако I е прост идеал в A , то съществува индекс k ($1 \leq k \leq n$), такъв че I_k е прост идеал в A_k , а $I_j = A_j$ за $j \neq k$;

в) ако I е максимален идеал в A , то съществува индекс k ($1 \leq k \leq n$), такъв че I_k е максимален идеал в A_k , а $I_j = A_j$ за $j \neq k$.

Определение (нилпотентен идеал). Един идеал I в пръстен A се нарича *нилпотентен*, ако съществува естествено число n , такова че $I^n = (0)$.

Задача 3.6. Нека $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ са (не непременно различни) максимални идеали в пръстена A и $I = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n$. Да се докаже, че A/I е полулокален пръстен с nilпотентен радикал на Джекобсън.

Задача 3.7. Да се докаже, че всеки полулокален пръстен с nilпотентен радикал на Джекобсън има размерност на Крул, равна на 0.

Задача 3.8. Да се докаже, че за един пръстен A следните условия са еквивалентни:

а) съществуват (не непременно различни) максимални идеали $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ на A , такива че $\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n = (0)$;

б) A е полулокален пръстен и $\mathfrak{R}(A)$ е nilпотентен идеал;

в) $A \cong \sum_{k=1}^n A_k$, където A_k , $k = 1, \dots, n$ са локални пръстени с nilпотентни максимални идеали.

Задача 3.9. Нека A е крайномерна алгебра над поле k . Да се докаже, че $\mathfrak{R}(A) = (0)$ (т.е. A е полупрост пръстен) тогава и само тогава, когато A е директна сума на краен брой полета, всяко от които е крайно разширение на k (т.е. крайномерно линейно пространство над k).

§ 4. Локализация

В този параграф накратко ще разгледаме една важна конструкция от арсенала на комутативната алгебра – *локализация* на даден пръстен относно мултипликативно затворено множество.

Процесът, чрез който от пръстена на целите числа \mathbb{Z} се получава полето на рационалните числа \mathbb{Q} (в което \mathbb{Z} се влага) се обобщава без промяна за произволна област A , при което се получава полето от частни на A (вижте [4], §8). За тази цел в множеството от всички наредени двойки (a, b) , където $a, b \in A, b \neq 0$, се въвежда релация на еквивалентност \sim : $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad - cb = 0$. При проверката за транзитивност се налага да се съкращава на ненулев елемент, т.е. да се използва, че в A няма ненулеви делители на нулата. Тази конструкция може да се обобщи без ограничението, че A е област.

Нека A е пръстен и $S \subseteq A$. Ще казваме, че множеството S е *мултипликативно затворено*, ако $1 \in S$ и от $u, v \in S$ следва $uv \in S$. В множеството от всички наредени двойки (a, s) където $a \in A, s \in S$, въвеждаме релация \sim по правилото:

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S : (at - bs)u = 0.$$

Очевидно тази релация е рефлексивна и симетрична. По-нататък, нека $(a, s) \sim (b, t)$ и $(b, t) \sim (c, u)$. Тогава в S съществуват елементи v, w , такива че $(at - bs)v = 0$, $(bu - ct)w = 0$. Като умножим първото равенство с uw , а второто – със sv и ги съберем, получаваме $(au - cs)tvw = 0$. Тъй като S е мултипликативно затворено, то $tvw \in S$ и значи $(a, s) \sim (c, u)$. Следователно въведената релация е и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност.

Да означим с a/s класа на еквивалентност на двойката (a, s) и нека $S^{-1}A$ е множеството от всички класове на еквивалентност. В това множество въвеждаме по стандартния начин операции събиране и умножение:

$$\begin{aligned} a/s + b/t &= (at + bs)/st, \\ (a/s)(b/t) &= ab/st. \end{aligned}$$

Предоставяме на читателя да провери, че тези определения не зависят от избора на представителите (a, s) и (b, t) и че $S^{-1}A$ се превръща в комутативен пръстен с единица.

Не е трудно да се покаже, че $S^{-1}A$ е нулевият пръстен точно когато $0 \in S$. Този случай не е интересен и затова по-нататък ще разглеждаме само мултипликативно затворени множества S , за които $0 \notin S$.

Упражнение 4.1. Да разгледаме изображението $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$, дефинирано чрез равенството $\varphi(a) = a/1$. Да се докаже, че:

а) φ е хомоморфизъм на пръстени (в общия случай този хомоморфизъм не е инективен);

б) $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow \exists s \in S: as = 0$; така φ е инективен хомоморфизъм (влагане) точно когато S не съдържа делители на нулата;

в) $s \in S \Rightarrow \varphi(s)$ е обратим елемент в пръстена $S^{-1}A$;

г) всеки елемент от $S^{-1}A$ се записва във вида $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ за някои елементи $a \in A, s \in S$.

Ако $I \trianglelefteq A$, означаваме $S^{-1}I = \{a/s \mid a \in I, s \in S\}$. Множеството $S^{-1}I$ е идеал в пръстена $S^{-1}A$ и (както лесно се проверява) всеки идеал на $S^{-1}A$ е от този вид.

Примери. 1. Ако A е област и $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A$ е полето от частни на A .

2. Нека A е пръстен и f е елемент на A , който не е делител на нулата (в частност f не е нилпотентен елемент). Множеството $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ е мултипликативно затворено. Полученият пръстен $S^{-1}A$ е "малко по-голям от A " и в него f вече е обратим елемент. В този случай вместо $S^{-1}A$ понякога ще пишем $A\left[\frac{1}{f}\right]$.

В частния случай когато $A = \mathbb{Z}$ и $S = \{2^n \mid n \geq 0\}$ пръстенът $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ се състои от всички рационални числа, чийто знаменател е степен на числото 2.

Накрая по-подробно ще се спрем на още един пример (частен случай на този пример е пръстенът от пример 2 преди твърдение 1.6).

3. Нека A е пръстен, P е прост идеал на A и $S = A \setminus P$. Определението за прост идеал е еквивалентно на условието S да е мултипликативно затворено множество. В този случай вместо $S^{-1}A$ ще пишем A_P . Ясно е, че $A_P = \{a/s \mid a \in A, s \notin P\}$. Да означим

$$M = S^{-1}P = \{a/s \mid a \in P, s \notin P\} \subseteq A_P.$$

Упражнение 4.2. Да се докаже, че:

- а) A_P е локален пръстен с единствен максимален идеал M ;
- б) ако A е локален пръстен, чийто единствен максимален идеал е P , то $A_P = A$;
- в) полето A_P / M е изоморфно на полето от частни на областта $\bar{A} = A / P$.

Горният пример може да се обобщи, като вместо един прост идеал се разгледа произволна фамилия от прости идеали на A , а S е допълнението на тяхното обединение.

Упражнение 4.3. Нека S е мултипликативно затворено множество на пръстена A . Да се докаже, че съществува биекция между множеството от простите идеали на A , непресичащи S и множеството от всички прости идеали на пръстена $S^{-1}A$. (Разгледайте изображението $Q \rightarrow S^{-1}Q$, където Q е прост идеал на A , непресичащ S .)

В частност, ако P е прост идеал на A и $S = A \setminus P$, съществува биекция между множеството от простите идеали на A , съдържащи се в P и множеството от всички прости идеали на пръстена A_P .

Задачи

Задача 4.1. Нека S е мултипликативно затворено множество в пръстена A , несъдържащо 0 . Да се докаже, че множеството Σ от идеалите на A , непресичащи S , притежава максимални елементи и всеки максимален елемент на Σ е прост идеал на A .

Задача 4.2. Нека A е ненулев пръстен и Σ е множеството на всички мултипликативно затворени множества на A , несъдържащи 0 . Да се

докаже, че Σ притежава максимални елементи и един елемент S на Σ е максимален точно когато $P = A \setminus S$ е минимален прост идеал на A .

Задача 4.3. Нека $I \subseteq A$ и $S = 1 + I$. Да се докаже, че $S^{-1}I \subseteq \mathfrak{R}(S^{-1}A)$.

Задача 4.4. Да се докаже, че ако S е мултипликативно затворено множество в пръстена A , то $S^{-1}\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(S^{-1}A)$. Сравнете със задача 4.11. Винаги ли е вярно, че $S^{-1}\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(S^{-1}A)$?

Задача 4.5. Да се докаже, че за пръстена A следните условия са еквивалентни:

- а) $\mathfrak{N}(A) = (0)$;
- б) $\mathfrak{N}(A_P) = (0)$ за всеки прост идеал P на A ;
- в) $\mathfrak{N}(A_M) = (0)$ за всеки максимален идеал M на A .

Задача 4.6. Да се докаже, че ако A е област, то A_P също е област за всеки прост идеал P на A . Вярно ли е обратното?

Задача 4.7. Нека I_1, \dots, I_n са идеали в пръстена A и S е мултипликативно затворено множество в A . Да се докаже, че:

- а) $S^{-1}(I_1 \cap \dots \cap I_n) = S^{-1}I_1 \cap \dots \cap S^{-1}I_n$;
- б) $S^{-1}(I_1 \dots I_n) = S^{-1}I_1 \dots S^{-1}I_n$.

В задачи 4.8 – 4.13 ще предполагаме, че S е фиксирано мултипликативно затворено множество в пръстена A и ще означаваме с $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$ хомоморфизма на пръстени, зададен с $\varphi(a) = a/1$, $a \in A$.

Задача 4.8 (универсално свойство на локализацията). Нека $A \xrightarrow{\psi} B$ е хомоморфизъм на пръстени, такъв че всеки елемент на множеството $\psi(S)$ е обратим в пръстена B . Да се докаже, че съществува *единствен* хомоморфизъм на пръстени $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$, такъв че $\psi = \theta\varphi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

Кой е този хомоморфизъм, когато $B = S^{-1}A$ и $\psi = \varphi$?

Задача 4.9 (единственост на локализацията). Нека $A \xrightarrow{\psi} B$ е хомоморфизъм на пръстени, който удовлетворява следните условия:

а) всеки елемент на множеството $\psi(S)$ е обратим в пръстена B ;

б) за всеки хомоморфизъм на пръстени $A \xrightarrow{\psi'} B'$, такъв че всеки елемент на множеството $\psi'(S)$ е обратим в пръстена B' , съществува *единствен* хомоморфизъм на пръстени $B \xrightarrow{\theta'} B'$, такъв че $\psi' = \theta' \psi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \psi' \downarrow & \swarrow \theta' & \\ & & B' \end{array}$$

Да се докаже, че хомоморфизмът $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$ от задача 4.8 е изоморфизъм. Следователно, ако $A \xrightarrow{\psi} B$ е хомоморфизъм на пръстени, който удовлетворява условията а) и б), то $B \cong S^{-1}A$.

Задача 4.10 (локализация и факторизация). Нека I е идеал в пръстена A . Да означим с \bar{S} образа на S при естественния хомоморфизъм $\pi: A \rightarrow A/I$. Да се докаже, че

а) $\bar{S}^{-1}(A/I) \cong S^{-1}A/S^{-1}I$;

б) ако $P \supseteq I$ е прост идеал в пръстена A , то $(A/I)_{P/I} \cong A_P/IA_P$.

Задача 4.11. Да се докаже, че $r(S^{-1}I) = S^{-1}(r(I))$ за всеки идеал I в пръстена A .

Задача 4.12 (транзитивност на локализацията). Нека $T \supseteq S$ е мултипликативно затворено множество в пръстена A и \bar{T} е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Да се докаже, че $\bar{T}^{-1}(S^{-1}A) \cong T^{-1}A$.

Задача 4.13. Нека P е прост идеал в A , такъв че $P \cap S = \emptyset$. Да означим с \mathfrak{P} простия идеал $S^{-1}P$ в $S^{-1}A$. Да се докаже, че $(S^{-1}A)_{\mathfrak{P}} \cong A_P$.

Задача 4.14. Нека $P \subseteq Q$ са прости идеали в пръстена A . Да означим с \mathfrak{P} простия идеал PA_Q в пръстена A_Q . Да се докаже, че $(A_Q)_{\mathfrak{P}} \cong A_P$.

Задача 4.15. Нека P_1, \dots, P_k са прости идеали в пръстена A и $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i$. Да се докаже, че:

а) пръстенът $S^{-1}A$ е полулокален;

б) ако между идеалите P_i няма включвания (т.е. $P_i \not\subseteq P_j, i \neq j$), максималните идеали в пръстена $S^{-1}A$ са точно идеалите $S^{-1}P_i, i = 1, \dots, k$.

Задача 4.16. Нека A и B са пръстени и P е прост идеал в A . Да означим с \mathfrak{P} простия идеал $P \oplus B$ в пръстена $A \oplus B$. Да се докаже, че $(A \oplus B)_{\mathfrak{P}} \cong A_P$.

Задача 4.17. Нека A е полулокален пръстен с максимални идеали $\mathfrak{M}_i, i = 1, \dots, n$. Да означим с $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{\mathfrak{M}_i}$ хомоморфизма на локализация спрямо $\mathfrak{M}_i, i = 1, \dots, n$ и с $A \xrightarrow{\varphi} \sum_{i=1}^n A_{\mathfrak{M}_i}$ изображението, определено с формулата $\varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)), a \in A$. Да се докаже, че:

а) φ е инективен хомоморфизъм на пръстени;

б) φ е изоморфизъм тогава и само тогава, когато пръстенът A е изоморфен на директна сума на n локални пръстена;

в) ако радикалът на Джекобсън $\mathfrak{R}(A)$ на A е нилпотентен, то φ е изоморфизъм.

§ 5. Модули. Крайнопородени модули

Определение. Нека A е пръстен и M е абелева група, записана адитивно. Ще казваме, че M е A -модул (или *модул над A*), ако на всеки елемент $a \in A$ и на всеки елемент $x \in M$ е съпоставен елемент $ax \in M$, като се изпълняват следните аксиоми ($a, b \in A$; $x, y \in M$):

$$a(x + y) = ax + ay;$$

$$(a + b)x = ax + bx;$$

$$(ab)x = a(bx);$$

$$1 \cdot x = x.$$

Така аксиомите за модул над пръстен точно съвпадат с аксиомите за линейно пространство над поле (единствената разлика е, че "скаларите" лежат в пръстен, който може и да не е поле).

Понятието модул обобщава някои добре известни алгебрични понятия, както показват следващите примери.

Примери. 1. Всеки идеал и всеки факторпръстен на един пръстен A е A -модул. В частност, самият пръстен A е A -модул.

2. Всяко линейно пространство над поле е модул над това поле.

3. Всяка (адитивно записана) абелева група е \mathbb{Z} -модул (ако $n \geq 0$, полагаме $nx = x + \dots + x$ и $(-n)x = (-x) + \dots + (-x)$).

Ако M е A -модул, *подмодул* на M се нарича всяка подгрупа N на M , затворена относно умножението с елементи от A (това е аналог на понятието подпространство). Ще бележим $N \leq M$ (или $N < M$, ако $N \neq M$). Сума на подмодули се дефинира точно както сума на подпространства.

Примери. 1. Подмодулите на пръстена A , разгледан като модул над себе си, са точно идеалите на A .

2. Всяко подпространство на линейно пространство V над поле е подмодул на V .

3. Всяка подгрупа на абелева група M (разгледана като \mathbb{Z} -модул) е подмодул на M .

4. Нека M е A -модул и $I \leq A$.

а) Ако $x \in M$, множеството $Ix = \{ax \mid a \in I\}$ е подмодул на M . В частност, Ax е подмодул на M .

б) Множеството $IM = \left\{ \sum a_i x_i \mid a_i \in I, x_i \in M \right\}$ е подмодул на M . По-общо, ако $N \leq M$, то $IN = \left\{ \sum a_i x_i \mid a_i \in I, x_i \in N \right\} \leq M$.

Ако M е A -модул и $a \in A$, означаваме $aM = \{ax \mid x \in M\}$.

Определение. Множеството $\text{Ann } M = \{a \in A \mid aM = \{0\}\}$ ще наричаме *анулятор на M в A* . Директно се проверява, че $\text{Ann } M \leq A$.

Ще казваме, че M е *точен A -модул*, ако $\text{Ann } M = (0)$.

Ще отбележим, че ако $I \leq A$, $I \subseteq \text{Ann } M$ (например $I = \text{Ann } M$), то M може да се разглежда като модул над факторпръстена A/I : ако $\bar{a} \in A/I$ ($a \in A$) и $x \in M$, дефинираме $\bar{a}x = ax$. Фактът, че $I \subseteq \text{Ann } M$ осигурява коректност на тази дефиниция (т.е. независимост от избора на представител на съседния клас \bar{a}).

Важно е да се осъзнае, че *подмодулите на M , разглеждани като модул над A/I и като модул над A , са едни и същи*.

Упражнение 5.1. Да се докаже, че:

а) ако $N_1, N_2 \leq M$, то $\text{Ann}(N_1 + N_2) = \text{Ann } N_1 \cap \text{Ann } N_2$;

б) M е *точен $A/\text{Ann } M$ -модул*.

Ако M и M' са A -модули, ще казваме, че едно изображение $\varphi: M \rightarrow M'$ е *хомоморфизъм на A -модули*, ако $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ за всички елементи $a \in A$; $x, y \in M$ (това е аналог на понятието линейно изображение). Ако φ е биекция, ще казваме, че φ е *изоморфизъм*, а модулите M и M' са *изоморфни* ($M \cong M'$). Както обикновено, под *ядро* и *образ* на φ ще разбираме съответно множествата

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\} \leq M$$

и

$$\text{Im } \varphi = \varphi(M) = \{y \in M' \mid \exists x \in M : \varphi(x) = y\} \leq M'.$$

Множеството от всички хомоморфизми от M към M' ще означаваме с $\text{Hom}(M, M')$. Когато $M' = M$, за краткост ще пишем само $\text{Hom } M$. Хомоморфизмите от $\text{Hom } M$ (аналог на понятието линейен оператор) ще наричаме *ендоморфизми на M* .

Елементите на пръстена A могат да се разглеждат като ендоморфизми на M : ако $a \in A$, дефинираме $\varphi_a: M \rightarrow M$ посредством равенството $\varphi_a(x) = ax$. Ако φ е произволен ендоморфизъм от $\text{Hom } M$, равенството $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ означава, че $\varphi\varphi_a = \varphi_a\varphi$, т.е. че ендоморфизмите φ_a комутират с всички ендоморфизми от $\text{Hom } M$.

Множеството $\text{Hom}(M, M')$ (и в частност $\text{Hom } M$) може да се превърне в A -модул, определяйки $\varphi + \psi$ и $a\varphi$ чрез формулите

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \text{и} \quad (a\varphi)(x) = a\varphi(x) \quad (a \in A, x \in M).$$

Упражнение 5.2. Ако M е A -модул, да се докаже, че A -модулите M и $\text{Hom}(A, M)$ са изоморфни.

Упътване. Докажете, че изображението, съпоставящо на всеки хомоморфизъм $\varphi \in \text{Hom}(A, M)$ елемента $\varphi(1) \in M$ е изоморфизъм на A -модули.

Ако N е подмодул на A -модула M , върху факторгрупата M/N се пренася по естествен начин структурата на A -модул: $a(x + N) = ax + N$ ($a \in A, x \in M$). Този модул се нарича *фактормодул на M по N* . С π ще означаваме *естествения хомоморфизъм* от M върху M/N : $\pi(x) = x + N = \bar{x}$. Теоремата за хомоморфизмите звучи по познатия начин: ако $\varphi: M \rightarrow M'$ е хомоморфизъм на A -модули, то $M / \text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$.

Както и при идеали, в сила са следните свойства:

- 1) $N_1, N_2 \leq M \Rightarrow N_1 / (N_1 \cap N_2) \cong (N_1 + N_2) / N_2$;
- 2) $M \geq L \geq N \Rightarrow (M / N) / (L / N) \cong M / L$;
- 3) ако $N, L \leq M$, пълният праобраз на $\pi(L) \leq M / N$ е $L + N \leq M$.

Освен тези свойства е в сила и

$$4) I \leq A \Rightarrow I(M / N) = (IM + N) / N.$$

Нека M_1, \dots, M_n са A -модули и да означим

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n = \sum_{k=1}^n M_k = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in M_k, k = 1, \dots, n\}.$$

Множеството M се превръща в A -модул чрез покомпонентно събиране и умножение с елемент от A :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Този модул се нарича *директна сума* на модулите M_1, \dots, M_n . Както и при пръстени, M_k е едновременно подмодул и фактормодул на M ($1 \leq k \leq n$).

Модулът $A^n = \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_n$ се нарича *свободен A -модул с ранг n* .

"Свободата" на A^n се състои в това, че, подобно на линейните пространства, този модул притежава "базис" и всяко изображение на базиса в произволен модул може да бъде продължено до хомоморфизъм на A -модули.

Твърдение 5.3. Нека A^n е свободният A -модул с ранг n и

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1) \in A^n.$$

Тогава:

а) $A^n = Ae_1 + Ae_2 + \dots + Ae_n$ и всеки елемент $x \in A^n$ се записва по единствен начин във вида $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n$, $a_k \in A$, $1 \leq k \leq n$;

б) ако M е произволен A -модул и x_1, \dots, x_n са произволни елементи от M , съществува единствен хомоморфизъм $\varphi: A^n \rightarrow M$, такъв че $\varphi(e_k) = x_k$, $1 \leq k \leq n$.

Доказателството по нищо не се различава от доказателството на аналогичните факти за n -мерно линейно пространство над поле.

Определение. Един A -модул M се нарича *крайнопороден A -модул*, ако съществуват краен брой елементи $x_1, \dots, x_n \in M$, такива че $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$. Това означава, че всеки елемент $x \in M$ може да се представи (поне по един начин) във вида $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, $a_k \in A$, $k = 1, \dots, n$.

Твърдение 5.4. Един A -модул M е *крайнопороден* тогава и само тогава, когато е *изоморфен на фактормодул на свободния модул A^n за някое естествено число n* .

Доказателство. \Rightarrow) Нека $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$, $x_k \in M$, $k = 1, \dots, n$. От твърдение 5.3, б) имаме, че съществува (единствен) хомоморфизъм $\varphi: A^n \rightarrow M$, такъв че $\varphi(e_k) = x_k$ ($1 \leq k \leq n$). Очевидно φ е хомоморфизъм върху M и от теоремата за хомоморфизмите получаваме $M \cong A^n / \text{Ker } \varphi$.

\Leftarrow) Нека M е изоморфен на фактормодул на A^n , т.е. съществува сюрективен хомоморфизъм $\varphi: A^n \rightarrow M$. Тъй като елементите e_1, \dots, e_n пораждат A^n (твърдение 5.3, а)), то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ пораждат M , така че M е крайнопороден A -модул.

Твърдение 5.5 (лема на Накаяма). *Нека M е крайнопороден A -модул, $I \trianglelefteq A$ и $I \subseteq \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$ (в частност може $I = \mathfrak{R}$). Ако е изпълнено $IM = M$, то $M = (0)$.*

Доказателство. Да допуснем, че $M \neq (0)$ и нека u_1, \dots, u_n е минимална система пораждащи на M като A -модул. Имаме $M = Au_1 + \dots + Au_n$ и оттук $IM = Iu_1 + \dots + Iu_n$. Тъй като по условие $IM = M$, то u_n може да се представи във вида $u_n = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, $a_k \in I$ ($1 \leq k \leq n$). Оттук $(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + \dots + a_{n-1}u_{n-1}$. Но $a_n \in I \subseteq \mathfrak{R}$ и тогава $1 - a_n$ е обратим елемент (твърдение 2.3). Така

$$u_n = (1 - a_n)^{-1} a_1 u_1 + \dots + (1 - a_n)^{-1} a_{n-1} u_{n-1},$$

което противоречи на минималността на системата пораждащи u_1, \dots, u_n . Следователно $M = (0)$.

Следствие 5.6. *Нека M е крайнопороден A -модул, $N \leq M$ и $I \trianglelefteq A$, $I \subseteq \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$. Ако $M = N + IM$, то $M = N$.*

Доказателство. В сила е равенството $I(M/N) = (IM + N)/N$. Тъй като по условие $IM + N = M$, то $I(M/N) = M/N$. Сега от лемата на Накаяма, приложена за фактормодула M/N , следва $M/N = (0)$, което означава, че $M = N$.

Нека A е локален пръстен с максимален идеал T и $k = A/T$. Тъй като T е максимален идеал, то k е поле. Нека M е крайнопороден A -модул и $\bar{M} = M/TM$. Очевидно $T \subseteq \text{Ann } \bar{M}$ и тогава \bar{M} може да се разглежда

като модул над A/T , т.е. като k -линейно пространство. Ясно е, че щом M е крайнопороден A -модул, то \bar{M} е крайномерно пространство над k .

Твърдение 5.7. Нека $\pi: M \rightarrow M/TM = \bar{M}$ е естественият хомоморфизъм и $x_1, \dots, x_n \in M$ са такива елементи, че $\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)$ са базис на \bar{M} над k . Тогава x_1, \dots, x_n пораждат M като A -модул (т.е. $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$).

Доказателство. Да означим $N = Ax_1 + \dots + Ax_n$. Искаме да докажем, че $M = N$.

От условието следва, че $\pi(N) = M/TM (= \pi(M))$. Тогава пълният праобраз на $\pi(N)$ е M . От друга страна, този пълен праобраз е $N + TM$. Следователно $M = N + TM$. Тъй като $T = \mathfrak{R}(A)$ (защото A е локален пръстен с единствен максимален идеал T), от следствие 5.6 получаваме $M = N$.

Задачи

Задача 5.1. Нека M е A -модул и $N \leq M$. Да се докаже, че ако N и M/N са крайнопородени A -модули, то и M е крайнопороден A -модул.

Задача 5.2. Нека M е A -модул и $\varphi: M \rightarrow M$ е фиксиран хомоморфизъм на A -модули. За всеки полином

$$f = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k \in A[\lambda]$$

и за всеки елемент $x \in M$ дефинираме елемент $fx \in M$ по следното правило:

$$fx = f(\varphi)(x) = a_0x + a_1\varphi(x) + \dots + a_k\varphi^k(x)$$

(в частност, $\lambda x = \varphi(x)$). Да се докаже, че така дефинираното действие на полиномиалния пръстен $A[\lambda]$ върху абелевата група M снабдява M със структура на $A[\lambda]$ -модул.

Задача 5.3 (детерминантен трик). Нека M е крайнопороден A -модул със система от пораждащи елементи x_1, \dots, x_n и нека $A = (a_{ij}) \in M_n(A)$ е квадратна матрица от ред n , такава че

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Да се докаже, че:

а) $\det A \in \text{Ann } M$;

б) ако $\det A$ е обратим елемент на A , то $M = (0)$.

Задача 5.4 (теорема на Хамилтън-Кейли). Нека M е крайнопороден A -модул със система от пораждатели елементи x_1, \dots, x_n и $\varphi: M \rightarrow M$ е хомоморфизъм на A -модули. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(A)$ е квадратна матрица от ред n , такава че

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ако $\chi_\varphi = \det(\lambda E_n - A) \in A[\lambda]$, да се докаже, че $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Задача 5.5 (обобщена теорема на Хамилтън-Кейли). Нека $I \trianglelefteq A$, M е крайнопороден A -модул и $\varphi: M \rightarrow M$ е хомоморфизъм на A -модули, такъв че $\varphi(M) \subseteq IM$. Да се докаже, че съществува полином

$$\chi = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \in A[\lambda],$$

такъв че $a_k \in I$, $k = 1, \dots, n$ и $\chi(\varphi) = 0$.

Задача 5.6 (обобщена лема на Накаяма). Нека $I \trianglelefteq A$ и M е крайнопороден A -модул, такъв че $M = IM$. Да се докаже, че съществува елемент $a \in I$, такъв че $1 + a \in \text{Ann } M$. В частност, ако $I \subseteq \mathfrak{R}(A)$, то $M = (0)$.

