Борис Коцев

Пламен Сидеров

Комутативна алгебра

Второ
преработено издание

Издателство ВЕДИ
София, 2016

Съдържанието на тази книга е тясно свързано с курса по комутативна алгебра, който многократно е четен като избираем във ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски". Изложението се базира на първите осем глави на книгата на M. Atiyah, I. Macdonald, Introduction to commutative algebra [1]. Задачите след всеки параграф значително разширяват и задълбочават основния материал, като някои от тях са класически теореми от комутативната алгебра. Изложението в цялата книга е лаконично и предполага активно отношение от страна на читателя.

ISBN 978-954-8857-38-3
София, 2016

§ 0. Предварителни означения и понятия

В цялата книга под пръстен ще разбираме *комутативен пръстен с* 1.

Предполага се, че читателят свободно владее материала от курсовете по линейна и висша алгебра, които се четат във ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски" и особено §§ 6, 7, 8, 9, както и §§ 22, 23, 25 от [4].

Пръстените и идеалите най-често ще означаваме с главни латински букви, а елементите им – с малки. Включването на множества ще означаваме със знака $\subseteq$, а знакът $\subset$ показва, че включването е строго. Ако I е идеал в пръстена A, ще пишем $I \trianglelefteq A$ (или $I \triangleleft A$, ако искаме да подчертаем, че включването е строго). Факторпръстена A/I често ще бележим с $\overline{A}$, а елементите му – с $\overline{x}$, $\overline{y}, \ldots$ $(x, y, \ldots \in A)$.

Ако $I, J \trianglelefteq A$, под *произведение* на идеалите I и J ще разбираме множеството IJ, състоящо се от всички крайни суми на елементи от вида xy, $x \in I$, $y \in J$. Множеството IJ отново е идеал на A. Аналогично се дефинира произведение на повече от два идеала. Очевидно $IJ \subseteq I \cap J$ (по-общо, $I_1 \ldots I_n \subseteq I_1 \cap \cdots \cap I_n$).

Ако A е пръстен, $I \trianglelefteq A$ и $x, y \in A$, ще пишем $x \equiv y (\operatorname{mod} I)$, ако $x - y \in I$, т.е. ако $\overline{x} = \overline{y}$ във факторпръстена A/I.

Нека $I \trianglelefteq A$ и $\pi : A \to A/I = \overline{A}$ е естественият хомоморфизъм от A върху $\overline{A}$ $(\pi(x) = x + I = \overline{x})$. Изображението, което съпоставя на всеки идеал J на A, $J \supseteq I$, идеала $J/I = \overline{J}$ на $\overline{A}$ е биекция между множеството от всички идеали на A, съдържащи I и множеството от всички идеали на $\overline{A}$. Ако J_1 е произволен идеал на A (не непременно съдържащ I), то множеството $\pi(J_1) = \{\pi(x) \in \overline{A} | x \in J_1\}$ е идеал на $\overline{A}$; при това са в сила равенствата $\pi(J_1) = \pi(J_1 + I) = (J_1 + I)/I$. Прието е да се казва, че идеалът $J_1 + I$ е пълният праобраз на $\pi(J_1)$. Изобщо, ако K е произволен идеал на $\overline{A}$, под пълен праобраз на K се разбира множеството $\pi^{-1}(K) = \{x \in A | \pi(x) \in K\}$, което е идеал на A, съдържащ I.

Следващото твърдение е следствие от теоремата за хомоморфизмите.

Твърдение. *Нека A е пръстен и $I, J, K \trianglelefteq A$. Тогава:*

а) $J/(J \cap I) \cong (J+I)/I$;

б) *ако* $K \supseteq J \supseteq I$, *то* $(K/I)/(J/I) \cong K/J$.

Един елемент a на пръстена A се нарича *делител на нулата*, ако съществува ненулев елемент $b \in A$, такъв че $ab = 0$. Един ненулев пръстен A се нарича *област*, ако не притежава ненулеви делители на нулата. В област можем да съкращаваме на ненулев елемент: ако $ab = cb$ и $b \neq 0$, то $a = c$. Всяко поле е област. Ако A е област и всеки идеал на A е главен, A се нарича *област на главни идеали.*

***

Определение. Нека A и B са пръстени. Ще казваме, че B е *A-алгебра* (или *алгебра над A*), ако на всеки елемент $a \in A$ и $x \in B$ е съпоставен елемент $ax \in B$, като се изпълняват следните аксиоми $(a, b \in A;\ x, y \in B)$:

1) $a(x+y) = ax + ay$;

2) $(a+b)x = ax + bx$;

3) $(ab)x = a(bx)$;

4) $1.x = x$;

5) $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

Това означава, че адитивната група на B има структура на A-модул (аксиоми 1) – 4)) и тази структура е съгласувана с умножението в B (аксиома 5)). (Определението за модул се появява в §5.)

Примери. 1. Всеки пръстен е $\mathbb{Z}$-алгебра (ако $n \geq 0$, полагаме $nx = x + \cdots + x$ и $(-n)x = (-x) + \cdots + (-x)$).

2. Ако A е подпръстен на B, пръстенът B по естествен начин е A-алгебра.

3. Пръстенът на полиномите на n променливи $k[x_1, \ldots, x_n]$ (k може и да не е поле) е k-алгебра.

Ако B е A-алгебра, изображението $\varphi : A \to B$, дефинирано чрез равенството $\varphi(a) = a.1$ е хомоморфизъм на пръстени. Пръстенът $A_0 = \varphi(A)$ е подпръстен на B и B е A_0-алгебра. При това, ако $a \in A, x \in B$, то $ax = a(1.x) = (a.1)x = \varphi(a)x$. Това показва, че структурата на B като A-алгебра и като A_0-алгебра е една и съща. Освен това всеки идеал на B издържа умножения с елементи от A, защото те всъщност са умножения с елементи от $A_0 \subseteq B$.

Ако B е k-алгебра, k – поле, горното изображение $\varphi : k \to B$ е с нулево ядро и тогава $k_0 = \varphi(k) \cong k$. В този случай просто считаме, че $k \subseteq B$. Ако M е собствен идеал на B, M не съдържа обратими елементи и значи $k \cap M = (0)$. Тогава при естествения хомоморфизъм $\pi : B \to B/M$ имаме $\pi(k) \cong k$ и отново можем да считаме, че $k \subseteq B/M$.

Определение. Ще казваме, че B е *крайнопородена A-алгебра*, ако съществуват краен брой елементи $b_1, \ldots, b_n \in B$, такива че всеки елемент на B е полином с коефициенти от A на тези елементи.

За един пръстен B ще казваме, че е *крайнопороден пръстен*, ако B е крайнопороден като $\mathbb{Z}$-алгебра (т.е. всеки елемент на B е полином с цели коефициенти на краен брой елементи $b_1, \ldots, b_n \in B$).

Ако B и C са A-алгебри, ще казваме, че едно изображение $\psi : B \to C$ е *хомоморфизъм на A-алгебри*, ако ψ е хомоморфизъм на пръстени и освен това $\psi(ax) = a\psi(x)$ $(a \in A, x \in B)$.

***

Нека Σ е *частично наредено множество*. Това означава, че в Σ е въведена релация $x \le y$, която притежава следните три свойства:

1) $x \le x \ \forall x \in \Sigma$;
2) $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$;
3) $x \le y,\ y \le x \Rightarrow x = y$.

Ако за всеки два елемента $x, y \in \Sigma$ е изпълнено $x \le y$ или $y \le x$ (т.е. всеки два елемента са сравними), Σ се нарича *линейно наредено множество*. Едно подмножество S на Σ се нарича *верига*, ако е линейно наредено относно въведената в Σ наредба. *Горна граница* на S се нарича всеки елемент $x \in \Sigma$, такъв че $t \le x \ \forall t \in S$. Един елемент $m \in \Sigma$ се нарича *максимален*, ако не съществува елемент $x \in \Sigma$, такъв че $m \le x$ и $m \ne x$.

Примери. 1. Полето на реалните числа $\mathbb{R}$ с обичайната наредба $\leq$ е линейно наредено множество.

2. Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$ с релацията делимост на естествени числа е частично (но не линейно) наредено множество.

3. Нека X е произволно множество и Σ е множество, чиито елементи са подмножества на X (например всички подмножества на X). Множеството Σ е частично (но не винаги линейно) наредено относно релацията включване на подмножества.

Лема на Цорн. *Ако всяка верига в едно непразно частично наредено множество Σ притежава горна граница, то в Σ съществува (поне един) максимален елемент.*

Ще отбележим, че ако само изброимите вериги на Σ притежават горна граница, то в Σ може и да няма максимални елементи. Такова е например множеството Σ, състоящо се от всички изброими подмножества на произволно неизброимо множество (наредбата в Σ е относно включване на множества).

§ 1. Прости и максимални идеали

Определение. Нека A е пръстен и P е идеал на A. Ще казваме, че P е *прост идеал*, ако $P \neq A$ и от $xy \in P$ следва $x \in P$ или $y \in P$.

Условието един идеал $P \neq A$ да е прост е еквивалентно на всяко едно от следните две условия:

а) $x \notin P,\ y \notin P \Rightarrow xy \notin P$ (по-общо, $x_1, \dots, x_n \notin P \Rightarrow x_1 \dots x_n \notin P$);

б) $x_1 \dots x_n \in P \Rightarrow$ поне едно $x_i \in P$.

В частност, ако $x^n \in P$, то $x \in P$.

Определение. Ще казваме, че един идеал M на пръстена A е *максимален*, ако $M \neq A$ и не съществува идеал I на A, такъв че $M \subset I \subset A$ (т.е. ако $M \subset I$, то $I = A$).

Твърдение 1.1. а) *Един идеал P на пръстена A е прост точно когато факторпръстенът A/P е област.*

б) *Един идеал M на пръстена A е максимален точно когато факторпръстенът A/M е поле.*

В частност, всеки максимален идеал е прост. Освен това (0) *е прост (максимален) идеал точно когато A е област (поле).*

Доказателство. а) Условието за простота на идеала P е еквивалентно на условието: във факторпръстена A/P от $\bar{x}\,\bar{y} = 0$ следва $\bar{x} = 0$ или $\bar{y} = 0$. Това от своя страна означава, че A/P е област.

б) Съществува биекция между множеството на идеалите на A, съдържащи M и множеството от всички идеали на факторпръстена A/M. Така условието M да е максимален идеал точно означава, че A/M няма нетривиални идеали, т.е. че A/M е поле.

Примери. 1. В пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ нулевият идеал е прост, защото $\mathbb{Z}$ е област, но не е максимален, защото $\mathbb{Z}$ не е поле. Ненулевите прости идеали на $\mathbb{Z}$ се изчерпват с идеалите от вида (p), където p е просто число. Това са и всички максимални идеали на $\mathbb{Z}$.

Аналогично, ако k е поле, нулевият идеал на пръстена $k[x]$ е прост, но не е максимален, а ненулевите прости идеали (които са и всички максимални идеали) на $k[x]$ се изчерпват с идеалите от вида (f), където f е неразложим над k полином.

2. Ако p е просто число, идеалът (p) в пръстена $\mathbb{Z}[x]$ е ненулев прост идеал, който не е максимален (съобразете, че $\mathbb{Z}[x]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[x]$ и този пръстен е област, но не е поле).

3. Ако k е поле и $i < n$, идеалът $(x_1, \dots, x_i)$ в пръстена $k[x_1, \dots, x_n]$ е прост, но не е максимален (съобразете, че $k[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_i) \cong k[x_{i+1}, \dots, x_n]$ и този пръстен е област, но не е поле).

Твърдение 1.2. *Ако A е област на главни идеали, всеки ненулев прост идеал на A е максимален.*

Доказателство. Нека $P = (x)$ е ненулев прост идеал на A и $I = (y)$ е идеал, строго съдържащ P. От $x \in (y)$ следва $x = yz$ за някое $z \in A$. Тъй като P е прост идеал и $y \notin P$, то $z \in P$ и тогава $z = xt$, $t \in A$. Сега имаме $x = yz = yxt$. Тъй като A е област, можем да съкратим на $x \neq 0$ и получаваме $yt = 1$. Така y е обратим елемент и значи $I = (y) = A$. Следователно P е максимален идеал.

Твърдение 1.3. а) *Нека $P_1, \dots, P_n$ са прости идеали в пръстена A и I е идеал на A, такъв че $I \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} P_k$. Тогава $I \subseteq P_k$ за някое k.*

б) *Нека P е прост идеал на A, а $I_1, \dots, I_n$ са идеали на A, такива че $P \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} I_k$. Тогава $P \supseteq I_k$ за някое k. При това, ако $P = \bigcap_{k=1}^{n} I_k$, то $P = I_k$ за някое k.*

Доказателство. а) С индукция по n ще докажем еквивалентно твърдение: ако $I \not\subseteq P_k$ за $k = 1, \dots, n$, то $I \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} P_k$.

Това е очевидно при $n = 1$. Нека $n > 1$ и да допуснем, че за $n-1$ твърдението е доказано. Нека $I \not\subseteq P_k$, $k = 1, \dots, n$. За всяко $k = 1, \dots, n$ прилагаме индукционното предположение за идеалите $P_1, \dots, P_{k-1}$, $P_{k+1}, \dots, P_n$: съществува елемент $x_k \in I$, но $x_k \notin P_j$ при $j \neq k$. Ако за някое k имаме още и $x_k \notin P_k$, твърдението е доказано. В противен случай за всяко $k = 1, \dots, n$ имаме $x_k \in P_k$. Да разгледаме елемента

$$y=\sum_{k=1}^{n}x_1\ldots x_{k-1}x_{k+1}\ldots x_n\,.$$

Очевидно $y\in I$. Освен това k-тото събираемо в записа на y не принадлежи на P_k, тъй като P_k е прост идеал, докато всяко от останалите събираеми принадлежи на P_k (защото съдържа x_k като множител). Така $y\notin P_k$ $(1\le k\le n)$ и следователно $I\not\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}P_k$.

б) Да допуснем, че $P\not\supseteq I_k$ за всяко $k=1,\ldots,n$. Тогава съществуват елементи $x_k\in I_k$, $x_k\notin P$ $(1\le k\le n)$. Така $y=x_1\ldots x_n\in\prod_{k=1}^{n}I_k\subseteq\bigcap_{k=1}^{n}I_k$, но $y\notin P$, защото P е прост идеал. Следователно $P\not\supseteq\bigcap_{k=1}^{n}I_k$, противоречие.

Накрая, нека $P=\bigcap_{k=1}^{n}I_k$. Според доказаното $P\supseteq I_k$ за някое k и (очевидно) $P\subseteq I_k$, така че $P=I_k$.

***

Теорема 1.4. *Всеки ненулев пръстен A притежава (поне един) максимален идеал.*

(Напомняме, че разглеждаме само пръстени с 1.)

Доказателство. Ще използваме лемата на Цорн. Да означим със Σ множеството от всички собствени (т.е. различни от A) идеали на A. Множеството Σ е частично наредено относно релацията включване на идеали и е непразно, защото $(0)\in\Sigma$. Нека (I_α) е верига от идеали от Σ (т.е. за всяка двойка индекси α,β имаме $I_\alpha\subseteq I_\beta$ или $I_\beta\subseteq I_\alpha$). Да означим $I=\bigcup_{\alpha}I_\alpha$. Тъй като (I_α) е верига, множеството I също е идеал на A (предоставяме проверката на читателя). При това $1\notin I_\alpha$ за всеки индекс α и значи $1\notin I$. Така I е собствен идеал на A, т.е. $I\in\Sigma$. Очевидно I е горна граница на разглежданата верига. От лемата на Цорн следва, че в Σ съществува максимален елемент, т.е. A притежава максимален идеал.

Следствие 1.5. а) *Всеки собствен (различен от A) идеал на A се съдържа в максимален идеал на A.*

б) *Всеки необратим елемент x на A се съдържа в максимален идеал на A.*

Доказателство. а) Според теорема 1.4 ненулевият пръстен A/I притежава максимален идеал и тогава неговият пълен праобраз е максимален идеал на A, съдържащ I. (Доказателството може да се извърши и пряко, като се приложи лемата на Цорн за множеството Σ от всички собствени идеали на A, съдържащи I.)

б) Тъй като x е необратим елемент, то главният идеал (x) на A е собствен и значи се съдържа в максимален идеал на A.

Определение. Ще казваме, че един пръстен A е *локален*, ако A притежава единствен максимален идеал.

Примери. 1. Всяко поле k е локален пръстен ((0) е единственият максимален идеал на k).

2. Нека p е просто число и

$$A=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z},(m,n)=1,p\nmid n\right\},\ M=\left\{\frac{m}{n}\in A\mid p\mid m\right\}.$$

Тогава A е локален пръстен с единствен максимален идеал M (съобразете, че всеки елемент извън M е обратим, откъдето следва, че M съдържа всички собствени идеали на A).

3. Ако p е просто число, пръстенът $\mathbb{Z}_{p^n}$ е локален с максимален идеал $(\overline{p})$ (съобразете, че всеки елемент извън $(\overline{p})$ е обратим).

Твърдение 1.6. *Нека M е собствен идеал на пръстена A и всеки елемент $x\in A\setminus M$ е обратим. Тогава A е локален пръстен с максимален идеал M. Обратно, ако A е локален пръстен с максимален идеал M, то всеки елемент $x\in A\setminus M$ е обратим.*

Така максималният идеал на един локален пръстен A се състои от всички необратими елементи на A.

Доказателство. Всеки собствен идеал на A се състои от необратими елементи и значи се съдържа в M. Следователно M е единствен максимален идеал на A.

Обратно, нека M е единственият максимален идеал на локалния пръстен A. Тогава всички необратими елементи на A се съдържат в M (следствие 1.5, б)) и значи всички елементи извън M са обратими.

Задачи

Задача 1.1. Нека I е идеал на пръстена A. Да се докаже, че идеалът I не е прост тогава и само тогава, когато съществуват идеали I_1 и I_2 на A, такива че $I \subset I_1$, $I \subset I_2$ и $I_1 I_2 \subseteq I$.

Задача 1.2. Да се докаже, че всеки пръстен притежава минимални прости идеали.

Задача 1.3. Да се докаже, че ако P е прост идеал в пръстена A, то $P[x]$ е прост идеал в пръстена $A[x]$. Вярно ли е аналогично твърдение за максимални идеали?

Задача 1.4. Нека I и P_i, $i = 1,\dots,n$, са идеали на пръстена A, като идеалите P_i за $i = 3,\dots,n$ са прости. Да се докаже, че ако $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, то $I \subseteq P_k$ за някое k $(1 \le k \le n)$. Сравнете с твърдение 1.3, а).

Задача 1.5. Нека $\mathbb{C}[x,y]$ е пръстенът на полиномите на две променливи с коефициенти от $\mathbb{C}$ и нека $P_j = (f_j)$, $f_j \in \mathbb{C}[x,y]$, $j \in J$, са всички прости главни идеали, които се съдържат в идеала $I = (x,y)$. Да се докаже, че:

а) множеството $\{P_j\}_{j \in J}$ е безкрайно;

б) $I = \bigcup_{j \in J} P_j$;

в) I не се съдържа в никой от простите идеали P_j, $j \in J$.

Сравнете с твърдение 1.3, а).

Определение (пръстен с размерност на Крул, равна на 0). Казваме, че пръстенът A има *размерност на Крул,* равна на 0, ако всеки прост идеал на A е максимален.