Задача 5.7. Нека M е крайнопороден A -модул и $\varphi: M \rightarrow M$ е сюрективен хомоморфизъм на A -модули. Да се докаже, че φ е изоморфизъм.

Определение (цели елементи и цели разширения). Ако пръстенът A е подпръстен на пръстена B , ще казваме, че B е *разширение на A* или че $A \subseteq B$ е *разширение на пръстени*. Един елемент $b \in B$ се нарича *цял над A* , ако съществува полином $f \in A[x]$ със старши коефициент, равен на 1, такъв че $f(b) = 0$. Пръстенът B се нарича *цяло разширение на A* , ако всеки елемент $b \in B$ е цял над A .

Задача 5.8. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени. Да се докаже, че ако елементът $b \in B$ е цял над A , то A -алгебрата $A[b] = \{g(b) \mid g \in A[x]\}$, породена от b , е крайнопороден A -модул.

Задача 5.9. Да се докаже, че ако разширението B на пръстена A е крайнопороден A -модул, то B е цяло разширение на A .

Задача 5.10. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени и $b \in B$. Да се докаже, че елементът b е цял над A точно когато пръстенът $A[b]$ е крайнопороден A -модул. Следователно, ако елементът b е цял над A , пръстенът $A[b]$ е цяло разширение на A .

Задача 5.11. Нека $A \subseteq B \subseteq C$ са разширения на пръстени. Да се докаже, че ако B е крайнопороден A -модул и C е крайнопороден B -модул, то C е крайнопороден A -модул.

Задача 5.12. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени и $b_1, \dots, b_m \in B$. Да се докаже, че елементите b_1, \dots, b_m са цели над A точно когато пръстенът $A[b_1, \dots, b_m]$ е крайнопороден A -модул.

Задача 5.13 (цяло затваряне). Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени. Да се докаже, че множеството \tilde{A} , състоящо се от всички елементи на B , които са цели над A , е подпръстен на B .

Пръстенът \tilde{A} се нарича *цяло затваряне* на пръстена A в пръстена B .

Задача 5.14 (транзитивност на целите разширения). Нека $A \subseteq B \subseteq C$ са разширения на пръстени. Да се докаже, че C е цяло разширение на A точно когато B е цяло разширение на A и C е цяло разширение на B .

Задача 5.15. Нека B е цяло разширение на A , $J \trianglelefteq B$ и $I = J \cap A$. Да се докаже, че B/J е цяло разширение на A/I .

Задача 5.16. Нека B е цяло разширение на A и S е мултипликативно затворено множество в A . Да се докаже, че $S^{-1}B$ е цяло разширение на $S^{-1}A$.

Задача 5.17. Нека B е цяло разширение на A и I е идеал на A , такъв че $IB = B$. Да се докаже, че $I = A$.

Задача 5.18. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на области и $J \trianglelefteq B$. Да се докаже, че ако $J \neq (0)$, то $J \cap A \neq (0)$.

Определение (локализация на модул). Нека A е пръстен, S е мултипликативно затворено множество в A и M е A -модул. В

множеството от всички наредени двойки (x, s) , където $x \in M$, $s \in S$, въвеждаме релация \sim по правилото:

$$(x, s) \sim (y, t) \Leftrightarrow \exists u \in S: u(tx - sy) = 0.$$

Проверява се, както в § 4, че това е релация на еквивалентност. Нека x/s е класът на еквивалентност на двойката (x, s) и нека $S^{-1}M$ е множеството от всички класове на еквивалентност. В това множество въвеждаме операции събиране на елементи и умножение с елементи от $S^{-1}A$:

$$\begin{aligned} x/s + y/t &= (tx + sy)/st, \quad x/s, y/t \in S^{-1}M; \\ (a/s)(x/t) &= ax/st, \quad a/s \in S^{-1}A, x/t \in S^{-1}M. \end{aligned}$$

Непосредствено се проверява, че тези две операции са коректно определени и превръщат множеството $S^{-1}M$ в $S^{-1}A$ -модул. Тъй като $S^{-1}A$ е A -алгебра, то $S^{-1}M$ притежава и структурата на A -модул:

$$a(x/s) = (ax)/s, \quad a \in A, x/s \in S^{-1}M.$$

От определението следва, че изображението $M \xrightarrow{\varphi} S^{-1}M$, зададено с равенството $\varphi(x) = x/1$, $x \in M$, е хомоморфизъм на A -модули.

Нека P е прост идеал в пръстена A . Тогава $S = A \setminus P$ е мултипликативно затворено множество на A . В този случай (както и при пръстени) вместо $S^{-1}M$ ще пишем M_P .

В задачи 5.19 – 5.25 ще предполагаме, че S е фиксирано мултипликативно затворено множество в пръстена A .

Задача 5.19 (универсално свойство на локализацията). Нека N е $S^{-1}A$ -модул, а $M \xrightarrow{\psi} N$ е хомоморфизъм на A -модули. Да се докаже, че съществува единствен хомоморфизъм $S^{-1}M \xrightarrow{\theta} N$ на $S^{-1}A$ -модули, такъв че $\psi = \theta\varphi$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ S^{-1}M & & \end{array}$$

Сравнете със задача 4.8.

Задача 5.20 (единственост на локализацията). Нека N е $S^{-1}A$ -модул, а $M \xrightarrow{\psi} N$ е хомоморфизъм на A -модули, такъв че за всеки $S^{-1}A$ -модул M' и за всеки хомоморфизъм $M \xrightarrow{\psi'} M'$ на A -модули съществува *единствен* хомоморфизъм $N \xrightarrow{\theta'} M'$ на $S^{-1}A$ -модули, такъв че $\psi' = \theta' \psi$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ \psi' \downarrow & \swarrow \theta' & \\ & & M' \end{array}$$

Да се докаже, че хомоморфизмът $S^{-1}M \xrightarrow{\theta} N$, определен в задача 5.19, е изоморфизъм. Сравнете със задача 4.9.

Задача 5.21. Нека $i : N \rightarrow M$ е инективен хомоморфизъм на A -модули и нека $i_S : S^{-1}N \rightarrow S^{-1}M$ е хомоморфизмът на $S^{-1}A$ -модули, зададен с

$$i_S(x/s) = i(x)/s, \quad x \in N, s \in S.$$

Да се докаже, че i_S е инективен хомоморфизъм на $S^{-1}A$ -модули. Следователно, ако N е подмодул на M , можем да разглеждаме $S^{-1}A$ -модула $S^{-1}N$ като $S^{-1}A$ -подмодул на $S^{-1}M$.

Задача 5.22. Нека N_1, \dots, N_k са подмодули на A -модула M . Да се докаже, че $S^{-1}(N_1 \cap \dots \cap N_k) = S^{-1}N_1 \cap \dots \cap S^{-1}N_k$. Сравнете със задача 4.7.

Задача 5.23 (локализация и факторизация). Нека N е подмодул на A -модула M . Да се докаже, че $S^{-1}A$ -модулите $S^{-1}(M/N)$ и $S^{-1}M/S^{-1}N$ са изоморфни. Сравнете със задача 4.10.

Задача 5.24 (транзитивност на локализацията). Нека T е мултипликативно затворено множество в пръстена A , такова че $T \supseteq S$. Нека \bar{T} е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Да се докаже, че $\bar{T}^{-1}(S^{-1}M) \cong T^{-1}M$ за всеки A -модул M . Сравнете със задача 4.12.

Задача 5.25. Нека P е прост идеал в пръстена A , такъв че $P \cap S = \emptyset$. Да означим с \mathfrak{F} простия идеал $S^{-1}P$ в $S^{-1}A$. Да се докаже, че $(S^{-1}M)_{\mathfrak{F}} \cong M_P$ за всеки A -модул M . Сравнете със задача 4.13.

Задача 5.26. Нека $P \subseteq Q$ са прости идеали в пръстена A . Да означим с \mathfrak{F} простия идеал PA_Q в локалния пръстен A_Q . Да се докаже, че $(M_Q)_{\mathfrak{F}} \cong M_P$ за всеки A -модул M . Сравнете със задача 4.14.

Задача 5.27. Нека M е A -модул и P е прост идеал в пръстена A . Нека $k(P)$ е полето $(A/P)_P \cong A_P/PA_P$. Да се докаже, че модулите $(M/PM)_P$ и M_P/PM_P са изоморфни като линейни пространства над полето $k(P)$.

Задача 5.28. Нека M е крайнопороден A -модул. Да се докаже, че:

- а) ако P е прост идеал в A и $M = PM$, то $M_P = (0)$;
- б) ако \mathfrak{M} е максимален идеал в A , то $M = \mathfrak{M}M$ точно когато $M_{\mathfrak{M}} = (0)$.

Задача 5.29. Нека M е модул над полулокален пръстен A с максимални идеали $\mathfrak{M}_i, i = 1, \dots, k$ и $M \xrightarrow{\varphi_i} M_{\mathfrak{M}_i}$ е хомоморфизмът на локализация спрямо $\mathfrak{M}_i, i = 1, \dots, k$. Да означим с φ изображението

$M \xrightarrow{\varphi} \sum_{i=1}^k M_{\mathfrak{M}_i}$, определено с формулата $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$. Да се

докаже, че:

- а) φ е инективен хомоморфизъм на модули;
- б) φ е изоморфизъм, когато A е изоморфен на директна сума на k локални пръстена;
- в) φ е изоморфизъм, когато радикалът на Джекобсън на A е нилпотентен.

Задача 5.30. Да се докаже, че следните условия за A -модула M са еквивалентни:

- а) $M = (0)$;
- б) $M_P = (0)$ за всеки прост идеал P в A ;
- в) $M_{\mathfrak{M}} = (0)$ за всеки максимален идеал \mathfrak{M} в A .

Задача 5.31. Нека N е подмодул на A -модула M . Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

- а) $N = M$;
- б) $N_P = M_P$ за всеки прост идеал P в A ;
- в) $N_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}}$ за всеки максимален идеал \mathfrak{M} в A .

Определение (носител на модул). Нека M е A -модул. Множеството от всички прости идеали P в A , такива че $M_P \neq (0)$, се нарича *носител на M* . Носителят на M ще означаваме със $\text{Supp}_A M$ (или само $\text{Supp } M$, ако A се подразбира).

Задача 5.32. Нека I е идеал в A и P е прост идеал в A . Да се докаже, че $P \in \text{Supp}(A/I) \Leftrightarrow P \supseteq I$.

Задача 5.33. Нека M е A -модул и P е прост идеал в A . Да се докаже, че ако $P \in \text{Supp } M$, то $P \supseteq \text{Ann } M$. Сравнете със задача 5.38.

Задача 5.34. Нека M е A -модул и $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ са (не непременно различни) максимални идеали в A , такива че $\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n M = (0)$. Да се докаже, че $\text{Supp } M \subseteq \{\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n\}$.

Задача 5.35. Да се докаже, че ако N е подмодул на A -модула M , то $\text{Supp } M = \text{Supp } N \cup \text{Supp } M/N$.

Задача 5.36. Нека M е A -модул и S е мултипликативно затворено множество в A . Да се докаже, че

$$\text{Supp}_{S^{-1}A} S^{-1}M = \{S^{-1}P \mid P \in \text{Supp}_A M, P \cap S = \emptyset\}.$$

Задача 5.37. Нека M е крайнопороден A -модул и P е прост идеал в A , такъв че $M_P = (0)$. Да се докаже, че съществува елемент $s \in A \setminus P$, такъв че $sM = (0)$.

Задача 5.38. Нека M е крайнопороден A -модул и P е прост идеал в A . Да се докаже, че $P \in \text{Supp } M \Leftrightarrow P \supseteq \text{Ann } M$. Сравнете със задача 5.33.

§ 6. Нютерови и артинови модули

Твърдение 6.1. Нека Σ е частично наредено множество. Тогава следните условия са еквивалентни:

(I) Всяка растяща редица $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ от елементи на Σ се стабилизира (т.е. съществува естествено число n , такова че $x_n = x_{n+1} = \dots$).

(II) Всяко непразно подмножество на Σ притежава максимален елемент.

Доказателство. (I) \Rightarrow (II). Ако допуснем, че условието (II) не е изпълнено, то в Σ съществува непразно подмножество T без максимален елемент, което ни позволява по индукция да построим строго растяща безкрайна редица от елементи на T , противоречие.

(II) \Rightarrow (I). Нека $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ е растяща редица и $T = \{x_m\}$. По условие множеството T притежава максимален елемент; ако това е x_n , след него редицата се стабилизира.

По същия начин се установява, че са еквивалентни следните две условия:

(I') Всяка намаляваща редица $x_1 \geq x_2 \geq \dots$ от елементи на Σ се стабилизира.

(II') Всяко непразно подмножество на Σ притежава минимален елемент.

Нека сега Σ е множеството от всички подмодули на даден A -модул M , разгледано с наредбата включване на подмодули. Тогава условието (I) се нарича *условие за прекъсване на растящите вериги*, а (II) – *условие за максималност*. Аналогично (I') и (II') се наричат *съответно условие за прекъсване на намаляващите вериги* и *условие за минималност*.

Определение. Един A -модул M се нарича *нютеров A -модул*, ако удовлетворява двете еквивалентни условия (I) и (II).

Ако M удовлетворява еквивалентните условия (I') и (II'), M се нарича *артинов A -модул*.

Примери. 1. Всяка крайна абелева група е нютеров и артинов \mathbb{Z} -модул.

2. Всяко крайномерно линейно пространство V над поле k е нютеров и артинов k -модул. Ако пък V е безкрайномерно над k , то V не е нито нютеров, нито артинов k -модул.

3. Пръстените \mathbb{Z} и $k[x]$ (k – поле), разгледани като модули над себе си, са нютерови, но не са артинови.

4. Нека \mathbb{Q} е адитивната група на полето на рационалните числа и \mathbb{Q}/\mathbb{Z} е факторгрупата ѝ по \mathbb{Z} . Ако p е фиксирано просто число,

множеството $G = \left\{ \frac{m}{p^n} + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$ е подгрупа на \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Всички

ненулеви подгрупи на G се изчерпват с групите $G_n = \left\{ \frac{m}{p^n} + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$,

$n = 1, 2, \dots$. При това $G_1 < G_2 < \dots$. Групата G е артинов, но не нютеров \mathbb{Z} -модул. (Всички подгрупи на G са описани подробно в [5, задача 1.23]. Групата \mathbb{C}_{p^∞} в тази задача е изоморфна на G , но е записана мултипликативно.)

5. Нека \mathbb{Q} е адитивната група на полето на рационалните числа и p е фиксирано просто число. Множеството $H = \left\{ \frac{m}{p^n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$ е

подгрупа на \mathbb{Q} . Групата H не е нито артинов, нито нютеров \mathbb{Z} -модул. (Действително, $\mathbb{Z} < H$ и затова H не е артинов \mathbb{Z} -модул, а групата G от предния пример е хомоморфен образ на H и затова H не е нютеров \mathbb{Z} -модул.)

Твърдение 6.2. *Един A -модул M е нютеров тогава и само тогава, когато всеки подмодул на M е крайнопороден.*

Доказателство. \Rightarrow) Нека $N \leq M$ и Σ е множеството от всички крайнопородени подмодули на N . Тогава Σ е непразно множество (тъй като $(0) \in \Sigma$) и значи притежава максимален елемент, например N_0 . Да допуснем, че $N_0 \neq N$ и нека $x \in N \setminus N_0$. Тогава $N_0 < N_0 + Ax \leq N$ и $N_0 + Ax$ също е крайнопороден подмодул на N , противоречие с избора на N_0 . Следователно $N = N_0$, така че N е крайнопороден.

\Leftarrow) Нека $M_1 \leq M_2 \leq \dots$ е произволна растяща верига от подмодули на M . Тогава $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ също е подмодул на M . По условие N е крайнопороден, например от елементите x_1, \dots, x_r . Ясно е, че съществува естествено число n , такова че $x_1, \dots, x_r \in M_n$. Тогава $M_n = M_{n+1} = \dots$. Следователно M е нютеров модул.

И така, един A -модул M е нютеров, ако удовлетворява следните три еквивалентни условия:

- (I) условието за прекъсване на растящите вериги;
- (II) условието за максималност;
- (III) всеки подмодул на M е крайнопороден.

Твърдение 6.3. а) Всеки подмодул и фактормодул на нютеров (артинов) модул е нютеров (артинов) модул.

б) Ако M има подмодул N , такъв че модулите N и M/N са нютерови (артинови), то и M е нютеров (артинов) модул.

Доказателство. а) Нека M е нютеров (артинов) модул и $N \leq M$. Всяка растяща (намаляваща) верига от подмодули в N или в M/N индуцира аналогична верига в M и значи се стабилизира. Следователно N и M/N са нютерови (артинови) модули.

б) Ще използваме следното помощно твърдение (проверката предоставяме на читателя). Нека $X, Y \leq M$ и: 1) $X \leq Y$ (или $X \geq Y$); 2) $X \cap N = Y \cap N$; 3) $(X + N)/N = (Y + N)/N$. Тогава $X = Y$.

Нека сега N и M/N са нютерови модули и $M_1 \leq M_2 \leq \dots$ е растяща верига от подмодули на M . Тогава веригата $M_1 \cap N \leq M_2 \cap N \leq \dots$ от подмодули на N се стабилизира. Същото важи и за веригата $(M_1 + N)/N \leq (M_2 + N)/N \leq \dots$ от подмодули на M/N . От помощното твърдение следва, че веригата $M_1 \leq M_2 \leq \dots$ също се стабилизира. Следователно M е нютеров модул.

Аналогично се разсъждава, когато N и M/N са артинови модули.

Следствие 6.4. Ако A -модулите M_1, \dots, M_n са нютерови (артинови), то и директната им сума $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ е нютеров (артинов) A -модул.

Доказателство. Нека $n = 2$ и $M = M_1 \oplus M_2$. По условие модулите $M_1 \leq M$ и $M_2 \cong M / M_1$ са нютерови (артинови). От твърдение 6.3, б) следва, че и M е нютеров (артинов) модул.

Общият случай се получава с индукция по n .

Определение. Ще казваме, че един пръстен A е *нютеров (артинов) пръстен*, ако A е нютеров (артинов) A -модул.

Напомниме, че подмодулите на A , разгледан като модул над себе си, са точно идеалите на A .

Ясно е, че един пръстен A е нютеров, ако удовлетворява следните три еквивалентни условия:

(I) *условието за прекъсване на растящи вериги от идеали;*

(II) *условието за максималност за идеали;*

(III) *всеки идеал на A е крайнопороден.*

Примери. 1. Всеки краен пръстен, както и всяко поле, е нютеров и артинов пръстен. Същото важи и за всяка крайномерна алгебра над поле.

2. Пръстените \mathbb{Z} и $k[x]$ (k – поле) са нютерови, но не са артинови.

3. Нека k е поле и $A = k[x_1, x_2, \dots]$ е пръстенът от полиноми на безбройно много променливи с коефициенти от k (всеки полином е записан върху краен брой променливи). Пръстенът A не е нито нютеров, нито артинов.

Ще отбележим, че пръстенът A се влага в полето от рационални функции $k(x_1, x_2, \dots)$, което е и нютеров, и артинов пръстен. Така подпръстен на нютеров (артинов) пръстен не е непременно нютеров (артинов) пръстен.

Твърдение 6.5. *Всеки крайнопороден модул M над нютеров (артинов) пръстен A е нютеров (артинов) A -модул.*

Доказателство. Според твърдение 5.4 M е фактормодул на свободния модул A^n за някое естествено число n . Тъй като (следствие 6.4) A^n е нютеров (артинов) A -модул, то (твърдение 6.3, а)) и M е нютеров (артинов) A -модул.

Нека M е A -модул. Под *верига* в M ще разбираме всяка крайна редица M_0, M_1, \dots, M_n от подмодули на M , такава че

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = (0)$$

(включванията са строги). Числото n ще наричаме *дължина* на тази верига.

Под *композиционен ред* на M ще разбираме всяка максимална (неуплътняема) верига, т.е. верига, която не може да се допълни с още един подмодул. Еквивалентно условие е всички фактормодули M_{i-1} / M_i ($1 \leq i \leq n$) да са неприводими (прости) модули, т.е. да нямат подмодули, различни от (0) и себе си.

За произволен модул M с $l(M)$ ще означаваме дължината на най-късия композиционен ред на M ; ако M няма композиционни редове, полагаме $l(M) = \infty$.

Теорема 6.6. *Нека модулът M има (поне един) композиционен ред с дължина n . Тогава:*

а) *всеки композиционен ред на M има дължина n ;*

б) *всяка верига в M може да се допълни до композиционен ред на M .*

Доказателство. Ще разделим доказателството на четири последователни твърдения (последните две от които са а) и б)).

(I) *Ако $N \leq M$, то $l(N) \leq l(M)$ (априори не е ясно дори, че $l(N)$ е крайно число). При това, ако $l(N) = l(M)$, то $N = M$ (обратно е очевидно).*

Нека $\{M_i\}$ е композиционен ред на M с дължина $l(M)$. Да положим $N_i = N \cap M_i \leq N$. Фактормодулът N_{i-1} / N_i е изоморфен на подмодул на M_{i-1} / M_i . Действително, в сила е

$$\begin{aligned} N_{i-1} / N_i &= (N \cap M_{i-1}) / (N \cap M_i) = (N \cap M_{i-1}) / (N \cap M_{i-1}) \cap M_i \cong \\ &\cong ((N \cap M_{i-1}) + M_i) / M_i \leq M_{i-1} / M_i. \end{aligned}$$

Тъй като M_{i-1} / M_i е неприводим модул, то или $N_{i-1} / N_i \cong M_{i-1} / M_i$ (и значи N_{i-1} / N_i също е неприводим), или $N_{i-1} / N_i = (0)$, т.е. $N_{i-1} = N_i$. Така, премахвайки повтарящите се подмодули N_i , получаваме композиционен ред на N , откъдето следва $l(N) \leq l(M)$.

Нека сега $l(N) = l(M) = n$. Тогава $N_{i-1} / N_i = M_{i-1} / M_i$ за всяко $i = 1, \dots, n$. Оттук следва първо $N_{n-1} = M_{n-1}$, след това $N_{n-2} = M_{n-2}$ и т.н., накрая $N = M$.

(II) *Дължината на всяка верига в M не надминава $l(M)$.*

Нека $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_k = (0)$ е верига в M с дължина k . От (I) следва, че $l(M) > l(M_1) > \dots > l(M_k) = 0$, откъдето получаваме $l(M) \geq k$.

(III) *Доказателство на а).* Нека $\{M_i\}$ е композиционен ред на M с дължина k . От (II) следва, че $k \leq l(M)$, а от определението на $l(M)$ получаваме $l(M) \leq k$. Следователно всички композиционни редове на M имат равни дължини.

(IV) *Доказателство на б).* Нека $\{M_i\}$ е произволна верига в M . Според (II) дължината ѝ не надминава $l(M)$. Ако е строго по-малка от $l(M)$, според подусловие а), веригата не е композиционен ред и значи може да се удължи. Според (II) този процес не може да бъде безкраен и следователно след краен брой стъпки ще допълним тази верига до композиционен ред на M .

Твърдение 6.7. *Един A -модул M притежава композиционен ред тогава и само тогава, когато M е едновременно нютеров и артинов A -модул.*

Доказателство. \Rightarrow) Тъй като всички вериги в M имат дължини, ограничени от $l(M)$, то M е нютеров и артинов модул.

\Leftarrow) Ще построим композиционен ред на M по следния начин. Да положим $M_0 = M$. Тъй като M е нютеров модул, съществува максимален подмодул $M_1 \subset M_0$; аналогично, съществува максимален подмодул $M_2 \subset M_1$ и т.н. Така получаваме строго намаляваща верига $M_0 \supset M_1 \supset \dots$ от подмодули на M . Тъй като M е артинов модул, тази верига се стабилизира на крайно място (и последният ѝ член е (0)). Получената крайна верига очевидно е композиционен ред на M .

Ако един модул M е едновременно нютеров и артинов, той се нарича *модул с крайна дължина*. Съгласно теорема 6.6 дължините на всички композиционни редове са едни и същи; това общо число се нарича *дължина на модула M* . Понятието дължина на модул е обобщение на понятието размерност на крайномерно линейно пространство над поле.

Предоставяме на читателя самостоятелно да провери верността на следващото твърдение.

Твърдение 6.8. *За линейно пространство V над поле k следните условия са еквивалентни:*

- а) V е крайномерно пространство над k ;
- б) V е k -модул с крайна дължина;
- в) V е нютеров k -модул;
- г) V е артинов k -модул.

Следствие 6.9. *Нека A е пръстен, в който нулевият идеал е произведение $M_1 \dots M_k$ на (не непременно различни) максимални идеали. Тогава A е нютеров пръстен точно когато A е артинов пръстен.*

Доказателство. Да положим $M_0 = A$. По условие $M_1 \dots M_k = (0)$ или, което е все едно, $M_0 M_1 \dots M_k = (0)$. Ще докажем, че ако A е нютеров пръстен, то A е и артинов пръстен.

Да разгледаме веригата от идеали

$$A = M_0 \supseteq M_0 M_1 \supseteq M_0 M_1 M_2 \supseteq \dots \supseteq M_0 M_1 \dots M_k = (0).$$

Пръстенът A е нютеров, което означава, че е нютеров A -модул. Според твърдение 6.3, а) за всяко $i = 0, 1, \dots, k-1$ A -модулите $N_i = M_0 M_1 \dots M_i / M_0 M_1 \dots M_{i+1}$ също са нютерови. При това $M_{i+1} \subseteq \text{Ann } N_i$ и тогава N_i е и модул над полето $k_{i+1} = A / M_{i+1}$, т. е. N_i е линейно пространство над k_{i+1} . Подмодулите на N_i като A -модул и като k_{i+1} -модул са едни и същи. Тогава имаме: N_i е нютеров A -модул $\Rightarrow N_i$ е нютеров k_{i+1} -модул \Rightarrow (твърдение 6.8) N_i е артинов k_{i+1} -модул $\Rightarrow N_i$ е артинов A -модул. Сега прилагаме многократно твърдение 6.3, б):

- A -модулите $M_0 M_1 \dots M_k = (0)$ и $N_{k-1} = M_0 M_1 \dots M_{k-1} / M_0 M_1 \dots M_k$ са артинови $\Rightarrow A$ -модулът $M_0 M_1 \dots M_{k-1}$ е артинов;
- A -модулите $M_0 M_1 \dots M_{k-1}$ и $N_{k-2} = M_0 M_1 \dots M_{k-2} / M_0 M_1 \dots M_{k-1}$ са артинови $\Rightarrow A$ -модулът $M_0 M_1 \dots M_{k-2}$ е артинов;
- ⋮
- A -модулите $M_0 M_1$ и $N_0 = M_0 / M_0 M_1$ са артинови $\Rightarrow A$ -модулът $M_0 = A$ е артинов.

Това означава, че A е артинов пръстен.

По аналогичен начин се доказва, че при даденото условие, ако A е артинов пръстен, то A е и нютеров пръстен. (По-късно ще видим, че този факт е в сила винаги, т.е. без никакви допълнителни условия.)

Задачи

Задача 6.1. Да се докаже, че ако всяко непразно множество от крайнопородени подмодули на A -модула M притежава максимален елемент, то M е нютеров A -модул.

Задача 6.2. Да се докаже, че ако M е артинов A -модул и $\varphi: M \rightarrow M$ е инективен хомоморфизъм на модули, то φ е изоморфизъм. Сравнете със задача 5.7.

Задача 6.3. Нека A е пръстен. Да се докаже, че:

а) свободният модул A^n не може да има по-малко от n на брой пораждащи;

б) ако $A^n \xrightarrow{\varphi} A^m$ е изоморфизъм на A -модули, то $n = m$;

в) ако $A^n \xrightarrow{\varphi} A^m$ е сюрективен хомоморфизъм на A -модули, то $n \geq m$.

Вижте също задача 11.5.

Задача 6.4. Нека p е фиксирано просто число. За всяко $n \geq 0$ да означим

$$M_n = p^{-n}\mathbb{Z} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{m}{p^n}, m \in \mathbb{Z} \right\} \text{ и нека } M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Да се докаже, че:

а) множествата M_n , $n \geq 0$ и M са подгрупи на \mathbb{Q} относно събирането;

б) всяка подгрупа N на M , такава че $M_0 \subseteq N \subset M$, съвпада с някоя от подгрупите M_n , $n \geq 0$;

в) абелевата група M/M_0 е артинов, но не нютеров \mathbb{Z} -модул;

г) абелевата група M не е нито артинов, нито нютеров \mathbb{Z} -модул.

Сравнете с [5, задача 1.23].

Задача 6.5. Нека I е идеал в пръстена A . Простият идеал $P \supseteq I$ на A се нарича *минимален прост над I* , ако не съществува прост идеал P' в A , такъв че $I \subseteq P' \subset P$. Да се докаже, че за всеки идеал I в нютеров

пръстен A съществуват само краен брой прости идеали в A , които са минимални над I . В частност (при $I = (0)$), всеки нютеров пръстен притежава само краен брой минимални прости идеали.

Задача 6.6. Да се докаже, че нилрадикалът $\mathfrak{N}(A)$ на всеки нютеров пръстен A е сечение на краен брой прости идеали.

Задача 6.7. Да се докаже, че нилрадикалът $\mathfrak{N}(A)$ на всеки нютеров пръстен A е нилпотентен идеал (т.е. $\mathfrak{N}(A)^N = (0)$ за някое естествено число N). Вижте също твърдение 7.2 и следствие 7.3.

Задача 6.8. Да се докаже, че един нютеров пръстен A има размерност на Крул, равна на 0 точно когато $A \cong \sum_{i=1}^k A_i$, където $A_i, i = 1, \dots, k$, са нютерови локални пръстени с размерност на Крул, равна на 0.

Задача 6.9. Нека M е A -модул и $N_1, N_2 \leq M$. Да се докаже, че ако M/N_1 и M/N_2 са нютерови (артинови) модули, то и $M/(N_1 \cap N_2)$ е нютеров (артинов) модул.

Задача 6.10. Нека M е A -модул и $I = \text{Ann } M$. Да се докаже, че ако M е нютеров A -модул, то A/I е нютеров пръстен. Еквивалентно: ако M е нютеров A -модул и $\text{Ann } M = (0)$, то A е нютеров пръстен.

Задача 6.11. Да се докаже, че един пръстен A е нютеров тогава и само тогава, когато за всеки елемент $a \in A, a \neq 0$, факторпръстенът $A/(a)$ е нютеров.

Задача 6.12. Нека M е крайнопороден (съответно нютеров, съответно артинов) A -модул и S е мултипликативно затворено множество в A . Да се докаже, че $S^{-1}M$ също е крайнопороден (съответно нютеров, съответно артинов) $S^{-1}A$ -модул. В частност, всяка локализация на нютеров (артинов) пръстен също е нютеров (артинов) пръстен.

Задача 6.13. Нека M е модул над полулокален пръстен A . Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

- а) M е крайнопороден (съответно нютеров) A -модул;
- б) M_P е крайнопороден (съответно нютеров) A_P -модул за всеки прост идеал P на A ;

в) $M_{\mathfrak{M}}$ е крайнопороден (съответно нъотеров) $A_{\mathfrak{M}}$ -модул за всеки максимален идеал \mathfrak{M} на A .

В частност, един полулокален пръстен A е нъотеров тогава и само тогава, когато всяка локализация на A спрямо максимален идеал е нъотеров пръстен.

Задача 6.14. Нека A е пръстен, такъв че:

а) всеки елемент $a \in A$, $a \neq 0$, се съдържа в краен брой максимални идеали;

б) всяка локализация на A спрямо максимален идеал е нъотеров пръстен.

Да се докаже, че A е нъотеров пръстен.

Задача 6.15. Да се докаже, че ако M е A -модул с крайна дължина и $N \leq M$, то $l(M) = l(N) + l(M/N)$. В частност, ако M_i , $i = 1, \dots, n$ са A -модули с крайна дължина, то

$$l\left(\sum_{i=1}^n M_i\right) = \sum_{i=1}^n l(M_i).$$

Задача 6.16. Нека k_n , $n \in \mathbb{N}$ са полета и

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} k_n = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in k_n, n \in \mathbb{N} \}.$$

Множеството A , с обичайните операции събиране и умножение на безкрайни редици, е комутативен пръстен. Да се докаже, че:

а) за всеки елемент $a \in A$ съществува елемент $b \in A$, такъв че $a + b$ е обратим елемент на A и $ab = 0$;

б) всеки прост идеал на A е максимален и минимален (в частност, размерността на Крул на A е равна на 0);

в) A_P е поле за всеки прост идеал P на A , като $A_P \cong A/P$;

г) A има безкраен брой минимални прости идеали;

д) A не е нъотеров пръстен.

Сравнете със задачи 6.5 и 6.13.

Задача 6.17. Нека k_n , $n \in \mathbb{N}$ са полета и

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} k_n = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in k_n, n \in \mathbb{N} \},$$

$$I = \sum_{n \in \mathbb{N}} k_n = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A \mid a_n \neq 0 \text{ само за краен брой } n \in \mathbb{N} \},$$

$$P_k = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A \mid a_k = 0 \}, k \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че:

а) множеството I е идеал на A , а множествата P_k , $k \in \mathbb{N}$, са прости идеали на A ;

б) $I \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$;

в) $I \not\subseteq P_k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

Сравнете с твърдение 1.3, а).

§ 7. Ньотерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса

Напомняме, че един пръстен A е ньотеров, ако удовлетворява следните три еквивалентни условия:

- (I) всяка растяща верига от идеали на A се стабилизира;
- (II) всяко непразно множество от идеали на A притежава максимален елемент;
- (III) всеки идеал на A е крайнопороден.

Твърдение 7.1. *Всеки факторпръстен на ньотеров пръстен A също е ньотеров пръстен.*

Доказателство. Тъй като всеки идеал на A е крайнопороден, същото е вярно и за идеалите на всеки факторпръстен на A . (Може да се използва и твърдение 6.3, а.)

Определение. Ще казваме, че един идеал I на пръстена A е *нил-идеал*, ако $\forall x \in I \exists n = n(x): x^n = 0$. Ще казваме, че I е *нилпотентен идеал*, ако $I^n = (0)$ за някое естествено число n (това означава, че произведението на произволни n на брой елемента от I е равно на нула).

Очевидно всеки нилпотентен идеал е нил-идеал. Обратното не винаги е вярно (във факторпръстена $k[x_1, x_2, \dots]/(x_1^2, x_2^2, \dots)$ разгледайте идеала $I = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$).

Твърдение 7.2. *В ньотеров пръстен A всеки нил-идеал е нилпотентен. (В действителност, в произволен пръстен A всеки крайнопороден нил-идеал е нилпотентен.)*

Доказателство. Нека I е нил-идеал и $I = (a_1, \dots, a_r)$, като $a_k^{n_k} = 0$, $k = 1, \dots, r$. Всеки елемент на I се записва във вида $u_1 a_1 + \dots + u_r a_r$, $u_k \in A$, $k = 1, \dots, r$. Нека $m = n_1 + \dots + n_r - 1$. Ясно е, че като умножим произволни m на брой елемента от горния вид, след разкриването на скобите, във всяко едно събираемо някое a_k ще участва в степен, по-голяма или равна на n_k . Така всяко събираемо е равно на нула и значи цялото произведение е равно на нула. Следователно $I^m = (0)$.

Следствие 7.3. *В ньотеров пръстен нилрадикалът е нилпотентен.*

Теорема 7.4 (теорема на Хилберт за базиса). *Ако A е нютеров пръстен, полиномиалният пръстен $A[x]$ също е нютеров.*

Доказателство. Нека I е произволен идеал в пръстена $A[x]$. Ще докажем, че I е крайнопороден.

Да означим с J множеството от старшите коефициенти на полиномите от идеала I . Както лесно се проверява, J е идеал на пръстена A . Тъй като по условие A е нютеров пръстен, J е крайнопороден идеал. Нека $J = (a_1, \dots, a_n)$. За всяко $i = 1, \dots, n$ съществува полином $t_i \in I$, чийто старши коефициент е a_i . Нека $t_i = a_i x^{r_i} + (\text{едночлени от по-ниски степени})$. Да положим $r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$ и нека $I' = (t_1, \dots, t_n)$ е идеалът в $A[x]$, породен от полиномите t_1, \dots, t_n . Ясно е, че $I' \subseteq I$.

Нека сега $f = ax^m + (\text{едночлени от по-ниски степени})$ е произволен полином от I . Да допуснем, че $m \geq r$. Тъй като по определение $a \in J$, то $a = \sum_{i=1}^n u_i a_i$, $u_i \in A$. Тогава полиномът

$$f_1 = f - \sum_{i=1}^n u_i x^{m-r_i} t_i$$

принадлежи на I и степента му е по-малка от m . Така $f = f_1 + \sum_{i=1}^n u_i x^{m-r_i} t_i$,

където $f_1 \in I$, $\deg f_1 < \deg f$, а $\sum_{i=1}^n u_i x^{m-r_i} t_i \in I'$. Ако степента на полинома f_1 все още е по-голяма или равна на r , по аналогичен начин строим полином $f_2 \in I$, $\deg f_2 < \deg f_1$. Ясно е, че след краен брой стъпки ще можем да представим f във вида $f = g + h$, където $g \in I$, $\deg g < r$, а $h \in I'$.

Накрая, нека M е A -модулът, породен от полиномите $1, x, \dots, x^{r-1}$, т.е. $M = A + Ax + \dots + Ax^{r-1}$ (това са всички полиноми с коефициенти от A и от степен, по-малка от r). Равенството $f = g + h$ показва, че е в сила равенството на A -модули $I = (I \cap M) + I'$. Но M е крайнопороден A -модул и значи е нютеров (твърдение 6.5). Тогава неговият подмодул $I \cap M$ е крайнопороден (твърдение 6.2). Нека елементите g_1, \dots, g_k

пораждат $I \cap M$ като A -модул. Ясно е, че тогава елементите g_1, \dots, g_k ; t_1, \dots, t_n пораждат идеала I , така че I е крайнопороден. Следователно $A[x]$ е нютеров пръстен.

Следствие 7.5. *Ако A е нютеров пръстен, то полиномиалният пръстен на n променливи $A[x_1, \dots, x_n]$ също е нютеров.*

Доказателство. Твърдението се получава от теоремата на Хилберт за базиса с индукция по n .

Упражнение 7.6. *Да се докаже, че ако A е нютеров пръстен, то пръстенът от формалните степенни редове $A[[x]]$ също е нютеров.*

Упътване. Използвайте идеята от доказателството на теорема 7.4, започвайки обаче с идеала J на A , състоящ се от младшите коефициенти на редовете от идеала I на $A[[x]]$. (Има какво да се обмисля!)

Упражнение 7.7. *Да се докаже, че ако $A[x]$ е нютеров пръстен, то A също е нютеров пръстен.*

Упражнение 7.8. а) *Нека B е A -алгебра и b_1, \dots, b_n са произволни елементи от B . Да се докаже, че съществува единствен хомоморфизъм на A -алгебри $\varphi: A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B$, такъв че $\varphi(x_k) = b_k$, $k = 1, \dots, n$.*

б) *Да се докаже, че всяка крайнопородена A -алгебра е изоморфна на факторалгебра на алгебрата $A[x_1, \dots, x_n]$ за някое естествено число n .*

Забележка. Нека B е A -алгебра. Според бележките в § 0, всеки идеал на пръстена B издържа умножения с елементите на A . Така няма разлика между понятията "идеал на пръстена B " и "идеал на A -алгебрата B ". Следователно за B няма разлика между понятията "нютеров пръстен" и "нютерова A -алгебра".

Следствие 7.9. *Нека B е крайнопородена A -алгебра. Ако A е нютеров пръстен, то B също е нютеров пръстен.*

В частност, всяка крайнопородена алгебра над поле е нютеров пръстен. Също така, всеки крайнопороден пръстен (т.е. крайнопородена \mathbb{Z} -алгебра) е нютеров пръстен.

Доказателство. Според упражнение 7.8, б), B е факторалгебра на $A[x_1, \dots, x_n]$, която е нютеров пръстен (следствие 7.5). Тогава B също е нютеров пръстен (твърдение 7.1).

Задачи

Задача 7.1. Нека A е нютеров пръстен и $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$. Да се докаже, че f е нилпотентен елемент точно когато a_n са нилпотентни $\forall n \geq 0$. Сравнете със задача 2.6.

Задача 7.2. Нека A е нютеров пръстен и F е подмножество на A . Да се докаже, че съществуват краен брой елементи $f_i \in F$, $i=1, \dots, n$, такива че всеки елемент $f \in F$ има представяне $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$).

Задача 7.3. Нека A е локален пръстен, такъв че максималният идеал \mathfrak{M} е главен и $\bigcap_{n>0} \mathfrak{M}^n = (0)$. Да се докаже, че A е нютеров пръстен и всеки ненулев идеал в A е степен на идеала \mathfrak{M} .

Задача 7.4 (И. С. Коен). Да се докаже, че ако всеки прост идеал на пръстена A е крайнопороден, то A е нютеров пръстен. (А ако всеки максимален идеал е крайнопороден?)

Задача 7.5 (Б. Коцев). Нека k е поле и $A = k[t, x_1, x_2, \dots]$ е пръстенът на полиноми на изброимо много променливи с коефициенти в k . Нека $M = (t, x_1, x_2, \dots)$ и нека $P = (x_1 - tx_2, x_2 - tx_3, x_3 - tx_4, \dots)$. Да означим с B пръстена $A_M / PA_M \cong (A/P)_{M/P}$. Да се докаже, че:

- B е локален пръстен с главен максимален идеал;
- B е област;
- B не е нютеров пръстен.

Сравнете със задачи 7.3 и 7.4.

Определение (цели алгебрични числа). Комплексното число α се нарича *алгебрично число*, когато е корен на ненулев полином с рационални коефициенти (еквивалентно: когато е корен на ненулев полином с цели коефициенти). Ако α е корен на полином с цели

коэффициенты и старши коэффициент, равен на 1, то α се нарича *цяло алгебрично число*.

Комплексното число α е цяло алгебрично число точно когато α е цял елемент над \mathbb{Z} . Множеството на всички алгебрични числа е подполе на \mathbb{C} , а множеството на всички цели алгебрични числа е подпръстен на \mathbb{C} .

Задача 7.6. Да се докаже, че ако $\alpha \in \mathbb{Q}$ е цяло алгебрично число, то α е цяло число.

Задача 7.7. Да се докаже, че ако $\alpha \in \mathbb{C}$ е алгебрично число, то съществува цяло число $0 \neq s \in \mathbb{Z}$, такова че $s\alpha$ е цяло алгебрично число.

Задача 7.8. Нека $f = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ е полином, който е неразложим над полето \mathbb{Q} и има корени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Нека $D \in \mathbb{Z}$ е дискриминантата на f и нека $\alpha = \alpha_1$. Да се докаже, че:

а) ако $\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$, $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$, е цяло алгебрично число, то $\beta_i = b_0 + b_1\alpha_i + \dots + b_{n-1}\alpha_i^{n-1}$ също е цяло алгебрично число за всяко $i = 1, 2, \dots, n$;

б) ако $\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$, $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$, е цяло алгебрично число, то $D\beta_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$;

в) пръстенът A на целите алгебрични числа в $\mathbb{Q}(\alpha)$ е свободна абелева група (относно събирането) от ранг n ; в частност, A е нютеров пръстен.

Задача 7.9. Да се намери базис на пръстена на целите алгебрични числа в полето E , където: а) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; б) $E = \mathbb{Q}(i)$; в) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Определение. *Градуиран пръстен* е пръстен S , който се представя като директна сума $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$ на свои подгрупи (относно събирането) S_i , $i \geq 0$, такива че $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$.

Всеки елемент f на един градуиран пръстен S има единствено представяне $f = \sum_{i \geq 0} f_i$, $f_i \in S_i$, като $f_i \neq 0$ само за краен брой $i \geq 0$.

Елементът $f_i \in S_i$ се нарича *еднородна компонента* на f от степен i . Един елемент $f \in S$ се нарича *еднороден*, когато $f \in S_i$ за някое $i \geq 0$. Ако $f \in S_i \setminus \{0\}$, казваме, че f е еднороден елемент от степен i и пишем $\deg f = i$. По определение, $\deg 0 = -\infty$.

Нека A е пръстен и $S = A[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът на полиномите на n променливи с коефициенти от A . Да означим с $S_i, i \geq 0$, свободния A -модул, състоящ се от всички еднородни полиноми в S от степен i . Тогава пръстенът S , заедно с абелевите групи $S_i, i \geq 0$, е градуиран пръстен.

Задача 7.10. Да се докаже, че ако S е градуиран пръстен, то $1 \in S_0$. Следователно S_0 е подпръстен на пръстена S .

Задача 7.11. Един идеал I в градуиран пръстен S се нарича *еднороден*, когато от $f \in I$ следва $f_i \in I$ за всяко $i \geq 0$. Да се докаже, че:

а) I е еднороден идеал точно когато $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$, където $I_i = I \cap S_i, i \geq 0$;

б) I е еднороден идеал точно когато I се поражда от (не непременно краен брой) еднородни елементи.

Задача 7.12. Да се докаже, че ако градуираният пръстен S е нютеров, то всеки еднороден идеал в S се поражда от краен брой еднородни елементи.

Задача 7.13. Нека $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$ е градуиран пръстен. Да се докаже, че множеството $S_+ = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$ е еднороден идеал на S и $S/S_+ \cong S_0$.

Задача 7.14. Нека $0 \neq f_j \in S, j = 1, \dots, k$, са еднородни елементи на градуирания пръстен S и $I = (f_1, \dots, f_k)$. Да се докаже, че ако $f \in I$ е еднороден елемент от степен d , то f има представяне $f = \sum_{j=1}^k g_j f_j$, където всеки $g_j (1 \leq j \leq k)$ е еднороден елемент от степен $d - \deg f_j$, ако $d \geq \deg f_j$ и $g_j = 0$, ако $d < \deg f_j$.

Задача 7.15. Нека $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$ е градуиран пръстен. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

- а) S е нѳотеров прѳстен;
- б) S_0 е нѳотеров прѳстен и $S_+ = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$ е крайнопороден идеал;
- в) S_0 е нѳотеров прѳстен и S е крайнопородена S_0 -алгебра.

В частност, ако градуираният прѳстен S е нѳотеров и $S_0 = k$ е поле, то S е крайнопородена k - алгебра.

Задача 7.16 (оператор на Рейнолдс). Нека A е подпрѳстен на прѳстена B . Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

- а) съществува A -подмодул M на B , такѳв че $B = A \oplus_A M$;
- б) съществува хомоморфизъм на A -модули $\pi : B \rightarrow A$, такѳв че $\pi|_A = \text{id } A$.

Когато подпрѳстенът A на прѳстена B удовлетворява тези еквивалентни условия, A се нарича *директно събираемо на B* , а хомоморфизмът на A -модули $\pi : B \rightarrow A$ се нарича *оператор на Рейнолдс*.

Задача 7.17. Нека подпрѳстенът A на прѳстена B е директно събираемо на B (виж задача 7.16). Да се докаже, че ако B е нѳотеров прѳстен, то A също е нѳотеров прѳстен.

Задача 7.18. Нека G е група от автоморфизми на прѳстена A и

$$A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \ \forall g \in G\}.$$

Да се докаже, че:

а) множеството A^G е подпрѳстен на A (A^G се нарича *прѳстен от инварианти* на групата G);

б) ако G е крайна група от ред $|G|$ и естественото число $|G|$ е обратим елемент в A , то изображението $\pi : A \rightarrow A^G$, определено с формулата

$$\pi(a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a), \quad a \in A,$$

е хомоморфизъм на A^G -модули, такѳв че $\pi|_{A^G} = \text{id } A^G$;

в) ако G е крайна група, ако прѳстенът A е нѳотеров и $|G|$ е обратим елемент в A , то прѳстенът от инварианти A^G също е нѳотеров.

Задача 7.19 (крайна породеност на прѳстена от инварианти на крайна група). Нека S е градуиран прѳстен, такѳв че $S_0 = k$ е поле. Нека G е крайна група от автоморфизми на S , такава че $g(S_i) \subseteq S_i \ \forall g \in G$ и

$\forall i \geq 0$. Да означим с S^G пръстена от инварианти на групата G (виж задача 7.18). Да се докаже, че:

а) $S^G = \sum_{i \geq 0} (S^G \cap S_i)$, т.е. пръстенът от инварианти S^G е градуиран

подпръстен на S ;

б) $k^G = \{f \in S_0 \mid g(f) = f \ \forall g \in G\}$ е подполе на k ;

в) ако S е крайнопородена k -алгебра и $\text{char } k \nmid |G|$, то S^G е крайнопородена k^G -алгебра. В частност, S^G е крайнопородена k -алгебра, ако G е група от автоморфизми на S над k (т.е. $g(f) = f \ \forall g \in G$ и $\forall f \in S_0$).

Вижте също задача 8.5.

Задача 7.20. Нека k е поле и нека симетричната група S_n действа на пръстена на полиномите $k[x_1, \dots, x_n]$ по следния начин:

$$\sigma(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Нека A_n е алтернативната подгрупа на S_n , състояща се от всички четни пермутации. Да се докаже, че:

а) $k[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = k[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, където $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ са елементарните симетрични полиноми на x_1, \dots, x_n ;

б) ако $\text{char } k \neq 2$, то

$$k[x_1, \dots, x_n]^{A_n} = k[\sigma_1, \dots, \sigma_n, \Delta] = k[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \oplus k[\sigma_1, \dots, \sigma_n]\Delta,$$

където $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$.

§ 8. Теорема на Хилберт за нулите – алгебричен вариант

Преди основното изложение в този параграф се нуждаем от някои предварителни определения и резултати от разширения на полета. По същество читателят трябва да владее съдържанието на §§ 22, 23 от [4].

Нека E е разширение на полето k . Един елемент $\alpha \in E$ се нарича *алгебричен над k* , ако съществува ненулев полином $f(x) \in k[x]$, такъв че $f(\alpha) = 0$; в противен случай α се нарича *трансцендентен над k* .

Ако $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$, с $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ще означаваме k -алгебрата, породена от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (т.е. всички полиноми на $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с коефициенти от k), а с $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – полето, породено над k от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (т.е. всички рационални функции на $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с коефициенти от k). Ясно е, че $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subseteq k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Упражнение 8.1. Да се докаже, че $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ точно когато елементите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са алгебрични над k . (Използвайте следствие 5 от § 22 от [4].)

Ще казваме, че елементите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са *алгебрически независими над k* , ако не съществува ненулев полином f на n променливи с коефициенти от k , такъв че $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ (при $n = 1$ това означава, че елементът α_1 е трансцендентен над k). В този случай полето $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ е изоморфно на полето $k(x_1, \dots, x_n)$ от рационалните функции на n променливи с коефициенти от k (проверете, че изображението $\varphi \left(\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \right) =$

$\frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ е изоморфизъм).

Ще напомним, че едно разширение E на полето k се нарича:

- *крайно*, ако полето E , разгледано като линейно пространство над k , е крайномерно (числото $[E : k] = \dim_k E$ се нарича *степен на E над k*);
- *алгебрично*, ако всеки елемент на E е алгебричен над k ;

- *крайно породено алгебрично*, ако $E = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, където елементите $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ са алгебрични над k . В този случай $E = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Всяко *крайно разширение* E на полето k е алгебрично разширение. Действително, ако $[E:k] = \dim_k E = n$ и $\alpha \in E$, то елементите $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ са линейно зависими над k (защото са $n+1$ на брой), а това означава, че α е корен на ненулев полином с коефициенти от k .

Твърдение 8.2. *Едно разширение E на полето k е крайно точно когато е крайно породено алгебрично разширение.*

Това е точно твърдение 2 от § 23 от [4].

Твърдение 8.3. *Нека E е разширение на полето k и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са елементи от E , не всички от които са алгебрични над k . Тогава съществува r , $1 \leq r \leq n$, такова че (след евентуално преномериране) елементите $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са алгебрически независими над k , а $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ са алгебрични над полето $F = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.*

Доказателство. Нека например α_1 е трансцендентен над k . Ако $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ са алгебрични над полето $k(\alpha_1)$, твърдението е доказано. В противен случай, например α_2 е трансцендентен над $k(\alpha_1)$. Тогава елементите α_1, α_2 са алгебрически независими над k (това твърдение се нуждае от обосновка, която предоставяме на читателя). Сега, ако $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ са алгебрични над $k(\alpha_1, \alpha_2)$, твърдението е доказано. Продължавайки по същия начин, достигаме до елементи $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, които са алгебрически независими над k , а $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ (ако има такива) вече са алгебрични над полето $F = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Ще отбележим, че подалгебра на крайнопородена алгебра не винаги е крайнопородена. (Проверете, че подалгебрата на $k[x, y]$, породена от едночлените x, xy, xy^2, \dots не е крайнопородена.) Следващото твърдение разглежда ситуация, в която, при допълнителни

предположения, подалгебра на крайнопородена алгебра отново е крайнопородена.

Лема 8.4. Нека $A \subseteq B \subseteq C$ са пръстени и:

- 1) A е нютеров пръстен;
- 2) C е крайнопородена A -алгебра;
- 3) C е крайнопороден B -модул.

Тогава B е крайнопородена A -алгебра.

В частност, ако $k \subseteq F \subseteq E$ са полета, като E е крайнопородена k -алгебра и е крайно разширение на F , то F е крайнопородена k -алгебра.

Доказателство. Нека елементите $c_1, \dots, c_m \in C$ пораждат C като A -алгебра (т.е. $C = A[c_1, \dots, c_m]$), а елементите $y_1, \dots, y_n \in C$ пораждат C като B -модул (т.е. $C = By_1 + \dots + By_n$). Тогава са в сила равенства от вида:

$$c_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j, \quad (1)$$

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^n b_{ijk} y_k, \quad (2)$$

$b_{ij}, b_{ijk} \in B$. Да означим $B_0 = A[b_{ij}; b_{ijk}]$.

Всеки елемент на C е полином с коефициенти от A на елементите c_i ($i = 1, \dots, m$). Замествайки в този полином c_i чрез равенствата (1) и използвайки неколкократно (2), получаваме, че всеки елемент на C е линейна комбинация с коефициенти вече от B_0 на елементите y_1, \dots, y_n , т.е. $C = B_0 y_1 + \dots + B_0 y_n$ е крайнопороден B_0 -модул.

Сега разглеждаме веригата от пръстени $A \subseteq B_0 \subseteq B \subseteq C$. Имаме:

- B_0 е крайнопородена алгебра над нютеровия пръстен $A \Rightarrow B_0$ е нютеров пръстен (следствие 7.9);
- C е крайнопороден B_0 -модул $\Rightarrow C$ е нютеров B_0 -модул (твърдение 6.5);
- B е подмодул на B_0 -модула $C \Rightarrow B$ е крайнопороден B_0 -модул (твърдение 6.2), т.е. съществуват елементи $z_1, \dots, z_t \in B$, такива че $B = B_0 z_1 + \dots + B_0 z_t$.

Сега, от последното равенство и от равенството $B_0 = A[b_{ij}; b_{ijk}]$ вече е ясно, че $B = A[b_{ij}; b_{ijk}; z_i]$, така че B е крайнопородена A -алгебра.

Твърдение 8.5. а) Полето на рационалните числа \mathbb{Q} не е крайнопороден пръстен (т.е. не е крайнопородена \mathbb{Z} -алгебра).