Задача 1.6. Да се докаже, че ако $\forall x \in A\ \exists n = n(x) > 1$, такова че $x^n = x$, то размерността на Крул на A е равна на 0.

Задача 1.7. Пръстенът A се нарича *булев*, ако $x^2 = x\ \forall x \in A$. Да се докаже, че за всеки булев пръстен е в сила:

а) $2x = 0\ \forall x \in A$;

б) размерността на Крул на A е равна на 0;

в) $A / P \cong \mathbb{Z}_2$ за всеки прост идеал P на A.

Задача 1.8. Да се докаже, че всяка крайномерна алгебра A над поле k има размерност на Крул, равна на 0. В частност, ако A е област, то A е поле.

Определение (полулокален пръстен). Един пръстен A се нарича *полулокален*, ако A има само краен брой максимални идеали.

Задача 1.9. Нека $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ са различни максимални идеали в пръстена A. Да се докаже, че $\bigcap_{i=1}^{k+1} \mathfrak{M}_i \subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i$ за всяко $k = 1, \ldots, n-1$.

Задача 1.10. Нека A е крайномерна алгебра над поле k. Да се докаже, че A е полулокален пръстен и броят на различните максимални идеали на A не надминава размерността на A над k.

Задача 1.11. Нека $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в пръстена A. Да се докаже, че:

а) ако $\mathfrak{M}^n = (0)$ за някое $n > 0$, то A е локален пръстен с размерност на Крул, равна на 0;

б) $A / \mathfrak{M}^n$ е локален пръстен с размерност на Крул, равна на 0.

Задача 1.12. Нека $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ са (не непременно различни) максимални идеали в пръстена A и $I = \mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_n$. Да се докаже, че:

а) ако $I = (0)$, то A е полулокален пръстен с размерност на Крул, равна на 0;

б) A/I е полулокален пръстен с размерност на Крул, равна на 0.

§ 2. Нилрадикал и радикал на Джекобсън

Определение. Ще казваме, че един елемент x в пръстен A е *нилпотентен*, ако съществува естествено число $n = n(x)$, такова че $x^n = 0$.

Твърдение 2.1. *Множеството $\mathfrak{N}$ от всички нилпотентни елементи на един пръстен A е идеал на A и във факторпръстена $A/\mathfrak{N}$ няма ненулеви нилпотентни елементи.*

Доказателство. Очевидно, ако $x \in \mathfrak{N}$ и $a \in A$, то $ax \in \mathfrak{N}$. Нека сега $x, y \in \mathfrak{N}$, като $x^n = 0$ и $y^k = 0$. По формулата за нютоновия бином (валидна във всеки комутативен пръстен) изразът $(x-y)^{n+k-1}$ е сума на произведения (с цели коефициенти) от вида $x^r y^s$, като $r+s = n+k-1$. Ясно е, че или $r \geq n$, или $s \geq k$ и тогава всяко събираемо в тази сума е равно на 0. Така $(x-y)^{n+k-1} = 0$, т.е. $x - y \in \mathfrak{N}$. Следователно $\mathfrak{N}$ е идеал.

По-нататък, нека $\overline{x} \in A/\mathfrak{N}$ е нилпотентен елемент ($x \in A$). За някое m имаме $\overline{x}^m = 0$, т.е. $x^m \in \mathfrak{N}$. Тогава за някое t е изпълнено $(x^m)^t = 0$ и значи $x \in \mathfrak{N}$. Следователно $\overline{x} = 0$.

Определение. Идеалът $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ се нарича *нилрадикал* на пръстена A.

Втората част на твърдение 2.1 означава, че $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{N}(A)) = (0)$.

Теорема 2.2. *Нилрадикалът на пръстена A съвпада със сечението на всички прости идеали на A.*

Доказателство. Нека $x \in \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$. Ако P е прост идеал на A, от $x^n = 0 \in P$ следва $x \in P$. Така x принадлежи на всеки прост идеал на A.

Обратно, нека $x \notin \mathfrak{N}$. Ще докажем, че съществува прост идеал P на A, такъв че $x \notin P$.

Нека Σ е множеството от всички идеали J на A, за които $x^n \notin J$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$. Множеството Σ е непразно, защото $(0) \in \Sigma$ (тъй като x не е нилпотентен елемент). По стандартния начин (както в доказателството на теорема 1.4) се проверява, че Σ удовлетворява условията на лемата на Цорн относно наредбата включване на идеали и следователно притежава максимален елемент. Нека P е максимален елемент на Σ. От определението на Σ имаме, че $x \notin P$. Ще докажем, че P е прост идеал.

Да допуснем противното и нека $a \notin P, b \notin P$, но $ab \in P$. Тогава $P+(a) \supset P$, $P+(b) \supset P$ и от избора на P следва $P+(a) \notin \Sigma$, $P+(b) \notin \Sigma$. Следователно за подходящи естествени числа n и k имаме $x^n \in P+(a)$ и $x^k \in P+(b)$, т.е. $x^n = u + ar$ и $x^k = v + bs$, където $u, v \in P$; $r, s \in A$. Оттук $x^{n+k} = uv + u.bs + v.ar + ab.rs \in P + (ab) = P$, което е противоречие. Следователно P е прост идеал.

***

Определение. Сечението на всички максимални идеали на пръстена A се нарича *радикал на Джекобсън* на A. Ще го бележим с $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$.

Тъй като всеки максимален идеал е прост, от теорема 2.2 следва включването $\mathfrak{N}(A) \subseteq \mathfrak{R}(A)$.

Твърдение 2.3. *В сила е равенството*

$$\mathfrak{R}(A) = \{a \in A \mid 1 - ay \text{ е обратим елемент } \forall y \in A\}.$$

В частност, ако $x \equiv 1 (\operatorname{mod} \mathfrak{R}(A))$, *то x е обратим елемент.*

Доказателство. Нека $a \in \mathfrak{R}(A)$ и да допуснем, че $1 - ay$ не е обратим елемент за някое $y \in A$. Тогава (следствие 1.5, б)) $1 - ay \in M$ за някой максимален идеал M. Но $a \in \mathfrak{R}(A) \subseteq M$, откъдето $1 \in M$ и следователно $M = A$, противоречие.

Обратно, нека $1 - ay$ е обратим елемент за всяко $y \in A$. Да допуснем, че $a \notin \mathfrak{R}(A)$, т.е. $a \notin M$ за някой максимален идеал M. Тогава $M + (a) = A$, откъдето $m + ay = 1$, $m \in M$, $y \in A$. Така елементът $m = 1 - ay$ се оказва обратим и следователно $M = A$, което е противоречие.

Накрая, нека $x \equiv 1 (\operatorname{mod} \mathfrak{R}(A))$. Това означава, че $a = 1 - x \in \mathfrak{R}(A)$ и тогава $x = 1 - a$ е обратим елемент.

Определение. Пръстенът A се нарича *полупрост*, ако $\mathfrak{R}(A) = (0)$.

От съответствието между идеалите на A, съдържащи $\mathfrak{R}(A)$ и идеалите на факторпръстена $A / \mathfrak{R}(A)$ следва, че $\mathfrak{R}(A / \mathfrak{R}(A)) = (0)$, т.е. че $A / \mathfrak{R}(A)$ е полупрост пръстен.

Упражнение 2.4. а) *В пръстена на целите числа* $\mathbb{Z}$ *са в сила равенствата* $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{R}(\mathbb{Z}) = (0)$. *Същите равенства са в сила и за пръстена* $k[x]$ *(k – поле).*

б) *Нека* $n \in \mathbb{N}$ *и* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ *е каноничното разлагане на n в произведение на прости множители. Тогава*

$$\mathfrak{N}(\mathbb{Z}_n) = \mathfrak{R}(\mathbb{Z}_n) = (\bar{p}_1 \dots \bar{p}_k) = \bigcap_{i=1}^{k} (\bar{p}_i).$$

В частност, $\mathbb{Z}_n$ *е полупрост пръстен точно когато* $n = p_1 \dots p_k$ *(такива числа n се наричат полупрости). Аналогичен факт е в сила за пръстена* $k[x]$ *(k – поле).*

в) *В пример 2 преди твърдение 1.6 пръстенът A е числов и тогава* $\mathfrak{N}(A) = (0)$. *От друга страна, A е локален пръстен с единствен максимален идеал M и следователно* $\mathfrak{R}(A) = M$. *Така в този пръстен* $\mathfrak{N}(A) \subset \mathfrak{R}(A)$.

***

Нека I е идеал в пръстена A и

$$r(I) = \{x \in A \mid \exists n = n(x) \in \mathbb{N} : x^n \in I\}.$$

Твърдение 2.5. *Множеството* $r(I)$ *е идеал на A, съдържащ I и* $\mathfrak{N}(A/I) = r(I)/I$.

Доказателство. Следва от твърдение 2.1, приложено за пръстена $\bar{A} = A/I$, като се вземе предвид, че един елемент $x \in r(I)$ точно когато образът му $\bar{x} \in \mathfrak{N}(\bar{A})$. (Доказателството може да се извърши и директно, аналогично на доказателството на твърдение 2.1.)

Определение. Идеалът $r(I)$ се нарича *радикал на идеала I.*

Ясно е, че $r(0) = \mathfrak{N}(A)$. Освен това, ако P е прост идеал, то $r(P) = P$ (съобразете, че и $\forall n \in \mathbb{N}$ $r(P^n) = P$).

Твърдение 2.6. *Радикалът* $r(I)$ *на идеала I съвпада със сечението на всички прости идеали на A, съдържащи I.*

Доказателство. Следва от равенството $\mathfrak{N}(A/I) = r(I)/I$ и от теорема 2.2 (приложена за пръстена *A/I*).

Упражнение 2.7. *Нека I и J са идеали в пръстена A. Да се докаже, че:*

а) $r(r(I)) = r(I)$;

б) $r(I) = A \Leftrightarrow I = A$;

в) $r(IJ) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$;

г) $r(I+J) = r(r(I)+r(J))$.

Твърдение 2.8. *Ако I и J са идеали в пръстена A и* $r(I)+r(J) = A$, *то* $I+J = A$ *(обратното е очевидно).*

Доказателство. Използвайки упражнение 2.7, г) и б), получаваме

$$r(I+J) = r(r(I)+r(J)) = r(A) = A \Rightarrow I+J = A.$$

Задачи

Задача 2.1. Да се докаже, че ако x е нилпотентен елемент в пръстена A, елементът $1+x$ е обратим. По-общо, сума на обратим и нилпотентен елемент е обратим елемент.

Задача 2.2. Нека A е пръстен и $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$. Да се докаже, че:

а) f е обратим елемент в $A[x]$ точно когато a_0 е обратим елемент в A, а $a_1, \ldots, a_n$ са нилпотентни;

б) f е нилпотентен точно когато $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са нилпотентни.

Задача 2.3. Да се докаже, че $\mathfrak{N}(A[x]) = \mathfrak{N}[x] = \mathfrak{R}(A[x])$.

Задача 2.4. Да се докаже, че ако A е област, то $\mathfrak{R}(A[x]) = (0)$. Вижте също задачи 9.6 и 9.8.

Задача 2.5. Нека $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ е пръстенът на полиномите на n променливи с коефициенти в полето k. Да се докаже, че $\mathfrak{R}(A) = (0)$.

Задача 2.6. Нека $A[[x]]$ е пръстенът на формалните степенни редове с коефициенти от пръстена A и $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Да се докаже, че:

а) f е обратим точно когато a_0 е обратим в A;

б) f е нилпотентен $\Rightarrow a_n$ са нилпотентни $\forall n \geq 0$;

в) $f \in \mathfrak{R}(A[[x]])$ точно когато $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$.

Задача 2.7. Да се докаже, че $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ за всяка крайномерна алгебра над поле k. Вижте също задачи 9.4 и 9.5.

Задача 2.8. Нека $X \in M_n(A)$ е квадратна матрица с елементи в пръстена A. Да се докаже, че матрицата X е обратима тогава и само тогава, когато $\det X$ е обратим елемент на A.

§ 3. Взаимно прости идеали. Китайска теорема за остатъците

Определение. Ще казваме, че идеалите I и J на пръстена A са *взаимно прости*, ако $I+J=A$. Това означава, че съществуват елементи $x \in I$, $y \in J$, такива че $x+y=1$. (По-общо, идеалите $I_1,\ldots,I_n$ се наричат *взаимно прости*, ако $I_1+\cdots+I_n=A$.)

Пример. В пръстена $\mathbb{Z}$ идеалите (m) и (n) са взаимно прости точно когато $(m,n)=1$. Това следва от тъждеството на Безу. Аналогичен факт е в сила за пръстена $k[x]$, k – поле.

Твърдение 3.1. *Ако идеалите I_1 и I_2 на пръстена A са взаимно прости, то $I_1I_2=I_1\cap I_2$. По-общо, ако $I_1,\ldots,I_n$ са два по два взаимно прости идеала, то $\prod_{k=1}^{n} I_k=\bigcap_{k=1}^{n} I_k$.*

Доказателство. Включването $I_1I_2\subseteq I_1\cap I_2$ е изпълнено за всеки два идеала на A (както и за произволен краен брой идеали). Обратно, нека $I_1+I_2=A$ и $i_1\in I_1$, $i_2\in I_2$ са елементи, за които $i_1+i_2=1$. Да умножим това равенство с произволен елемент $x\in I_1\cap I_2$: $xi_1+xi_2=x$. Очевидно $xi_1, xi_2\in I_1I_2$. Тогава и $x\in I_1I_2$ и значи $I_1\cap I_2\subseteq I_1I_2$. Следователно $I_1I_2=I_1\cap I_2$.

Общия случай ще докажем с индукция по n. Случаят $n=2$ вече е разгледан. Нека $n>2$. Да допуснем, че твърдението е вярно за идеалите $I_1,\ldots,I_{n-1}$ и да положим $J=\prod_{k=1}^{n-1} I_k=\bigcap_{k=1}^{n-1} I_k$. Тъй като $I_k+I_n=A$ за $k=1,\ldots,n-1$, съществуват елементи $x_k\in I_k$, $y_k\in I_n$, такива че $x_k+y_k=1$. Тогава $x=x_1\ldots x_{n-1}\in\prod_{k=1}^{n-1} I_k=J$, а от друга страна $x=(1-y_1)\ldots(1-y_{n-1})$ $=1-y$, където $y\in I_n$. Така $x+y=1$ и значи $J+I_n=A$. Използвайки доказаното за $n=2$, получаваме

$$\prod_{k=1}^{n} I_k = JI_n = J \cap I_n = \bigcap_{k=1}^{n} I_k .$$

***

Нека $A_1,\ldots,A_n$ са пръстени и да означим

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \{(x_1,\ldots,x_n) | x_k \in A_k,\ k=1,\ldots,n\} .$$

Множеството A се превръща в пръстен с покомпонентно събиране и умножение. Този пръстен се нарича *директна сума на пръстените* $A_1,\ldots,A_n$.

Можем да считаме, че $A_k \subseteq A$, отъждествявайки елемента $x_k \in A_k$ с елемента $(0,\ldots,0,x_k,0,\ldots,0) \in A$. При това A_k е идеал на A. Очевидно $A_k \cap \sum_{j\neq k} A_j = (0)$. В същото време A_k е и факторпръстен на A. Действително, изображението $\pi_k : A \to A_k$, дефинирано посредством равенството $\pi_k((x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)) = x_k$ е хомоморфизъм на A върху A_k (π_k се нарича проекция на A върху A_k). При това

$$\operatorname{Ker} \pi_k = \{(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_n)\} \cong \sum_{j\neq k} A_j .$$

Така $A_k \cong A / \operatorname{Ker} \pi_k$.

Нека сега A е пръстен и $I_1,\ldots,I_n \trianglelefteq A$. Разглеждаме изображението $\varphi : A \to \sum_{k=1}^{n} A/I_k$, дефинирано посредством равенството

$$\varphi(x) = (x+I_1,\ldots,x+I_n) \quad (x \in A).$$

Директно се проверява, че φ е хомоморфизъм на пръстени. От определението е ясно, че един елемент $(x_1+I_1,\ldots,x_n+I_n) \in \sum_{k=1}^{n} A/I_k$ е образ на елемента $x \in A$, когато $x + I_k = x_k + I_k$, т.е. когато $x \equiv x_k \pmod{I_k}$, $k=1,\ldots,n$. В частност, $\varphi(x) = 0$ означава, че $x \in I_k$ за всяко $k=1,\dots,n$, така че $\operatorname{Ker}\varphi=\bigcap_{k=1}^{n} I_k$. Следователно φ е инективен хомоморфизъм точно когато $\bigcap_{k=1}^{n} I_k=(0)$.

Теорема 3.2 (китайска теорема за остатъците). *Хомоморфизмът φ е сюрективен (т.е. върху) точно когато идеалите $I_1,\dots,I_n$ са два по два взаимно прости (и тогава $\operatorname{Ker}\varphi=\bigcap_{k=1}^{n} I_k=\prod_{k=1}^{n} I_k$).*

Доказателство. $\Rightarrow$) Ще докажем, че (например) I_1 и I_2 са взаимно прости. Тъй като φ е сюрективен хомоморфизъм, съществува елемент $x\in A$, такъв че $\varphi(x)=(1,0,\dots,0)$. Тогава $x\equiv 1(\operatorname{mod} I_1)$ и $x\equiv 0(\operatorname{mod} I_2)$, т.е. $1-x\in I_1$ и $x\in I_2$. При това $(1-x)+x=1$. Следователно $I_1+I_2=A$.

$\Leftarrow$) Първо ще докажем, че за всяко $k=1,\dots,n$ съществува елемент $e_k\in A$, такъв че $\varphi(e_k)=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (елементът 1 стои на k-та позиция). Ще разгледаме само случая $k=1$. Тъй като идеалът I_1 е взаимно прост с всеки от останалите идеали, съществуват елементи $u_2,\dots,u_n\in I_1$ и $v_2\in I_2,\dots,v_n\in I_n$, такива че $u_2+v_2=1,\dots,u_n+v_n=1$. Да положим $e_1=v_2\dots v_n=(1-u_2)\dots(1-u_n)$. От $e_1=v_2\dots v_n$ следва $e_1\equiv 0(\operatorname{mod} I_k)$, $k=2,\dots,n$. От друга страна, от $e_1=(1-u_2)\dots(1-u_n)$ следва $e_1\equiv 1(\operatorname{mod} I_1)$. Следователно $\varphi(e_1)=(1,0,\dots,0)$. Аналогично се конструират елементите $e_2,\dots,e_n$.

Нека сега $(x_1+I_1,\dots,x_n+I_n)$ е произволен елемент от $\sum_{k=1}^{n} A/I_k$. Да положим $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$. От доказаното по-горе следва, че

$$\varphi(x)=(x_1+I_1,\dots,x_n+I_n).$$

Следователно φ е сюрективен хомоморфизъм.

Забележка. Древните китайци са познавали горната теорема в следния вид: *Нека $i_1,\dots,i_n$ са две по две взаимно прости цели числа, а*

$x_1,\dots,x_n$ са произволни цели числа. Тогава съществува цяло число x, такова че $x \equiv x_1 \pmod{i_1},\dots,x \equiv x_n \pmod{i_n}$.