б) Полето от рационалните функции $k(x_1, \dots, x_r)$ над поле k не е крайнопородена k -алгебра.

Доказателство. а) Да допуснем, че съществуват краен брой рационални числа $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$, ($p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$), такива че $\mathbb{Q} =$

$\mathbb{Z} \left[\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right]$, т.е. всяко рационално число е полином с цели

коэффициенти на тези числа. Нека $q \in \mathbb{N}$ е просто число, което не дели нито един от знаменателите q_1, \dots, q_n . Лесно се съобразява, че

рационалното число $\frac{1}{q}$ не може да се представи като полином с цели

коэффициенти на числата $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$. Полученото противоречие показва,

че \mathbb{Q} не е крайнопороден пръстен.

б) В пръстена $k[x_1, \dots, x_r]$ всеки неконстантен полином еднозначно се разлага в произведение на неразложими над k полиноми и неразложимите полиноми са безбройно много. Тази аналогия с пръстена \mathbb{Z} ни позволява да пренесем буквално доказателството за \mathbb{Q} от подусловие а) и за полето от рационални функции $k(x_1, \dots, x_r)$.

Следващото твърдение стои в основата на теоремата на Хилберт за нулите, независимо в кой от различните ѝ варианти е формулирана.

Теорема 8.6. Нека полето E е разширение на полето k . Ако E е крайнопородена k -алгебра, то E е крайно (а значи и алгебрично) разширение на k .

Доказателство. Нека елементите $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ пораждат E като k -алгебра, т.е. $E = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Ще докажем, че всички тези елементи са алгебрични над k . Тогава полето E е крайно породено алгебрично разширение на k и според твърдение 8.2 е крайно разширение на k .

Да допуснем противното, т.е. че не всички елементи $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са алгебрични над k . Тогава, според твърдение 8.3, можем да считаме, че първите r елемента $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $r \geq 1$, са алгебрически независими над k , а

$\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ са алгебрични над полето $F = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. При това, F е изоморфно на полето $k(x_1, \dots, x_r)$ от рационалните функции на r променливи с коефициенти от k . От своя страна, полето $E = F[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n]$ е крайно породено алгебрично разширение на F и според твърдение 8.2 е крайно разширение на F .

Сега за веригата от полета $k \subseteq F \subseteq E$ имаме: E е крайнопородена k -алгебра и е крайно разширение на F . От лема 8.4 следва, че полето F е крайнопородена k -алгебра. Но това противоречи на твърдение 8.5, б).

Следователно допускането не е вярно.

Следствие 8.7 (теорема на Хилберт за нулите – алгебричен вариант). Нека k е поле, A е крайнопородена k -алгебра и M е максимален идеал на A . Тогава A/M е крайно (а значи и алгебрично) разширение на k .

В частност, ако k е алгебрически затворено поле, то $A/M = k$.

Доказателство. (Напомниме (вижте § 0), че ако A е алгебра над поле k , можем да считаме, че $k \subseteq A$. Също така, ако M е собствен идеал на A , можем да считаме, че $k \subseteq A/M$.)

Тъй като по условие A е крайнопородена k -алгебра, то и A/M е крайнопородена k -алгебра; при това A/M е поле, защото M е максимален идеал. Сега от теорема 8.6 следва, че A/M е крайно разширение на k .

Ако k е алгебрически затворено поле, то k няма същински крайни разширения и следователно $A/M = k$.

Упражнение 8.8. Нека k е поле и M е максимален идеал в полиномиалния пръстен $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Да се докаже, че съществува ненулев полином $f \in k[x]$, такъв че $f(x_i) \in M$ за всяко $i = 1, \dots, n$.

Упътване. От теоремата на Хилберт следва, че елементите x_1, \dots, x_n са алгебрични по модул M , откъдето лесно следва и даденото твърдение. (В действителност, това твърдение е еквивалентно на теоремата на Хилберт.)

Задачи

Задача 8.1. Нека k е поле и $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът от полиномите на n променливи с коефициенти от k . Да се докаже, че:

а) ако $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, то $M = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ е максимален идеал на A и $A/M \cong k$;

б) ако k е алгебрически затворено поле, то всеки максимален идеал M на A е от този вид, т.е. съществуват елементи $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, такива че $M = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$.

Задача 8.2. Да се докаже, че ако един крайнопороден пръстен е поле, той е крайно поле.

Задача 8.3. Нека k е поле, A и B са крайнопородени k -алгебри и $A \xrightarrow{\varphi} B$ е хомоморфизъм на k -алгебри. Да се докаже, че ако \mathfrak{M} е максимален идеал на B , то пълният му праобраз $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал на A и полето B/\mathfrak{M} е крайно разширение на полето A/M .

Задача 8.4. Нека k е поле и M е максимален идеал в пръстена от полиномите на n променливи $k[x_1, \dots, x_n]$ с коефициенти от k . Да се докаже, че съществуват полиноми $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$, такива че:

а) $M = (f_1, \dots, f_n)$;

б) f_i е полином на x_i със старши коефициент 1 и коефициенти в пръстена $k[x_1, \dots, x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$;

в) (f_1, \dots, f_i) е прост идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$, $i = 1, \dots, n$.

Задача 8.5 (Е. Ньотер). Нека k е поле, A е крайнопородена k -алгебра и G е крайна група от автоморфизми на A . Да се докаже, че пръстенът от инварианти

$$A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \quad \forall g \in G\}$$

е крайнопородена k -алгебра. Сравнете със задача 7.19.

Задача 8.6. Нека k е поле и f е неконстантен полином в пръстена от полиномите на n променливи $k[x_1, \dots, x_n]$ с коефициенти от k . Да се докаже, че :

а) ако e е достатъчно голямо естествено число (напр. $e > \deg f$), то

$$f(y_1 + x_n^e, y_2 + x_n^{e^2}, \dots, y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}, x_n) \in k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$$

е полином на x_n със старши коефициент $a \in k$, $a \neq 0$;

б) ако k е безкрайно поле, то съществуват елементи $a_1, \dots, a_{n-1} \in k$ такива че

$$f(y_1 + a_1 x_n, y_2 + a_2 x_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n) \in k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$$

е полином на x_n със старши коефициент $a \in k$, $a \neq 0$.

Задача 8.7. Нека k е поле и f е неконстантен полином в пръстена $A = k[x_1, \dots, x_n]$ от полиномите на n променливи с коефициенти от k . Да се докаже, че съществуват елементи $y_1, \dots, y_{n-1} \in A$, такива че A е крайнопороден модул над пръстена $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$.

Задача 8.8 (лема на Е. Ньотер за нормализацията). Нека k е поле и A е крайнопородена k -алгебра. Да се докаже, че съществува алгебрически независимо над k множество елементи $\{y_1, \dots, y_r\} \subset A$, такова че A е крайнопороден модул над полиномиалния пръстен $k[y_1, \dots, y_r]$.

Допълнение. Ако A се поражда над k от елементите a_1, \dots, a_n и k е безкрайно поле, то елементите y_1, \dots, y_r могат да се изберат от линейната обвивка на елементите a_1, \dots, a_n .

Задача 8.9. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени. Да се докаже, че:

- а) ако A е поле и B е област, то B е поле;
- б) ако B е поле, то A също е поле.

Задача 8.10. Докажете теорема 8.6, като използвате лемата за нормализацията (задача 8.8).

Задача 8.11. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и Q е прост идеал в B . Да се докаже, че Q е максимален идеал в B тогава и само тогава, когато $P = Q \cap A$ е максимален идеал в A .

Определение. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени. Казваме, че *простият идеал Q на B лежи над простия идеал P на A* , когато $P = Q \cap A$.

Задача 8.12. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени. Да се докаже, че за всеки максимален идеал M в A съществува максимален идеал \mathfrak{M} в B , който лежи над M .

Задача 8.13. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и P е прост идеал в A . Да се докаже, че:

а) съществува прост идеал Q в B , който лежи над P ;

б) за всеки идеал Q' в B , такъв че $Q' \cap A \subseteq P$, съществува прост идеал Q в B , такъв че Q лежи над P и $Q' \subseteq Q$.

Задача 8.14 (теорема за повдигането). Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_r$ са прости идеали в A . Да се докаже, че съществуват прости идеали $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_r$ в B , такива че Q_i лежи над P_i , $i = 0, 1, \dots, r$.

Задача 8.15 (теорема за несравнимостта). Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и Q и Q' са прости идеали в B , които лежат над простия идеал P в A . Да се докаже, че ако $Q' \subseteq Q$, то $Q' = Q$.

Следователно различните прости идеали на B , които лежат над простия идеал P в A , са несравними като множества (между тях няма включвания).

Определение (размерност на Крул). Нека A е пръстен. Казваме, че простите идеали P_0, P_1, \dots, P_r в A образуват *верига с дължина r* , когато $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_r$. *Размерността на Крул* на пръстена A е точната горна граница на дължините на всички вериги от прости идеали в A . Размерността на Крул на пръстена A се означава с $\dim A$.

Задача 8.16. Да се докаже, че ако $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени, то $\dim A = \dim B$.

Задача 8.17. Да се докаже, че ако B е факторпръстен на пръстена A , то $\dim B \leq \dim A$.

Задача 8.18. Нека k е поле и f е неконстантен полином в полиномиалния пръстен $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Да се докаже, че $\dim(A/(f)) \leq \dim k[x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Задача 8.19. Нека k е поле и $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът на полиномите на n променливи с коефициенти от k . Да се докаже, че $\dim A = n$.

Задача 8.20. Нека k е поле и M е максимален идеал в полиномиалния пръстен $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Да се докаже, че $\dim(A_M) = n$.

Задача 8.21. Нека k е поле. Да се докаже, че ако областта A е крайнопородена k -алгебра, то размерността на Крул на A е равна на степента на трансцендентност на полето от частни на A над полето k .

§ 9. Теорема на Хилберт за нулите – геометричен вариант

Ще напомним, че ако I е идеал в пръстена A , под радикал на I разбираме идеала $r(I) = \{x \in A \mid \exists n = n(x): x^n \in I\}$. Имаме $I \subseteq r(I)$ и $r(I)$ съвпада със сечението на всички прости идеали на A , съдържащи I (твърдение 2.6).

Нека B е област и $0 \neq f \in B$. Множеството $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ е мултипликативно затворено. Да означим $S^{-1}B = B\left[\frac{1}{f}\right]$ (вижте § 4 и по-специално, пример 2). Елементите на пръстена $B\left[\frac{1}{f}\right]$ са "дроби" от вида b/f^n , $b \in B$. Когато B е област, изображението $\varepsilon: B \rightarrow B\left[\frac{1}{f}\right]$, $\varepsilon(b) = b/1$, е влагане и освен това елементът $\varepsilon(f)$ е обратим в пръстена $B\left[\frac{1}{f}\right]$.

Нека k е поле, $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е алгебрата от полиномите на n променливи с коефициенти от k и $I \subseteq A$. В линейното пространство k^n разглеждаме множеството

$$V = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n \mid g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \forall g \in I\}.$$

Множеството V се нарича *алгебрично многообразие в k^n* , *определено от идеала I* . Казваме, че полиномите от I се анулират върху V . Ясно е, че ако полиномите от коя да е система образуващи на I се анулират върху V , то и всички полиноми от I се анулират върху V .

Примери. 0. Ако $I = (0)$, то $V = k^n$. Ако пък $I = (x_1, \dots, x_n)$, то $V = \{0\}$.

1. Нека в равнината е фиксирана правоъгълна координатна система и $A = \mathbb{R}[x, y]$.

а) Ако $I = (y - x)$, многообразието V е права линия (ъглополовящата на първи и трети квадрант).

Ако е дадено уравнението на произволна права в равнината, посочете идеал I , задаващ тази права.

б) Ако $I = (x^2 + y^2 - 1)$, многообразието V съвпада с единичната окръжност.

Ако е дадено уравнението на произволна крива от втора степен в равнината, посочете идеал I , задаващ тази крива.

в) Ако $f(x)$ е произволен полином с реални коефициенти и $I = (y - f(x))$, многообразието V съвпада с графиката на полинома $f(x)$.

2. Нека k е алгебрически затворено поле, $A = k[x_1, \dots, x_n]$ и M е максимален идеал на A . Тогава многообразието V , определено от M , е едноточково (следва от задача 8.1, б)).

И така, по определение полиномите от идеала I се анулират върху алгебричното многообразие V , определено от I . В общия случай може да има и други полиноми от A , които се анулират върху V . Да означим

$$I(V) = \{h \in A \mid h(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V\}.$$

Директно се проверява, че $I(V) \trianglelefteq A$. Идеалът $I(V)$ се нарича *идеал на многообразието V* . Очевидно $I \subseteq I(V)$. Нещо повече, $r(I) \subseteq I(V)$.

Теорема 9.1 (теорема на Хилберт за нулите – геометричен вариант). *Ако полето k е алгебрически затворено, в сила е равенството $I(V) = r(I)$.*

Доказателство. Трябва да докажем само включването $I(V) \subseteq r(I)$. За тази цел ще докажем, че ако един полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$ не принадлежи на $r(I)$, то f не принадлежи и на $I(V)$.

И така, нека $f \notin r(I)$. Тогава съществува прост идеал P на A , такъв че $I \subseteq P$ и $f \notin P$. Факторпръстенът A/P е област и нека $\pi : A \rightarrow A/P = B$ е естественият хомоморфизъм. Тъй като $f \notin P$, то $\bar{f} = \pi(f) \neq 0$.

Да означим $C = B \left[\frac{1}{\bar{f}} \right]$ и нека $\varepsilon : B \rightarrow C$ е естественото влагане на B в C ($\varepsilon(b) = b/1$). В пръстена C елементът $\varepsilon(\bar{f})$ е обратим.

Нека M е максимален идеал на C и $\pi_1: C \rightarrow C/M$ е естественият хомоморфизъм. Понеже $\varepsilon(\bar{f})$ е обратим елемент, то $\varepsilon(\bar{f}) \notin M$ и тогава $\pi_1 \varepsilon(\bar{f}) \neq 0$, т.е. $\pi_1 \varepsilon \pi(f) \neq 0$.

Тъй като A е крайнопородена k -алгебра, то B и C също са крайнопородени k -алгебри. Сега от алгебричния вариант на теоремата на Хилберт за нулите (следствие 8.7) имаме $C/M = k$.

Да означим с φ композицията на хомоморфизмите π , ε и π_1 , т.е. $\varphi = \pi_1 \varepsilon \pi$:

$$A \xrightarrow{\pi} A/P = B \xrightarrow{\varepsilon} B \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline f \end{array} \right] = C \xrightarrow{\pi_1} C/M = k.$$

Както последователно проследихме по-горе, при хомоморфизма $\varphi: A = k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$ е изпълнено $\varphi(f) = \pi_1 \varepsilon \pi(f) \neq 0$.

Да означим $\varphi(x_i) = \lambda_i \in k$ ($i = 1, \dots, n$). Тъй като φ е хомоморфизъм, ако $g = g(x_1, \dots, x_n)$ е произволен полином от A , то $\varphi(g) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Накрая, нека g е произволен полином от идеала I . Тъй като $I \subseteq P$, то $\pi(g) = 0$ и тогава още повече $\varphi(g) = \pi_1 \varepsilon \pi(g) = 0$. Това означава, че $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. Така n -орката $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$ анулира всички полиноми от I , което пък означава, че $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V$.

От друга страна, видяхме, че $\varphi(f) \neq 0$, т.е. $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$. Това от своя страна означава, че $f \notin I(V)$, което искахме да докажем.

Задачи

Задача 9.1. Нека I е главният идеал в пръстена $\mathbb{R}[x]$, породен от полинома $x(x^2 + 1)$ и V е алгебричното многообразие, определено от I . Да се докаже, че $I(V) \neq r(I)$.

Задача 9.2. Нека k е поле и $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът от полиномите на n променливи с коефициенти от k . Да се докаже, че за всеки собствен идеал I на A съществуват крайно разширение E на k и елементи $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$, такива че $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ за всеки полином f от I .

Определение (пръстен на Джекобсън). Пръстенът A се нарича *пръстен на Джекобсън*, ако всеки прост идеал в A е сечение на максимални идеали.

Задача 9.3. Да се докаже, че ако k е поле, полиномиалният пръстен $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстен на Джекобсън.

Задача 9.4. Да се докаже, че за пръстена A следните условия са еквивалентни:

- а) A е пръстен на Джекобсън;
- б) A/I е пръстен на Джекобсън за всеки идеал I в A ;
- в) $\mathfrak{R}(A/I) = \mathfrak{N}(A/I)$ за всеки идеал I в A ;
- г) $\mathfrak{R}(A/P) = (0)$ за всеки прост идеал P в A .

Задача 9.5. Нека A е крайнопородена алгебра над поле k . Да се докаже, че A е пръстен на Джекобсън. Следователно $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ за всяка крайнопородена алгебра A над поле k .

Задача 9.6. Нека A е област. Да се докаже, че:

- а) ако $\mathfrak{R}(A) = (0)$ и $A[f^{-1}]$ е поле за някой елемент $0 \neq f \in A$, то A е поле;
- б) ако $\mathfrak{R}(A) \neq (0)$, то съществува прост идеал P в A , такъв че A/P не е поле, а $(A/P)[f^{-1}]$ е поле за някой елемент $0 \neq f \in A/P$.

Задача 9.7 Да се докаже, че за пръстена A следните условия са еквивалентни:

- а) A е пръстен на Джекобсън;
- б) ако $(A/P)[f^{-1}]$ е поле за някой прост идеал P в A и за някой елемент $0 \neq f \in A/P$, то A/P е поле.

Задача 9.8. Нека A е област. Да се докаже, че за всеки ненулев полином f в полиномиалния пръстен $A[x]$ пръстенът $A[x][f^{-1}]$ не е поле. Сравнете със задача 2.4.

Задача 9.9. Нека A е област с поле от частни K и нека областта B е разширение на A , като $B = A[b]$ за някой елемент $b \in B$. Да предположим, че съществува елемент $0 \neq f \in B$, такъв че $B[f^{-1}]$ е поле. Да се докаже, че:

- а) K е подполе на $B[f^{-1}]$, b е алгебричен над K и $B[f^{-1}] = K[b]$;

- б) съществува елемент $0 \neq s \in A$, такъв че $A[s^{-1}]$ е поле;
в) ако $\mathfrak{R}(A) = (0)$, то A и B са полета, като B е крайно разширение на A .

Задача 9.10. Нека A е пръстен на Джекобсън. Да се докаже, че:

- а) полиномиалният пръстен $A[x]$ е пръстен на Джекобсън;
б) ако \mathfrak{M} е максимален идеал в $A[x]$, то $M = \mathfrak{M} \cap A$ е максимален идеал в A и полето $A[x]/\mathfrak{M}$ е крайно разширение на полето A/M .

Задача 9.11. Нека A е пръстен на Джекобсън и B е крайнопородена A -алгебра. Да се докаже, че:

- а) B е пръстен на Джекобсън;
б) ако \mathfrak{M} е максимален идеал в B , то $M = \mathfrak{M} \cap A$ е максимален идеал в A и полето B/\mathfrak{M} е крайно разширение на полето A/M .

Задача 9.12. Нека A е пръстен на Джекобсън, B и C са крайнопородени A -алгебри и $B \xrightarrow{\varphi} C$ е хомоморфизъм на A -алгебри. Да се докаже, че ако \mathfrak{M} е максимален идеал в C , то $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в B и полето C/\mathfrak{M} е крайно разширение на полето B/M . Сравнете със задача 8.3.

§ 10. Примарно разлагане в ньотерови пръстени

Нека $n > 1$ е естествено число и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n в произведение на прости числа. Тогава за главния идеал на \mathbb{Z} , породен от n , е в сила равенството $(n) = (p_1^{\alpha_1}) \dots (p_k^{\alpha_k})$. Тъй като идеалите $p_i^{\alpha_i}$ са два по два взаимно прости, то (твърдение 3.1) $(n) = (p_1^{\alpha_1}) \cap \dots \cap (p_k^{\alpha_k})$. Числата $p_i^{\alpha_i}$ (както и идеалите, породени от тях) се наричат *примарни*. Така основната теорема на аритметиката в пръстена на целите числа \mathbb{Z} означава, че всеки собствен идеал на \mathbb{Z} се представя (еднозначно) като сечение на примарни идеали. В този параграф ще видим, че аналогичен факт е в сила за класа на ньотеровите пръстени.

Определение. Ще казваме, че един идеал Q на пръстена A е *примарен*, ако $Q \neq A$ и от $xy \in Q$ следва $x \in Q$ или $y^n \in Q$ за някое естествено число n . Еквивалентно: $xy \in Q \Rightarrow x \in Q$ или $y \in r(Q)$.

Ясно е, че всеки прост идеал е примарен. В пръстена \mathbb{Z} примарните идеали са точно идеалите от вида (p^n) , където p е просто число и $n \in \mathbb{N}$; при това $r(p^n) = (p)$. Аналогична е ситуацията и в пръстена $k[x]$ (k -поле).

Твърдение 10.1. *Нека Q е примарен идеал в пръстена A . Тогава идеалът $P = r(Q)$ е прост. (По-точно, P е единствен минимален елемент в множеството от всички прости идеали на A , които съдържат Q .)*

Доказателство. Според твърдение 2.6 идеалът $P = r(Q)$ е сечение на всички прости идеали на A , съдържащи Q . Сега остава само да проверим, че $r(Q)$ е прост идеал.

Нека $xy \in r(Q)$. Тогава $(xy)^m = x^m y^m \in Q$ за някое $m \geq 1$. Тъй като Q е примарен идеал, то или $x^m \in Q$, или $y^{mn} \in Q$ за някое $n \geq 1$, т. е. или $x \in r(Q)$, или $y \in r(Q)$. Следователно $r(Q)$ е прост идеал.

Определение. Ако Q е примарен идеал и $P = r(Q)$, идеалът Q се нарича *P -примарен*.

Лема 10.2. *Ако идеалите Q_1, \dots, Q_n са P -примарни, то идеалът $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ също е P -примарен.*

Доказателство. Първо имаме

$$r(Q) = r\left(\bigcap_{i=1}^n Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^n r(Q_i) = P.$$

Остава да проверим, че Q е примарен идеал. Нека $xy \in Q$, но $x \notin Q$. Тогава съществува i ($1 \leq i \leq n$), такава че $xy \in Q_i$, но $x \notin Q_i$. Тъй като Q_i е примарен идеал, то $y \in r(Q_i) = P = r(Q)$. Следователно Q е примарен идеал.

Определение. Ще казваме, че един идеал I на пръстена A е *разложим* (или *притежава примарно разлагане*), ако I може да се представи като сечение на краен брой примарни идеали.

Ако $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е едно такова разлагане, ще казваме, че то е *минимално*, ако:

(I) идеалите $P_i = r(Q_i)$ са два по два различни;

(II) $Q_j \not\subseteq \bigcap_{i \neq j} Q_i$ ($1 \leq j \leq n$).

Ползвайки се от лема 10.2, можем да групираме членовете на произволно примарно разлагане така, че новото разлагане да удовлетворява условието (I); премахвайки след това излишните идеали, ще получим разлагане, за което е изпълнено и (II). Така *всеки разложим идеал притежава минимално примарно разлагане*.

Определение. Нека $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е минимално примарно разлагане на идеала I . Простите идеали $P_i = r(Q_i)$ ($1 \leq i \leq n$) ще наричаме *асоциирани* с идеала I .

Твърдение 10.3. *Нека I е разложим идеал и P е произволен прост идеал, съдържащ I . Тогава P съдържа минимален прост идеал, асоцииран с I .*

В частност, съществуват, и то краен брой, минимални прости идеали, съдържащи I , и това са точно минималните прости идеали измежду асоциираните с I .

Доказателство. Нека $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е минимално примарно разлагане на идеала I и $P_i = r(Q_i)$ ($1 \leq i \leq n$). По условие $P \supseteq I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$. Тогава

$r(P) \supseteq r(I) = \bigcap_{i=1}^n r(Q_i) = \bigcap_{i=1}^n P_i$. Но $P = r(P)$, така че $P \supseteq \bigcap_{i=1}^n P_i$. Сега от твърдение 1.3, б) следва, че $P \supseteq P_i$ за някое i , а значи P съдържа и минимален прост идеал, асоцииран с I .

Ще отбележим без доказателство, че ако I е разложим идеал, следните множества се определят еднозначно от I (т. е. не зависят от вида на минималното примарно разлагане):

- (I) множеството от всички прости идеали, асоциирани с I ;
- (II) множеството от всички примарни идеали, съответстващи на минималните прости идеали, асоциирани с I (вижте задачи 10.8 и 10.10).

* * *

Сега ще видим, че в нютеров пръстен всеки идеал притежава примарно разлагане.

Определение. За един идеал I на пръстена A ще казваме, че е *неприводим*, ако от $I = I_1 \cap I_2$ ($I_1, I_2 \trianglelefteq A$) следва $I = I_1$ или $I = I_2$. Еквивалентно: $I = \bigcap_{k=1}^n I_k \Rightarrow I = I_k$ за някое k . В противен случай ще казваме, че I е *приводим идеал* (т. е. I е *приводим идеал*, ако I може да се представи като сечение на два идеала, които строго го съдържат).

Лема 10.4. *В нютеров пръстен A всеки идеал е сечение на краен брой неприводими идеали.*

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава множеството Σ от идеалите на A , за които лемата не е вярна, е непразно и следователно притежава максимален елемент I . Тъй като самият I е *приводим идеал*, то $I = I_1 \cap I_2$ и $I \subset I_1$, $I \subset I_2$. Тогава $I_1, I_2 \notin \Sigma$. Следователно всеки от идеалите I_1 и I_2 е сечение на краен брой неприводими идеали, а тогава същото е вярно и за I , което е противоречие.

Лема 10.5. *В нютеров пръстен A всеки неприводим идеал е примарен.*

Доказателство. Преминавайки към факторпръстен, лесно се вижда, че е достатъчно да докажем следното твърдение: ако нулевият идеал на A е *неприводим*, той е *примарен*.

И така, нека (0) е неприводим идеал и нека $xy = 0$, като $x \neq 0$. Ще докажем, че $y^n = 0$ за някое естествено число n .

Да разгледаме веригата от идеали $\text{Ann}(y) \subseteq \text{Ann}(y^2) \subseteq \dots$. Тъй като A е нютеров пръстен, тази верига се стабилизира, т. е. $\text{Ann}(y^n) = \text{Ann}(y^{n+1}) = \dots$ за някое естествено число n .

Ще докажем, че $(x) \cap (y^n) = (0)$. Действително, нека $a \in (x) \cap (y^n)$. От $a \in (x)$ следва $a = bx$ ($b \in A$) и тогава $ay = bxy = 0$. От $a \in (y^n)$ следва $a = cy^n$ ($c \in A$) и сега от $ay = 0$ получаваме $cy^{n+1} = 0$. Следователно $c \in \text{Ann}(y^{n+1}) = \text{Ann}(y^n)$. Но тогава $a = cy^n = 0$. Следователно $(x) \cap (y^n) = (0)$.

Накрая, от това че (0) е неприводим идеал и $(0) = (x) \cap (y^n)$, $x \neq 0$ следва $y^n = 0$, което искахме да докажем. Следователно (0) е примарен идеал.

Сега от леми 10.4 и 10.5 непосредствено получаваме

Теорема 10.6. *В нютеров пръстен всеки идеал притежава примарно разлагане.*

Следствие 10.7. *В нютеров пръстен има краен брой минимални прости идеали. При това всеки прост идеал съдържва минимален прост идеал.*

Доказателство. Тъй като нулевият идеал е разложим, можем да приложим за него твърдение 10.3.

Задачи

Задача 10.1. Нека $C[0, 1]$ е пръстенът от всички реални непрекъснати функции, дефинирани в интервала $[0, 1]$. Да се докаже, че нулевият идеал на пръстена $C[0, 1]$ не притежава примарно разлагане (т. е. не може да се представи като сечение на краен брой примарни идеали).

Задача 10.2. Нека A е пръстен. Да се докаже, че нулевият идеал (0) е примарен тогава и само тогава, когато всеки делител на 0 в пръстена A е нилпотентен елемент в A .

Задача 10.3. Нека $\varphi : A \rightarrow B$ е хомоморфизъм на пръстени и Q' е примарен идеал идеал в B . Тогава $Q = \varphi^{-1}(Q')$ е примарен идеал в A .

Задача 10.4. Да се докаже, че ако M е максимален идеал в пръстена A , то идеалът M^k е примарен за всяко $k \geq 1$.

Задача 10.5. Нека P е прост идеал в пръстена A и нека $A \xrightarrow{\varphi} A_P$ е хомоморфизмът на локализация спрямо P . Да се докаже, че идеалът $P^{(k)} = \varphi^{-1}(P^k A_P)$ е примарен в пръстена A за всяко $k \geq 1$. Примарният идеал $P^{(k)}$ се нарича *символична k -та степен* на P .

Задача 10.6. Нека $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в пръстена A и нека $P_i = r(Q_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Да се докаже, че:

- множеството от всички делители на 0 в пръстена A съвпада с обединението $\bigcup_{i=1}^n P_i$ на простите идеали P_i ($i = 1, \dots, n$);
- ако идеалът I в A състои от делители на 0 , то $I \subseteq P_i$ за някое $1 \leq i \leq n$.
- ако M е максимален идеал в A , състоящ се от делители на 0 , то $M = P_i$ за някое $1 \leq i \leq n$.

Задача 10.7. Нека S е мултипликативно затворено подмножество на пръстена A и $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ е хомоморфизмът на локализация спрямо S . Да се докаже, че:

- ако Q е примарен идеал в A , такъв че $Q \cap S = \emptyset$, то $S^{-1}Q$ е примарен идеал в $S^{-1}A$ и $\varphi^{-1}(S^{-1}Q) = Q$;
- ако $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в пръстена A и $Q_i \cap S = \emptyset$ за $i \leq m$, а $Q_i \cap S \neq \emptyset$ за $i > m$, то $(0) = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в пръстена $S^{-1}A$.

Задача 10.8. а) Нека A е пръстен и нека

$$(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i = \bigcap_{j=1}^m Q'_j$$

са две минимални примарни разлагания на нулевия идеал в A . Тогава множеството $\{P_1 = r(Q_1), \dots, P_n = r(Q_n)\}$ съвпада с множеството $\{P'_1 = r(Q'_1), \dots, P'_m = r(Q'_m)\}$.

- б) Нека I е разложим идеал в пръстена A . Да се докаже, че множеството от всички прости идеали, асоциирани с I , не зависи от вида на примарното разлагане на I .

Задача 10.9. Нека A е нютеров пръстен и нека S е мултипликативно затвореното множество от всички елементи на A , които не са делители на 0. Да се докаже, че:

- а) пръстенът $S^{-1}A$ е полулокален;
 б) ако $\mathfrak{N}(A) = (0)$, пръстенът $S^{-1}A$ е изоморфен на крайна директна сума на полета.

Задача 10.10. Нека $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е минимално примарно разлагане на идеала I в пръстена A и нека $P_1 = r(Q_1), \dots, P_n = r(Q_n)$. Да означим с $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{P_i}$ хомоморфизма на локализация спрямо простия идеал P_i , $1 \leq i \leq n$. Да се докаже, че ако P_i е минимален прост идеал, асоцииран с идеала I , то $Q_i = \varphi_i^{-1}(IA_{P_i})$. Следователно, ако I е разложим идеал в A , множеството на примарните идеали, съответстващи на минималните прости идеали, асоциирани с идеала I , се определя еднозначно от I .

Задача 10.11. Нека k е поле и нека $k[x, y]$ е пръстенът на полиноми на две променливи с коефициенти в k . Да се докаже, че:

- а) идеалите (x) , (x^2, y) и (x^2, xy, y^2) са примарни;
 б) $(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y) = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$.

Сравнете със Задача 10.10.

§ 11. Артинови пръстени

Ще напомним, че един пръстен A е *артинов*, ако удовлетворява следващите две еквивалентни условия:

- (I) всяка намаляваща верига от идеали на A се стабилизира;
- (II) всяко непразно множество от идеали на A има минимален елемент.

Твърдение 11.1. *В артинов пръстен A всеки прост идеал е максимален. Еквивалентно: всяка артинова област е поле.*

Доказателство. Нека P е прост идеал на A . Тогава пръстенът $B = A/P$ е артинова област. Нека $0 \neq x \in B$. Веригата от идеали $(x) \supseteq (x^2) \supseteq \dots$ се стабилизира и значи за някое n имаме $(x^n) = (x^{n+1})$. Тогава $x^n = x^{n+1}y$ за някое $y \in B$. Тъй като B е област, можем да съкратам на $x^n \neq 0$ и получаваме $xy = 1$. Така всеки ненулев елемент на B е обратим и значи B е поле. Следователно P е максимален идеал.

Следствие 11.2. *В артинов пръстен нилрадикалът съвпада с радикала на Джекобсън.*

Твърдение 11.3. *В артинов пръстен A нилрадикалът $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ ($= \mathfrak{K}(A)$) е нилпотентен.*

Доказателство. Тъй като веригата от идеали $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}^2 \supseteq \dots$ се стабилизира, за някое k имаме $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \dots$. Ще докажем, че $\mathfrak{N}^k = (0)$.

Да допуснем противното и да означим $I = \mathfrak{N}^k \neq (0)$. Нека Σ е множеството от всички идеали J на A , за които $IJ \neq (0)$. Тъй като $(0) \neq I = I^2 = \dots$, то $I \in \Sigma$. Следователно Σ е непразно множество и нека L е минимален елемент на Σ . Съществува елемент $x \in L$, такъв че $xI \neq (0)$, така че $(x) \in \Sigma$. Тъй като $(x) \subseteq L$, от минималността на L следва $(x) = L$. Освен това $(xI)I = xI^2 = xI \neq (0)$, така че и $xI \in \Sigma$. Но $xI \subseteq (x)$ и отново от минималността на $(x) = L$ имаме $xI = (x)$. Тогава $x = xa$ за някое $a \in I$. Умножавайки това равенство последователно с a , получаваме $x = xa = xa^2 = \dots$. Но $a \in I = \mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{N}$ и значи a е нилпотентен елемент. Следователно $x = 0$, което е противоречие.

Твърдение 11.4. *В артинов пръстен A има краен брой максимални идеали.*

Доказателство. Нека Σ е множеството от всевъзможните сечения на краен брой максимални идеали на A и нека $M_1 \cap \dots \cap M_n$ е минимален елемент на Σ . Тогава за произволен максимален идеал M е в сила $M \cap M_1 \cap \dots \cap M_n = M_1 \cap \dots \cap M_n$ и значи $M \supseteq M_1 \cap \dots \cap M_n$. Сега от твърдение 1.3, б) следва, че $M \supseteq M_i$ за някое i . Тъй като и M_i е максимален идеал, то $M = M_i$. Следователно M_1, \dots, M_n са всички максимални идеали на A .

* * *

Нека A е (ненулев) пръстен. Под *верига* от прости идеали на A ще разбираме всяка крайна строго растяща редица от прости идеали:

$$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n.$$

Числото n ще наричаме *дължина* на тази верига. Под *размерност на Крул* на пръстена A ($\dim A$) ще разбираме точната горна граница на дължините на всевъзможните вериги от прости идеали на A . Така $\dim A$ е цяло неотрицателно число или $+\infty$.

Примери. 1. Ако k е поле, то $\dim k = 0$.

2. Ако A е артинов пръстен, то $\dim A = 0$ (твърдение 11.1).

3. $\dim \mathbb{Z} = 1$. По-общо, всяка област на главни идеали (която не е поле) има размерност 1 (твърдение 1.2).

4. Нека k е поле и $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Веригата от прости идеали $(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots \subset (x_1, \dots, x_n)$ показва, че $\dim A \geq n$ (в действителност, размерността на A е точно n — вижте задача 8.19).

Теорема 11.5. *Класът на артиновите пръстени съвпада с класа на нулмерните нютерови пръстени.*

Доказателство. Нека първо A е артинов пръстен. Тогава $\dim A = 0$ (твърдение 11.1) и остава да покажем, че A е нютеров пръстен. Нека M_1, \dots, M_n са всички максимални идеали на A (твърдение 11.4). Тогава $\mathfrak{N} = \mathfrak{R} = \bigcap_{i=1}^n M_i$ и $\mathfrak{N}^k = \left(\bigcap_{i=1}^n M_i \right)^k = (0)$ за някое k (твърдение 11.3). Но $\prod_{i=1}^n M_i^k \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^n M_i \right)^k$, така че $\prod_{i=1}^n M_i^k = (0)$. Сега от следствие 6.9 следва, че A е нютеров пръстен.

Нека сега A е нулмерен нютеров пръстен. Според следствие 10.7 A притежава краен брой минимални прости идеали M_1, \dots, M_n и всеки

прост идеал съдържа минимален. Тогава $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^n M_i$. От следствие 7.3 имаме $\mathfrak{N}^k = \left(\bigcap_{i=1}^n M_i \right)^k = (0)$ за някое k и както по-горе заключаваме, че $\prod_{i=1}^n M_i^k = (0)$. Тъй като $\dim A = 0$, то простите идеали M_i са и максимални и отново от следствие 6.9 следва, че A е артинов пръстен.

* * *

Твърдение 11.6. Нека M е максимален идеал на пръстена A и $k \in \mathbb{N}$. Тогава факторпръстенът A/M^k е локален с единствен максимален идеал M/M^k .

Доказателство. Идеалът M/M^k е максимален и значи $M/M^k \supseteq \mathfrak{R}(A/M^k)$. От друга страна този идеал е нилпотентен и тогава $M/M^k \subseteq \mathfrak{N}(A/M^k) \subseteq \mathfrak{R}(A/M^k)$. Така $M/M^k = \mathfrak{R}(A/M^k)$, откъдето следва, че M/M^k е единствен максимален идеал на A/M^k .

Теорема 11.7. Всеки артинов пръстен е директна сума на краен брой артинови локални пръстени.

Доказателство. Ако A е локален пръстен, няма какво да се доказва. Нека не е локален и M_1, \dots, M_n ($n > 1$) са всичките различни максимални идеали на A (твърдение 11.4). Както в доказателството на теорема 11.5 се убеждаваме, че $\prod_{i=1}^n M_i^k = (0)$ за някое k . При $i \neq j$ имаме $M_i + M_j = A$ (защото M_i и M_j са различни максимални идеали) и освен това $M_i = r(M_i^k)$. От твърдение 2.8 следва, че $M_i^k + M_j^k = A$. Сега от твърдение 3.1 имаме $\bigcap_{i=1}^n M_i^k = \prod_{i=1}^n M_i^k = (0)$.

Да разгледаме хомоморфизма $\varphi : A \rightarrow A/M_1^k \oplus \dots \oplus A/M_n^k$, дефиниран чрез равенството $\varphi(x) = (x + M_1^k, \dots, x + M_n^k)$. Имаме $\text{Ker } \varphi = \bigcap_{i=1}^n M_i^k = (0)$, т. е. φ е инективен хомоморфизъм. От китайската теорема за остатъците (теорема 3.2) следва, че φ е и сюрективен хомоморфизъм. Следователно φ е изоморфизъм, т. е. $A \cong A/M_1^k \oplus \dots \oplus A/M_n^k$. При това пръстените A/M_i^k са артинови и (твърдение 11.6) локални.

Ще отбележим без доказателство, че представянето на един артинов пръстен като директна сума на краен брой артинови локални пръстени е еднозначно (вижте задача 11.2).

Нека A е артинов локален пръстен с единствен максимален идеал M . Тогава всеки елемент извън M е обратим (твърдение 1.6), а от друга страна, $M = \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ и $M^k = (0)$ за някое k . Следователно всеки елемент $x \in A$ или е нилпотентен (ако $x \in M$), или е обратим (ако $x \notin M$). (Пример за такъв пръстен е \mathbb{Z}_p^n (p — просто число, $n \in \mathbb{N}$).) Ако освен това A е полупрост пръстен (т. е. $M = \mathfrak{R}(A) = (0)$), то A е поле.

Упражнение 11.8. Да се докаже, че всеки полупрост артинов пръстен е директна сума на краен брой полета.

Упътване. Използвайте горните бележки и теорема 11.7, като предварително докажете, че всяко директно събираемо в представянето на A като директна сума, също е полупрост пръстен.

Задачи

Задача 11.1. Нека $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$ са всички максимални идеали в артиновия пръстен A . Да означим с $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{\mathfrak{M}_i}$ хомоморфизма на локализация спрямо \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, k$, и с φ изображението $A \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^k A_{\mathfrak{M}_i}$, зададено с формулата $\varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_k(a))$, $a \in A$. Да се докаже, че φ е изоморфизъм на пръстени.

Задача 11.2. Нека $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l$ са локални пръстени и нека

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k, \quad B = B_1 \oplus \dots \oplus B_l.$$

Да се докаже, че ако пръстените A и B са изоморфни, то $k = l$ и съществува пермутация j_1, \dots, j_k на числата $1, \dots, k$, такава че $A_i \cong B_{j_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Задача 11.3. Да се докаже, че ако A е артинов пръстен, то

$$l(A^n) = nl(A).$$

Задача 11.4. Да се докаже, че ако A е нютеров пръстен и P е минимален прост идеал в A , то A_P е локален артинов пръстен.

Задача 11.5. Нека A е пръстен. Да се докаже, че ако $A^n \xrightarrow{\varphi} A^m$ е инективен хомоморфизъм на A -модули, то $n \leq m$. Сравнете със Задача 6.3.

Задача 11.6. Нека $A \rightarrow B$ е сюрективен хомоморфизъм на пръстени и нека M е B -модул. Да се докаже, че $l_A(M) = l_B(M)$ (т. е. дължината на M като A -модул съвпада с дължината на M като B -модул). Следователно

$$l_A(M) = l_{A/\text{Ann } M}(M).$$

Задача 11.7. Нека \mathfrak{M} е максимален идеал в A с поле от остатъци $F = A/\mathfrak{M}$. Да се докаже, че ако M е A -модул, такъв че $\mathfrak{M}M = (0)$, то $l_A(M) = \dim_F M$.

Задача 11.8. Да се докаже, че $M \neq 0$ е прост A -модул (т. е. (0) и M са единствените A -подмодули на M) точно когато съществува максимален идеал \mathfrak{M} на A , такъв че $M \cong A/\mathfrak{M}$.

Задача 11.9. Да се докаже, че веригата

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = (0)$$

от подмодули на A -модула M е композиционен ред на M точно когато съществуват (не непременно различни) максимални идеали \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, n$, такива че $M_{i-1}/M_i \cong A/\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Задача 11.10. Нека M е A -модул с крайна дължина. Тогава съществуват (не непременно различни) максимални идеали \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, n$, такива че $\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n M = (0)$.

Задача 11.11. Да се докаже, че за един A -модул M следните условия са еквивалентни:

- а) M е модул с крайна дължина;
- б) M е крайнопороден A -модул и $A/\text{Ann } M$ е артинов пръстен.

Задача 11.12. Нека M е A -модул и S е мултипликативно затворено множество в A . Да се докаже, че $l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq l_A(M)$.

Задача 11.13. Нека M е A -модул с крайна дължина. Да се докаже, че:

- а) $l_A(M) = \sum l_{A/\mathfrak{M}}(M/\mathfrak{M}M)$, където сумирането се извършва по всички максимални идеали на A ;
- б) $l_A(M) = \sum \dim_{A/\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^iM)$, където сумирането се извършва по всички максимални идеали на A и всички естествени числа i .

Забележка: От Задача 11.11 следва, че само краен брой от събираемите в горните суми са различни от 0.

Задача 11.14. Нека A е крайномерна алгебра над поле k , с максимални идеали \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, n$. Да означим с F_i полето A/\mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, n$. Нека M е крайнопороден A -модул. Тогава:

а) M е крайномерно линейно пространство над k ;

б)
$$l_A(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\dim_k M_{\mathfrak{M}_i}}{[F_i : k]},$$

в) $l_A(M) = \dim_k M$, когато k е алгебрично затворено поле.

при
ри
съ

P_i
еди
инд

r

$a \in$

иде

оби
прс

тог
зна

два

Упътвания и решения на задачите

§ 1. Прости и максимални идеали

1.1. Ако I не е прост идеал, то съществуват $a_1, a_2 \notin I$, такива че $a_1 a_2 \in I$. Нека $I_1 = I + (a_1)$, $I_2 = I + (a_2)$; тогава $I_1 I_2 \subseteq I$. Обратно, ако $I \subset I_1$, $I \subset I_2$ и $I_1 I_2 \subseteq I$, нека $a_1 \in I_1 \setminus I$ и $a_2 \in I_2 \setminus I$. Тогава $a_1 \notin I$, $a_2 \notin I$, а $a_1 a_2 \in I$.

1.2. Нека Σ е множеството от всички прости идеали на пръстена A с наредбата включване на идеали (Σ не е празното множество, защото всеки пръстен притежава максимални, а значи и прости идеали). Докажете, че ако $\{P_\alpha\}$ е верига в Σ , идеалът $P = \bigcap_{\alpha} P_\alpha$ е прост. След това приложете лемата на Цорн за съществуване на минимални елементи в Σ .

1.3. Докажете, че $A[x]/P[x] \cong (A/P)[x]$. Когато A/P е област, пръстенът $(A/P)[x]$ също е област (но не е поле).

1.4. Да предположим, че $I \not\subseteq P_i$, $i = 1, \dots, n$. Можем да предположим, че $P_i \not\subseteq P_j$, $i \neq j$. Когато $n = 2$, избираме $x \in I \setminus P_1$, $y \in I \setminus P_2$; тогава поне един от елементите x , y , $x + y$ не се съдържа в $P_1 \cup P_2$. Ако $n > 2$, използваме индукция и избираме $x \in I \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{n-1})$. Тъй като P_n е прост идеал, то $IP_1 \dots P_{n-1} \not\subseteq P_n$. Нека $y \in (IP_1 \dots P_{n-1}) \setminus P_n$. Тогава или $x \notin P_1 \cup \dots \cup P_n$ или $x + y \notin P_1 \cup \dots \cup P_n$.

1.5. а) Главният идеал $P_a = (ax + y)$ е прост и се съдържа в I за всяко $a \in \mathbb{C}$, като $P_a \neq P_b$ за $a \neq b$;

б) Всеки полином $f \in I$ се дели на неразложим над \mathbb{C} полином $f_j \in I$, защото идеалът I е прост;

в) Ако $I = (x, y) \subseteq P_j = (f_j)$ за някой полином f_j , то $f_j \neq 0$ ще бъде общ делител на полиномите x и y , т.е. f_j ще бъде константен полином, което противоречи на $P_j \subseteq I$.

1.6. Нека P е прост идеал на A и $B = A/P$. Ако $0 \neq x \in B$, то $x^n = x$ и тогава (тъй като B е област) $x^{n-1} = 1$. Оттук следва, че x е обратим елемент и значи B е поле, т.е. P е максимален идеал на A .

1.7. а) От $x^2 = x$ и $(x + 1)^2 = x + 1$ следва, че $2x = 0$.

б) Следва от Задача 1.6.

в) В полето A/P от $x^2 = x$ следва $x = 0$ или $x = 1$, така че A/P има само два елемента.

1.8. Ако P е прост идеал в A , то областта A/P също е крайномерна алгебра над k ; затова е достатъчно да се докаже, че ако A е област, то A е поле. Нека $0 \neq a \in A$ и нека $\varphi_a : A \rightarrow A$ е линейното изображение, зададено с $\varphi_a(x) = xa$, $x \in A$. Тогава $\text{Ker } \varphi_a = \{0\}$, откъдето $\text{Im } \varphi_a = A$; в частност, съществува $x \in A$, такъв че $xa = 1$.

1.9. Ако $\bigcap_{i=1}^{k+1} \mathfrak{M}_i = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{M}_i$, то $\mathfrak{M}_{k+1} \supseteq \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{M}_i \supseteq \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_k$, откъдето следва, че $\mathfrak{M}_{k+1} \supseteq \mathfrak{M}_i$ за някое $1 \leq i \leq k$.

1.10. Използвайте Задача 1.9. Ако $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_k$ са различни максимални идеали в A , то $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{M}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_k$ е строго намаляваща верига от линейни подпространства на A .

1.11. а) Ако P е прост идеал в A , то $\mathfrak{M}^n = (0) \subseteq P$, откъдето следва, че $\mathfrak{M} \subseteq P$;

б) Нека $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^n$; тогава $\overline{\mathfrak{M}}^n = (0)$.

1.12. а) Ако P е прост идеал в A , то $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n = (0) \subseteq P$, откъдето следва, че $\mathfrak{M}_i \subseteq P$ за някое $1 \leq i \leq n$.

б) Нека $\overline{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}_i/I$, $i = 1, \dots, n$; тогава е в сила $\overline{\mathfrak{M}}_1 \dots \overline{\mathfrak{M}}_n = (0)$.

§ 2. Нилрадикал и радикал на Джекобсън

2.1. Проверете, че $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ (тъй като x е нилпотентен елемент, тази сума е крайна).

2.2. а) Ако $f^{-1} = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, с индукция по r покажете, че $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Оттук изведете, че a_n е нилпотентен елемент и след това използвайте Задача 2.1

б) Използвайте, че сума на краен брой нилпотентни елементи също е нилпотентен елемент.

2.3. Първото равенство следва от Задача 2.2, б). За второто равенство използвайте Задача 2.2, а) и твърдение 2.3.

2.4. Следва от Задача 2.3.

2.5. Използвайте Задача 2.4 и индукция по n .

2.6. а) Нека $f = a_0(1 + xg)$, $g \in A[[x]]$. Тогава

$$f^{-1} = a_0^{-1}(1 - xg + (xg)^2 - (xg)^3 + \dots).$$

б) Покажете, че a_0 е нилпотентен елемент и след това използвайте, че $f - a_0$ е нилпотентен и индукция по n .

в) Използвайте твърдение 2.3.

2.7. Тъй като всеки прост идеал в A е максимален идеал, сечението на всички прости идеали съвпада със сечението на всички максимални идеали.

2.8. Ако $Y \in M_n(A)$ и $YX = E_n$, то $\det Y \det X = 1$, т.е. $\det X$ е обратим елемент на A . Обратно, нека $\det X$ е обратим елемент на A и нека $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij}) \in M_n(A)$ е адюнгираната матрица на X : $\tilde{x}_{ij} = \Delta_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, където Δ_{ji} е адюнгираното количество на елемента x_{ij} . Тогава $X\tilde{X} = \tilde{X}X = (\det X)E_n$ и матрицата $Y = (\det X)^{-1}\tilde{X}$ е обратна на матрицата X .

§ 3. Взаимно прости идеали. Китайска теорема за остатъците

3.1. Нека $I = I_k^{d_k} + I_l^{d_l}$, $1 \leq k \neq l \leq n$. Ако $I \neq A$, то съществува максимален идеал \mathfrak{M} в A , такъв че $I_k^{d_k} \subseteq \mathfrak{M}$, $I_l^{d_l} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогава $I_k \subseteq \mathfrak{M}$, $I_l \subseteq \mathfrak{M}$, което противоречи на $I_k + I_l = A$.

3.2. а) Използвайте китайската теорема за остатъците, като вземете предвид, че идеалите $(p_1^{\alpha_1}), \dots, (p_k^{\alpha_k})$ са два по два взаимно прости и

$$(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i}).$$

3.3. Използвайте китайската теорема за остатъците.

3.4. Приложете предната задача за идеалите (m) и (n) и използвайте факта, че $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$.

3.5. а) Тъй като $x = (p_1(x), \dots, p_k(x))$ за всеки $x \in I$, то $I \subseteq \bigoplus_{i=1}^k I_i$. Обратно, за всеки $x = (x_1, \dots, x_k) \in \bigoplus_{i=1}^k I_i$ съществуват $y_i \in I$, такива че $x_i = p_i(y_i)$, $i = 1, \dots, k$. Нека $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_k = (0, 0, \dots, 1)$ и нека $y = \sum_{i=1}^k e_i y_i \in I$. Тогава $p_i(y) = x_i$, $i = 1, \dots, k$, откъдето $y = x$, т.е. $x \in I$.

Следователно $I \supseteq \bigoplus_{i=1}^k I_i$, което заедно с вече доказаното обратно включване,

$$\text{влече } I = \bigoplus_{i=1}^k I_i.$$

Нека $\varphi : A \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k A_i/I_i$ е хомоморфизмът на пръстени, определен с формулата $\varphi(x_1, \dots, x_k) = (x_1 + I_1, \dots, x_k + I_k)$. Тогава $\text{Кер } \varphi = I$, откъдето $A/I \cong \bigoplus_{i=1}^k A_i/I_i$.

Подусловия б) и в) следват непосредствено от този изоморфизъм.

3.6. Замяната на A с A/I и на \mathfrak{M}_i с \mathfrak{M}_i/I , $i = 1, \dots, n$, свежда задачата до случая $I = (0)$. Тогава, както в Задача 1.12, се установява, че всеки прост идеал в A съвпада с някой от идеалите $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$. Тъй като $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{M}_i$, $i = 1, \dots, n$, то $\mathfrak{R}(A)^n \subseteq \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n = (0)$.

3.7. Използвайте, че $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_k$, където $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$ са всички максимални идеали на A . Тогава $\mathfrak{R}(A)^N = \mathfrak{M}_1^N \dots \mathfrak{M}_k^N = (0)$ за някое $N > 0$ и резултатът следва от Задача 1.12.

3.8. а) \Rightarrow б) Използвайте Задача 3.6.

б) \Rightarrow в) Ако $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$ са максималните идеали на A , то $\mathfrak{M}_1^N \dots \mathfrak{M}_k^N = (0)$ за някое $N > 0$. Приложете китайската теорема за остатъците към идеалите $\mathfrak{M}_1^N, \dots, \mathfrak{M}_k^N$, които са взаимно прости според Задача 3.1.

в) \Rightarrow а) Използвайте даденото в Задача 3.5 описание на максималните идеали в пръстена $\bigoplus_{i=1}^k A_i$.

3.9. Нека $\mathfrak{R}(A) = (0)$ и нека $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_m$ са максималните идеали на A . Тогава $\mathfrak{M}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_m = (0)$, откъдето $A \cong \bigoplus_{i=1}^m A/\mathfrak{M}_i$ според китайската теорема за остатъците. Тъй като A/\mathfrak{M}_i е крайномерна k -алгебра, то A/\mathfrak{M}_i е крайно разширение на полето k , $i = 1, \dots, m$. Обратно, ако $A \cong \bigoplus_{i=1}^m E_i$, където E_i са полета, то $\mathfrak{R}(A) \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{R}(E_i) = (0)$.

§ 4. Локализация

4.1. Нека P е максимален елемент на Σ (съществуването му следва от лемата на Цорн). Да допуснем, че P не е прост идеал и нека $a, b \notin P$, но $ab \in P$. Тогава $P + (a) \supset P \Rightarrow (P + (a)) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \exists s \in (P + (a)) \cap S$. Аналогично $\exists t \in (P + (b)) \cap S$. Сега имаме $st \in S$ и $st \in (P + (a))(P + (b)) \subseteq P + (ab) = P$. Така $P \cap S \neq \emptyset$, противоречие.