Задачи

Задача 3.1. Нека $I_1,\dots,I_n$ са два по два взаимно прости идеала в пръстена A и $d_k > 0$, $k = 1,\dots,n$. Да се докаже, че идеалите $I_1^{d_1},\dots,I_n^{d_n}$ също са два по два взаимно прости.

Задача 3.2. а) Нека $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на естественото число $n > 1$ в произведение на прости множители. Да се докаже, че

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

б) Нека k е поле и $f = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на неконстантния полином $f \in k[x]$ в произведение на неразложими над k полиноми. Да се докаже, че

$$k[x]/(f) \cong k[x]/(p_1^{\alpha_1}) \oplus \dots \oplus k[x]/(p_k^{\alpha_k}).$$

Задача 3.3. Нека A^* е мултипликативната група на пръстена A. Да се докаже, че ако I и J са взаимно прости идеали в A, то

$$(A/IJ)^* \cong (A/I)^* \times (A/J)^*.$$

Задача 3.4. Нека $\varphi(n)$ е функцията на Ойлер (броят на естествените числа, ненадминаващи n и взаимно прости с n). Да се докаже, че ако a и b са взаимно прости естествени числа, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (мултипликативност на функцията на Ойлер).

Задача 3.5. Нека $A_1,\dots,A_n$ са пръстени и I е идеал в пръстена $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$. Нека π_k е проекцията $A \to A_k$ и $I_k = \pi_k(I)$, $k = 1,\dots,n$. Да се докаже, че:

а) $I = \sum_{k=1}^{n} I_k$ и $A/I \cong \sum_{k=1}^{n} A_k/I_k$;

б) ако I е прост идеал в A, то съществува индекс k $(1 \leq k \leq n)$, такъв че I_k е прост идеал в A_k, а $I_j = A_j$ за $j \neq k$;

в) ако I е максимален идеал в A, то съществува индекс k $(1 \leq k \leq n)$, такъв че I_k е максимален идеал в A_k, а $I_j = A_j$ за $j \neq k$.

Определение (нилпотентен идеал). Един идеал I в пръстен A се нарича *нилпотентен*, ако съществува естествено число n, такова че $I^n = (0)$.

Задача 3.6. Нека $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ са (не непременно различни) максимални идеали в пръстена A и $I = \mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_n$. Да се докаже, че A/I е полулокален пръстен с нилпотентен радикал на Джекобсън.

Задача 3.7. Да се докаже, че всеки полулокален пръстен с нилпотентен радикал на Джекобсън има размерност на Крул, равна на 0.

Задача 3.8. Да се докаже, че за един пръстен A следните условия са еквивалентни:

а) съществуват (не непременно различни) максимални идеали $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ на A, такива че $\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_n = (0)$;

б) A е полулокален пръстен и $\mathfrak{R}(A)$ е нилпотентен идеал;

в) $A \cong \sum_{k=1}^{n} A_k$, където $A_k, k = 1, \ldots, n$ са локални пръстени с нилпотентни максимални идеали.

Задача 3.9. Нека A е крайномерна алгебра над поле k. Да се докаже, че $\mathfrak{R}(A) = (0)$ (т.е. A е полупрост пръстен) тогава и само тогава, когато A е директна сума на краен брой полета, всяко от които е крайно разширение на k (т.е. крайномерно линейно пространство над k).

§ 4. Локализация

В този параграф накратко ще разгледаме една важна конструкция от арсенала на комутативната алгебра – *локализация* на даден пръстен относно мултипликативно затворено множество.

Процесът, чрез който от пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ се получава полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$ (в което $\mathbb{Z}$ се влага) се обобщава без промяна за произволна област A, при което се получава полето от частни на A (вижте [4], §8). За тази цел в множеството от всички наредени двойки (a,b), където $a,b \in A, b \neq 0$, се въвежда релация на еквивалентност $\sim$: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - cb = 0$. При проверката за транзитивност се налага да се съкращава на ненулев елемент, т.е. да се използва, че в A няма ненулеви делители на нулата. Тази конструкция може да се обобщи без ограничението, че A е област.

Нека A е пръстен и $S \subseteq A$. Ще казваме, че множеството S е *мултипликативно затворено*, ако $1 \in S$ и от $u, v \in S$ следва $uv \in S$. В множеството от всички наредени двойки (a,s) където $a \in A, s \in S$, въвеждаме релация $\sim$ по правилото:

$$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists u \in S : (at - bs)u = 0.$$

Очевидно тази релация е рефлексивна и симетрична. По-нататък, нека $(a,s) \sim (b,t)$ и $(b,t) \sim (c,u)$. Тогава в S съществуват елементи v, w, такива че $(at - bs)v = 0, (bu - ct)w = 0$. Като умножим първото равенство с uw, а второто – със sv и ги съберем, получаваме $(au - cs)tvw = 0$. Тъй като S е мултипликативно затворено, то $tvw \in S$ и значи $(a,s) \sim (c,u)$. Следователно въведената релация е и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност.

Да означим с a/s класа на еквивалентност на двойката (a,s) и нека $S^{-1}A$ е множеството от всички класове на еквивалентност. В това множество въвеждаме по стандартния начин операции събиране и умножение:

$$a/s + b/t = (at + bs)/st,$$

$$(a/s)(b,t) = ab/st.$$

Предоставяме на читателя да провери, че тези определения не зависят от избора на представителите (a,s) и (b,t) и че $S^{-1}A$ се превръща в комутативен пръстен с единица.

Не е трудно да се покаже, че $S^{-1}A$ е нулевият пръстен точно когато $0 \in S$. Този случай не е интересен и затова по-нататък ще разглеждаме само мултипликативно затворени множества S, за които $0 \notin S$.

Упражнение 4.1. *Да разгледаме изображението $\varphi : A \to S^{-1}A$, дефинирано чрез равенството $\varphi(a) = a/1$. Да се докаже, че:*

а) *φ е хомоморфизъм на пръстени (в общия случай този хомоморфизъм не е инективен);*

б) $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow \exists s \in S : as = 0$; *така φ е инективен хомоморфизъм (влагане) точно когато S не съдържа делители на нулата;*

в) $s \in S \Rightarrow \varphi(s)$ *е обратим елемент в пръстена $S^{-1}A$;*

г) *всеки елемент от $S^{-1}A$ се записва във вида $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ за някои елементи $a \in A$, $s \in S$.*

Ако $I \trianglelefteq A$, означаваме $S^{-1}I = \{a/s \mid a \in I,\ s \in S\}$. Множеството $S^{-1}I$ е идеал в пръстена $S^{-1}A$ и (както лесно се проверява) всеки идеал на $S^{-1}A$ е от този вид.

Примери. 1. Ако A е област и $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A$ е полето от частни на A.

2. Нека A е пръстен и f е елемент на A, който не е делител на нулата (в частност f не е нилпотентен елемент). Множеството $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ е мултипликативно затворено. Полученият пръстен $S^{-1}A$ е "малко по-голям от A" и в него f вече е обратим елемент. В този случай вместо $S^{-1}A$ понякога ще пишем $A\left[\dfrac{1}{f}\right]$.

В частния случай когато $A = \mathbb{Z}$ и $S = \{2^n \mid n \geq 0\}$ пръстенът $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right]$ се състои от всички рационални числа, чийто знаменател е степен на числото 2.

Накрая по-подробно ще се спрем на още един пример (частен случай на този пример е пръстенът от пример 2 преди твърдение 1.6).

3. Нека A е пръстен, P е прост идеал на A и $S = A \setminus P$. Определението за прост идеал е еквивалентно на условието S да е мултипликативно затворено множество. В този случай вместо $S^{-1}A$ ще пишем A_P. Ясно е, че $A_P = \{a/s \mid a \in A,\ s \notin P\}$. Да означим

$$M = S^{-1}P = \{a/s \mid a \in P,\ s \notin P\} \trianglelefteq A_P.$$

Упражнение 4.2. *Да се докаже, че:*

а) *A_P е локален пръстен с единствен максимален идеал M;*

б) *ако A е локален пръстен, чийто единствен максимален идеал е P, то $A_P = A$;*

в) *полето A_P / M е изоморфно на полето от частни на областта $\bar{A} = A / P$.*

Горният пример може да се обобщи, като вместо един прост идеал се разгледа произволна фамилия от прости идеали на A, а S е допълнението на тяхното обединение.

Упражнение 4.3. *Нека S е мултипликативно затворено множество на пръстена A. Да се докаже, че съществува биекция между множеството от простите идеали на A, непресичащи S и множеството от всички прости идеали на пръстена $S^{-1}A$. (Разгледайте изображението $Q \to S^{-1}Q$, където Q е прост идеал на A, непресичащ S.)*

В частност, ако P е прост идеал на A и $S = A \setminus P$, съществува биекция между множеството от простите идеали на A, съдържащи се в P и множеството от всички прости идеали на пръстена A_P.

Задачи

Задача 4.1. Нека S е мултипликативно затворено множество в пръстена A, несъдържащо 0. Да се докаже, че множеството Σ от идеалите на A, непресичащи S, притежава максимални елементи и всеки максимален елемент на Σ е прост идеал на A.

Задача 4.2. Нека A е ненулев пръстен и Σ е множеството на всички мултипликативно затворени множества на A, несъдържащи 0. Да се докаже, че Σ притежава максимални елементи и един елемент S на Σ е максимален точно когато $P = A \setminus S$ е минимален прост идеал на A.

Задача 4.3. Нека $I \trianglelefteq A$ и $S = 1 + I$. Да се докаже, че $S^{-1}I \subseteq \mathfrak{R}(S^{-1}A)$.

Задача 4.4. Да се докаже, че ако S е мултипликативно затворено множество в пръстена A, то $S^{-1}\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(S^{-1}A)$. Сравнете със задача 4.11. Винаги ли е вярно, че $S^{-1}\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(S^{-1}A)$?

Задача 4.5. Да се докаже, че за пръстена A следните условия са еквивалентни:

а) $\mathfrak{N}(A) = (0)$;

б) $\mathfrak{N}(A_P) = (0)$ за всеки прост идеал P на A;

в) $\mathfrak{N}(A_M) = (0)$ за всеки максимален идеал M на A.

Задача 4.6. Да се докаже, че ако A е област, то A_P също е област за всеки прост идеал P на A. Вярно ли е обратното?

Задача 4.7. Нека $I_1, \ldots, I_n$ са идеали в пръстена A и S е мултипликативно затворено множество в A. Да се докаже, че:

а) $S^{-1}(I_1 \cap \cdots \cap I_n) = S^{-1}I_1 \cap \cdots \cap S^{-1}I_n$;

б) $S^{-1}(I_1 \ldots I_n) = S^{-1}I_1 \ldots S^{-1}I_n$.

В **задачи 4.8 – 4.13** ще предполагаме, че S е фиксирано мултипликативно затворено множество в пръстена A и ще означаваме с $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$ хомоморфизма на пръстени, зададен с $\varphi(a) = a/1$, $a \in A$.

Задача 4.8 (универсално свойство на локализацията). Нека $A \xrightarrow{\psi} B$ е хомоморфизъм на пръстени, такъв че всеки елемент на множеството $\psi(S)$ е обратим в пръстена B. Да се докаже, че съществува *единствен* хомоморфизъм на пръстени $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$, такъв че $\psi = \theta\varphi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi\downarrow & \nearrow\theta & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

Кой е този хомоморфизъм, когато $B = S^{-1}A$ и $\psi = \varphi$?

Задача 4.9 (единственост на локализацията). Нека $A \xrightarrow{\psi} B$ е хомоморфизъм на пръстени, който удовлетворява следните условия:

а) всеки елемент на множеството $\psi(S)$ е обратим в пръстена B;

б) за всеки хомоморфизъм на пръстени $A \xrightarrow{\psi'} B'$, такъв че всеки елемент на множеството $\psi'(S)$ е обратим в пръстена B', съществува *единствен* хомоморфизъм на пръстени $B \xrightarrow{\theta'} B'$, такъв че $\psi' = \theta'\psi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \psi' \downarrow & \swarrow \theta' & \\ B' & & \end{array}$$

Да се докаже, че хомоморфизмът $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$ от задача 4.8 е изоморфизъм. Следователно, ако $A \xrightarrow{\psi} B$ е хомоморфизъм на пръстени, който удовлетворява условията а) и б), то $B \cong S^{-1}A$.

Задача 4.10 (локализация и факторизация). Нека I е идеал в пръстена A. Да означим с $\bar{S}$ образа на S при естествения хомоморфизъм $\pi : A \to A/I$. Да се докаже, че

а) $\bar{S}^{-1}(A/I) \cong S^{-1}A/S^{-1}I$;

б) ако $P \supseteq I$ е прост идеал в пръстена A, то $(A/I)_{P/I} \cong A_P / IA_P$.

Задача 4.11. Да се докаже, че $r(S^{-1}I) = S^{-1}(r(I))$ за всеки идеал I в пръстена A.

Задача 4.12 (транзитивност на локализацията). Нека $T \supseteq S$ е мултипликативно затворено множество в пръстена A и $\bar{T}$ е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Да се докаже, че $\bar{T}^{-1}(S^{-1}A) \cong T^{-1}A$.

Задача 4.13. Нека P е прост идеал в A, такъв че $P \cap S = \phi$. Да означим с $\mathfrak{P}$ простия идеал $S^{-1}P$ в $S^{-1}A$. Да се докаже, че $(S^{-1}A)_{\mathfrak{P}} \cong A_P$.

Задача 4.14. Нека $P \subseteq Q$ са прости идеали в пръстена A. Да означим с $\mathfrak{P}$ простия идеал PA_Q в пръстена A_Q. Да се докаже, че $(A_Q)_{\mathfrak{P}} \cong A_P$.

Задача 4.15. Нека $P_1,\dots,P_k$ са прости идеали в пръстена A и $S = A\setminus\bigcup_{i=1}^{k}P_i$. Да се докаже, че:

а) пръстенът $S^{-1}A$ е полулокален;

б) ако между идеалите P_i няма включвания (т.е. $P_i \not\subseteq P_j,\ i\neq j$), максималните идеали в пръстена $S^{-1}A$ са точно идеалите $S^{-1}P_i$, $i=1,\dots,k$.

Задача 4.16. Нека A и B са пръстени и P е прост идеал в A. Да означим с $\mathfrak{P}$ простия идеал $P\oplus B$ в пръстена $A\oplus B$. Да се докаже, че $(A\oplus B)_{\mathfrak{P}} \cong A_P$.

Задача 4.17. Нека A е полулокален пръстен с максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i=1,\dots,n$. Да означим с $A\xrightarrow{\varphi_i}A_{\mathfrak{M}_i}$ хомоморфизма на локализация спрямо $\mathfrak{M}_i$, $i=1,\dots,n$ и с $A\xrightarrow{\varphi}\sum_{i=1}^{n}A_{\mathfrak{M}_i}$ изображението, определено с формулата $\varphi(a)=(\varphi_1(a),\dots,\varphi_n(a))$, $a\in A$. Да се докаже, че:

а) φ е инективен хомоморфизъм на пръстени;

б) φ е изоморфизъм тогава и само тогава, когато пръстенът A е изоморфен на директна сума на n локални пръстена;

в) ако радикалът на Джекобсън $\mathfrak{R}(A)$ на A е нилпотентен, то φ е изоморфизъм.

§ 5. Модули. Крайнопородени модули

Определение. Нека A е пръстен и M е абелева група, записана адитивно. Ще казваме, че M е *A-модул* (или *модул над A*), ако на всеки елемент $a \in A$ и на всеки елемент $x \in M$ е съпоставен елемент $ax \in M$, като се изпълняват следните аксиоми ($a, b \in A$; $x, y \in M$):

$a(x+y) = ax + ay$;

$(a+b)x = ax + bx$;

$(ab)x = a(bx)$;

$1.x = x$.

Така аксиомите за модул над пръстен точно съвпадат с аксиомите за линейно пространство над поле (единствената разлика е, че "скаларите" лежат в пръстен, който може и да не е поле).

Понятието модул обобщава някои добре известни алгебрични понятия, както показват следващите примери.

Примери. 1. Всеки идеал и всеки факторпръстен на един пръстен A е A-модул. В частност, самият пръстен A е A-модул.

2. Всяко линейно пространство над поле е модул над това поле.

3. Всяка (адитивно записана) абелева група е $\mathbb{Z}$-модул (ако $n \geq 0$, полагаме $nx = x + \cdots + x$ и $(-n)x = (-x) + \cdots + (-x)$).

Ако M е A-модул, *подмодул* на M се нарича всяка подгрупа N на M, затворена относно умножението с елементи от A (това е аналог на понятието подпространство). Ще бележим $N \leq M$ (или $N < M$, ако $N \neq M$). Сума на подмодули се дефинира точно както сума на подпространства.

Примери. 1. Подмодулите на пръстена A, разгледан като модул над себе си, са точно идеалите на A.

2. Всяко подпространство на линейно пространство V над поле е подмодул на V.

3. Всяка подгрупа на абелева група M (разгледана като $\mathbb{Z}$-модул) е подмодул на M.

4. Нека M е A-модул и $I \trianglelefteq A$.

а) Ако $x \in M$, множеството $Ix = \{ax \mid a \in I\}$ е подмодул на M. В частност, Ax е подмодул на M.

б) Множеството $IM = \left\{\sum a_i x_i \,|\, a_i \in I,\ x_i \in M\right\}$ е подмодул на *M*. По-общо, ако $N \leq M$, то $IN = \left\{\sum a_i x_i \,|\, a_i \in I,\ x_i \in N\right\} \leq M$.

Ако *M* е *A*-модул и $a \in A$, означаваме $aM = \{ax \,|\, x \in M\}$.

Определение. Множеството $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \,|\, aM = \{0\}\}$ ще наричаме *анулатор на M в A*. Директно се проверява, че $\operatorname{Ann} M \trianglelefteq A$.

Ще казваме, че *M* е *точен A-модул*, ако $\operatorname{Ann} M = (0)$.

Ще отбележим, че ако $I \trianglelefteq A$, $I \subseteq \operatorname{Ann} M$ (например $I = \operatorname{Ann} M$), то *M* може да се разглежда като модул над факторпръстена *A/I*: ако $\bar{a} \in A/I$ $(a \in A)$ и $x \in M$, дефинираме $\bar{a}x = ax$. Фактът, че $I \subseteq \operatorname{Ann} M$ осигурява коректност на тази дефиниция (т.е. независимост от избора на представител на съседния клас $\bar{a}$).

Важно е да се осъзнае, че *подмодулите на M, разглеждан като модул над A/I и като модул над A, са едни и същи.*

Упражнение 5.1. *Да се докаже, че:*

а) *ако* $N_1, N_2 \leq M$, *то* $\operatorname{Ann}(N_1 + N_2) = \operatorname{Ann} N_1 \cap \operatorname{Ann} N_2$;

б) *M е точен* $A/\operatorname{Ann} M$*-модул.*

***

Ако M и M' са *A*-модули, ще казваме, че едно изображение $\varphi : M \to M'$ *е хомоморфизъм на A-модули*, ако $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ за всички елементи $a \in A$; $x, y \in M$ (това е аналог на понятието линейно изображение). Ако φ е биекция, ще казваме, че φ е *изоморфизъм*, а модулите M и M' са *изоморфни* ($M \cong M'$). Както обикновено, под *ядро* и *образ* на φ ще разбираме съответно множествата

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in M \,|\, \varphi(x) = 0\} \leq M$$

и

$$\operatorname{Im} \varphi = \varphi(M) = \{y \in M' \,|\, \exists x \in M : \varphi(x) = y\} \leq M'.$$

Множеството от всички хомоморфизми от *M* към M' ще означаваме с $\operatorname{Hom}(M, M')$. Когато $M' = M$, за краткост ще пишем само $\operatorname{Hom} M$. Хомоморфизмите от $\operatorname{Hom} M$ (аналог на понятието линеен оператор) ще наричаме *ендоморфизми* на *M*.

Елементите на пръстена A могат да се разглеждат като ендоморфизми на M: ако $a \in A$, дефинираме $\varphi_a : M \to M$ посредством равенството $\varphi_a(x) = ax$. Ако φ е произволен ендоморфизъм от $\operatorname{Hom} M$, равенството $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ означава, че $\varphi\varphi_a = \varphi_a\varphi$, т.е. че ендоморфизмите φ_a комутират с всички ендоморфизми от $\operatorname{Hom} M$.

Множеството $\operatorname{Hom}(M, M')$ (и в частност $\operatorname{Hom} M$) може да се превърне в A-модул, определяйки $\varphi + \psi$ и $a\varphi$ чрез формулите

$$(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \text{и} \quad (a\varphi)(x) = a\varphi(x) \ (a \in A, x \in M).$$

Упражнение 5.2. *Ако M е A-модул, да се докаже, че A-модулите M и $\operatorname{Hom}(A, M)$ са изоморфни.*

Упътване. Докажете, че изображението, съпоставящо на всеки хомоморфизъм $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, M)$ елемента $\varphi(1) \in M$ е изоморфизъм на A-модули.

Ако N е подмодул на A-модула M, върху факторгрупата M/N се пренася по естествен начин структурата на A-модул: $a(x+N) = ax + N$ $(a \in A, x \in M)$. Този модул се нарича *фактормодул на M по N*. С π ще означаваме *естествения хомоморфизъм* от M върху M/N: $\pi(x) = x + N = \overline{x}$. Теоремата за хомоморфизмите звучи по познатия начин: *ако $\varphi : M \to M'$ е хомоморфизъм на A-модули, то $M / \operatorname{Ker} \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$.*

Както и при идеали, в сила са следните свойства:

1) $N_1, N_2 \le M \Rightarrow N_1 / (N_1 \cap N_2) \cong (N_1 + N_2) / N_2$;

2) $M \ge L \ge N \Rightarrow (M/N)/(L/N) \cong M/L$;

3) ако $N, L \le M$, пълният праобраз на $\pi(L) \le M/N$ е $L + N \le M$.

Освен тези свойства е в сила и

4) $I \trianglelefteq A \Rightarrow I(M/N) = (IM + N)/N$.

***

Нека $M_1, \dots, M_n$ са A-модули и да означим

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = \sum_{k=1}^{n} M_k = \{(x_1, \dots, x_n) | x_k \in M_k, k = 1, \dots, n\}.$$

Множеството M се превръща в A-модул чрез покомпонентно събиране и умножение с елемент от A:

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),$$
$$a(x_1,\dots,x_n)=(ax_1,\dots,ax_n).$$

Този модул се нарича *директна сума* на модулите $M_1,\dots,M_n$. Както и при пръстени, M_k е едновременно подмодул и фактормодул на M ($1\le k\le n$).

Модулът $A^n=\underbrace{A\oplus\cdots\oplus A}_{n}$ се нарича *свободен A-модул с ранг n.* "Свободата" на A^n се състои в това, че, подобно на линейните пространства, този модул притежава "базис" и всяко изображение на базиса в произволен модул може да бъде продължено до хомоморфизъм на A-модули.

Твърдение 5.3. *Нека A^n е свободният A-модул с ранг n и*
$$e_1=(1,0,\dots,0),\ e_2=(0,1,\dots,0),\ \dots,\ e_n=(0,0,\dots,1)\in A^n.$$
Тогава:

а) *$A^n=Ae_1+Ae_2+\cdots+Ae_n$ и всеки елемент $x\in A^n$ се записва по единствен начин във вида $x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$, $a_k\in A$, $1\le k\le n$;*

б) *ако M е произволен A-модул и $x_1,\dots,x_n$ са произволни елементи от M, съществува единствен хомоморфизъм $\varphi:A^n\to M$, такъв че $\varphi(e_k)=x_k$, $1\le k\le n$.*

Доказателството по нищо не се различава от доказателството на аналогичните факти за n-мерно линейно пространство над поле.

***

Определение. Един A-модул M се нарича *крайнопороден A-модул*, ако съществуват краен брой елементи $x_1,\dots,x_n\in M$, такива че $M=Ax_1+\cdots+Ax_n$. Това означава, че всеки елемент $x\in M$ може да се представи (поне по един начин) във вида $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, $a_k\in A$, $k=1,\dots,n$.

Твърдение 5.4. *Един A-модул M е крайнопороден тогава и само тогава, когато е изоморфен на фактормодул на свободния модул A^n за някое естествено число n.*

Доказателство. $\Rightarrow$) Нека $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$, $x_k \in M$, $k = 1,\ldots,n$. От твърдение 5.3, б) имаме, че съществува (единствен) хомоморфизъм $\varphi : A^n \to M$, такъв че $\varphi(e_k) = x_k$ $(1 \le k \le n)$. Очевидно φ е хомоморфизъм върху M и от теоремата за хомоморфизмите получаваме $M \cong A^n / \operatorname{Ker}\varphi$.

$\Leftarrow$) Нека M е изоморфен на фактормодул на A^n, т.е. съществува сюрективен хомоморфизъм $\varphi : A^n \to M$. Тъй като елементите $e_1,\ldots,e_n$ пораждат A^n (твърдение 5.3, а)), то $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ пораждат M, така че M е крайнопороден A-модул.

Твърдение 5.5 (лема на Накаяма). *Нека M е крайнопороден A-модул, $I \trianglelefteq A$ и $I \subseteq \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$ (в частност може $I = \mathfrak{R}$). Ако е изпълнено $IM = M$, то $M = (0)$.*

Доказателство. Да допуснем, че $M \neq (0)$ и нека $u_1,\ldots,u_n$ е минимална система пораждащи на M като A-модул. Имаме $M = Au_1 + \cdots + Au_n$ и оттук $IM = Iu_1 + \cdots + Iu_n$. Тъй като по условие $IM = M$, то u_n може да се представи във вида $u_n = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$, $a_k \in I$ $(1 \le k \le n)$. Оттук $(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}$. Но $a_n \in I \subseteq \mathfrak{R}$ и тогава $1 - a_n$ е обратим елемент (твърдение 2.3). Така

$$u_n = (1-a_n)^{-1}a_1u_1 + \cdots + (1-a_n)^{-1}a_{n-1}u_{n-1},$$

което противоречи на минималността на системата пораждащи $u_1,\ldots,u_n$. Следователно $M = (0)$.

Следствие 5.6. *Нека M е крайнопороден A-модул, $N \le M$ и $I \trianglelefteq A$, $I \subseteq \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$. Ако $M = N + IM$, то $M = N$.*

Доказателство. В сила е равенството $I(M/N) = (IM + N)/N$. Тъй като по условие $IM + N = M$, то $I(M/N) = M/N$. Сега от лемата на Накаяма, приложена за фактормодула M/N, следва $M/N = (0)$, което означава, че $M = N$.

Нека A е локален пръстен с максимален идеал T и $k = A/T$. Тъй като T е максимален идеал, то k е поле. Нека M е крайнопороден A-модул и $\bar{M} = M/TM$. Очевидно $T \subseteq \operatorname{Ann}\bar{M}$ и тогава $\bar{M}$ може да се разглежда като модул над A/T, т.е. като k-линейно пространство . Ясно е, че щом M е крайнопороден A-модул, то $\bar{M}$ е крайномерно пространство над k.

Твърдение 5.7. *Нека* $\pi : M \to M / TM = \bar{M}$ *е естественият хомоморфизъм и* $x_1, \dots, x_n \in M$ *са такива елементи, че* $\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)$ *са базис на* $\bar{M}$ *над* k*. Тогава* $x_1, \dots, x_n$ *пораждат* M *като* A*-модул (т.е.* $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$*).*

Доказателство. Да означим $N = Ax_1 + \dots + Ax_n$. Искаме да докажем, че $M = N$.

От условието следва, че $\pi(N) = M / TM\, (= \pi(M))$. Тогава пълният праобраз на $\pi(N)$ е M. От друга страна, този пълен праобраз е $N + TM$. Следователно $M = N + TM$. Тъй като $T = \mathfrak{R}(A)$ (защото A е локален пръстен с единствен максимален идеал T), от следствие 5.6 получаваме $M = N$.

Задачи

Задача 5.1. Нека M е A-модул и $N \leq M$. Да се докаже, че ако N и M/N са крайнопородени A-модули, то и M е крайнопороден A-модул.

Задача 5.2. Нека M е A-модул и $\varphi : M \to M$ е фиксиран хомоморфизъм на A-модули. За всеки полином

$$f = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k \in A[\lambda]$$

и за всеки елемент $x \in M$ дефинираме елемент $fx \in M$ по следното правило:

$$fx = f(\varphi)(x) = a_0 x + a_1\varphi(x) + \dots + a_k\varphi^k(x)$$

(в частност, $\lambda x = \varphi(x)$). Да се докаже, че така дефинираното действие на полиномиалния пръстен $A[\lambda]$ върху абелевата група M снабдява M със структура на $A[\lambda]$-модул.

Задача 5.3 (детерминантен трик). Нека M е крайнопороден A-модул със система от пораждащи елементи $x_1, \dots, x_n$ и нека $A = (a_{ij}) \in M_n(A)$ е квадратна матрица от ред n, такава че

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Да се докаже, че:

а) $\det A \in \operatorname{Ann} M$;

б) ако $\det A$ е обратим елемент на A, то $M = (0)$.

Задача 5.4 (теорема на Хамилтън-Кейли). Нека M е крайнопороден A-модул със система от пораждащи елементи $x_1, \ldots, x_n$ и $\varphi : M \to M$ е хомоморфизъм на A-модули. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(A)$ е квадратна матрица от ред n, такава че

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ако $\chi_\varphi = \det(\lambda E_n - A) \in A[\lambda]$, да се докаже, че $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Задача 5.5 (обобщена теорема на Хамилтън-Кейли). Нека $I \trianglelefteq A$, M е крайнопороден A-модул и $\varphi : M \to M$ е хомоморфизъм на A-модули, такъв че $\varphi(M) \subseteq IM$. Да се докаже, че съществува полином

$$\chi = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \in A[\lambda],$$

такъв че $a_k \in I$, $k = 1, \ldots, n$ и $\chi(\varphi) = 0$.

Задача 5.6 (обобщена лема на Накаяма). Нека $I \trianglelefteq A$ и M е крайнопороден A-модул, такъв че $M = IM$. Да се докаже, че съществува елемент $a \in I$, такъв че $1 + a \in \operatorname{Ann} M$. В частност, ако $I \subseteq \mathfrak{R}(A)$, то $M = (0)$.

Задача 5.7. Нека M е крайнопороден A-модул и $\varphi : M \to M$ е сюрективен хомоморфизъм на A-модули. Да се докаже, че φ е изоморфизъм.

Определение (цели елементи и цели разширения). Ако пръстенът A е подпръстен на пръстена B, ще казваме, че B е *разширение на A* или че *$A \subseteq B$ е разширение на пръстени*. Един елемент $b \in B$ се нарича *цял над A*, ако съществува полином $f \in A[x]$ със старши коефициент, равен на 1, такъв че $f(b) = 0$. Пръстенът B се нарича *цяло разширение на A*, ако всеки елемент $b \in B$ е цял над A.

Задача 5.8. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени. Да се докаже, че ако елементът $b \in B$ е цял над A, то A-алгебрата $A[b] = \{ g(b) \mid g \in A[x] \}$, породена от b, е крайнопороден A-модул.

Задача 5.9. Да се докаже, че ако разширението B на пръстена A е крайнопороден A-модул, то B е цяло разширение на A.

Задача 5.10. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени и $b \in B$. Да се докаже, че елементът b е цял над A точно когато пръстенът $A[b]$ е крайнопороден A-модул. Следователно, ако елементът b е цял над A, пръстенът $A[b]$ е цяло разширение на A.

Задача 5.11. Нека $A \subseteq B \subseteq C$ са разширения на пръстени. Да се докаже, че ако B е крайнопороден A-модул и C е крайнопороден B-модул, то C е крайнопороден A-модул.

Задача 5.12. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени и $b_1,\ldots,b_m \in B$. Да се докаже, че елементите $b_1,\ldots,b_m$ са цели над A точно когато пръстенът $A[b_1,\ldots,b_m]$ е крайнопороден A-модул.

Задача 5.13 (цяло затваряне). Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени. Да се докаже, че множеството $\tilde{A}$, състоящо се от всички елементи на B, които са цели над A, е подпръстен на B.

Пръстенът $\tilde{A}$ се нарича *цяло затваряне* на пръстена A в пръстена B.

Задача 5.14 (транзитивност на целите разширения). Нека $A \subseteq B \subseteq C$ са разширения на пръстени. Да се докаже, че C е цяло разширение на A точно когато B е цяло разширение на A и C е цяло разширение на B.

Задача 5.15. Нека B е цяло разширение на A, $J \trianglelefteq B$ и $I = J \cap A$. Да се докаже, че B/J е цяло разширение на A/I.

Задача 5.16. Нека B е цяло разширение на A и S е мултипликативно затворено множество в A. Да се докаже, че $S^{-1}B$ е цяло разширение на $S^{-1}A$.

Задача 5.17. Нека B е цяло разширение на A и I е идеал на A, такъв че $IB = B$. Да се докаже, че $I = A$.

Задача 5.18. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на области и $J \trianglelefteq B$. Да се докаже, че ако $J \neq (0)$, то $J \cap A \neq (0)$.

Определение (локализация на модул). Нека A е пръстен, S е мултипликативно затворено множество в A и M е A-модул. В множеството от всички наредени двойки (x,s), където $x \in M$, $s \in S$, въвеждаме релация $\sim$ по правилото:

$$(x,s) \sim (y,t) \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in S:\ u(tx - sy) = 0.$$

Проверява се, както в § 4, че това е релация на еквивалентност. Нека x/s е класът на еквивалентност на двойката (x,s) и нека $S^{-1}M$ е множеството от всички класове на еквивалентност. В това множество въвеждаме операции събиране на елементи и умножение с елементи от $S^{-1}A$:

$$x/s + y/t = (tx + sy)/st, \quad x/s,\ y/t \in S^{-1}M;$$

$$(a/s)(x/t) = ax/st, \quad a/s \in S^{-1}A,\ x/t \in S^{-1}M.$$

Непосредствено се проверява, че тези две операции са коректно определени и превръщат множеството $S^{-1}M$ в $S^{-1}A$-модул. Тъй като $S^{-1}A$ е A-алгебра, то $S^{-1}M$ притежава и структурата на A-модул:

$$a(x/s) = (ax)/s, \quad a \in A,\ x/s \in S^{-1}M.$$

От определението следва, че изображението $M \xrightarrow{\varphi} S^{-1}M$, зададено с равенството $\varphi(x) = x/1$, $x \in M$, е хомоморфизъм на A-модули.

Нека P е прост идеал в пръстена A. Тогава $S = A \setminus P$ е мултипликативно затворено множество на A. В този случай (както и при пръстени) вместо $S^{-1}M$ ще пишем M_P.

В **задачи 5.19 – 5.25** ще предполагаме, че S е фиксирано мултипликативно затворено множество в пръстена A.

Задача 5.19 (универсално свойство на локализацията). Нека N е $S^{-1}A$-модул, а $M \xrightarrow{\psi} N$ е хомоморфизъм на A-модули. Да се докаже, че съществува *единствен* хомоморфизъм $S^{-1}M \xrightarrow{\theta} N$ на $S^{-1}A$-модули, такъв че $\psi = \theta\varphi$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ \varphi\downarrow & \nearrow\theta & \\ S^{-1}M & & \end{array}$$

Сравнете със задача 4.8.

Задача 5.20 (единственост на локализацията). Нека N е $S^{-1}A$-модул, а $M \xrightarrow{\psi} N$ е хомоморфизъм на A-модули, такъв че за всеки $S^{-1}A$-модул M' и за всеки хомоморфизъм $M \xrightarrow{\psi'} M'$ на A-модули съществува *единствен* хомоморфизъм $N \xrightarrow{\theta'} M'$ на $S^{-1}A$-модули, такъв че $\psi' = \theta'\psi$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ \psi' \downarrow & \swarrow \theta' & \\ M' & & \end{array}$$

Да се докаже, че хомоморфизмът $S^{-1}M \xrightarrow{\theta} N$, определен в задача 5.19, е изоморфизъм. Сравнете със задача 4.9.

Задача 5.21. Нека $i : N \to M$ е инективен хомоморфизъм на A-модули и нека $i_S : S^{-1}N \to S^{-1}M$ е хомоморфизмът на $S^{-1}A$-модули, зададен с

$$i_S(x/s) = i(x)/s, \quad x \in N, \, s \in S.$$

Да се докаже, че i_S е инективен хомоморфизъм на $S^{-1}A$-модули. Следователно, ако N е подмодул на M, можем да разглеждаме $S^{-1}A$-модула $S^{-1}N$ като $S^{-1}A$-подмодул на $S^{-1}M$.

Задача 5.22. Нека $N_1, \dots, N_k$ са подмодули на A-модула M. Да се докаже, че $S^{-1}(N_1 \cap \dots \cap N_k) = S^{-1}N_1 \cap \dots \cap S^{-1}N_k$. Сравнете със задача 4.7.

Задача 5.23 (локализация и факторизация). Нека N е подмодул на A-модула M. Да се докаже,че $S^{-1}A$-модулите $S^{-1}(M/N)$ и $S^{-1}M/S^{-1}N$ са изоморфни. Сравнете със задача 4.10.

Задача 5.24 (транзитивност на локализацията). Нека T е мултипликативно затворено множество в пръстена A, такова че $T \supseteq S$. Нека $\overline{T}$ е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Да се докаже, че $\overline{T}^{-1}(S^{-1}M) \cong T^{-1}M$ за всеки A-модул M. Сравнете със задача 4.12.

Задача 5.25. Нека P е прост идеал в пръстена A, такъв че $P \cap S = \phi$. Да означим с $\mathfrak{P}$ простия идеал $S^{-1}P$ в $S^{-1}A$. Да се докаже, че $(S^{-1}M)_{\mathfrak{P}} \cong M_P$ за всеки A-модул M. Сравнете със задача 4.13.

Задача 5.26. Нека $P \subseteq Q$ са прости идеали в пръстена A. Да означим с $\mathfrak{P}$ простия идеал PA_Q в локалния пръстен A_Q. Да се докаже, че $(M_Q)_{\mathfrak{P}} \cong M_P$ за всеки A-модул M. Сравнете със задача 4.14.

Задача 5.27. Нека M е A-модул и P е прост идеал в пръстена A. Нека $k(P)$ е полето $(A/P)_P \cong A_P / PA_P$. Да се докаже, че модулите $(M/PM)_P$ и M_P / PM_P са изоморфни като линейни пространства над полето $k(P)$.