4.2. Нека S е максимален елемент на Σ (съществуването му следва от лемата на Цорн). Да означим с Π множеството от всички идеали на A , непресичащи S (нулевият идеал е такъв). От Задача 4.1 имаме, че Π притежава максимални елементи и ако P е такъв, то P е прост идеал. Сега от максималността на S следва, че $P = A \setminus S$ и P е минимален прост идеал на A .

4.3. Да забележим, че ако $a, b \in I$, то $1 - \frac{a}{1+b} = \frac{1+b-a}{1+b}$ е обратим елемент в $S^{-1}A$. Това показва, че множеството $1 - S^{-1}I$ се състои от обратими в $S^{-1}A$ елементи. Ако $x \in S^{-1}I$ и $y \in S^{-1}A$, то $xy \in S^{-1}I$ (защото $S^{-1}I$ е идеал в $S^{-1}A$), откъдето следва, че $1 - xy \in 1 - S^{-1}I$ е обратим в $S^{-1}A$, т. е. $x \in \mathfrak{R}(S^{-1}A)$ според твърдение 2.3.

4.4. Очевидно $S^{-1}(\mathfrak{N}(A)) \subseteq \mathfrak{N}(S^{-1}A)$. Обратно, нека $a/s \in \mathfrak{N}(S^{-1}A)$, $a \in A$, $s \in S$. Тогава за някое n имаме $a^n/s^n = 0 \Rightarrow a^n/1 = 0 \Rightarrow a^n t = 0$ за някое $t \in S$ (виж упражнение 4.1, б) на стр. 23) $\Rightarrow (at)^n = 0 \Rightarrow at \in \mathfrak{N}(A)$. Тогава $a/s = (at)/(st) \in S^{-1}(\mathfrak{N}(A))$.

Ако A е област с ненулев радикал на Джекобсън и $S = A \setminus \{0\}$, то не е вярно, че $S^{-1}(\mathfrak{R}(A)) = \mathfrak{R}(S^{-1}A)$.

4.5. Очевидно а) \Rightarrow б) \Rightarrow в) (виж Задача 4.4). Да допуснем, че е изпълнено в), но $\mathfrak{N}(A) \neq (0)$ и нека $0 \neq x \in \mathfrak{N}(A)$. Тъй като $\text{Ann}(x) \neq (1)$, то $\text{Ann}(x) \subseteq M$ за някой максимален идеал M в A . Имаме $x/1 \in \mathfrak{N}(A_M)$ и значи $x/1 = 0$. Тогава $xs = 0$ за някое $s \in A \setminus M$ (виж упражнение 4.1, б) на стр. 23), което е противоречие, защото $\text{Ann}(x) \subseteq M$.

4.6. Нека $a/s, b/t \in A_P$ ($a, b \in A, s, t \in A \setminus P$) и $(ab)/(st) = 0$. Тогава $(ab)/1 = 0 \Rightarrow abu = 0$ за някое $u \in A \setminus P$. Тъй като A е област и $u \neq 0$, то $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0 \Rightarrow a/s = 0$ или $b/t = 0$.

Обратното не е вярно. Разгледайте пръстена \mathbb{Z}_6 .

4.7. а) Нека $n = 2$. Ясно, е че $S^{-1}(I_1 \cap I_2) \subseteq S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2$. Нека

$$x = x_1/s_1 = x_2/s_2 \in S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2,$$

където $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ и $s_1, s_2 \in S$. Тогава $I_1 \ni ts_2x_1 = ts_1x_2 \in I_2$ за някое $t \in S$, откъдето $ts_2x_1 \in I_1 \cap I_2$. Тогава $x = (ts_2x_1)/(ts_2s_1) \in S^{-1}(I_1 \cap I_2)$. Общият случай се получава с индукция по n .

б) Нека $n = 2$. Идеалът $S^{-1}(I_1 I_2)$ се поражда от множеството $\{(x_1 x_2)/s\}$, където $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ и $s \in S$. Идеалът $(S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$ се поражда от множеството $\{(x_1/s_1)(x_2/s_2)\}$, където $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ и $s_1, s_2 \in S$. Тъй като тези две множества съвпадат, то идеалите $S^{-1}(I_1 I_2)$ и $(S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$ също съвпадат. Общият случай се получава с индукция по n .

4.8. Проверете, че изображението $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$, зададено с

$$\theta(a/s) = \psi(a)\psi(s)^{-1}, \quad a \in A, s \in S,$$

е коректно дефиниран хомоморфизъм на пръстени, такъв че $\psi = \theta\varphi$. За да докажете единствеността на θ , забележете, че от $\psi = \theta\varphi$ следва, че

$$\theta(a/s)\psi(s) = \theta(a/s)\theta(\varphi(s)) = \theta(a/s)\theta(s/1) = \theta(a/1) = \theta(\varphi(a)) = \psi(a).$$

Ако $B = S^{-1}A$ и $\psi = \varphi$, то $\theta = \text{id}_{S^{-1}A}$.

4.9. От а) следва, че съществува хомоморфизъм $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$, такъв че $\psi = \theta\varphi$, а от б) следва, че съществува хомоморфизъм $B \xrightarrow{\theta'} S^{-1}A$, такъв че $\varphi = \theta'\psi$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ S^{-1}A & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi \downarrow & \nwarrow \theta' & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

Тогава $(\theta'\theta)\varphi = \theta'(\theta\varphi) = \theta'\psi = \varphi = (\text{id}_{S^{-1}A})\varphi$, откъдето $\theta'\theta = \text{id}_{S^{-1}A}$. Аналогично, $(\theta\theta')\psi = \theta(\theta'\psi) = \theta\varphi = \psi = \text{id}_B\psi$, откъдето $\theta\theta' = \text{id}_B$.

4.10. а) Нека $A/I \xrightarrow{\psi} S^{-1}A/S^{-1}I$ е хомоморфизмът зададен с

$$\psi(a + I) = (a/1) + S^{-1}I, \quad a \in A.$$

С помощта на комутативната диаграма

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/I \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ S^{-1}A & \longrightarrow & S^{-1}A/S^{-1}I \end{array}$$

установете, че хомоморфизмът ψ и множеството \overline{S} изпълняват условията на Задача 4.9.

б) Приложете а) за мултипликативно затвореното множество $S = A \setminus P$.

4.11. Да означим с \overline{S} образа на S при каноничния хомоморфизъм на факторизация $A \rightarrow A/I$. Тогава $r(S^{-1}I)/S^{-1}I = \mathfrak{N}(S^{-1}A/S^{-1}I) = \mathfrak{N}(\overline{S}^{-1}(A/I))$ и $S^{-1}(r(I))/S^{-1}I = \overline{S}^{-1}(r(I)/I) = \overline{S}^{-1}(\mathfrak{N}(A/I))$ и сега можем да приложим Задача 4.4.

4.12. Нека $A \xrightarrow{\psi} \overline{T}^{-1}(S^{-1}A)$ е композицията на хомоморфизмите на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$ и $S^{-1}A \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{T}^{-1}(S^{-1}A)$, $\psi = \overline{\varphi}\varphi$. Установете, че хомоморфизмът ψ и множеството T изпълняват условията на Задача 4.9.

4.13. Нека $T = A \setminus P$ и нека \overline{T} е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Тогава $\overline{T}^{-1}(S^{-1}A) \cong A_P$. Покажете, че хомоморфизмът $\overline{T}^{-1}(S^{-1}A) \rightarrow (S^{-1}A)_{\mathfrak{P}}$ е изоморфизъм.

4.14. Нека $S = A \setminus Q$. Приложете Задача 4.13 за множеството S и идеала P .

4.15. а) Всеки прост идеал в $S^{-1}A$ е от вида $S^{-1}Q$, където Q е прост идеал в A , такъв че $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i$. Тогава от твърдение 1.3, а) следва, че всеки прост идеал в $S^{-1}A$ се съдържа в някой от идеалите $S^{-1}P_i$, $i = 1, \dots, k$.

б) Ако между идеалите P_i , $i = 1, \dots, k$, няма включвания, то същото е вярно за идеалите $S^{-1}P_i$, $i = 1, \dots, k$.

4.16. Приложете Задача 4.10, б) към идеала $I = (0) \oplus B$ в пръстена $A \oplus B$ и забележете, че $I(A \oplus B)_{\mathfrak{P}} = (0)$, защото $(1, 0) \notin \mathfrak{P}$.

4.17. а) Нека $0 \neq a \in A$. Тъй като $\text{Ann}(a) \neq A$, то $\text{Ann}(a) \subseteq \mathfrak{M}_i$ за някое $1 \leq i \leq k$, откъдето $\varphi_i(a) \neq 0$.

б) Нека $A = \bigoplus_{i=1}^k A_i$, където A_i е локален пръстен с максимален идеал M_i , $i = 1, \dots, k$. Според Задача 3.5 всички максимални идеали на A са

$$\mathfrak{M}_i = A_1 \oplus \dots \oplus M_i \oplus \dots \oplus A_k, \quad i = 1, \dots, k,$$

а от Задача 4.16 следва, че хомоморфизмът $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{\mathfrak{M}_i}$ съвпада с проекцията $A = \bigoplus_{i=1}^k A_i \rightarrow A_i$.

в) Ако $\mathfrak{R}(A)$ е нилпотентен идеал, то според Задача 3.8 пръстенът A е изоморфен на директна сума на k локални пръстена.

§ 5. Модули. Крайнопородени модули

5.1. Нека елементите $x_1, \dots, x_n \in N$ пораждат A -модула N и нека елементите $y_1, \dots, y_m \in M$ са такива, че $y_1 + N, \dots, y_m + N$ пораждат A -модула M/N . Тогава елементите $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ пораждат A -модула M .

5.2. Проверете, че за всички $f, g \in A[\lambda]$ и всички $x, y \in M$ са в сила равенствата: $f(x+y) = fx + fy$, $f(x+y) = fx + fy$, $(fg)(x) = f(g(x))$, $1 \cdot x = x$.

5.3. Нека $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогава $\mathcal{A}X = 0$. Умножете последното равенство

отляво с адюнгираната матрица $\tilde{\mathcal{A}} = (\Delta_{ji}) \in M_n(A)$, където Δ_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$. Използвайте, че $\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A} = (\det A)E_n$.

5.4. Да снабдим M със структура на $A[\lambda]$ -модул (виж Задача 5.2): $fx = f(\varphi)(x)$, $f \in A[\lambda]$, $x \in M$. Тогава $\chi_\varphi(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi \in \text{Ann}_{A[\lambda]} M$. Нека $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогава $(\lambda E_n - \mathcal{A})X = 0$. Сега можем да приложим детерминантния трик (Задача 5.3) към матрицата $\lambda E_n - \mathcal{A} \in M_n(A[\lambda])$.

5.5. Нека M се поражда като A -модул от елементите x_1, \dots, x_n . Тогава $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $i = 1, \dots, n$, където $a_{ij} \in I$, $1 \leq i, j \leq n$. Сега полиномът χ_φ от Задача 5.4 удовлетворява исканите условия.

5.6. Приложете Задача 5.5 към хомоморфизма $\varphi = \text{id}_M$.

5.7. Да разгледаме M като модул над пръстена $A[\lambda]$: $f x = f(\varphi)(x)$, $f \in A[\lambda]$, $x \in M$. Тогава $M = (\lambda)M$ и от Задача 5.6 следва, че съществуват $a_1, \dots, a_k \in A$, такива че $\text{id}_M + a_1\varphi + \dots + a_k\varphi^k = 0$, откъдето получаваме, че φ е обратим.

5.8. Нека $f \in A[x]$ е полином, със старши коефициент 1, такъв че $f(b) = 0$. Тогава всеки полином $g \in A[x]$ може да се раздели на f с частно и остатък: $g = qf + r$, $q, r \in A[x]$, $\deg r < \deg f$. Тъй като $g(b) = r(b)$, елементите b^i , $0 \leq i < \deg f$, пораждат пръстена $A[b]$ като A -модул.

5.9. Нека $b \in B$ и нека $B \xrightarrow{\varphi_b} B$ е хомоморфизмът на A -модули, определен с формулата $\varphi_b(x) = bx$, $x \in B$. Приложете Задача 5.5 към хомоморфизма φ_b и идеала $I = A$. Забележете, че: а) $b = 0 \Leftrightarrow \varphi_b = 0$; б) $f(\varphi_b) = \varphi_{f(b)}$, $f \in A[\lambda]$, $b \in B$.

5.10. Следва от Задачи 5.8 и 5.9

5.11. Нека $b_i \in B$, $i = 1, \dots, m$, пораждат B като A -модул и $c_j \in C$, $j = 1, \dots, n$, пораждат C като B -модул. Тогава $b_i c_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ пораждат C като A -модул.

5.12. Използвайте индукция по m и Задача 5.11.

5.13. Ако $b_1, b_2 \in B$ са цели над A , то според Задача 5.12 пръстенът $A[b_1, b_2]$ е цяло разширение на A . Тъй като $b_1 + b_2, b_1 b_2 \in A[b_1, b_2]$, то $b_1 + b_2$ и $b_1 b_2$ са цели елементи над A .

5.14. Ако C е цяло разширение на A , то очевидно B е цяло разширение на A и C е цяло разширение на B . Обратно, нека B е цяло разширение на A и C е цяло разширение на B . Тогава за всеки елемент $c \in C$ съществуват елементи $b_1, \dots, b_n \in B$, такива че $c^n + b_1 c^{n-1} + \dots + b_n = 0$. Тогава c е цял над $A[b_1, \dots, b_n]$, откъдето следва, че $A[b_1, \dots, b_n, c]$ е крайнопороден $A[b_1, \dots, b_n]$ -модул. Тъй като $A[b_1, \dots, b_n]$ е крайнопороден A -модул (виж Задача 5.12), то сега от Задача 5.11 следва, че $A[b_1, \dots, b_n, c]$ е крайнопороден A -модул, т.е. c е цял елемент над A .

5.15. За всеки полином $f \in A[x]$ нека $\bar{f} \in (A/I)[x]$ е редуцията на f по модул I . Нека $\bar{b} \in B/J$ и $f \in A[x]$ е полином със старши коефициент 1, такъв че $f(b) = 0$. Тогава полиномът $\bar{f} \in (A/I)[x]$ има старши коефициент $\bar{1}$ и $\bar{f}(\bar{b}) = \bar{0}$.

5.16. Нека $b \in B$, $s \in S$ и нека $f = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^i \in A[x]$ е такъв, че $f(b) = 0$. Тогава

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s^{n-i}} \left(\frac{b}{s}\right)^i = \frac{f(b)}{s^n} = 0.$$

5.17. Нека $a_1, \dots, a_n \in I$ и $b_1, \dots, b_n \in B$ са такива, че $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 1$. Тъй като $B' = A[b_1, \dots, b_n]$ е крайнопороден A -модул, за който $IB' = B'$, то според Задача 5.6 съществува елемент $a \in I$, такъв че $1 + a \in \text{Ann } B' = \{0\}$, откъдето следва, че $1 \in I$.

5.18. Нека $0 \neq b \in J$ и нека $f = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^i \in A[x]$ е такъв, че $f(b) = 0$. Тъй като B е област, можем да предполагаме, че $a_n \neq 0$. Тогава

$$0 \neq a_n = -b^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i b^i \in A \cap J.$$

5.19. Проверете, че изображението $S^{-1}M \xrightarrow{\theta} N$, зададено с

$$\theta(x/s) = (1/s)\psi(x), \quad x \in M, s \in S,$$

е коректно дефиниран хомоморфизъм на $S^{-1}A$ -модули, такъв че $\psi = \theta\varphi$

5.20. Нека хомоморфизмът $\theta' : N \rightarrow S^{-1}M$ е такъв, че $\varphi = \theta'\psi$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ \varphi \downarrow & \swarrow \theta' & \\ S^{-1}M & & \end{array}$$

Тогава $(\theta\theta')\psi = \theta(\theta'\psi) = \theta\varphi = \psi = \text{id}_N \psi$, откъдето $\theta\theta' = \text{id}_N$. Аналогично $(\theta'\theta)\varphi = \theta'(\theta\varphi) = \theta'\psi = \varphi = (\text{id}_{S^{-1}M})\varphi$, откъдето $\theta'\theta = \text{id}_{S^{-1}M}$. Следователно θ е изоморфизъм.

5.21. Нека елементите $x \in N$ и $s \in S$ са такива, че $i_S(x/s) = i(x)/s = 0$. Тогава $ui(x) = 0$ за някой $u \in S$, откъдето $i(ux) = 0$ и $ux = 0$. Следователно $x/s = (ux)/(us) = 0$.

5.22. Нека $n = 2$. Ясно, е че $S^{-1}(N_1 \cap N_2) \subseteq S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$. Нека

$$x = x_1/s_1 = x_2/s_2 \in S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2,$$

където $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2, s_1, s_2 \in S$. Тогава $N_1 \ni us_2x_1 = us_1x_2 \in N_2$ за някой $u \in S$, откъдето $us_2x_1 \in N_1 \cap N_2$. Тъй като $x = (us_2x_1)/(us_2s_1)$, то $x \in S^{-1}(N_1 \cap N_2)$. Общият случай се получава с индукция по n .

5.23. Нека $M/N \xrightarrow{\psi} S^{-1}M/S^{-1}N$ е хомоморфизмът зададен с

$$\psi(x + N) = (x/1) + S^{-1}N, \quad x \in M.$$

С помощта на комутативната диаграма

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M/S^{-1}N \end{array}$$

установете, че хомоморфизмът ψ изпълнява условието на Задача 5.20.

5.24. Нека $M \xrightarrow{\psi} \bar{T}^{-1}(S^{-1}M)$ е композицията на хомоморфизмите на локализация $N \xrightarrow{\varphi} S^{-1}M$ и $S^{-1}M \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{T}^{-1}(S^{-1}M)$, $\psi = \bar{\varphi}\varphi$. Проверете, че хомоморфизмът ψ изпълнява условието на Задача 5.20.

5.25. Нека $T = A \setminus P$ и нека \bar{T} е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Тогава $\bar{T}^{-1}(S^{-1}M) \cong M_P$. Покажете, че хомоморфизмът $\bar{T}^{-1}(S^{-1}M) \rightarrow (S^{-1}M)_P$ е изоморфизъм.

5.26. Нека $S = A \setminus Q$. Приложете Задача 5.25 към множеството S и идеала P .

5.27. Забележете, че $(PM)_P = PM_P$ и приложете Задача 5.23.

5.28. Използвайте Задача 5.27 и лемата на Накаяма.

5.29. а) Ако $0 \neq x \in M$, множеството $\text{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ е собствен идеал на A . Следователно $\text{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{M}_i$ за някой индекс $1 \leq i \leq k$, откъдето следва, че $\varphi_i(x) \neq 0$.

б) Нека $A_i, i = 1, \dots, k$ са локални пръстени и нека $A = \bigoplus_{i=1}^k A_i$. Нека $e_i \in A_i$ е неутралният елемент на $A_i, i = 1, \dots, k$, и $a_i = (0, \dots, e_i, \dots, 0) \in A$. Тогава множествата $M_i = a_i M, i = 1, \dots, k$, са A -подмодули на M и $M = \bigoplus_{i=1}^k M_i$. Покажете, че проекцията $M \rightarrow M_i$ съвпада с хомоморфизма $M \xrightarrow{\varphi_i} M_{\mathfrak{M}_i}$.

в) Използвайте Задача 3.8.

5.30. Ако $M \neq 0$ и $0 \neq x \in M$, множеството $\text{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ е собствен идеал в A . Тогава $M_P \neq 0$ за всеки прост идеал P в A , който съдържа $\text{Ann}(x)$.

5.31. Използвайте изоморфизма $(M/N)_P \cong M_P/N_P$ и Задача 5.30.

5.32. Използвайте изоморфизма $(A/I)_P \cong A_P/IA_P$.

5.33. Ако $P \not\supseteq \text{Ann } M$, то съществува $t \notin P$, такъв че $tM = 0$. Тогава $x/s = (tx)/(ts) = 0$ за всеки елемент $x/s \in M_P$.

5.34. Ясно е, че $\text{Ann}(M) \supseteq \mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n$. Ако $P \in \text{Supp } M$, то $P \supseteq \text{Ann}(M)$ (виж Задача 5.33), откъдето $P \supseteq \mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n$. Тогава $P \supseteq \mathfrak{M}_i$ за някое $1 \leq i \leq n$, защото идеалът P е прост.

5.35. Забележете, че $M_P \neq 0 \Leftrightarrow$ или $N_P \neq 0$ или $M_P/N_P \neq 0$. Използвайте, че $M_P/N_P \cong (M/N)_P$.

5.36. Използвайте Задача 5.25.

5.37. Нека $x_1, \dots, x_k \in M$ пораждат A -модула M . Тъй като $M_P = 0$, съществуват елементи $s_1, \dots, s_k \in A \setminus P$, такива че $s_1 x_1 = 0, \dots, s_k x_k = 0$. Нека $s = s_1 \cdots s_k \in A \setminus P$. Тогава $sM = 0$.

5.38. Използвайте Задача 5.37.

§ 6. Нютерови и артинови модули

6.1. Допуснете, че M притежава подмодул N , който не е крайнопороден и въз основа на това постройте безкрайна растяща редица от крайнопородени подмодули, съдържащи се в N .

6.2. За да докажете, че φ е и сюрективен хомоморфизъм, разгледайте веригата от подмодули $\text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \supseteq \text{Im } \varphi^3 \supseteq \dots$.

6.3. Нека M е максимален идеал в A . Тогава $\text{Ann}(A^n/MA^n) = M$, и фактормодулът A^n/MA^n е линейно пространство над полето $k = A/M$. Забележете, че $A^n/MA^n \cong k^n$, откъдето $\dim_k(A^n/MA^n) = n$.

а) Нека $x_1, \dots, x_m \in A^n$ пораждат A^n като A -модул. Тогава съседните класове $x_1 + MA^n, \dots, x_m + MA^n \in A^n/MA^n$ пораждат линейното пространство A^n/MA^n над полето k , откъдето следва, че $m \geq n$.

б) Покажете, че изображението $\bar{\varphi} : A^n/MA^n \rightarrow A^m/MA^m$, зададено с

$$\bar{\varphi}(x + MA^n) = \varphi(x) + MA^m, \quad x \in A^n,$$

е коректно дефиниран изоморфизъм на линейни пространства над k . Тъй като $\dim_k(A^n/MA^n) = n$ и $\dim_k(A^m/MA^m) = m$, то $n = m$.

в) Забележете, че изображението $\bar{\varphi} : A^n/MA^n \rightarrow A^m/MA^m$, дефинирано по-горе, е върху, откъдето следва, че $n \geq m$.

6.4. Вижте [5, Задача 1.23].

6.5. Нека \mathcal{I} е множеството от всички идеали I в A , за които съществуват безброй много прости идеали, които са минимални над I . Ако $\mathcal{I} \neq \emptyset$, то \mathcal{I} съдържа максимален елемент I . Тъй като идеалът I не може да е прост, то съществуват идеали $I \subset I_1$, $I \subset I_2$, такива че $I_1 I_2 \subseteq I$. Покажете, че всеки прост идеал, който е минимален над I , е минимален или над I_1 или над I_2 . Това води до противоречие, защото броят на простите идеали, които са минимални над I_1 (съотв. I_2) е краен.

6.6. Следва от Задача 6.5.

6.7. Нека a_1, \dots, a_k пораждат $\mathfrak{N}(A)$ и нека n е естествено число, такова че $a_i^n = 0$, $i = 1, \dots, k$. Тогава $\mathfrak{N}(A)^N = 0$ за всяко $N > k(n-1)$.

6.8. (\Rightarrow) Тъй като всеки максимален идеал е също минимален прост идеал, от Задача 6.5 следва, че A е полулокален пръстен, а от Задача 6.7 следва, че $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ е нилпотентен идеал. Сега можем да приложим Задача 3.8.

(\Leftarrow) Използвайте Задача 3.5.

6.9. Разгледайте хомоморфизма $\varphi : M \rightarrow M/N_1 \oplus M/N_2$, дефиниран чрез равенството $\varphi(x) = (x + N_1, x + N_2)$. Очевидно $\text{Ker } \varphi = N_1 \cap N_2$, откъдето следва, че $M/(N_1 \cap N_2) \leq M/N_1 \oplus M/N_2$.

6.10. Случаят $M = (0)$ е тривиален, затова нека $M \neq (0)$. Ще проведем индукция по минималния брой пораждащи на M . Ако $M = Ax$, $x \in M$, изобразението $\varphi : A \rightarrow M$, $\varphi(a) = ax$, е хомоморфизъм от A върху M . При това $\text{Ker } \varphi = \text{Ann } M = I$ и значи $A/I \cong M$ е нютеров A -модул, т.е. A/I е нютеров пръстен. Нека твърдението е вярно за модул с по-малко от n пораждащи и нека $M = Ax_1 + \dots + Ax_{n-1} + Ax_n$. Да означим $M_1 = Ax_1 + \dots + Ax_{n-1}$, $M_2 = Ax_n$, $I_1 = \text{Ann } M_1$, $I_2 = \text{Ann } M_2$. Тъй като $M = M_1 + M_2$, от упражнение 5.1, а) имаме $I = \text{Ann } M = I_1 \cap I_2$. Според индукционното предположение пръстените A/I_1 и A/I_2 са нютерови, т.е. те са нютерови A -модули. Сега от Задача 6.9 следва, че и $A/(I_1 \cap I_2) = A/I$ е нютеров A -модул, т.е. A/I е нютеров пръстен.

6.11. (\Rightarrow) Използвайте, че всеки факторпръстен на нютеров пръстен също е нютеров пръстен.

(\Leftarrow) Нека $I \neq (0)$ е идеал в A и $0 \neq a \in I$. Тогава идеалът $I/(a)$ във факторпръстена $A/(a)$ се поражда от краен брой елементи $a_1 + (a), \dots, a_k + (a)$. Следователно I се поражда от елементите a, a_1, \dots, a_k .

6.12. Използвайте, че всеки $S^{-1}A$ -подмодул на $S^{-1}M$ е от вида $S^{-1}N$, където N е A -подмодул на M .

6.13. а) \Rightarrow б) Следва от Задача 6.12.

б) \Rightarrow в) Условие б) включва в себе си условие в).

в) \Rightarrow а) Нека $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$ са максималните идеали на A и нека N е A -подмодул на M . За всяко $i = 1, \dots, k$ нека x_{i1}, \dots, x_{ij_i} са елементи на N , такива че $x_{i1}/1, \dots, x_{ij_i}/1$ е система от пораждащи елементи на $N_{\mathfrak{M}_i}$ над $A_{\mathfrak{M}_i}$. Нека N' е A -подмодул на M , който се поражда от всички елементи x_{ij} , $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq j_i$. Тогава $N' \subseteq N$ и $N'_{\mathfrak{M}} = N_{\mathfrak{M}}$ за всеки максимален идеал \mathfrak{M} на A , откъдето следва (виж Задача 5.31), че $N' = N$.

6.14. Достатъчно да се докаже, че за всеки $a \neq 0$ факторпръстенът $A/(a)$ е нютеров (виж Задача 6.11). Нека M_1, \dots, M_k са всички максимални идеали в A , които съдържат елемента $a \neq 0$. Тогава $\bar{A} = A/(a)$ е полулокален пръстен с максимални идеали $\bar{M}_1 = M_1/(a), \dots, \bar{M}_k = M_k/(a)$. Сега от изоморфизмите $\bar{A}_{\bar{M}_i} \cong A_{M_i}/aA_{M_i}$ следва, че всички пръстени $\bar{A}_{\bar{M}_i}$ са нютерови, откъдето получаваме, че пръстенът $\bar{A} = A/(a)$ е нютеров (виж Задача 6.13).

6.15. Нека $N = N_0 \supset \dots \supset N_k = (0)$ е композиционен ред на N и нека веригата $M = M_0 \supset \dots \supset M_l = N$ е такава, че

$$M/N = M_0/N \supset \dots \supset M_l/N = (0)$$

е композиционен ред на M/N . Тогава

$$M = M_0 \supset \dots \supset M_l \supset N_1 \supset \dots \supset N_k = (0)$$

е композиционен ред на M .