Задача 5.28. Нека M е крайнопороден A-модул. Да се докаже, че:

а) ако P е прост идеал в A и $M = PM$, то $M_P = (0)$;

б) ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в A, то $M = \mathfrak{M}M$ точно когато $M_{\mathfrak{M}} = (0)$.

Задача 5.29. Нека M е модул над полулокален пръстен A с максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i = 1,\dots,k$ и $M \xrightarrow{\varphi_i} M_{\mathfrak{M}_i}$ е хомоморфизмът на локализация спрямо $\mathfrak{M}_i$, $i = 1,\dots,k$. Да означим с φ изображението $M \xrightarrow{\varphi} \sum_{i=1}^{k} M_{\mathfrak{M}_i}$, определено с формулата $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x))$. Да се докаже, че:

а) φ е инективен хомоморфизъм на модули;

б) φ е изоморфизъм, когато A е изоморфен на директна сума на k локални пръстена;

в) φ е изоморфизъм, когато радикалът на Джекобсън на A е нилпотентен.

Задача 5.30. Да се докаже, че следните условия за A-модула M са еквивалентни:

а) $M = (0)$;

б) $M_P = (0)$ за всеки прост идеал P в A;

в) $M_{\mathfrak{M}} = (0)$ за всеки максимален идеал $\mathfrak{M}$ в A.

Задача 5.31. Нека N е подмодул на A-модула M. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

а) $N = M$;

б) $N_P = M_P$ за всеки прост идеал P в A;

в) $N_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}}$ за всеки максимален идеал $\mathfrak{M}$ в A.

Определение (носител на модул). Нека M е A-модул. Множеството от всички прости идеали P в A, такива че $M_P \neq (0)$, се нарича *носител на M*. Носителят на M ще означаваме със $\operatorname{Supp}_A M$ (или само $\operatorname{Supp} M$, ако A се подразбира).

Задача 5.32. Нека I е идеал в A и P е прост идеал в A. Да се докаже, че $P \in \operatorname{Supp}(A/I) \Leftrightarrow P \supseteq I$.

Задача 5.33. Нека M е A-модул и P е прост идеал в A. Да се докаже, че ако $P \in \operatorname{Supp} M$, то $P \supseteq \operatorname{Ann} M$. Сравнете със задача 5.38.

Задача 5.34. Нека M е A-модул и $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ са (не непременно различни) максимални идеали в A, такива че $\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_n M = (0)$. Да се докаже, че $\operatorname{Supp} M \subseteq \{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n\}$.

Задача 5.35. Да се докаже, че ако N е подмодул на A-модула M, то $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} N \cup \operatorname{Supp} M/N$.

Задача 5.36. Нека M е A-модул и S е мултипликативно затворено множество в A. Да се докаже, че

$$\operatorname{Supp}_{S^{-1}A} S^{-1}M = \{S^{-1}P \mid P \in \operatorname{Supp}_A M,\ P \cap S = \phi\}.$$

Задача 5.37. Нека M е крайнопороден A-модул и P е прост идеал в A, такъв че $M_P = (0)$. Да се докаже, че съществува елемент $s \in A \setminus P$, такъв че $sM = (0)$.

Задача 5.38. Нека M е крайнопороден A-модул и P е прост идеал в A. Да се докаже, че $P \in \operatorname{Supp} M \Leftrightarrow P \supseteq \operatorname{Ann} M$. Сравнете със задача 5.33.

§ 6. Ньотерови и артинови модули

Твърдение 6.1. *Нека Σ е частично наредено множество. Тогава следните условия са еквивалентни:*

(I) *Всяка растяща редица $x_1 \le x_2 \le \cdots$ от елементи на Σ се стабилизира (т.е. съществува естествено число n, такова че $x_n = x_{n+1} = \cdots$).*

(II) *Всяко непразно подмножество на Σ притежава максимален елемент.*

Доказателство. (I) $\Rightarrow$ (II). Ако допуснем, че условието (II) не е изпълнено, то в Σ съществува непразно подмножество T без максимален елемент, което ни позволява по индукция да построим строго растяща безкрайна редица от елементи на T, противоречие.

(II) $\Rightarrow$ (I). Нека $x_1 \le x_2 \le \cdots$ е растяща редица и $T = \{x_m\}$. По условие множеството T притежава максимален елемент; ако това е x_n, след него редицата се стабилизира.

По същия начин се установява, че са еквивалентни следните две условия:

(I′) *Всяка намаляваща редица $x_1 \ge x_2 \ge \cdots$ от елементи на Σ се стабилизира.*

(II′) *Всяко непразно подмножество на Σ притежава минимален елемент.*

Нека сега Σ е множеството от всички подмодули на даден A-модул M, разгледано с наредбата включване на подмодули. Тогава условието (I) се нарича *условие за прекъсване на растящите вериги*, а (II) – *условие за максималност*. Аналогично (I′) и (II′) се наричат съответно *условие за прекъсване на намаляващите вериги* и *условие за минималност*.

Определение. Един A-модул M се нарича *ньотеров* A-модул, ако удовлетворява двете еквивалентни условия (I) и (II).

Ако M удовлетворява еквивалентните условия (I′) и (II′), M се нарича *артинов* A-модул.

Примери. 1. Всяка крайна абелева група е ньотеров и артинов $\mathbb{Z}$-модул.

2. Всяко крайномерно линейно пространство V над поле k е ньотеров и артинов k-модул. Ако пък V е безкрайномерно над k, то V не е нито ньотеров, нито артинов k-модул.

3. Пръстените $\mathbb{Z}$ и $k[x]$ (k – поле), разгледани като модули над себе си, са ньотерови, но не са артинови.

4. Нека $\mathbb{Q}$ е адитивната група на полето на рационалните числа и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ е факторгрупата ѝ по $\mathbb{Z}$. Ако p е фиксирано просто число, множеството $G=\left\{\frac{m}{p^n}+\mathbb{Z} \mid m,n\in\mathbb{Z},\ n\geq 0\right\}$ е подгрупа на $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Всички ненулеви подгрупи на G се изчерпват с групите $G_n=\left\{\frac{m}{p^n}+\mathbb{Z} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}$, $n=1,2,\ldots$. При това $G_1<G_2<\cdots$. Групата G е артинов, но не ньотеров $\mathbb{Z}$-модул. (Всички подгрупи на G са описани подробно в [5, задача 1.23]. Групата $\mathbb{C}_{p^\infty}$ в тази задача е изоморфна на G, но е записана мултипликативно.)

5. Нека $\mathbb{Q}$ е адитивната група на полето на рационалните числа и p е фиксирано просто число. Множеството $H=\left\{\frac{m}{p^n} \mid m,n\in\mathbb{Z},\ n\geq 0\right\}$ е подгрупа на $\mathbb{Q}$. Групата H не е нито артинов, нито ньотеров $\mathbb{Z}$-модул. (Действително, $\mathbb{Z}<H$ и затова H не е артинов $\mathbb{Z}$-модул, а групата G от предния пример е хомоморфен образ на H и затова H не е ньотеров $\mathbb{Z}$-модул.)

Твърдение 6.2. *Един A-модул M е ньотеров тогава и само тогава, когато всеки подмодул на M е крайнопороден.*

Доказателство. $\Rightarrow$) Нека $N\leq M$ и Σ е множеството от всички крайнопородени подмодули на N. Тогава Σ е непразно множество (тъй като $(0)\in\Sigma$) и значи притежава максимален елемент, например N_0. Да допуснем, че $N_0\neq N$ и нека $x\in N\setminus N_0$. Тогава $N_0<N_0+Ax\leq N$ и N_0+Ax също е крайнопороден подмодул на N, противоречие с избора на N_0. Следователно $N=N_0$, така че N е крайнопороден.

$\Leftarrow$) Нека $M_1 \leq M_2 \leq \cdots$ е произволна растяща верига от подмодули на M. Тогава $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ също е подмодул на M. По условие N е крайнопороден, например от елементите $x_1, \ldots, x_r$. Ясно е, че съществува естествено число n, такова че $x_1, \ldots, x_r \in M_n$. Тогава $M_n = M_{n+1} = \cdots$. Следователно M е ньотеров модул.

И така, *един A-модул M е ньотеров, ако удовлетворява следните три еквивалентни условия:*

(I) *условието за прекъсване на растящите вериги;*

(II) *условието за максималност;*

(III) *всеки пдмодул на M е крайнопороден.*

Твърдение 6.3. а) *Всеки подмодул и фактормодул на ньотеров (артинов) модул е ньотеров (артинов) модул.*

б) *Ако M има подмодул N, такъв че модулите N и M/N са ньотерови (артинови), то и M е ньотеров (артинов) модул.*

Доказателство. а) Нека M е ньотеров (артинов) модул и $N \leq M$. Всяка растяща (намаляваща) верига от подмодули в N или в M/N индуцира аналогична верига в M и значи се стабилизира. Следователно N и M/N са ньотерови (артинови) модули.

б) Ще използваме следното помощно твърдение (проверката предоставяме на читателя). *Нека* $X, Y \leq M$ *и:* 1) $X \leq Y$ *(или* $X \geq Y$*);* 2) $X \cap N = Y \cap N$; 3) $(X+N)/N = (Y+N)/N$. *Тогава* $X = Y$.

Нека сега N и M/N са ньотерови модули и $M_1 \leq M_2 \leq \cdots$ е растяща верига от подмодули на M. Тогава веригата $M_1 \cap N \leq M_2 \cap N \leq \cdots$ от подмодули на N се стабилизира. Същото важи и за веригата $(M_1 + N)/N \leq (M_2 + N)/N \leq \cdots$ от подмодули на M/N. От помощното твърдение следва, че веригата $M_1 \leq M_2 \leq \cdots$ също се стабилизира. Следователно M е ньотеров модул.

Аналогично се разсъждава, когато N и M/N са артинови модули.

Следствие 6.4. *Ако A-модулите* $M_1, \ldots, M_n$ *са ньотерови (артинови), то и директната им сума* $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ *е ньотеров (артинов) A-модул.*

Доказателство. Нека $n=2$ и $M=M_1 \oplus M_2$. По условие модулите $M_1 \leq M$ и $M_2 \cong M / M_1$ са ньотерови (артинови). От твърдение 6.3, б) следва, че и M е ньотеров (артинов) модул.

Общият случай се получава с индукция по n.

***

Определение. Ще казваме, че един пръстен A е ***ньотеров (артинов) пръстен***, ако A е ньотеров (артинов) A-модул.

Напомняме, че подмодулите на A, разгледан като модул над себе си, са точно идеалите на A.

Ясно е, че ***един пръстен A е ньотеров, ако удовлетворява следните три еквивалентни условия:***

(I) ***условието за прекъсване на растящи вериги от идеали;***

(II) ***условието за максималност за идеали;***

(III) ***всеки идеал на A е крайнопороден.***

Примери. 1. Всеки краен пръстен, както и всяко поле, е ньотеров и артинов пръстен. Същото важи и за всяка крайномерна алгебра над поле.

2. Пръстените $\mathbb{Z}$ и $k[x]$ (k – поле) са ньотерови, но не са артинови.

3. Нека k е поле и $A=k[x_1,x_2,\ldots]$ е пръстенът от полиноми на безбройно много променливи с коефициенти от k (всеки полином е записан върху краен брой променливи). Пръстенът A не е нито ньотеров, нито артинов.

Ще отбележим, че пръстенът A се влага в полето от рационални функции $k(x_1,x_2,\ldots)$, което е и ньотеров, и артинов пръстен. Така подпръстен на ньотеров (артинов) пръстен не е непременно ньотеров (артинов) пръстен.

Твърдение 6.5. *Всеки крайнопороден модул M над ньотеров (артинов) пръстен A е ньотеров (артинов) A-модул.*

Доказателство. Според твърдение 5.4 M е фактормодул на свободния модул A^n за някое естествено число n. Тъй като (следствие 6.4) A^n е ньотеров (артинов) A-модул, то (твърдение 6.3, а)) и M е ньотеров (артинов) A-модул.

***

Нека M е A-модул. Под *верига* в M ще разбираме всяка крайна редица $M_0, M_1, \ldots, M_n$ от подмодули на M, такава че

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = (0)$$

(включванията са строги). Числото n ще наричаме *дължина* на тази верига.

Под *композиционен ред* на M ще разбираме всяка максимална (неуплътняема) верига, т.е. верига, която не може да се допълни с още един подмодул. Еквивалентно условие е всички фактормодули M_{i-1}/M_i $(1 \le i \le n)$ да са неприводими (прости) модули, т.е. да нямат подмодули, различни от (0) и себе си.

За произволен модул M с $l(M)$ ще означаваме дължината на най-късия композиционен ред на M; ако M няма композиционни редове, полагаме $l(M) = \infty$.

Теорема 6.6. *Нека модулът М има (поне един) композиционен ред с дължина п. Тогава:*

а) ***всеки композиционен ред на М има дължина п;***

б) ***всяка верига в М може да се допълни до композиционен ред на М.***

Доказателство. Ще разделим доказателството на четири последователни твърдения (последните две от които са а) и б)).

(I) *Ако* $N \le M$, *то* $l(N) \le l(M)$ *(априори не е ясно дори, че* $l(N)$ *е крайно число). При това, ако* $l(N) = l(M)$, *то* $N = M$ *(обратното е очевидно).*

Нека $\{M_i\}$ е композиционен ред на M с дължина $l(M)$. Да положим $N_i = N \cap M_i \le N$. Фактормодулът N_{i-1}/N_i е изоморфен на подмодул на M_{i-1}/M_i. Действително, в сила е

$$N_{i-1}/N_i = (N \cap M_{i-1})/(N \cap M_i) = (N \cap M_{i-1})/(N \cap M_{i-1}) \cap M_i \cong$$
$$\cong ((N \cap M_{i-1}) + M_i)/M_i \le M_{i-1}/M_i.$$

Тъй като M_{i-1}/M_i е неприводим модул, то или $N_{i-1}/N_i \cong M_{i-1}/M_i$ (и значи N_{i-1}/N_i също е неприводим), или $N_{i-1}/N_i = (0)$, т.е. $N_{i-1} = N_i$. Така, премахвайки повтарящите се подмодули N_i, получаваме композиционен ред на N, откъдето следва $l(N) \le l(M)$.

Нека сега $l(N)=l(M)=n$. Тогава $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ за всяко $i=1,\ldots,n$. Оттук следва първо $N_{n-1}=M_{n-1}$, след това $N_{n-2}=M_{n-2}$ и т.н., накрая $N=M$.

(II) *Дължината на всяка верига в M не надминава* $l(M)$.

Нека $M=M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k=(0)$ е верига в M с дължина k. От (I) следва, че $l(M)>l(M_1)>\cdots>l(M_k)=0$, откъдето получаваме $l(M)\geq k$.

(III) *Доказателство на* а). Нека $\{M_i\}$ е композиционен ред на M с дължина k. От (II) следва, че $k\leq l(M)$, а от определението на $l(M)$ получаваме $l(M)\leq k$. Следователно всички композиционни редове на M имат равни дължини.

(IV) *Доказателство на* б). Нека $\{M_i\}$ е произволна верига в M. Според (II) дължината ѝ не надминава $l(M)$. Ако е строго по-малка от $l(M)$, според подусловие а), веригата не е композиционен ред и значи може да се удължи. Според (II) този процес не може да бъде безкраен и следователно след краен брой стъпки ще допълним тази верига до композиционен ред на M.

Твърдение 6.7. *Един A-модул M притежава композиционен ред тогава и само тогава, когато M е едновременно ньотеров и артинов A-модул.*

Доказателство. $\Rightarrow$) Тъй като всички вериги в M имат дължини, ограничени от $l(M)$, то M е ньотеров и артинов модул.

$\Leftarrow$) Ще построим композиционен ред на M по следния начин. Да положим $M_0=M$. Тъй като M е ньотеров модул, съществува максимален подмодул $M_1 \subset M_0$; аналогично, съществува максимален подмодул $M_2 \subset M_1$ и т.н. Така получаваме строго намаляваща верига $M_0 \supset M_1 \supset \cdots$ от подмодули на M. Тъй като M е артинов модул, тази верига се стабилизира на крайно място (и последният ѝ член е (0)). Получената крайна верига очевидно е композиционен ред на M.

Ако един модул M е едновременно ньотеров и артинов, той се нарича *модул с крайна дължина*. Съгласно теорема 6.6 дължините на всички композиционни редове са едни и същи; това общо число се нарича *дължина на модула M*. Понятието дължина на модул е обобщение на понятието размерност на крайномерно линейно пространство над поле.

Предоставяме на читателя самостоятелно да провери верността на следващото твърдение.

Твърдение 6.8. *За линейно пространство V над поле k следните условия са еквивалентни:*

а) *V е крайномерно пространство над k;*

б) *V е k-модул с крайна дължина;*

в) *V е ньотеров k-модул;*

г) *V е артинов k-модул.*

Следствие 6.9. *Нека A е пръстен, в който нулевият идеал е произведение $M_1 \dots M_k$ на (не непременно различни) максимални идеали. Тогава A е ньотеров пръстен точно когато A е артинов пръстен.*

Доказателство. Да положим $M_0 = A$. По условие $M_1 \dots M_k = (0)$ или, което е все едно, $M_0 M_1 \dots M_k = (0)$. Ще докажем, че ако A е ньотеров пръстен, то A е и артинов пръстен.

Да разгледаме веригата от идеали

$$A = M_0 \supset M_0 M_1 \supseteq M_0 M_1 M_2 \supseteq \dots \supseteq M_0 M_1 \dots M_k = (0).$$

Пръстенът A е ньотеров, което означава, че е ньотеров A-модул. Според твърдение 6.3, а) за всяко $i = 0, 1, \dots, k-1$ A-модулите $N_i = M_0 M_1 \dots M_i / M_0 M_1 \dots M_{i+1}$ също са ньотерови. При това $M_{i+1} \subseteq \operatorname{Ann} N_i$ и тогава N_i е и модул над полето $k_{i+1} = A / M_{i+1}$, т. е. N_i е линейно пространство над k_{i+1}. Подмодулите на N_i като A-модул и като k_{i+1}-модул са едни и същи. Тогава имаме: N_i е ньотеров A-модул $\Rightarrow$ N_i е ньотеров k_{i+1}-модул $\Rightarrow$ (твърдение 6.8) N_i е артинов k_{i+1}-модул $\Rightarrow$ N_i е артинов A-модул. Сега прилагаме многократно твърдение 6.3, б):

- A-модулите $M_0 M_1 \dots M_k = (0)$ и $N_{k-1} = M_0 M_1 \dots M_{k-1} / M_0 M_1 \dots M_k$ са артинови $\Rightarrow$ A-модулът $M_0 M_1 \dots M_{k-1}$ е артинов;
- A-модулите $M_0 M_1 \dots M_{k-1}$ и $N_{k-2} = M_0 M_1 \dots M_{k-2} / M_0 M_1 \dots M_{k-1}$ са артинови $\Rightarrow$ A-модулът $M_0 M_1 \dots M_{k-2}$ е артинов;

$\vdots$

- A-модулите $M_0 M_1$ и $N_0 = M_0 / M_0 M_1$ са артинови $\Rightarrow$ A-модулът $M_0 = A$ е артинов.

Това означава, че A е артинов пръстен.

По аналогичен начин се доказва, че при даденото условие, ако A е артинов пръстен, то A е и ньотеров пръстен. (По-късно ще видим, че този факт е в сила винаги, т.е. без никакви допълнителни условия.)

Задачи

Задача 6.1. Да се докаже, че ако всяко непразно множество от крайнопородени подмодули на A-модула M притежава максимален елемент, то M е ньотеров A-модул.

Задача 6.2. Да се докаже, че ако M е артинов A-модул и $\varphi: M \to M$ е инективен хомоморфизъм на модули, то φ е изоморфизъм. Сравнете със задача 5.7.

Задача 6.3. Нека A е пръстен. Да се докаже, че:

а) свободният модул A^n не може да има по-малко от n на брой пораждащи;

б) ако $A^n \xrightarrow{\varphi} A^m$ е изоморфизъм на A-модули, то $n = m$;

в) ако $A^n \xrightarrow{\varphi} A^m$ е сюрективен хомоморфизъм на A-модули, то $n \geq m$.

Вижте също задача 11.5.

Задача 6.4. Нека p е фиксирано просто число. За всяко $n \geq 0$ да означим

$$M_n = p^{-n}\mathbb{Z} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \,|\, r = \frac{m}{p^n},\ m \in \mathbb{Z} \right\} \text{ и нека } M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n .$$

Да се докаже, че:

а) множествата M_n, $n \geq 0$ и M са подгрупи на $\mathbb{Q}$ относно събирането;

б) всяка подгрупа N на M, такава че $M_0 \subseteq N \subset M$, съвпада с някоя от подгрупите M_n, $n \geq 0$;

в) абелевата група M / M_0 е артинов, но не ньотеров $\mathbb{Z}$-модул;

г) абелевата група M не е нито артинов, нито ньотеров $\mathbb{Z}$-модул.

Сравнете с [5, задача 1.23].

Задача 6.5. Нека I е идеал в пръстена A. Простият идеал $P \supseteq I$ на A се нарича *минимален прост над I*, ако не съществува прост идеал P' в A, такъв че $I \subseteq P' \subset P$. Да се докаже, че за всеки идеал I в ньотеров пръстен A съществуват само краен брой прости идеали в A, които са минимални над I. В частност (при $I=(0)$), всеки ньотеров пръстен притежава само краен брой минимални прости идеали.

Задача 6.6. Да се докаже, че нилрадикалът $\mathfrak{N}(A)$ на всеки ньотеров пръстен A е сечение на краен брой прости идеали.

Задача 6.7. Да се докаже, че нилрадикалът $\mathfrak{N}(A)$ на всеки ньотеров пръстен A е нилпотентен идеал (т.е. $\mathfrak{N}(A)^N=(0)$ за някое естествено число N). Вижте също твърдение 7.2 и следствие 7.3.

Задача 6.8. Да се докаже, че един ньотеров пръстен A има размерност на Крул, равна на 0 точно когато $A\cong\sum_{i=1}^{k}A_i$, където A_i, $i=1,\dots,k$, са ньотерови локални пръстени с размерност на Крул, равна на 0.

Задача 6.9. Нека M е A-модул и $N_1, N_2 \le M$. Да се докаже, че ако M/N_1 и M/N_2 са ньотерови (артинови) модули, то и $M/(N_1\cap N_2)$ е ньотеров (артинов) модул.

Задача 6.10. Нека M е A-модул и $I=\operatorname{Ann} M$. Да се докаже, че ако M е ньотеров A-модул, то A/I е ньотеров пръстен. Еквивалентно: ако M е ньотеров A-модул и $\operatorname{Ann} M=(0)$, то A е ньотеров пръстен.

Задача 6.11. Да се докаже, че един пръстен A е ньотеров тогава и само тогава, когато за всеки елемент $a\in A$, $a\neq 0$, факторпръстенът $A/(a)$ е ньотеров.

Задача 6.12. Нека M е крайнопороден (съответно ньотеров, съответно артинов) A-модул и S е мултипликативно затворено множество в A. Да се докаже, че $S^{-1}M$ също е крайнопороден (съответно ньотеров, съответно артинов) $S^{-1}A$-модул. В частност, всяка локализация на ньотеров (артинов) пръстен също е ньотеров (артинов) пръстен.

Задача 6.13. Нека M е модул над полулокален пръстен A. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

а) M е крайнопороден (съответно ньотеров) A-модул;

б) M_P е крайнопороден (съответно ньотеров) A_P-модул за всеки прост идеал P на A;

в) $M_{\mathfrak{M}}$ е крайнопороден (съответно ньотеров) $A_{\mathfrak{M}}$-модул за всеки максимален идеал $\mathfrak{M}$ на A.

В частност, един полулокален пръстен A е ньотеров тогава и само тогава, когато всяка локализация на A спрямо максимален идеал е ньотеров пръстен.

Задача 6.14. Нека A е пръстен, такъв че:

а) всеки елемент $a \in A, a \neq 0$, се съдържа в краен брой максимални идеали;

б) всяка локализация на A спрямо максимален идеал е ньотеров пръстен.

Да се докаже, че A е ньотеров пръстен.

Задача 6.15. Да се докаже, че ако M е A-модул с крайна дължина и $N \leq M$, то $l(M) = l(N) + l(M/N)$. В частност, ако M_i, $i = 1, \ldots, n$ са A-модули с крайна дължина, то $l\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{i=1}^{n} l(M_i)$.

Задача 6.16. Нека k_n, $n \in \mathbb{N}$ са полета и

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} k_n = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in k_n, n \in \mathbb{N} \}.$$

Множеството A, с обичайните операции събиране и умножение на безкрайни редици, е комутативен пръстен. Да се докаже, че:

а) за всеки елемент $a \in A$ съществува елемент $b \in A$, такъв че $a + b$ е обратим елемент на A и $ab = 0$;

б) всеки прост идеал на A е максимален и минимален (в частност, размерността на Крул на A е равна на 0);

в) A_P е поле за всеки прост идеал P на A, като $A_P \cong A/P$;

г) A има безкраен брой минимални прости идеали;

д) A не е ньотеров пръстен.

Сравнете със задачи 6.5 и 6.13.

Задача 6.17. Нека k_n, $n \in \mathbb{N}$ са полета и

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}}{}' k_n = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in k_n, n \in \mathbb{N} \},$$

$$I = \sum_{n \in \mathbb{N}} k_n = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A \mid a_n \neq 0 \text{ само за краен брой } n \in \mathbb{N} \},$$

$$P_k = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A \mid a_k = 0 \}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че:

а) множеството I е идеал на A, а множествата P_k, $k \in \mathbb{N}$, са прости идеали на A;

б) $I \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$;

в) $I \not\subseteq P_k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

Сравнете с твърдение 1.3, а).

§ 7. Ньотерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса

Напомняме, че един пръстен A е ньотеров, ако удовлетворява следните три еквивалентни условия:

(I) всяка растяща верига от идеали на A се стабилизира;

(II) всяко непразно множество от идеали на A притежава максимален елемент;

(III) всеки идеал на A е крайнопороден.

Твърдение 7.1. *Всеки факторпръстен на ньотеров пръстен A също е ньотеров пръстен.*

Доказателство. Тъй като всеки идеал на A е крайнопороден, същото е вярно и за идеалите на всеки факторпръстен на A. (Може да се използва и твърдение 6.3, а).)

Определение. Ще казваме, че един идеал I на пръстена A е *нил-идеал*, ако $\forall x \in I \ \exists n = n(x)$: $x^n = 0$. Ще казваме, че I е *нилпотентен идеал*, ако $I^n = (0)$ за някое естествено число n (това означава, че произведението на произволни n на брой елемента от I е равно на нула).

Очевидно всеки нилпотентен идеал е нил-идеал. Обратното не винаги е вярно (във факторпръстена $k[x_1, x_2, \ldots]/(x_1^2, x_2^2, \ldots)$ разгледайте идеала $I = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots)$).

Твърдение 7.2. *В ньотеров пръстен A всеки нил-идеал е нилпотентен. (В действителност, в произволен пръстен A всеки крайнопороден нил-идеал е нилпотентен.)*

Доказателство. Нека I е нил-идеал и $I = (a_1, \ldots, a_r)$, като $a_k^{n_k} = 0$, $k = 1, \ldots, r$. Всеки елемент на I се записва във вида $u_1 a_1 + \cdots + u_r a_r$, $u_k \in A$, $k = 1, \ldots, r$. Нека $m = n_1 + \cdots + n_r - 1$. Ясно е, че като умножим произволни m на брой елемента от горния вид, след разкриването на скобите, във всяко едно събираемо някое a_k ще участва в степен, по-голяма или равна на n_k. Така всяко събираемо е равно на нула и значи цялото произведение е равно на нула. Следователно $I^m = (0)$.

Следствие 7.3. *В ньотеров пръстен нилрадикалът е нилпотентен.*

Теорема 7.4 (теорема на Хилберт за базиса). *Ако A е ньотеров пръстен, полиномиалният пръстен $A[x]$ също е ньотеров.*

Доказателство. Нека I е произволен идеал в пръстена $A[x]$. Ще докажем, че I е крайнопороден.

Да означим с J множеството от старшите коефициенти на полиномите от идеала I. Както лесно се проверява, J е идеал на пръстена A. Тъй като по условие A е ньотеров пръстен, J е крайнопороден идеал. Нека $J=(a_1,\ldots,a_n)$. За всяко $i=1,\ldots,n$ съществува полином $t_i \in I$, чийто старши коефициент е a_i. Нека $t_i = a_i x^{r_i} +$(едночлени от по-ниски степени). Да положим $r=\max\limits_{1\le i\le n} r_i$ и нека $I'=(t_1,\ldots,t_n)$ е идеалът в $A[x]$, породен от полиномите $t_1,\ldots,t_n$. Ясно е, че $I'\subseteq I$.

Нека сега $f=ax^m+$(едночлени от по-ниски степени) е произволен полином от I. Да допуснем, че $m\ge r$. Тъй като по определение $a\in J$, то $a=\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i$, $u_i\in A$. Тогава полиномът

$$f_1 = f-\sum_{i=1}^{n} u_i x^{m-r_i} t_i$$

принадлежи на I и степента му е по-малка от m. Така $f=f_1+\sum\limits_{i=1}^{n} u_i x^{m-r_i} t_i$, където $f_1\in I$, $\deg f_1<\deg f$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i x^{m-r_i} t_i \in I'$. Ако степента на полинома f_1 все още е по-голяма или равна на r, по аналогичен начин строим полином $f_2\in I$, $\deg f_2<\deg f_1$. Ясно е, че след краен брой стъпки ще можем да представим f във вида $f=g+h$, където $g\in I$, $\deg g<r$, а $h\in I'$.

Накрая, нека M е A-модулът, породен от полиномите $1,x,\ldots,x^{r-1}$, т.е. $M=A+Ax+\cdots Ax^{r-1}$ (това са всички полиноми с коефициенти от A и от степен, по-малка от r). Равенството $f=g+h$ показва, че е в сила равенството на A-модули $I=(I\cap M)+I'$. Но M е крайнопороден A-модул и значи е ньотеров (твърдение 6.5). Тогава неговият подмодул $I\cap M$ е крайнопороден (твърдение 6.2). Нека елементите $g_1,\ldots,g_k$

пораждат $I \cap M$ като A-модул. Ясно е, че тогава елементите $g_1, \ldots, g_k$; $t_1, \ldots, t_n$ пораждат идеала I, така че I е крайнопороден. Следователно $A[x]$ е ньотеров пръстен.

Следствие 7.5. *Ако A е ньотеров пръстен, то полиномиалният пръстен на n променливи $A[x_1, \ldots, x_n]$ също е ньотеров.*

Доказателство. Твърдението се получава от теоремата на Хилберт за базиса с индукция по n.

Упражнение 7.6. *Да се докаже, че ако A е ньотеров пръстен, то пръстенът от формалните степенни редове $A[[x]]$ също е ньотеров.*

Упътване. Използвайте идеята от доказателството на теорема 7.4, започвайки обаче с идеала J на A, състоящ се от младшите коефициенти на редовете от идеала I на $A[[x]]$. (Има какво да се обмисля!)

Упражнение 7.7. *Да се докаже, че ако $A[x]$ е ньотеров пръстен, то A също е ньотеров пръстен.*

Упражнение 7.8. а) *Нека B е A-алгебра и $b_1, \ldots, b_n$ са произволни елементи от B. Да се докаже, че съществува единствен хомоморфизъм на A-алгебри $\varphi : A[x_1, \ldots, x_n] \to B$, такъв че $\varphi(x_k) = b_k$, $k = 1, \ldots, n$.*

б) *Да се докаже, че всяка крайнопородена A-алгебра е изоморфна на факторалгебра на алгебрата $A[x_1, \ldots, x_n]$ за някое естествено число n.*

Забележка. Нека B е A-алгебра. Според бележките в § 0, всеки идеал на пръстена B издържа умножения с елементите на A. Така няма разлика между понятията "идеал на пръстена B" и "идеал на A-алгебрата B". Следователно за B няма разлика между понятията "ньотеров пръстен" и "ньотерова A-алгебра".

Следствие 7.9. *Нека B е крайнопородена A-алгебра. Ако A е ньотеров пръстен, то B също е ньотеров пръстен.*

В частност, всяка крайнопородена алгебра над поле е ньотеров пръстен. Също така, всеки крайнопороден пръстен (т.е. крайнопородена $\mathbb{Z}$-алгебра) е ньотеров пръстен.

Доказателство. Според упражнение 7.8, б), B е факторалгебра на $A[x_1, \ldots, x_n]$, която е ньотеров пръстен (следствие 7.5). Тогава B също е ньотеров пръстен (твърдение 7.1).

Задачи

Задача 7.1. Нека A е ньотеров пръстен и $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \in A[[x]]$. Да се докаже, че f е нилпотентен елемент точно когато a_n са нилпотентни $\forall n \geq 0$. Сравнете със задача 2.6.

Задача 7.2. Нека A е ньотеров пръстен и F е подмножество на A. Да се докаже, че съществуват краен брой елементи $f_i \in F$, $i = 1,\dots,n$, такива че всеки елемент $f \in F$ има представяне $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, $a_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$.

Задача 7.3. Нека A е локален пръстен, такъв че максималният идеал $\mathfrak{M}$ е главен и $\bigcap_{n>0} \mathfrak{M}^n = (0)$. Да се докаже, че A е ньотеров пръстен и всеки ненулев идеал в A е степен на идеала $\mathfrak{M}$.

Задача 7.4 (И. С. Коен). Да се докаже, че ако всеки прост идеал на пръстена A е крайнопороден, то A е ньотеров пръстен. (А ако всеки максимален идеал е крайнопороден?)

Задача 7.5 (Б. Коцев). Нека k е поле и $A = k[t, x_1, x_2, \dots]$ е пръстенът на полиноми на изброимо много променливи с коефициенти в k. Нека $M = (t, x_1, x_2, \dots)$ и нека $P = (x_1 - tx_2, x_2 - tx_3, x_3 - tx_4, \dots)$. Да означим с B пръстена $A_M / PA_M \cong (A/P)_{M/P}$. Да се докаже, че:

а) B е локален пръстен с главен максимален идеал;

б) B е област;

в) B не е ньотеров пръстен.

Сравнете със задачи 7.3 и 7.4.

***

Определение (цели алгебрични числа). Комплексното число α се нарича *алгебрично число*, когато е корен на ненулев полином с рационални коефициенти (еквивалентно: когато е корен на ненулев полином с цели коефициенти). Ако α е корен на полином с цели коефициенти и старши коефициент, равен на 1, то α се нарича *цяло алгебрично число*.

Комплексното число α е цяло алгебрично число точно когато α е цял елемент над $\mathbb{Z}$. Множеството на всички алгебрични числа е подполе на $\mathbb{C}$, а множеството на всички цели алгебрични числа е подпръстен на $\mathbb{C}$.

Задача 7.6. Да се докаже, че ако $\alpha \in \mathbb{Q}$ е цяло алгебрично число, то α е цяло число.

Задача 7.7. Да се докаже, че ако $\alpha \in \mathbb{C}$ е алгебрично число, то съществува цяло число $0 \neq s \in \mathbb{Z}$, такова че $s\alpha$ е цяло алгебрично число.

Задача 7.8. Нека $f = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ е полином, който е неразложим над полето $\mathbb{Q}$ и има корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Нека $D \in \mathbb{Z}$ е дискриминантата на f и нека $\alpha = \alpha_1$. Да се докаже, че:

а) ако $\beta = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$, е цяло алгебрично число, то $\beta_i = b_0 + b_1\alpha_i + \cdots + b_{n-1}\alpha_i^{n-1}$ също е цяло алгебрично число за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$;

б) ако $\beta = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$, е цяло алгебрично число, то $Db_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$;

в) пръстенът A на целите алгебрични числа в $\mathbb{Q}(\alpha)$ е свободна абелева група (относно събирането) от ранг n; в частност, A е ньотеров пръстен.

Задача 7.9. Да се намери базис на пръстена на целите алгебрични числа в полето E, където: а) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; б) $E = \mathbb{Q}(i)$; в) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

***

Определение. *Градуиран пръстен* е пръстен S, който се представя като директна сума $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$ на свои подгрупи (относно събирането) S_i $i \geq 0$, такива че $S_iS_j \subseteq S_{i+j}$.

Всеки елемент f на един градуиран пръстен S има единствено представяне $f = \sum_{i \geq 0} f_i$, $f_i \in S_i$, като $f_i \neq 0$ само за краен брой $i \geq 0$.

Елементът $f_i \in S_i$ се нарича *еднородна компонента* на f от степен i. Един елемент $f \in S$ се нарича *еднороден*, когато $f \in S_i$ за някое $i \geq 0$. Ако $f \in S_i \setminus \{0\}$, казваме, че f е еднороден елемент от степен i и пишем $\deg f = i$. По определение, $\deg 0 = -\infty$.

Нека A е пръстен и $S = A[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът на полиномите на n променливи с коефициенти от A. Да означим с S_i, $i \geq 0$, свободния A-модул, състоящ се от всички еднородни полиноми в S от степен i. Тогава пръстенът S, заедно с абелевите групи S_i, $i \geq 0$, е градуиран пръстен.

Задача 7.10. Да се докаже, че ако S е градуиран пръстен, то $1 \in S_0$. Следователно S_0 е подпръстен на пръстена S.

Задача 7.11. Един идеал I в градуиран пръстен S се нарича *еднороден*, когато от $f \in I$ следва $f_i \in I$ за всяко $i \geq 0$. Да се докаже, че:

а) I е еднороден идеал точно когато $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots$, където $I_i = I \cap S_i$, $i \geq 0$;

б) I е еднороден идеал точно когато I се поражда от (не непременно краен брой) еднородни елементи.

Задача 7.12. Да се докаже, че ако градуираният пръстен S е ньотеров, то всеки еднороден идеал в S се поражда от краен брой еднородни елементи.

Задача 7.13. Нека $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$ е градуиран пръстен. Да се докаже, че множеството $S_+ = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$ е еднороден идел на S и $S / S_+ \cong S_0$.

Задача 7.14. Нека $0 \neq f_j \in S$, $j = 1, \dots, k$, са еднородни елементи на градуирания пръстен S и $I = (f_1, \dots, f_k)$. Да се докаже, че ако $f \in I$ е еднороден елемент от степен d, то f има представяне $f = \sum_{j=1}^{k} g_j f_j$, където всеки $g_j (1 \leq j \leq k)$ е еднороден елемент от степен $d - \deg f_j$, ако $d \geq \deg f_j$ и $g_j = 0$, ако $d < \deg f_j$.