6.16. а) Нека $a = \{a_n\}$ и нека $b = \{b_n\}$, където $b_n = \begin{cases} 0, & \text{когато } a_n \neq 0; \\ 1, & \text{когато } a_n = 0. \end{cases}$

Тогава $ab = 0$ и $a + b$ е обратим в A .

б) Нека P е прост идеал в A и нека $\bar{A} = A/P$. Забележете, че точно един от елементите a и b принадлежи на P . Ако $a \notin P$, то $\bar{b} = \bar{0}$, и тъй като $a + b$ е обратим в A , то $\bar{a} = \overline{a + b}$ е обратим в \bar{A} . Следователно \bar{A} е поле.

в) Нека $a \in P$. Тогава $b \notin P$ и от $ab = 0$ следва, че $a/1 = 0$ в A_P . Следователно $PA_P = (0)$. Тъй като P е максимален идеал, то $A/P \cong A_P/PA_P$, т. е. $A/P \cong A_P$.

г) Множеството $P_k = \{a \in A \mid a_k = 0\}$ е минимален прост идеал в A за всяко естествено число n .

д) Следва от Задача 6.5.

6.17. а) Множеството P_k е ядрото на проекцията $A \rightarrow k_n$.

б) Нека $a \in I$ и k е естествено число, такова че $a_k = 0$. Тогава $a \in P_n$.

в) Нека k е естествено число и $a \in A$ е зададен с $a_n = \begin{cases} 0, & \text{когато } n \neq k; \\ 1, & \text{когато } n = k. \end{cases}$

Тогава $a \in I$ и $a \notin P_k$.

§ 7. Нютерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса

7.1. Нека всички коефициенти на f са нилпотентни и I е идеалът на A , породен от a_n , $n \geq 0$. Тъй като A е нютеров пръстен, I се поражда от краен брой от тези елементи (в противен случай съществува безкрайна растяща верига от идеали, съдържащи се в I). Както в доказателството на твърдение 7.2 се уверяваме, че I е нилпотентен идеал. Сега, ако $I^k = (0)$, следва, че $f^k = 0$.

7.2. Нека I е идеалът породен от F в A и $x_1, \dots, x_k \in I$ е система от пораждатели на I . Тогава $x_i = a_{i1}f_{i1} + \dots + a_{ij}f_{ij}$, $a_{ij} \in A$, $f_{ij} \in F$, $i = 1, \dots, k$, $1 \leq j \leq j_i$. Покажете, че елементите $f_{ij} \in F$ притежават исканото свойство.

7.3. Нека t поражда \mathfrak{M} . За всеки елемент $0 \neq a \in A$ нека $v(a) \geq 0$ е най-голямото цяло число, такова че $a \in \mathfrak{M}^{v(a)}$. Тогава $a = ut^{v(a)}$, където u е обратим елемент в A . Ако $I \neq (0)$ е идеал в A и $v(I) = \min_{0 \neq a \in I} v(a)$, то $I = \mathfrak{M}^{v(I)}$.

7.4. Да допуснем, че A не е нютеров пръстен, Тогава множеството Σ от идеалите, които не са крайнопородени е непразно и от лемата на Цорн следва, че Σ има максимален елемент. Ако P е максимален елемент на Σ , ще докажем, че P е прост идеал, което противоречи с условието на задачата.

Да допуснем, че P не е прост идеал и нека $a, b \notin P$, но $ab \in P$. Тогава $P + (a) \supset P$ и от максималността на P следва, че идеалът $P + (a)$ е крайнопороден. Нека $P + (a)$ се поражда от елементите $p_1 + ax_1, \dots, p_n + ax_n$, ($p_1, \dots, p_n \in P$; $x_1, \dots, x_n \in A$). Да означим $P_0 = (p_1, \dots, p_n) \subseteq P$. Идеалът P_0 е крайнопороден

и $P + (a) = P_0 + (a)$. Нека $Q = (P : a) = \{x \in A \mid ax \in P\}$. Директно се проверява, че Q е идеал в A (който се нарича нютерово частно на идеалите Q и (a)). Освен това $P \subset P + (b) \subseteq Q$ (защото $ab \in P$). Отново от максималността на P следва, че Q е крайнопороден идеал. Накрая съобразете, че $P = P_0 + aQ$ и тогава P е крайнопороден идеал, противоречие.

Задача 7.5 дава пример на локален пръстен с главен максимален идеал, който не е нютеров.

7.5. а) Достатъчно е да се установи, че M/P е главен идеал в пръстена A/P . Нека $\bar{t} = t + P \in A/P$ и $\bar{x}_i = x_i + P \in A/P$. Тогава $M/P = (\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$. От $x_i - x_{i+1}t \in P$ следва, че $\bar{x}_i = \bar{x}_{i+1}\bar{t}$, откъдето $\bar{x}_i \in (\bar{t})$ за всяко $i \geq 1$. Следователно $M/P = (\bar{t})$.

б) Тъй като локализацията на област също е област, то е достатъчно е да се установи, че P е прост идеал. Нека $A_n = k[t, x_1, \dots, x_{n+1}]$ и P_n е идеалът породен от $y_1 = x_1 - x_2t, \dots, y_n = x_n - x_{n+1}t$ в A_n . Тъй като $A_n = k[t, y_1, \dots, y_n, x_{n+1}]$ и полиномите $t, y_1, \dots, y_n, x_{n+1}$ са алгебрично независими над k , то $A_n/P_n \cong k[t, x_{n+1}]$ е област, т.е. P_n е прост идеал в A_n . Нека $f, g \in A$ са такива, че $fg \in P$. Тогава съществува естествено число n , такова че $f, g, fg \in A_n$ и $fg \in P_n$. Следователно или $f \in P_n$ или $g \in P_n$, откъдето следва, че или $f \in P$ или $g \in P$.

в) Нека $\bar{t} = t + P \in A/P$ и $\bar{x}_i = x_i + P \in A/P$. Тъй като полиномите от P се анулират, когато заместим с $t = 1, x_1 = 1, x_2 = 1, \dots$, то $t, x_1, x_2, \dots \notin P$, откъдето $\bar{t} \neq 0, \bar{x}_1 \neq 0, \bar{x}_2 \neq 0, \dots$. Сега от равенствата $\bar{x}_i = \bar{x}_{i+1}\bar{t}$ следва, че $(\bar{x}_1) \subset (\bar{x}_2) \subset \dots$ е строго растяща редица от идеали в $(A/P)_{M/P}$ (защото \bar{t} не е обратим елемент в $(A/P)_{M/P}$).

7.6. Ако $p/q, (p, q) = 1$, е корен на полинома $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, то $p^n = -(a_1p^{n-1}q + \dots + a_nq^n)$ се дели на q , откъдето $q = \pm 1$.

7.7. За всяко алгебрично число α съществува полином

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x],$$

такъв че $a_0 \neq 0$ и $f(\alpha) = 0$. Нека $s = a_0$. Тогава

$$(s\alpha)^n + a_1s(\alpha)^{n-1} + \dots + a_ns^n = 0,$$

откъдето следва, че $s\alpha$ е цяло алгебрично число.

7.8. а) Нека $\mathbb{Q}(\alpha) \xrightarrow{\sigma_i} \mathbb{Q}(\alpha_i)$ е изображението, зададено с

$$\sigma_i(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) = c_0 + c_1\alpha_i + \dots + c_{n-1}\alpha_i^{n-1},$$

където $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$. Проверете, че σ_i е изоморфизъм на полета, такъв че $\sigma_i|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$. Нека $F \in \mathbb{Z}[x]$ е полином със старши коефициент, равен на 1, такъв че $F(\beta) = 0$. Тогава $F(\beta_i) = F(\sigma_i(\beta)) = \sigma_i(F(\beta)) = 0$.

б) Прилагайки формулите на Крамер към линейната система

$$b_0 + \alpha_i b_1 + \dots + \alpha_i^{n-1} b_{n-1} = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

получаваме $b_i = \Delta_i/\Delta$, $i = 0, \dots, n-1$, където

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{i-1} & \beta_1 & \alpha_1^{i+1} & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{i-1} & \beta_2 & \alpha_2^{i+1} & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{i-1} & \beta_n & \alpha_n^{i+1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = W(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Следователно $Db_i = \Delta \Delta_i$, $i = 0, \dots, n-1$, защото $D = \Delta^2$. Тъй като $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и β_1, \dots, β_n са цели алгебрични числа, то Db_i , $i = 0, \dots, n-1$, също са цели алгебрични числа. Но Db_i , $i = 0, \dots, n-1$, са рационални числа, откъдето следва, че $Db_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, n-1$.

в) Нека M е \mathbb{Z} -модулът, породен от числата $D^{-1}, D^{-1}\alpha, \dots, D^{-1}\alpha^{n-1}$. Тогава, според подточка б), пръстенът A се съдържа в M . Тъй като всеки подмодул на крайнопороден \mathbb{Z} -модул също е крайнопороден \mathbb{Z} -модул, то A е крайнопороден \mathbb{Z} -модул. Забележете, че всеки базис на A над \mathbb{Z} е също така базис на $\mathbb{Q}(\alpha)$ над \mathbb{Q} , откъдето следва, че рангът на A е равен на n .

7.9. а) $1, \sqrt{2}$; б) $1, i$; в) $1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.10. Нека $1 = e_0 + \dots + e_i + \dots + e_m$, $e_i \in S_i$, $i = 0, \dots, m$. Тогава

$$e_0 = e_0 \cdot 1 = e_0^2 + \dots + e_0 e_i + \dots + e_0 e_m,$$

откъдето $e_0 e_i = 0$, когато $i > 1$. Тъй като

$$e_j = e_j \cdot 1 = e_j e_0 + \dots + e_j e_i + \dots + e_j e_m,$$

то $e_j = e_j e_0 = 0$, когато $j > 1$. Следователно $1 = e_0 \in S_0$.

7.11. а) Ясно е, че $I \supseteq I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$. Нека I е еднороден идеал и нека $f \in I$. Тогава $f_i \in I \cap S_i = I_i$, откъдето $f \in I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$. Следователно $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$. Обратно, нека $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots$ и нека $f \in I$. Тогава $f = f_0 + \dots + f_i + \dots + f_m = f'_0 + \dots + f'_i + \dots + f'_m$, където $f'_i \in I_i = I \cap S_i$. Следователно $f_i = f'_i \in I$.

б) Ако I е еднороден идеал, то I се поражда от множеството $I_0 \cup I_1 \cup \dots$, което се състои от еднородни елементи. Обратно, нека I се поражда от множество от еднородни елементи. Тогава всеки елемент на I е сума на еднородни елементи от I , откъдето следва, че I е еднороден идеал.

7.12. Нека I е еднороден идеал в градуирания нютеров пръстен S . Тогава I се поражда от краен брой елементи $g_j = \sum_{i \geq 0} g_{ij} \in I$, $j = 1, \dots, n$. От еднородността на I следва, че всички еднородни компоненти g_{ij} принадлежат на I . Тогава I се поражда от крайното множество от еднородни елементи $\{g_{ij}\} \subseteq I$, $i \geq 0, j = 1, \dots, n$.

7.13. Множеството S_+ е ядрото на проекцията $S \rightarrow S_0$.

7.14. Съществуват елементи $h_j \in S$, $j = 1, \dots, k$, такива че $f = \sum_{j=1}^k h_j f_j$.

Нека

$$g_j = \begin{cases} (h_j)_{d-\deg f_j}, & \text{ако } d \geq \deg f_j, \\ 0, & \text{ако } d < \deg f_j. \end{cases}$$

Тогава $f = \sum_{j=1}^k h_j f_j = \sum_{j=1}^k (h_j f_j)_d = \sum_{j=1}^k g_j f_j$.

7.15. а) \Rightarrow б) От $S_0 \cong S/S_+$ следва, че S_0 е нютеров пръстен.

б) \Rightarrow в) Нека $0 \neq f_j \in S_+$, $j = 1, \dots, k$, са еднородни елементи, такива че $S_+ = (f_1, \dots, f_k)$ (виж Задача 7.12) и нека $S' = S_0[f_1, \dots, f_k]$. Ако $S' \subsetneq S$, то съществува еднороден елемент $f \notin S'$, който има минимална положителна степен d . Тогава f има представяне $f = \sum_{j=1}^k g_j f_j$ (виж Задача 7.14) и от $\deg g_j < d$ получаваме $g_j \in S'$ за $j = 1, \dots, k$, откъдето $f \in S'$. Противоречието показва, че S' съвпада с S .

в) \Rightarrow а) Ако S_0 е нютеров пръстен, всяка крайнопородена S_0 -алгебра е нютеров пръстен.

7.16. а) \Rightarrow б) Ако $B = A \oplus_A M$, то $\pi : B \rightarrow A$ е проекцията $\pi(a, x) = a$, $a \in A$, $x \in M$.

б) \Rightarrow а) Нека $M = \ker \pi$. Тогава $b - \pi(b) \in M$ за всеки $b \in B$ и от тъждеството $b = \pi(b) + [b - \pi(b)]$, следва че $B = A \oplus_A M$.

7.17. Ако A е директно събираемо на B и I е идеал в A , то $IB = I \oplus IM$, откъдето $IB \cap A = I$. Нека $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ е растяща верига от идеали в A . Тогава веригата от идеали $I_1 B \subseteq I_2 B \subseteq \dots$ се стабилизира, откъдето следва, че веригата от идеали $I_1 = I_1 B \cap A \subseteq I_2 = I_2 B \cap A \subseteq \dots$ също се стабилизира.

7.18. а) Ако $g(a_1) = a_1$ и $g(a_2) = a_2$, то $g(a_1 + a_2) = a_1 + a_2$ и $g(a_1 a_2) = a_1 a_2$.

б) Нека $a' \in A^G$ и $a \in A$. Тогава

$$\begin{aligned} \pi(a'a) &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a'a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a')g(a) = a' |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a) = a' \pi(a), \\ \pi(a') &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a') = |G|^{-1} \sum_{g \in G} a' = a'. \end{aligned}$$

в) Следва от Задачи 7.16 и 7.17, защото в този случай б) показва, че подпръстенът A^G е директно събираемо на пръстена A .

7.19. а) Ако $f \in S^G$ и $f = \sum_{i \geq 0} f_i$, то $f_i \in S_i^G$, $i \geq 0$.

б) Ако $0 \neq f \in S_0$ и $g(f) = f$, то $g(f^{-1}) = f^{-1}$, защото всеки автоморфизъм g на пръстена S изпраща обратния елемент на f в обратния елемент на $g(f)$.

в) $|G|$ е обратим елемент в S , когато $\text{char } k \nmid |G|$. Тъй като S е нютеров пръстен, от подусловие а) и Задача 7.18 следва, че S^G е градуиран нютеров пръстен. Тогава Задача 7.15 показва, че S^G е крайнопородена k^G -алгебра.

7.20. а) Следва от основната теорема за симетрични полиноми.

б) Нека $\chi(\tau) = 1$, когато $\tau \in A_n$, а $\chi(\tau) = -1$, когато $\tau \notin A_n$. Тогава $\tau\Delta = \chi(\tau)\Delta$, $\tau \in S_n$. Ако $f \in k[x_1, \dots, x_n]^{A_n}$ и $\tau_1, \tau_2 \notin A_n$, то от $\tau_1^{-1}\tau_2 \in A_n$ следва, че $\tau_1 f = \tau_2 f$. Нека $f_1 = \frac{f + \tau f}{2}$ и $f_2 = \frac{f - \tau f}{2}$, $\tau \notin A_n$. Тогава $f = f_1 + f_2$, като $f_1 \in k[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$, а $\tau f_2 = \chi(\tau)f_2$, $\tau \in S_n$. Тъй като f_2 се анулира, когато $x_i = x_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$, то f_2 се дели на всеки от полиномите $x_i - x_j$, $1 \leq i < j \leq n$. Следователно f_2 се дели на Δ и $f/\Delta \in k[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$.

§ 8. Теорема на Хилберт за нулите — алгебричен вариант

8.1. а) Нека $\varphi : A \rightarrow k$ е изображение, дефинирано по следния начин: ако $f = f(x_1, \dots, x_n) \in A$, то $\varphi(f) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in k$. Докажете, че φ е хомоморфизъм на пръстена A върху k и $\text{Ker } \varphi = M$.

б) Според алгебричния вариант на теоремата на Хилберт за нулите имаме $A/M = k$. Нека $\pi : A \rightarrow A/M = k$ е естественят хомоморфизъм на факторизация и нека $\pi(x_1) = \alpha_1, \dots, \pi(x_n) = \alpha_n$. Използвайки подусловие а), докажете, че $M = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$.

8.2. Нека K е крайнопороден пръстен, който е поле. Ако $\text{char } K = 0$, имаме $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$. Тъй като K е крайнопородена алгебра над \mathbb{Z} , то K е крайнопородена алгебра и над \mathbb{Q} . Тогава от теорема 8.6 следва, че K е крайномерно линейно пространство над \mathbb{Q} . Сега от лема 8.4 следва, че \mathbb{Q} е крайнопородена \mathbb{Z} -алгебра, което противоречи с твърдение 8.5, а). Следователно, $\text{char } K = p > 0$ и K е крайнопородена алгебра над \mathbb{Z}_p . Отново от теорема 8.6 следва, че K е крайно разширение на \mathbb{Z}_p и следователно K е крайно поле.

8.3. Хомоморфизмът $A \xrightarrow{\varphi} B$ индуцира влагане на k -алгебри $A/M \hookrightarrow B/\mathfrak{M}$. Тъй като B/\mathfrak{M} е крайно разширение на k , областта A/M е крайномерна k -алгебра — тогава A/M е поле според Задача 1.8.

8.4. Ако $n = 1$, твърдението е вярно, защото $k[x_1]$ е област на главни идеали. За да докажем общия случай, използваме индукция по n . Ако M е максимален идеал в $A = k[x_1, \dots, x_{n+1}]$, то $M' = k[x_1, \dots, x_n] \cap M$ е максимален идеал в $A' = k[x_1, \dots, x_n]$ (виж Задача 8.3) и за идеала M' в A' съществуват полиноми f_1, \dots, f_n , за които са в сила условия а), б) и в). Освен това $A'/M' \hookrightarrow A/M$ е просто разширение на полета, което се поражда от $\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} + M \in A/M$.

Нека $\bar{f}_{n+1} \in (A'/M')[x_{n+1}]$ е минималният полином на \bar{x}_{n+1} над полето A'/M' . Тогава съществува полином f_{n+1} на x_{n+1} със старши коефициент 1 и коефициенти в A' , такъв че $\bar{f}_{n+1} = f_{n+1} + M'[x_{n+1}]$. Покажете, че за идеала M и полиномите f_1, \dots, f_{n+1} са в сила условия а), б) и в).

8.5. Ако $a \in A$, то $f = \prod_{g \in G} (x - g(a))$ е полином със старши коефициент 1 и коефициенти в пръстена A^G , такъв че $f(a) = 0$. Следователно A е цяло разширение на A^G . Тъй като A е крайнопородена A^G -алгебра, то A е крайнопороден A^G -модул и сега твърдението следва от лема 8.4.

8.6. а) Забележете, че $(y_1 + x_n^e)^{\alpha_1} (y_2 + x_n^{e^2})^{\alpha_2} \dots (y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}})^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$ е полином на x_n от степен $\alpha_n + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_{n-1} e^{n-1}$, със старши коефициент 1. Тъй като $\alpha_i < e$ за $i = 1, \dots, n$, то "цифрите" $\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ еднозначно определят числото $\alpha_n + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_{n-1} e^{n-1}$ (което е записано в бройна система с основа e). Нека $f = \sum a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$ и нека $d = \alpha_n + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_{n-1} e^{n-1}$ е най-голямото число, за което $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n} \neq 0$. Тогава $f(y_1 + x_n^e, y_2 + x_n^{e^2}, \dots, y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}, x_n)$ е полином на x_n от степен d със старши коефициент $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n} \neq 0$.

б) Нека $0 \neq g \in k[x_1, \dots, x_n]$ е еднородната компонента от най-висока степен на полинома f . Тогава $f(y_1 + a_1 x_n, y_2 + a_2 x_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n)$ е полином на x_n със старши коефициент $g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1)$. Тъй като полето k е безкрайно и полиномът g е еднороден, то съществуват $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in k$, такива че $g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.

8.7. Ако e е достатъчно голямо естествено число, то според Задача 8.6, а)

$$f(y_1 + x_n^e, y_2 + x_n^{e^2}, \dots, y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}, x_n) \in k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$$

е полином на x_n със старши коефициент $0 \neq a \in k$. Нека

$$y_1 = x_1 - x_n^e, \quad y_2 = x_2 - x_n^{e^2}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = x_{n-1} - x_n^{e^{n-1}}.$$

Тогава x_n е цял над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$. Тъй като $x_n^e, x_n^{e^2}, \dots, x_n^{e^{n-1}}$ също са цели над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$, то $x_1 = y_1 + x_n^e, x_2 = y_2 + x_n^{e^2}, \dots, x_{n-1} = y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}$ са цели над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$, откъдето следва, че A е крайнопороден модул над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$.

Забележка: Ако полето k е безкрайно, може да се използва Задача 8.6, б) вместо Задача 8.6, а) — тогава y_1, \dots, y_{n-1} са линейни полиноми на x_1, \dots, x_n .

8.8. Нека A се поражда над k от елементите a_1, \dots, a_n . Използваме индукция по n — ако a_1, \dots, a_n са алгебрично независими над k , лемата е вярна. В противен случай $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ за някой полином $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Нека полиномите $f_1, \dots, f_{n-1} \in k[x_1, \dots, x_n]$ са такива, че $k[x_1, \dots, x_n]$ е крайнопороден модул над $k[f_1, \dots, f_{n-1}, f]$ (виж Задача 8.7) и нека $y_i = f_i(a_1, \dots, a_n) \in A$, $i = 1, \dots, n-1$. Тогава A е крайнопороден модул над $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ (защото

$f(a_1, \dots, a_n) = 0$) и лемата следва от индукционната хипотеза и Задача 5.11. Допълнението е следствие от Задача 8.6, б), защото когато полето k е безкрайно, f_1, \dots, f_{n-1} са линейни полиноми на x_1, \dots, x_n .

8.9. а) Ако $0 \neq b \in A$, областта $A[b]$ е крайномерна алгебра над полето A , откъдето следва, че $A[b]$ също е поле (виж Задача 1.8).

б) Ако $0 \neq a \in A$, то съществуват $a_1, \dots, a_n \in A$, такива че

$$(a^{-1})^n + a_1 (a^{-1})^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

откъдето $a^{-1} = -(a_1 + \dots + a_n a^{n-1}) \in A$.

8.10. Нека $y_1, \dots, y_r \in E$ са алгебрично независими над k елементи, такива че E е крайнопороден модул над $k[y_1, \dots, y_r]$. Тъй като полиномиалният пръстен $k[y_1, \dots, y_r]$ е поле според Задача 8.9, б), то $r = 0$.

8.11. Приложете Задача 8.9.

8.12. От Задача 5.17 следва, че MV е собствен идеал на B . Нека \mathfrak{M} е максимален идеал в B , такъв че $\mathfrak{M} \supseteq MV$ — тогава $\mathfrak{M} \cap A = M$.

8.13. а) Тъй като пръстенът B_P е цяло разширение на пръстена A_P (виж Задача 5.16), то според Задача 8.12 съществува прост идеал Q в B , такъв че идеалът QB_P лежи над максималния идеал PA_P в A_P . Тогава Q лежи над P .

б) Нека $P' = Q' \cap A$. Тъй като $A/P' \hookrightarrow B/Q'$ е цяло разширение на пръстени (виж Задача 5.15) и P/P' е прост идеал в A/P' , то според а) съществува прост идеал \bar{Q} в B/Q' , който лежи над P/P' . Нека Q е пълният прообраз на \bar{Q} при хомоморфизма на факторизация $B \rightarrow B/Q'$. Тогава $Q \supseteq Q'$ и Q лежи над P .

8.14. Нека $P_0 \subset P_1$ са прости идеали в A . Според Задача 8.13, а) съществува прост идеал Q_0 в B , който лежи над P_0 , а според Задача 8.13, б) съществува прост идеал Q_1 в B , който лежи над P_1 , такъв че $Q_0 \subset Q_1$. Общият случай се получава с индукция по r .

8.15. След замяна на A с A/P и на B с B/Q , задачата се свежда до случая, когато A и B са области, а $P = Q = (0)$. Нека $S = A \setminus \{0\}$. След замяна на A с полето от частни $S^{-1}A$ и на B с областта $S^{-1}B$, задачата се свежда до случая, когато A е поле, а B е област. Сега, според Задача 8.9, а), областта B също е поле, откъдето следва, че $Q' = (0)$.

8.16. От Задача 8.14 следва, че за всяка верига $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_r$ от прости идеали в A , съществува верига $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_r$ от прости идеали в B със същата дължина. Следователно $\dim A \leq \dim B$. Нека $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_r$ е верига от прости идеали в B и нека $P_i = Q_i \cap A$, $i = 0, \dots, r$. Тогава $P_{i-1} \subsetneq P_i$, $i = 1, \dots, r$, защото ако $P_{i-1} = P_i$ за някое i , то от Задача 8.15 ще следва, че $Q_{i-1} = Q_i$. Следователно $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_r$ е верига от прости идеали в A с дължина r , откъдето $\dim B \leq \dim A$.

8.17. Нека $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_r$ е верига от прости идеали в B и нека P_i е пълният прообраз на Q_i в пръстена A , $i = 0, \dots, r$. Тогава $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_r$ е верига от прости идеали в A с дължина r , откъдето $\dim B \leq \dim A$.

8.18. Според Задача 8.4, съществуват елементи $y_1, \dots, y_{n-1} \in A$, такива че A е цяло разширение на $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$. Нека $A' \subseteq A/(f)$ е образът на подпръстена $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ при хомоморфизма на факторизация $A \rightarrow A/(f)$. Тогава $A/(f)$ е цяло разширение на A' и от Задачи 8.16 и 8.17 следва, че

$$\dim A/(f) = \dim A' \leq \dim k[y_1, \dots, y_{n-1}].$$

Тъй като пръстенът $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ е изоморфен на факторпръстен на полиномиалния пръстен $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$, то $\dim k[y_1, \dots, y_{n-1}] \leq \dim k[x_1, \dots, x_{n-1}]$.

8.19. Веригата от прости идеали

$$(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots \subset (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

показва, че $\dim A \geq n$. За доказателство на неравенството $\dim A \leq n$ използваме индукция по n . Ако $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_r$, $r \geq 1$, е верига от прости идеали в A и $f \in P_1 \setminus P_0$, то $P_1/(f) \subset \dots \subset P_r/(f)$ е верига от прости идеали в $A/(f)$ с дължина $r-1$, откъдето $r-1 \leq \dim A/(f)$. Тъй като f е неконстантен полином, то от Задача 8.18 следва, че $\dim A/(f) \leq \dim k[x_1, \dots, x_{n-1}] \leq n-1$, откъдето получаваме $r \leq n$.

8.20. Използвайте Задачи 8.4 и 8.19.

8.21. Според лемата за нормализацията съществуват алгебрично независими над k елементи y_1, \dots, y_r , такива че A е цяло разширение на $k[y_1, \dots, y_r]$. Тогава полето от частни K на A е крайно разширение на полето от частни на $k[y_1, \dots, y_r]$, откъдето следва, че степента на трансцендентност на K над k е равна на r . Сега твърдението следва от Задача 8.16, защото $\dim k[y_1, \dots, y_r] = r$.