Задача 7.15. Нека $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$ е градуиран пръстен. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

а) S е ньотеров пръстен;

б) S_0 е ньотеров пръстен и $S_+ = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$ е крайнопороден идеал;

в) S_0 е ньотеров пръстен и S е крайнопородена S_0-алгебра.

В частност, ако градуираният пръстен S е ньотеров и $S_0 = k$ е поле, то S е крайнопородена k- алгебра.

Задача 7.16 (оператор на Рейнолдс). Нека A е подпръстен на пръстена B. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

а) съществува A-подмодул M на B, такъв че $B = A \oplus_A M$;

б) съществува хомоморфизъм на A-модули $\pi : B \to A$, такъв че $\pi|_A = \mathrm{id}\, A$.

Когато подпръстенът A на пръстена B удовлетворява тези еквивалентни условия, A се нарича *директно събираемо на* B, а хомоморфизмът на A-модули $\pi : B \to A$ се нарича *оператор на Рейнолдс*.

Задача 7.17. Нека подпръстенът A на пръстена B е директно събираемо на B (виж задача 7.16). Да се докаже, че ако B е ньотеров пръстен, то A също е ньотеров пръстен.

Задача 7.18. Нека G е група от автоморфизми на пръстена A и

$$A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \ \forall g \in G\}.$$

Да се докаже, че:

а) множеството A^G е подпръстен на A (A^G се нарича *пръстен от инварианти* на групата G);

б) ако G е крайна група от ред $|G|$ и естественото число $|G|$ е обратим елемент в A, то изображението $\pi : A \to A^G$, определено с формулата

$$\pi(a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a), \ a \in A,$$

е хомоморфизъм на A^G-модули, такъв че $\pi|_{A^G} = \mathrm{id}\, A^G$;

в) ако G е крайна група, ако пръстенът A е ньотеров и $|G|$ е обратим елемент в A, то пръстенът от инварианти A^G също е ньотеров.

Задача 7.19 (крайна породеност на пръстена от инварианти на крайна група). Нека S е градуиран пръстен, такъв че $S_0 = k$ е поле. Нека G е крайна група от автоморфизми на S, такава че $g(S_i) \subseteq S_i \ \forall g \in G$ и

$\forall i \geq 0$. Да означим с S^G пръстена от инварианти на групата G (виж задача 7.18). Да се докаже, че:

а) $S^G = \sum_{i\geq 0}(S^G \cap S_i)$, т.е. пръстенът от инварианти S^G е градуиран подпръстен на S;

б) $k^G = \{ f \in S_0 \mid g(f) = f \ \forall g \in G\}$ е подполе на k;

в) ако S е крайнопородена k-алгебра и $\operatorname{char} k \nmid |G|$, то S^G е крайнопородена k^G-алгебра. В частност, S^G е крайнопородена k-алгебра, ако G е група от автоморфизми на S *над* k (т.е. $g(f) = f \ \forall g \in G$ и $\forall f \in S_0$).

Вижте също задача 8.5.

Задача 7.20. Нека k е поле и нека симетричната група S_n действа на пръстена на полиномите $k[x_1,\dots,x_n]$ по следния начин:

$$\sigma(f(x_1,\dots,x_n)) = f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}), \ \sigma \in S_n.$$

Нека A_n е алтернативната подгрупа на S_n, състояща се от всички четни пермутации. Да се докаже, че:

а) $k[x_1,\dots,x_n]^{S_n} = k[\sigma_1,\dots,\sigma_n]$, където $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ са елементарните симетрични полиноми на $x_1,\dots,x_n$;

б) ако $\operatorname{char} k \neq 2$, то

$$k[x_1,\dots,x_n]^{A_n} = k[\sigma_1,\dots,\sigma_n,\Delta] = k[\sigma_1,\dots,\sigma_n] \oplus k[\sigma_1,\dots,\sigma_n]\Delta,$$

където $\Delta = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$.

§ 8. Теорема на Хилберт за нулите – алгебричен вариант

Преди основното изложение в този параграф се нуждаем от някои предварителни определения и резултати от разширения на полета. По същество читателят трябва да владее съдържанието на §§ 22, 23 от [4].

Нека E е разширение на полето k. Един елемент $\alpha \in E$ се нарича *алгебричен над* k, ако съществува ненулев полином $f(x) \in k[x]$, такъв че $f(\alpha) = 0$; в противен случай α се нарича *трансцендентен над* k.

Ако $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$, с $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ще означаваме k-алгебрата, породена от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (т.е. всички полиноми на $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с коефициенти от k), а с $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – полето, породено над k от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (т.е. всички рационални функции на $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с коефициенти от k). Ясно е, че $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subseteq k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Упражнение 8.1. *Да се докаже, че* $k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *точно когато елементите* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *са алгебрични над* k. (Използвайте следствие 5 от § 22 от [4].)

Ще казваме, че елементите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са *алгебрически независими над* k, ако не съществува ненулев полином f на n променливи с коефициенти от k, такъв че $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ (при $n = 1$ това означава, че елементът α_1 е трансцендентен над k). В този случай полето $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ е изоморфно на полето $k(x_1, \dots, x_n)$ от рационалните функции на n променливи с коефициенти от k (проверете, че изображението $\varphi\left(\dfrac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)}\right) = \dfrac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ е изоморфизъм).

Ще напомним, че едно разширение E на полето k се нарича:

• *крайно*, ако полето E, разгледано като линейно пространство над k, е крайномерно (числото $[E : k] = \dim_k E$ се нарича *степен на E над k*);

• *алгебрично*, ако всеки елемент на E е алгебричен над k;

• *крайно породено алгебрично*, ако $E=k(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, където елементите $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in E$ са алгебрични над *k*. В този случай $E=k(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=k[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$.

Всяко крайно разширение E на полето k е алгебрично разширение. Действително, ако $[E:k]=\dim_k E=n$ и $\alpha\in E$, то елементите $1,\alpha,\alpha^2,\dots,\alpha^n$ са линейно зависими над *k* (защото са $n+1$ на брой), а това означава, че α е корен на ненулев полином с коефициенти от *k*.

Твърдение 8.2. *Едно разширение E на полето k е крайно точно когато е крайно породено алгебрично разширение.*

Това е точно твърдение 2 от § 23 от [4].

***

Твърдение 8.3. *Нека E е разширение на полето k и* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *са елементи от E, не всички от които са алгебрични над k. Тогава съществува r,* $1\le r\le n$, *такова че (след евентуално преномериране) елементите* $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ *са алгебрически независими над k, а* $\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$ *са алгебрични над полето* $F=k(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$.

Доказателство. Нека например α_1 е трансцендентен над *k*. Ако $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ са алгебрични над полето $k(\alpha_1)$, твърдението е доказано. В противен случай, например α_2 е трансцендентен над $k(\alpha_1)$. Тогава елементите α_1,α_2 са алгебрически независими над *k* (това твърдение се нуждае от обосновка, която предоставяме на читателя). Сега, ако $\alpha_3,\dots,\alpha_n$ са алгебрични над $k(\alpha_1,\alpha_2)$, твърдението е доказано. Продължавайки по същия начин, достигаме до елементи $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, които са алгебрически независими над *k*, а $\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$ (ако има такива) вече са алгебрични над полето $F=k(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$.

Ще отбележим, че подалгебра на крайнопородена алгебра не винаги е крайнопородена. (Проверете, че подалгебрата на $k[x,y]$, породена от едночлените $x, xy, xy^2, \dots$ не е крайнопородена.) Следващото твърдение разглежда ситуация, в която, при допълнителни предположения, подалгебра на крайнопородена алгебра отново е крайнопородена.

Лема 8.4. *Нека $A \subseteq B \subseteq C$ са пръстени и:*

1) *A е ньотеров пръстен;*

2) *C е крайнопородена A-алгебра;*

3) *C е крайнопороден B-модул.*

Тогава B е крайнопородена A-алгебра.

В частност, ако $k \subseteq F \subseteq E$ са полета, като E е крайнопородена k-алгебра и е крайно разширение на F, то F е крайнопородена k-алгебра.

Доказателство. Нека елементите $c_1,\dots,c_m \in C$ пораждат C като A-алгебра (т.е. $C = A[c_1,\dots,c_m]$), а елементите $y_1,\dots,y_n \in C$ пораждат C като B-модул (т.е. $C = By_1 + \dots + By_n$). Тогава са в сила равенства от вида:

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j , \tag{1}$$

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{ijk} y_k , \tag{2}$$

$b_{ij}, b_{ijk} \in B$. Да означим $B_0 = A[b_{ij};\ b_{ijk}]$.

Всеки елемент на C е полином с коефициенти от A на елементите c_i $(i = 1,\dots,m)$. Замествайки в този полином c_i чрез равенствата (1) и използвайки неколкократно (2), получаваме, че всеки елемент на C е линейна комбинация с коефициенти вече от B_0 на елементите $y_1,\dots,y_n$, т.е. $C = B_0 y_1 + \dots + B_0 y_n$ е крайнопороден B_0-модул.

Сега разглеждаме веригата от пръстени $A \subseteq B_0 \subseteq B \subseteq C$. Имаме:

- B_0 е крайнопородена алгебра над ньотеровия пръстен $A \Rightarrow B_0$ е ньотеров пръстен (следствие 7.9);
- C е крайнопороден B_0-модул $\Rightarrow C$ е ньотеров B_0-модул (твърдение 6.5);
- B е подмодул на B_0-модула $C \Rightarrow B$ е крайнопороден B_0-модул (твърдение 6.2), т.е. съществуват елементи $z_1,\dots,z_t \in B$, такива че $B = B_0 z_1 + \dots + B_0 z_t$.

Сега, от последното равенство и от равенството $B_0 = A[b_{ij};\ b_{ijk}]$ вече е ясно, че $B = A[b_{ij};\ b_{ijk};\ z_i]$, така че B е крайнопородена A-алгебра.

Твърдение 8.5. а) *Полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$ не е крайнопороден пръстен (т.е. не е крайнопородена $\mathbb{Z}$-алгебра).*

б) *Полето от рационалните функции $k(x_1,\dots,x_r)$ над поле k не е крайнопородена k-алгебра.*

Доказателство. а) Да допуснем, че съществуват краен брой рационални числа $\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_n}{q_n}$, $(p_i,q_i \in \mathbb{Z}, 1\le i\le n)$, такива че $\mathbb{Q}=\mathbf{Z}\left[\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_n}{q_n}\right]$, т.е. всяко рационално число е полином с цели коефициенти на тези числа. Нека $q\in\mathbb{N}$ е просто число, което не дели нито един от знаменателите $q_1,\dots,q_n$. Лесно се съобразява, че рационалното число $\frac{1}{q}$ не може да се представи като полином с цели коефициенти на числата $\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_n}{q_n}$. Полученото противоречие показва, че $\mathbb{Q}$ не е крайнопороден пръстен.

б) В пръстена $k[x_1,\dots,x_r]$ всеки неконстантен полином еднозначно се разлага в произведение на неразложими над k полиноми и неразложимите полиноми са безбройно много. Тази аналогия с пръстена $\mathbf{Z}$ ни позволява да пренесем буквално доказателството за $\mathbb{Q}$ от подусловие а) и за полето от рационални функции $k(x_1,\dots,x_r)$.

Следващото твърдение стои в основата на теоремата на Хилберт за нулите, независимо в кой от различните ѝ варианти е формулирана.

Теорема 8.6. *Нека полето E е разширение на полето k. Ако E е крайнопородена k-алгебра, то E е крайно (а значи и алгебрично) разширение на k.*

Доказателство. Нека елементите $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in E$ пораждат E като k-алгебра, т.е. $E=k[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$. Ще докажем, че всички тези елементи са алгебрични над k. Тогава полето E е крайно породено алгебрично разширение на k и според твърдение 8.2 е крайно разширение на k.

Да допуснем противното, т.е. че не всички елементи $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ са алгебрични над k. Тогава, според твърдение 8.3, можем да считаме, че първите r елемента $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, $r\ge 1$, са алгебрически независими над k, а

$\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$ са алгебрични над полето $F = k(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$. При това, F е изоморфно на полето $k(x_1,\dots,x_r)$ от рационалните функции на r променливи с коефициенти от k. От своя страна, полето $E = F[\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n]$ е крайно породено алгебрично разширение на F и според твърдение 8.2 е крайно разширение на F.

Сега за веригата от полета $k \subseteq F \subseteq E$ имаме: E е крайнопородена k-алгебра и е крайно разширение на F. От лема 8.4 следва, че полето F е крайнопородена k-алгебра. Но това противоречи на твърдение 8.5, б).

Следователно допускането не е вярно.

Следствие 8.7 (теорема на Хилберт за нулите – алгебричен вариант). *Нека k е поле, A е крайнопородена k-алгебра и M е максимален идеал на A. Тогава A/M е крайно (а значи и алгебрично) разширение на k.*

В частност, ако k е алгебрически затворено поле, то $A / M = k$.

Доказателство. (Напомняме (вижте § 0), че ако A е алгебра над поле k, можем да считаме, че $k \subseteq A$. Също така, ако M е собствен идеал на A, можем да считаме, че $k \subseteq A / M$.)

Тъй като по условие A е крайнопородена k-алгебра, то и A/M е крайнопородена k-алгебра; при това A/M е поле, защото M е максимален идеал. Сега от теорема 8.6 следва, че A/M е крайно разширение на k.

Ако k е алгебрически затворено поле, то k няма същински крайни разширения и следователно $A / M = k$.

Упражнение 8.8. *Нека k е поле и M е максимален идеал в полиномиалния пръстен $A = k[x_1,\dots,x_n]$. Да се докаже, че съществува ненулев полином $f \in k[x]$, такъв че $f(x_i) \in M$ за всяко $i = 1,\dots,n$.*

Упътване. От теоремата на Хилберт следва, че елементите $x_1,\dots,x_n$ са алгебрични по модул M, откъдето лесно следва и даденото твърдение. (В действителност, това твърдение е еквивалентно на теоремата на Хилберт.)

Задачи

Задача 8.1. Нека k е поле и $A = k[x_1,\dots,x_n]$ е пръстенът от полиномите на n променливи с коефициенти от k. Да се докаже, че:

а) ако $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in k$, то $M = (x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$ е максимален идеал на A и $A/M \cong k$;

б) ако k е алгебрически затворено поле, то всеки максимален идеал M на A е от този вид, т.е. съществуват елементи $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in k$, такива че $M = (x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$.

Задача 8.2. Да се докаже, че ако един крайнопороден пръстен е поле, той е крайно поле.

Задача 8.3. Нека k е поле, A и B са крайнопородени k-алгебри и $A \xrightarrow{\varphi} B$ е хомоморфизъм на k-алгебри. Да се докаже, че ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал на B, то пълният му праобраз $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал на A и полето $B/\mathfrak{M}$ е крайно разширение на полето A/M.

Задача 8.4. Нека k е поле и M е максимален идеал в пръстена от полиномите на n променливи $k[x_1,\dots,x_n]$ с коефициенти от k. Да се докаже, че съществуват полиноми $f_1,\dots,f_n \in k[x_1,\dots,x_n]$, такива че:

а) $M = (f_1,\dots,f_n)$;

б) f_i е полином на x_i със старши коефициент 1 и коефициенти в пръстена $k[x_1,\dots,x_{i-1}]$, $i = 1,\dots,n$;

в) $(f_1,\dots,f_i)$ е прост идеал в $k[x_1,\dots,x_n]$, $i = 1,\dots,n$.

Задача 8.5 (Е. Ньотер). Нека k е поле, A е крайнопородена k-алгебра и G е крайна група от автоморфизми на A. Да се докаже, че пръстенът от инварианти

$$A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \ \ \forall g \in G\}$$

е крайнопородена k-алгебра. Сравнете със задача 7.19.

Задача 8.6. Нека k е поле и f е неконстантен полином в пръстена от полиномите на n променливи $k[x_1,\dots,x_n]$ с коефициенти от k. Да се докаже, че :

а) ако e е достатъчно голямо естествено число (напр. $e > \deg f$), то

$$f(y_1 + x_n^e, y_2 + x_n^{e^2}, \dots, y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}, x_n) \in k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$$

е полином на x_n със старши коефициент $a \in k$, $a \neq 0$;

б) ако k е безкрайно поле, то съществуват елементи $a_1, \dots, a_{n-1} \in k$ такива че

$$f(y_1 + a_1 x_n, y_2 + a_2 x_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n) \in k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$$

е полином на x_n със старши коефициент $a \in k$, $a \neq 0$.

Задача 8.7. Нека k е поле и f е неконстантен полином в пръстена $A = k[x_1, \dots, x_n]$ от полиномите на n променливи с коефициенти от k. Да се докаже, че съществуват елементи $y_1, \dots, y_{n-1} \in A$, такива че A е крайнопороден модул над пръстена $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$.

Задача 8.8 (лема на Е. Ньотер за нормализацията). Нека k е поле и A е крайнопородена k-алгебра. Да се докаже, че съществува алгебрически независимо над k множество елементи $\{y_1, \dots, y_r\} \subset A$, такова че A е крайнопороден модул над полиномиалния пръстен $k[y_1, \dots, y_r]$.

Допълнение. Ако A се поражда над k от елементите $a_1, \dots, a_n$ и k е безкрайно поле, то елементите $y_1, \dots, y_r$ могат да се изберат от линейната обвивка на елементите $a_1, \dots, a_n$.

Задача 8.9. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени. Да се докаже, че:

а) ако A е поле и B е област, то B е поле;

б) ако B е поле, то A също е поле.

Задача 8.10. Докажете теорема 8.6, като използвате лемата за нормализацията (задача 8.8).

Задача 8.11. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и Q е прост идеал в B. Да се докаже, че Q е максимален идеал в B тогава и само тогава, когато $P = Q \cap A$ е максимален идеал в A.

Определение. Нека $A \subseteq B$ е разширение на пръстени. Казваме, че *простият идеал Q на B лежи над простия идеал P на A,* когато $P = Q \cap A$.

Задача 8.12. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени. Да се докаже, че за всеки максимален идеал M в A съществува максимален идеал $\mathfrak{M}$ в B, който лежи над M.

Задача 8.13. Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и P е прост идеал в A. Да се докаже, че:

а) съществува прост идеал Q в B, който лежи над P;

б) за всеки идеал Q' в B, такъв че $Q' \cap A \subseteq P$, съществува прост идеал Q в B, такъв че Q лежи над P и $Q' \subseteq Q$.

Задача 8.14 (теорема за повдигането). Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$ са прости идеали в A. Да се докаже, че съществуват прости идеали $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_r$ в B, такива че Q_i лежи над P_i, $i = 0,1,\ldots,r$.

Задача 8.15 (теорема за несравнимостта). Нека $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени и Q и Q' са прости идеали в B, които лежат над простия идеал P в A. Да се докаже, че ако $Q' \subseteq Q$, то $Q' = Q$.

Следователно различните прости идеали на B, които лежат над простия идеал P в A, са несравними като множества (между тях няма включвания).

Определение (размерност на Крул). Нека A е пръстен. Казваме, че простите идеали $P_0, P_1, \ldots, P_r$ в A образуват *верига с дължина* r, когато $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$. *Размерността на Крул* на пръстена A е точната горна граница на дължините на всички вериги от прости идеали в A. Размерността на Крул на пръстена A се означава с $\dim A$.