§ 9. Теорема на Хилберт за нулите — геометричен вариант

9.1. Множеството V от нулите на идеала I е точката $x = 0$, а $I(V) = (x)$. Тъй като $\text{rad } I = I$, $I(V) \neq \text{rad } I$.

9.2. Нека $M \supseteq I$ е максимален идеал в пръстена A и нека $i : A \rightarrow A/M = E$ е хомоморфизмът на факторизация; според следствие 8.7, полето E е крайно разширение на k . Нека $\alpha_1 = i(x_1), \dots, \alpha_n = i(x_n)$. Тогава $i(f) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ за всеки полином $f \in A$, откъдето $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ за всеки $f \in I$.

9.3. Нека P е прост идеал в A и нека $B = A/P$. Достатъчно е да се докаже, че за всеки елемент $0 \neq f \in B$ съществува максимален идеал M в B , такъв че $f \notin M$. Нека $B \xrightarrow{\varepsilon} B[f^{-1}]$ е хомоморфизмът на локализация спрямо f и нека \mathfrak{M} е максимален идеал в $B[f^{-1}]$. Тогава $f \notin \mathfrak{M}$, защото f е обратим елемент в $B[f^{-1}]$. Тъй като $B[f^{-1}]$ е крайнопородена k -алгебра, то $M = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в B (виж Задача 8.3), такъв че $f \notin M$.

9.4. а) \Rightarrow б) Използвайте, че всеки прост идеал в A/I е от вида P/I , където $P \supseteq I$ е прост идеал в A .

б) \Rightarrow в) В пръстен на Джекобсън нилрадикалът и радикалът на Джекобсън съвпадат, защото сечението на всички прости идеали съвпада със сечението на всички максимални идеали.

в) \Rightarrow г) Условие в) включва в себе си условие г).

г) \Rightarrow а) Нека P е прост идеал в A и нека Q е сечението на всички максимални идеали в A , които съдържат P . Тогава $(0) = \mathfrak{R}(A/P) = Q/P$, откъдето $Q = P$, т. е. P е сечение на максимални идеали.

9.5. Използвайте Задачи 9.3 и 9.4.

9.6. а) От $\mathfrak{R}(A) = (0)$ и $f \neq 0$ следва, че съществува максимален идеал M , който не съдържа f . Тогава $MA[f^{-1}] = (0)$, откъдето $M = (0)$, т. е. A е поле.

б) Нека $0 \neq g \in \mathfrak{R}(A)$ и $A \xrightarrow{\varepsilon} A[g^{-1}]$ е хомоморфизмът на локализация спрямо g . Нека \mathfrak{M} е максимален идеал в $A[g^{-1}]$ и $P = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{M})$. Тогава P не е максимален идеал в A , защото $g \notin P$. Нека $f = g + P \in A/P$. Тъй като $\mathfrak{M} = PA[g^{-1}]$ и $(A/P)[f^{-1}] \cong A[g^{-1}]/PA[g^{-1}] = A[g^{-1}]/\mathfrak{M}$, то $(A/P)[f^{-1}]$ е поле.

9.7. Използвайте Задачи 9.4 и 9.6.

9.8. Нека K е полето от частни на A . Ако $A[x][f^{-1}]$ е поле за някой полином $0 \neq f \in A[x]$, то $A[x][f^{-1}]$ ще съвпада с полето от рационални функции $K(x)$, откъдето ще следва, че $K(x) = K[x][f^{-1}]$. Но това е невъзможно, защото $K[x][f^{-1}]$ е крайнопородена K -алгебра (виж твърдение 8.5).

9.9. а) След като полето $B[f^{-1}]$ съдържа областта A , то $B[f^{-1}]$ съдържа полето от частни K на A . Тогава $B[f^{-1}] = K[b][f^{-1}]$ и от Задача 9.8 следва, че b е алгебричен над K , т. е. $K[b]$ е поле, а тъй като $f \in K[b]$, то $f^{-1} \in K[b]$.

б) Тъй като b и f^{-1} са алгебрични над K , то съществуват $a_0, a_1, \dots, a_m \in A$ и $b_0, b_1, \dots, b_l \in A$, такива че

$$a_0 b^m + a_1 b^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad \text{и} \quad b_0 f^{-l} + b_1 f^{-l+1} + \dots + b_l = 0$$

като без ограничение на общността можем да предполагаме, че $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Нека $s = a_0 b_0$. Тогава b и f^{-1} са цели елементи над $A[s^{-1}]$, откъдето следва, че полето $B[f^{-1}]$ е цяло разширение на $A[s^{-1}]$. Сега Задача 8.9, б) показва, че $A[s^{-1}]$ също е поле.

в) Използвайте Задачи 9.4 и 9.6, а).

9.10. а) Използваме критерия за пръстен на Джекобсън от Задача 9.7. Нека P е прост идеал в $A[x]$ и нека $(A[x]/P)[f^{-1}]$ е поле за някой $0 \neq f \in A[x]/P$. Да означим с \mathfrak{p} простия идеал $P \cap A$. Тогава пръстенът $B = A[x]/P$ е разширение на пръстена на Джекобсън A/\mathfrak{p} , като $B = (A/\mathfrak{p})[b]$, където $b = x + P \in B$, и от Задача 9.9, в) следва, че $A[x]/P$ е поле.

б) Приложете Задача 9.9, в) за пръстените A/M и $A[x]/\mathfrak{M}$ ($f = 1$).

9.11. а) Нека B се поражда от n елемента над A . Тогава B е факторпръстен на полиномиалния пръстен $A[x_1, \dots, x_n]$, който е пръстен на Джекобсън според Задача 9.10, а). Сега приложете Задача 9.4.

б) От Задача 9.10, б) следва, че твърдението е вярно, когато B е полиномиалният пръстен $A[x_1, \dots, x_n]$. Нека $A[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\varphi} B$ е сюрективен хомоморфизъм на A -алгебри. Тогава $\varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в $A[x_1, \dots, x_n]$, откъдето следва, че $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{M}) \cap A$ е максимален идеал в A .

9.12. След като φ е хомоморфизъм на A -алгебри, пръстенът C е крайнопородена B -алгебра, откъдето следва, че индуцираното от φ влагане $B/M \hookrightarrow C/\mathfrak{M}$ е крайнопородено разширение на пръстени. Тъй като B/M е пръстен на Джекобсън, то B/M е поле — виж Задача 9.11.

§ 10. Примарно разлагане в нютерови пръстени

10.1. Първо ще докажем, че за всеки примарен идеал Q на пръстена $A = C[0, 1]$ съществува най-много едно число $\xi \in [0, 1]$, такова че $f(\xi) = 0$ за всяка функция $f \in Q$. (Ще отбележим без доказателство, че за всеки собствен идеал на A съществува поне едно такова число.) Да допуснем, че съществуват числа $\xi_1 < \xi_2$ от $[0, 1]$, за които $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0 \forall f \in Q$. Нека $\eta \in [0, 1]$ е такова, че $\xi_1 < \eta < \xi_2$ и нека f_1 и f_2 са такива функции от A , за които

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) \neq 0 \text{ за } x \in [0, \eta] \\ f_1(x) = 0 \text{ за } x \in [\eta, 1] \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} f_2(x) = 0 \text{ за } x \in [0, \eta] \\ f_2(x) \neq 0 \text{ за } x \in (\eta, 1] \end{array} \right\}$$

Тогава $f_1(\xi_1) \neq 0$ (защото $\xi_1 \in [0, \eta]$) и $f_2(\xi_2) \neq 0$ (защото $\xi_2 \in (\eta, 1]$). Така $f_1, f_2 \notin Q$ и никоя степен на f_1 и f_2 не принадлежи на Q , но $f_1 f_2 = 0 \in Q$, което е противоречие с това, че Q е примарен идеал.

Да допуснем сега, че нулевият идеал на A е сечение на краен брой примарни идеали Q_1, \dots, Q_n . Нека ξ_i е единствената обща нула на функциите от Q_i и $\xi \in [0, 1]$ е число, различно от ξ_i ($i = 1, \dots, n$). Тогава за всяко $i = 1, \dots, n$ съществува функция $f_i \in Q_i$, такова че $f_i(\xi) \neq 0$. Да разгледаме функцията $f = f_1 \dots f_n$. Имаме $f(\xi) = f_1(\xi) \dots f_n(\xi) \neq 0$ и в същото време

$$f = f_1 \dots f_n \in \prod_{i=1}^n Q_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n Q_i = (0),$$

което е противоречие. Следователно нулевият идеал на A не притежава примарно разлагане.

10.2. Нека (0) е примарен идеал в A . Ако $a \in A$ е делител на 0 , то $ab \in (0)$, за някой $b \notin (0)$, откъдето $a^n = 0$, за някое $n > 0$. Обратно, нека всеки делител на 0 е nilпотентен. Ако $ab \in (0)$ и $b \notin (0)$, то a е делител на 0 , откъдето $a^n \in (0)$ за някое $n > 0$.

10.3. Хомоморфизмът φ индуцира влагане $A/Q \hookrightarrow B/Q'$. Тъй като всеки делител на 0 в пръстена B/Q' е нилпотентен, то същото е вярно за пръстена A/Q . Следователно Q е примарен идеал според Задача 10.2.

10.4. Използвайте Задача 10.2: тъй като A/M^k е локален пръстен с нилпотентен максимален идеал M/M^k , то всеки делител на 0 в A/M^n е нилпотентен.

10.5. Използвайте Задача 10.3: идеалът $P^k A_P$ е примарен в A_P според Задача 10.4, откъдето следва, че $\varphi^{-1}(P^k A_P)$ е примарен идеал в A .

10.6. а) Нека $a \in A$ е делител на 0 в A : $ax = 0$ за някой $0 \neq x \in A$. Тогава $x \notin Q_i$ за някое $1 \leq i \leq r$, откъдето следва, че $a \in P_i$. Обратно, нека $a \in P_i$ и нека $y \in (\bigcap_{j \neq i} Q_j) \setminus Q_i$. Тъй като $a^n \in Q_i$ за някое $n > 0$, то $a^n y = 0$ за някое $n > 0$. Нека $n > 0$ е най-малкото естествено число, такова че $a^n y = 0$ и нека $x = a^{n-1} y$. Тогава $x \neq 0$ и $ax = 0$.

б) Следва от подусловие а) и твърдение 1.3, а).

в) Следва от подусловие б).

10.7. а) От свойствата на локализацията и факторизацията на пръстени следва, че е достатъчно да разгледаме случая $Q = (0)$. Нека елементите $a/s \in S^{-1}A$ и $0 \neq b/t \in S^{-1}A$ са такива, че $(ab)/(st) = 0$. Тогава $uab = 0$ за някое $u \in S$, като $ub \neq 0$, защото $b/t \neq 0$. Сега от $a(ub) = 0$ следва, че $a^k = 0$ за някое $k > 0$, откъдето $(a/s)^k = 0$, което показва, че нулевият идеал в $S^{-1}A$ е примарен.

Ако $a \neq 0$, то от $\varphi(a) = 0$ ще следва, че $sa = 0$ за някой елемент $s \in S$; тогава $s^k = 0$ за някое $k > 0$, което е в противоречие с $0 \notin S$. Следователно $\text{Ker } \varphi = (0)$.

б) Идеалите $S^{-1}Q_i$ ($i = 1, \dots, m$) са примарни в $S^{-1}A$ според подусловие а). От Задача 4.7 следва, че $(0) = \bigcap_{i=1}^n S^{-1}Q_i = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}Q_i$ ($S^{-1}Q_i = (1)$ за $i > m$). Ако $\bigcap_{1 \leq i \neq j \leq m} S^{-1}Q_i \subseteq S^{-1}Q_j$ за някое $1 \leq j \leq m$, то от $\varphi^{-1}(S^{-1}Q_i) = Q_i$, $1 \leq i \leq m$, ще следва, че $\bigcap_{1 \leq i \neq j \leq m} Q_i \subseteq Q_j$, което е в противоречие с минималността на примарното разлагане $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$. Следователно $(0) = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в $S^{-1}A$.

10.8. а) Ще покажем, че всеки от идеалите P_i ($i = 1, \dots, n$) съвпада с някой от идеалите P'_j ($j = 1, \dots, m$). Тъй като $\bigcap_{j=1}^m Q'_j = (0) \subseteq P_i$, то съществува идеал Q'_j , такъв че $Q'_j \subseteq P_i$; тогава $P'_j = r(Q'_j) \subseteq P_i$. Нека Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k} (съответно $Q'_{j_1}, \dots, Q'_{j_l}$) са всички идеали в множеството $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ (съответно $\{Q'_1, \dots, Q'_m\}$), които се съдържат в P_i ; тогава идеалите P_{i_1}, \dots, P_{i_k} и $P'_{j_1}, \dots, P'_{j_l}$ също се съдържат в P_i . Сега според Задача 10.7, б)

$$(0) = Q_{i_1} A_{P_i} \cap \dots \cap Q_{i_k} A_{P_i} = Q'_{j_1} A_{P_i} \cap \dots \cap Q'_{j_l} A_{P_i}$$

са две минимални примарни разлагания на нулевия идеал в локалния пръстен A_{P_i} . Тъй като максималният идеал $P_i A_{P_i} = r(Q_i A_{P_i})$ се състои от делители на 0 в A_{P_i} (виж Задача 10.6, а)), то от Задача 10.6, в) следва, че идеалът $P_i A_{P_i}$ съвпада с някой от идеалите $P'_{j_1} A_{P_i} = r(Q'_{j_1} A_{P_i}), \dots, P'_{j_l} A_{P_i} = r(Q'_{j_l} A_{P_i})$. Остава да забележим, че $P_i A_{P_i} = P'_{j_i} A_{P_i}$ влече $\bar{P}_i = \bar{P}'_{j_i}$.

По аналогичен начин се доказва, че всеки от идеалите \bar{P}'_j ($j = 1, \dots, m$) съвпада с някой от идеалите \bar{P}_i ($i = 1, \dots, n$), откъдето следва съвпадането на двете множества от прости идеали.

б) Приложете подусловие а) към факторпръстена A/I .

10.9. а) Нека $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в A и нека $P_i = r(Q_i)$ ($i = 1, \dots, n$) са съответните асоциирани прости идеали. Тогава $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$ според Задача 10.6, а); сега приложете Задача 4.15.

б) Нека P_i ($i = 1, \dots, n$) са всички минимални прости идеали в A . Тогава $(0) = \bigcap_{i=1}^n P_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в A , откъдето $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$. Забележете, че $\mathfrak{M}(S^{-1}A) = (0)$ и $S^{-1}A$ е полулокален пръстен с размерност на Крул, равна на нула, след което приложете китайската теорема за остатъците.

10.10. Тъй като P_i е минимален асоцииран прост идеал, то $P_j \not\subseteq P_i$ за $j \neq i$. Тогава подусловие б) на Задача 10.7 показва, че $IA_{P_i} = Q_i A_{P_i}$, а от подусловие а) на същата задача следва, че $Q_i = \varphi^{-1}(Q_i A_{P_i}) = \varphi^{-1}(IA_{P_i})$.

§ 11. Артинови пръстени

11.1. Използвайте Задача 4.17, в).

11.2. Нека M_i е максималният идеал на A_i , $i = 1, \dots, k$, а N_j е максималният идеал на B_j , $j = 1, \dots, l$. Тогава A е полулокален пръстен с максимални идеали $\mathfrak{M}_i = A_1 \oplus \dots \oplus M_i \oplus \dots \oplus A_k$, $i = 1, \dots, k$, а B е полулокален пръстен с максимални идеали $\mathfrak{N}_j = B_1 \oplus \dots \oplus N_j \oplus \dots \oplus B_l$, $j = 1, \dots, l$ (Задача 3.5, в)). Нека $A \xrightarrow{\varphi} B$ е изоморфизъм на пръстени. Тогава идеалите $\varphi(\mathfrak{M}_i)$, $i = 1, \dots, k$, са пермутация на идеалите на идеалите \mathfrak{N}_j , $j = 1, \dots, l$. Следователно $k = l$ и съществува пермутация j_1, \dots, j_k на числата $1, \dots, k$, такава че $\varphi(\mathfrak{M}_i) = \mathfrak{N}_{j_i}$, $i = 1, \dots, k$. Да забележим също, че за всяко $i = 1, \dots, k$ изоморфизмът φ индуцира изоморфизъм $A_{\mathfrak{M}_i} \xrightarrow{\varphi_i} B_{\mathfrak{N}_{j_i}}$ (който е зададен с $\varphi_i(x/s) = \varphi(x)/\varphi(s)$, $x \in A$, $s \notin \mathfrak{M}_i$). Тъй като според Задача 4.16 са в сила изоморфизмите $A_{\mathfrak{M}_i} \cong A_i$ и $B_{\mathfrak{N}_{j_i}} \cong B_{j_i}$, то $A_i \cong B_{j_i}$, $i = 1, \dots, k$.

11.3. Използвайте Задача 6.15.

11.4. Тъй като локалният пръстен A_P е нулмерен и нютеров, то A_P е артинов пръстен съгласно теорема 11.5.

11.5. Първо ще докажем, че неравенството $n \leq m$ е в сила, когато пръстенът A е артинов. Тъй като $\varphi(A^n)$ е A -подмодул на A^m , то $l(\varphi(A^n)) \leq l(A^m)$. От инективността на φ следва, че $\varphi(A^n) \cong A^n$. Тогава $l(\varphi(A^n)) = l(A^n) = nl(A)$ и тъй като $l(A^m) = ml(A)$, то $n \leq m$.

След това да забележим, че за всеки прост идеал P в A хомоморфизмът φ индуцира инективен хомоморфизъм на A_P -модули $\varphi_P : (A^n)_P \rightarrow (A^m)_P$, зададен с формулата $\varphi_P(x/s) = \varphi(x)/s$, $x \in A^n$, $s \notin P$ (виж Задача 5.21). Тъй като $(A^n)_P$ и A_P^n са изоморфни като A_P -модули, то φ индуцира инективен хомоморфизъм на A_P -модули $A_P^n \rightarrow A_P^m$ за всеки прост идеал P в A . Ако сега A е нютеров пръстен и P е минимален прост идеал в A , то A_P е артинов пръстен според Задача 11.4. Следователно неравенството $n \leq m$ е в сила, ако пръстенът A е нютеров.

Общият случай се свежда до случая на нютеров пръстен по следния начин: Нека $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ е стандартният базис на свободния модул A^n и $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(A)$ е матрицата, която се определя от равенствата $\varphi(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in A^m$, $j = 1, \dots, n$. Нека $B \subseteq A$ е \mathbb{Z} -алгебрата, която се поражда над \mathbb{Z} от всички елементи a_{ij} на матрицата A . Тъй като B е крайнопородена \mathbb{Z} -алгебра, то B е нютеров пръстен. От определеното на B следва, че $\varphi(B^n) \subseteq B^m$. Тогава $\varphi|_{B^n} : B^n \rightarrow B^m$ е инективен хомоморфизъм на B -модули, откъдето получаваме, че $n \leq m$.

11.6. Поради сюрективността на φ , подмодулите на M , разглеждан като модул над A и като модул над B , са едни и същи.

11.7. Тъй като $\mathfrak{M}M = (0)$, то M има структура на линейно пространство над $F = A/\mathfrak{M}$ и от Задача 11.6 следва, че $l_A(M) = l_F(M) = \dim_F M$.

11.8. Ако идеалът I в A не е максимален, то съществува идеал J в A , такъв че $I \subset J \subset A$. Тъй като $(0) \subset J/I \subset A/I$, то A/I не е прост A -модул. Обратно, ако \mathfrak{M} е максимален идеал в A и N е A -подмодул на A/\mathfrak{M} , то съществува идеал J в A , такъв че $\mathfrak{M} \subseteq J \subseteq A$ и $N = A/J$ (J е пълният прообраз на N при естествения хомоморфизъм на факторизация $A \rightarrow A/\mathfrak{M}$). Тъй като \mathfrak{M} е максимален идеал, то или $J = \mathfrak{M}$ или $J = A$, т. е. или $N = (0)$ или $N = A/\mathfrak{M}$.

Нека $M \neq 0$ е прост A -модул и нека $0 \neq x \in M$. Тогава изображението $\varphi : A \rightarrow M$, зададено с $\varphi(a) = ax$, $a \in A$, е хомоморфизъм на A -модули. Тъй като $\varphi(1) = x \neq 0$, то $\varphi(A) \neq (0)$, откъдето $\varphi(A) = M$. Следователно $A/\text{Ker } \varphi \cong M$, като $\mathfrak{M} = \text{Ker } \varphi$ е максимален идеал в A .

11.9. Използвайте Задача 11.8.

11.10. Нека $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = (0)$ е композиционен ред на M . Тогава според Задача 11.9 съществуват максимални идеали \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, n$, такива че $M_{i-1}/M_i \cong A/\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \dots, n$. Следователно е в сила $\mathfrak{M}_i M_{i-1} \subseteq M_i$, $i = 1, \dots, n$, откъдето следва, че $\mathfrak{M}_n \dots \mathfrak{M}_1 M_0 \subseteq M_n$, т. е. $\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n M = (0)$.

11.11. а) \Rightarrow б) Заменяйки пръстена A с пръстена $A/\text{Ann } M$, можем да предположим без ограничение на общността, че M е точен A -модул, т.е. $\text{Ann } M = (0)$. Тъй като M е модул с крайна дължина, то M е нъотеров модул, откъдето следва, че A е нъотеров пръстен (виж Задача 6.10). Освен това, според Задача 11.10 съществуват максимални идеали \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, n$, такива че $\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n M = (0)$, а тъй като M е точен A -модул, то $\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n = (0)$. Сега Задачи 3.7 и 3.8 показват, че A е нулмерен пръстен, откъдето следва, че A е артинов пръстен. Остава да забележим, че M е крайнопороден A -модул, защото всеки нъотеров A -модул е такъв.

б) \Rightarrow а) Дължината на M над пръстените A и $A/\text{Ann } M$ е една и съща — тъй като M е крайнопороден модул над артиновия пръстен $A/\text{Ann } M$, то M има крайна дължина над A .

11.12. Ще използваме индукция по дължината на модула M . Ако $l_A(M) = 1$, то $M \cong A/\mathfrak{M}$, където \mathfrak{M} е максимален идеал в A . Тогава $S^{-1}M \cong S^{-1}(A/\mathfrak{M})$. Да забележим, че $S^{-1}(A/\mathfrak{M}) = (0)$ (ако $S \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$) или $S^{-1}(A/\mathfrak{M}) = A/\mathfrak{M}$ (ако $S \cap \mathfrak{M} = \emptyset$). Следователно $l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq l_A(M)$, когато $l_A(M) = 1$.

Нека неравенството е доказано за всички A -модули с дължина по-малка от $n > 1$ и нека M е A -модул, такъв че $l_A(M) = n$. Тогава съществува A -подмодул N на M , такъв че $(0) \subset N \subset M$, т.е. $l_A(N) < n$ и $l_A(M/N) < n$. Тъй като $S^{-1}N$ е $S^{-1}A$ -подмодул на $S^{-1}M$, то от Задача 6.15 получаваме

$$l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = l_{S^{-1}A}(S^{-1}N) + l_{S^{-1}A}(S^{-1}M/S^{-1}N).$$

Сега от индукционната хипотеза следва, че

$$l_{S^{-1}A}(S^{-1}N) \leq l_A(N) \text{ и } l_{S^{-1}A}(S^{-1}M/S^{-1}N) = l_{S^{-1}A}(S^{-1}(M/N)) \leq l_A(M/N),$$

откъдето $l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq l_A(N) + l_A(M/N) = l_A(M)$ (отново Задача 6.15).

11.13. Без ограничение на общността можем да предположим, че A е артинов пръстен и M е крайнопороден A -модул (виж Задача 11.11).

а) Според Задача 11.1 $A \cong \bigoplus_{i=1}^k A_{\mathfrak{M}_i}$, а според Задача 5.29 $M \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{\mathfrak{M}_i}$, където \mathfrak{M}_i , $i = 1, \dots, k$, са всички максимални идеали на A . Следователно $l_A(M) = \sum_{i=1}^k l_A(M_{\mathfrak{M}_i})$ според Задача 6.15. Тъй като хомоморфизмите $A \rightarrow A_{\mathfrak{M}_i}$ са сюрективни, то $l_A(M_{\mathfrak{M}_i}) = l_{A_{\mathfrak{M}_i}}(M_{\mathfrak{M}_i})$, $i = 1, \dots, k$ (виж Задача 11.6).

б) От подусловие а) следва, че е достатъчно да докажем формулата за артинов пръстен A с единствен максимален идеал \mathfrak{M} . Нека N е естествено число такова, че $\mathfrak{M}^N M = (0)$. Да разгледаме редицата от A -подмодули

$$M \supset \mathfrak{M}M \supset \dots \supset \mathfrak{M}^{i-1}M \supset \mathfrak{M}^{i-1} \supset \dots \supset \mathfrak{M}^N M = (0).$$

От Задача 6.15 следва, че $l_A(M) = \sum_{i=1}^N l_A(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^iM)$, а според Задача 11.7 е в сила равенството $l_A(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^iM) = \dim_{A/\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^iM)$.

11.14. а) Нека $a_i \in A$, $i = 1, \dots, m$, е базис на A над k и нека $x_j \in M$, $j = 1, \dots, l$, е система от пораждащи на M над A . Тогава M съвпада с линейната обвивка на елементите $a_i x_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$.

б) От Задача 11.13, а) следва, че е достатъчно да докажем равенствата

$$\dim_k M_{\mathfrak{M}_i} = l_{A_{\mathfrak{M}_i}}(M_{\mathfrak{M}_i})[F_i : k], \quad i = 1, \dots, n.$$

Заменяйки A с $A_{\mathfrak{M}_i}$ и M с $M_{\mathfrak{M}_i}$, можем да предполагаме, че A има единствен максимален идеал \mathfrak{M} с поле от остатъци $F = A/\mathfrak{M}$. Нека

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_s = (0)$$

е композиционен ред от A -подмодули на M . Тогава $M_{i-1}/M_i \cong A/M = F$ за $i = 1, \dots, s$ (виж Задача 11.8), откъдето следва, че

$$\dim_k M = \sum_{i=1}^s \dim_k (M_{i-1}/M_i) = \sum_{i=1}^s \dim_k F = s[F : k] = l_A(M)[F : k],$$

което трябваше да се докаже.

в) Забележете, че в този случай $F_i = k$, $i = 1, \dots, n$, след което приложете подусловие б).

Литература

- [1] M. Atiyah, I. Macdonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.
- [2] Н. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, 1986.
- [3] D. Eisenbud, Commutative Algebra, Springer-Verlag, 1994.
- [4] П. Сидеров, К. Чакърян, Записки по алгебра, Групи, пръстени, полиноми, Веди, 2006.
- [5] А. Божилов, П. Сидеров, К. Чакърян, Задачи по алгебра, Групи, пръстени, полиноми, Веди, 2002.

Съдържание

§ 0. Предварителни означения и понятия	3
§ 1. Прости и максимални идеали	7
§ 2. Нилрадикал и радикал на Джекобсън	13
§ 3. Взаимно прости идеали. Китайска теорема за остатъците	18
§ 4. Локализация.....	23
§ 5. Модули. Крайнопородени модули	29
§ 6. Ньотерови и артинови модули.....	41
§ 7. Ньотерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса	52
§ 8. Теорема на Хилберт за нулите – алгебричен вариант.....	60
§ 9. Теорема на Хилберт за нулите – геометричен вариант ...	69
§ 10. Примарно разлагане в ньотерови пръстени.....	74
§ 11. Артинови пръстени	80
Упътвания и решения на задачите	87
Литература	114

Борис Василев Коцев
Пламен Николов Сидеров

Комутативна алгебра

Българска
Второ преработено издание
Предпечатна подготовка Венелин Черногорев

ISBN 978-954-8857-38-3

Издателство ВЕДИ
www.vedi.bg

София, 2016