Задача 8.16. Да се докаже, че ако $A \subseteq B$ е цяло разширение на пръстени, то $\dim A = \dim B$.

Задача 8.17. Да се докаже, че ако B е факторпръстен на пръстена A, то $\dim B \leq \dim A$.

Задача 8.18. Нека k е поле и f е неконстантен полином в полиномиалния пръстен $A = k[x_1,\ldots,x_n]$. Да се докаже, че $\dim(A/(f)) \leq \dim k[x_1,\ldots,x_{n-1}]$.

Задача 8.19. Нека k е поле и $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът на полиномите на n променливи с коефициенти от k. Да се докаже, че $\dim A = n$.

Задача 8.20. Нека k е поле и M е максимален идеал в полиномиалния пръстен $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Да се докаже, че $\dim(A_M) = n$.

Задача 8.21. Нека k е поле. Да се докаже, че ако областта A е крайнопородена k-алгебра, то размерността на Крул на A е равна на степента на трансцендентност на полето от частни на A над полето k.

§ 9. Теорема на Хилберт за нулите – геометричен вариант

Ще напомним, че ако I е идеал в пръстена A, под радикал на I разбираме идеала $r(I)=\{x\in A\,|\,\exists n=n(x):\ x^n\in I\}$. Имаме $I\subseteq r(I)$ и $r(I)$ съвпада със сечението на всички прости идеали на A, съдържащи I (твърдение 2.6).

Нека B е област и $0\neq f\in B$. Множеството $S=\{f^n\,|\,n\geq 0\}$ е мултипликативно затворено. Да означим $S^{-1}B=B\left[\frac{1}{f}\right]$ (вижте § 4 и по-специално, пример 2). Елементите на пръстена $B\left[\frac{1}{f}\right]$ са "дроби" от вида $b/f^n, b\in B$. Когато B е област, изображението $\varepsilon:B\to B\left[\frac{1}{f}\right]$, $\varepsilon(b)=b/1$, е влагане и освен това елементът $\varepsilon(f)$ е обратим в пръстена $B\left[\frac{1}{f}\right]$.

***

Нека k е поле, $A=k[x_1,\dots,x_n]$ е алгебрата от полиномите на n променливи с коефициенти от k и $I\trianglelefteq A$. В линейното пространство k^n разглеждаме множеството

$$V=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in k^n\,|\,g(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0\ \ \forall g\in I\}.$$

Множеството V се нарича *алгебрично многообразие в* k^n*, определено от идеала* I. Казваме, че полиномите от I се анулират върху V. Ясно е, че ако полиномите от коя да е система образуващи на I се анулират върху V, то и всички полиноми от I се анулират върху V.

Примери. 0. Ако $I=(0)$, то $V=k^n$. Ако пък $I=(x_1,\dots,x_n)$, то $V=\{0\}$.

1. Нека в равнината е фиксирана правоъгълна координатна система и $A = \mathbb{R}[x, y]$.

а) Ако $I = (y - x)$, многообразието V е права линия (ъглополовящата на първи и трети квадрант).

Ако е дадено уравнението на произволна права в равнината, посочете идеал I, задаващ тази права.

б) Ако $I = (x^2 + y^2 - 1)$, многообразието V съвпада с единичната окръжност.

Ако е дадено уравнението на произволна крива от втора степен в равнината, посочете идеал I, задаващ тази крива.

в) Ако $f(x)$ е произволен полином с реални коефициенти и $I = (y - f(x))$, многообразието V съвпада с графиката на полинома $f(x)$.

2. Нека k е алгебрически затворено поле, $A = k[x_1, \dots, x_n]$ и M е максимален идеал на A. Тогава многообразието V, определено от M, е едноточково (следва от задача 8.1, б)).

И така, по определение полиномите от идеала I се анулират върху алгебричното многообразие V, определено от I. В общия случай може да има и други полиноми от A, които се анулират върху V. Да означим

$$I(V) = \{ h \in A \mid h(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \ \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V \}.$$

Директно се проверява, че $I(V) \trianglelefteq A$. Идеалът $I(V)$ се нарича *идеал на многообразието* V. Очевидно $I \subseteq I(V)$. Нещо повече, $r(I) \subseteq I(V)$.

Теорема 9.1 (теорема на Хилберт за нулите – геометричен вариант). *Ако полето* k *е алгебрически затворено, в сила е равенството* $I(V) = r(I)$.

Доказателство. Трябва да докажем само включването $I(V) \subseteq r(I)$. За тази цел ще докажем, че ако един полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$ не принадлежи на $r(I)$, то f не принадлежи и на $I(V)$.

И така, нека $f \notin r(I)$. Тогава съществува прост идеал P на A, такъв че $I \subseteq P$ и $f \notin P$. Факторпръстенът A/P е област и нека $\pi : A \to A / P = B$ е естественият хомоморфизъм. Тъй като $f \notin P$, то $\bar{f} = \pi(f) \neq 0$.

Да означим $C = B\left[\frac{1}{\bar{f}}\right]$ и нека $\varepsilon : B \to C$ е естественото влагане на B в C ($\varepsilon(b) = b/1$). В пръстена C елементът $\varepsilon(\bar{f})$ е обратим.

Нека M е максимален идеал на C и $\pi_1 : C \to C/M$ е естественият хомоморфизъм. Понеже $\varepsilon(\bar{f})$ е обратим елемент, то $\varepsilon(\bar{f}) \notin M$ и тогава $\pi_1\varepsilon(\bar{f}) \neq 0$, т.е. $\pi_1\varepsilon\pi(f) \neq 0$.

Тъй като A е крайнопородена k-алгебра, то B и C също са крайнопородени k-алгебри. Сега от алгебричния вариант на теоремата на Хилберт за нулите (следствие 8.7) имаме $C/M = k$.

Да означим с φ композицията на хомоморфизмите π, ε и π_1, т.е. $\varphi = \pi_1\varepsilon\pi$:

$$A \xrightarrow{\pi} A/P = B \xrightarrow{\varepsilon} B\left[\frac{1}{\bar{f}}\right] = C \xrightarrow{\pi_1} C/M = k.$$

Както последователно проследихме по-горе, при хомоморфизма $\varphi : A = k[x_1, \dots, x_n] \to k$ е изпълнено $\varphi(f) = \pi_1\varepsilon\pi(f) \neq 0$.

Да означим $\varphi(x_i) = \lambda_i \in k$ $(i = 1, \dots, n)$. Тъй като φ е хомоморфизъм, ако $g = g(x_1, \dots, x_n)$ е произволен полином от A, то $\varphi(g) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Накрая, нека g е произволен полином от идеала I. Тъй като $I \subseteq P$, то $\pi(g) = 0$ и тогава още повече $\varphi(g) = \pi_1\varepsilon\pi(g) = 0$. Това означава, че $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. Така n-орката $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$ анулира всички полиноми от I, което пък означава, че $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V$.

От друга страна, видяхме, че $\varphi(f) \neq 0$, т.е. $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$. Това от своя страна означава, че $f \notin I(V)$, което искахме да докажем.

Задачи

Задача 9.1. Нека I е главният идеал в пръстена $\mathbb{R}[x]$, породен от полинома $x(x^2+1)$ и V е алгебричното многообразие, определено от I. Да се докаже, че $I(V) \neq r(I)$.

Задача 9.2. Нека k е поле и $A = k[x_1, \dots, x_n]$ е пръстенът от полиномите на n променливи с коефициенти от k. Да се докаже, че за всеки собствен идеал I на A съществуват крайно разширение E на k и елементи $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$, такива че $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ за всеки полином f от I.

Определение (пръстен на Джекобсън). Пръстенът A се нарича *пръстен на Джекобсън*, ако всеки прост идеал в A е сечение на максимални идеали.

Задача 9.3. Да се докаже, че ако k е поле, полиномиалният пръстен $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ е пръстен на Джекобсън.

Задача 9.4. Да се докаже, че за пръстена A следните условия са еквивалентни:

а) A е пръстен на Джекобсън;

б) A/I е пръстен на Джекобсън за всеки идеал I в A;

в) $\mathfrak{R}(A/I) = \mathfrak{N}(A/I)$ за всеки идеал I в A;

г) $\mathfrak{R}(A/P) = (0)$ за всеки прост идеал P в A.

Задача 9.5. Нека A е крайнопородена алгебра над поле k. Да се докаже, че A е пръстен на Джекобсън. Следователно $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ за всяка крайнопородена алгебра A над поле k.

Задача 9.6. Нека A е област. Да се докаже, че:

а) ако $\mathfrak{R}(A) = (0)$ и $A[f^{-1}]$ е поле за някой елемент $0 \neq f \in A$, то A е поле;

б) ако $\mathfrak{R}(A) \neq (0)$, то съществува прост идеал P в A, такъв че A/P не е поле, а $(A/P)[f^{-1}]$ е поле за някой елемент $0 \neq f \in A/P$.

Задача 9.7 Да се докаже, че за пръстена A следните условия са еквивалентни:

а) A е пръстен на Джекобсън;

б) ако $(A/P)[f^{-1}]$ е поле за някой прост идеал P в A и за някой елемент $0 \neq f \in A/P$, то A/P е поле.

Задача 9.8. Нека A е област. Да се докаже, че за всеки ненулев полином f в полиномиалния пръстен $A[x]$ пръстенът $A[x][f^{-1}]$ не е поле. Сравнете със задача 2.4.

Задача 9.9. Нека A е област с поле от частни K и нека областта B е разширение на A, като $B = A[b]$ за някой елемент $b \in B$. Да предположим, че съществува елемент $0 \neq f \in B$, такъв че $B[f^{-1}]$ е поле. Да се докаже, че:

а) K е подполе на $B[f^{-1}]$, b е алгебричен над K и $B[f^{-1}] = K[b]$;

б) съществува елемент $0 \neq s \in A$, такъв че $A[s^{-1}]$ е поле;

в) ако $\mathfrak{N}(A) = (0)$, то A и B са полета, като B е крайно разширение на A.

Задача 9.10. Нека A е пръстен на Джекобсън. Да се докаже, че:

а) полиномиалният пръстен $A[x]$ е пръстен на Джекобсън;

б) ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в $A[x]$, то $M = \mathfrak{M} \cap A$ е максимален идеал в A и полето $A[x] / \mathfrak{M}$ е крайно разширение на полето A/M.

Задача 9.11. Нека A е пръстен на Джекобсън и B е крайнопородена A-алгебра. Да се докаже, че:

а) B е пръстен на Джекобсън;

б) ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в B, то $M = \mathfrak{M} \cap A$ е максимален идеал в A и полето $B / \mathfrak{M}$ е крайно разширение на полето A/M.

Задача 9.12. Нека A е пръстен на Джекобсън, B и C са крайнопородени A-алгебри и $B \xrightarrow{\varphi} C$ е хомоморфизъм на A-алгебри. Да се докаже, че ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в C, то $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в B и полето $C / \mathfrak{M}$ е крайно разширение на полето B/M. Сравнете със задача 8.3.

§ 10. Примарно разлагане в ньотерови пръстени

Нека $n > 1$ е естествено число и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n в произведение на прости числа. Тогава за главния идеал на $\mathbb{Z}$, породен от n, е в сила равенството $(n) = (p_1^{\alpha_1}) \dots (p_k^{\alpha_k})$. Тъй като идеалите $p_i^{\alpha_i}$ са два по два взаимно прости, то (твърдение 3.1) $(n) = (p_1^{\alpha_1}) \cap \dots \cap (p_k^{\alpha_k})$. Числата $p_i^{\alpha_i}$ (както и идеалите, породени от тях) се наричат *примарни*. Така основната теорема на аритметиката в пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ означава, че всеки собствен идеал на $\mathbb{Z}$ се представя (еднозначно) като сечение на примарни идеали. В този параграф ще видим, че аналогичен факт е в сила за класа на ньотеровите пръстени.

Определение. Ще казваме, че един идеал Q на пръстена A е *примарен*, ако $Q \neq A$ и от $xy \in Q$ следва $x \in Q$ или $y^n \in Q$ за някое естествено число n. Еквивалентно: $xy \in Q \Rightarrow x \in Q$ или $y \in r(Q)$.

Ясно е, че всеки прост идеал е примарен. В пръстена $\mathbb{Z}$ примарните идеали са точно идеалите от вида (p^n), където p е просто число и $n \in \mathbb{N}$; при това $r(p^n) = (p)$. Аналогична е ситуацията и в пръстена $k[x]$ (k-поле).

Твърдение 10.1. *Нека Q е примарен идеал в пръстена A. Тогава идеалът $P = r(Q)$ е прост. (По-точно, P е единствен минимален елемент в множеството от всички прости идеали на A, които съдържат Q.)*

Доказателство. Според твърдение 2.6 идеалът $P = r(Q)$ е сечението на всички прости идеали на A, съдържащи Q. Сега остава само да проверим, че $r(Q)$ е прост идеал.

Нека $xy \in r(Q)$. Тогава $(xy)^m = x^m y^m \in Q$ за някое $m \geq 1$. Тъй като Q е примарен идеал, то или $x^m \in Q$, или $y^{mn} \in Q$ за някое $n \geq 1$, т. е. или $x \in r(Q)$, или $y \in r(Q)$. Следователно $r(Q)$ е прост идеал.

Определение. Ако Q е примарен идеал и $P = r(Q)$, идеалът Q се нарича *P-примарен*.

Лема 10.2. *Ако идеалите $Q_1, \dots, Q_n$ са P-примарни, то идеалът $Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ също е P-примарен.*

Доказателство. Първо имаме

$$r(Q) = r\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} r(Q_i) = P.$$

Остава да проверим, че Q е примарен идеал. Нека $xy \in Q$, но $x \notin Q$. Тогава съществува i $(1 \leq i \leq n)$, такова че $xy \in Q_i$, но $x \notin Q_i$. Тъй като Q_i е примарен идеал, то $y \in r(Q_i) = P = r(Q)$. Следователно Q е примарен идеал.

Определение. Ще казваме, че един идеал I на пръстена A е *разложим* (или *притежава примарно разлагане*), ако I може да се представи като сечение на краен брой примарни идеали.

Ако $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ е едно такова разлагане, ще казваме, че то е *минимално*, ако:

(I) идеалите $P_i = r(Q_i)$ са два по два различни;

(II) $Q_j \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} Q_i$ $(1 \leq j \leq n)$.

Ползвайки се от лема 10.2, можем да групираме членовете на произволно примарно разлагане така, че новото разлагане да удовлетворява условието (I); премахвайки след това излишните идеали, ще получим разлагане, за което е изпълнено и (II). Така *всеки разложим идеал притежава минимално примарно разлагане.*

Определение. Нека $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ е минимално примарно разлагане на идеала I. Простите идеали $P_i = r(Q_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ ще наричаме *асоциирани* с идеала I.

Твърдение 10.3. *Нека I е разложим идеал и P е произволен прост идеал, съдържащ I. Тогава P съдържа минимален прост идеал, асоцииран с I.*

В частност, съществуват, и то краен брой, минимални прости идеали, съдържащи I, и това са точно минималните прости идеали измежду асоциираните с I.

Доказателство. Нека $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ е минимално примарно разлагане на идеала I и $P_i = r(Q_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. По условие $P \supseteq I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Тогава

$r(P) \supseteq r(I) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} r(Q_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} P_i$. Но $P = r(P)$, така че $P \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} P_i$. Сега от твърдение 1.3, б) следва, че $P \supseteq P_i$ за някое i, а значи P съдържа и минимален прост идеал, асоцииран с I.

Ще отбележим без доказателство, че ако I е разложим идеал, следните множества се определят еднозначно от I (т. е. не зависят от вида на минималното примарно разлагане):

(I) множеството от всички прости идеали, асоциирани с I;

(II) множеството от всички примарни идеали, съответстващи на минималните прости идеали, асоциирани с I (вижте задачи 10.8 и 10.10).

* * *

Сега ще видим, че в ньотеров пръстен всеки идеал притежава примарно разлагане.

Определение. За един идеал I на пръстена A ще казваме, че е *неприводим*, ако от $I = I_1 \cap I_2$ $(I_1, I_2 \trianglelefteq A)$ следва $I = I_1$ или $I = I_2$. Еквивалентно: $I = \bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k \Rightarrow I = I_k$ за някое k. В противен случай ще казваме, че I е приводим идеал (т. е. I е приводим идеал, ако I може да се представи като сечение на два идеала, които строго го съдържат).

Лема 10.4. *В ньотеров пръстен A всеки идеал е сечение на краен брой неприводими идеали.*

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава множеството Σ от идеалите на A, за които лемата не е вярна, е непразно и следователно притежава максимален елемент I. Тъй като самият I е приводим идеал, то $I = I_1 \cap I_2$ и $I \subset I_1$, $I \subset I_2$. Тогава $I_1, I_2 \notin \Sigma$. Следователно всеки от идеалите I_1 и I_2 е сечение на краен брой неприводими идеали, а тогава същото е вярно и за I, което е противоречие.

Лема 10.5. *В ньотеров пръстен A всеки неприводим идеал е примарен.*

Доказателство. Преминавайки към факторпръстен, лесно се вижда, че е достатъчно да докажем следното твърдение: ако нулевият идеал на A е неприводим, той е примарен.

И така, нека (0) е неприводим идеал и нека $xy = 0$, като $x \neq 0$. Ще докажем, че $y^n = 0$ за някое естествено число n.

Да разгледаме веригата от идеали $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(y^2) \subseteq \cdots$. Тъй като A е ньотеров пръстен, тази верига се стабилизира, т. е. $\mathrm{Ann}(y^n) = \mathrm{Ann}(y^{n+1}) = \cdots$ за някое естествено число n.

Ще докажем, че $(x) \cap (y^n) = (0)$. Действително, нека $a \in (x) \cap (y^n)$. От $a \in (x)$ следва $a = bx$ $(b \in A)$ и тогава $ay = bxy = 0$. От $a \in (y^n)$ следва $a = cy^n$ $(c \in A)$ и сега от $ay = 0$ получаваме $cy^{n+1} = 0$. Следователно $c \in \mathrm{Ann}(y^{n+1}) = \mathrm{Ann}(y^n)$. Но тогава $a = cy^n = 0$. Следователно $(x) \cap (y^n) = (0)$.

Накрая, от това че (0) е неприводим идеал и $(0) = (x) \cap (y^n)$, $x \neq 0$ следва $y^n = 0$, което искахме да докажем. Следователно (0) е примарен идеал.

Сега от леми 10.4 и 10.5 непосредствено получаваме

Теорема 10.6. *В ньотеров пръстен всеки идеал притежава примарно разлагане.*

Следствие 10.7. *В ньотеров пръстен има краен брой минимални прости идеали. При това всеки прост идеал съдържа минимален прост идеал.*

Доказателство. Тъй като нулевият идеал е разложим, можем да приложим за него твърдение 10.3.

Задачи

Задача 10.1. Нека $C[0,1]$ е пръстенът от всички реални непрекъснати функции, дефинирани в интервала $[0,1]$. Да се докаже, че нулевият идеал на пръстена $C[0,1]$ не притежава примарно разлагане (т. е. не може да се представи като сечение на краен брой примарни идеали).

Задача 10.2. Нека A е пръстен. Да се докаже, че нулевият идеал (0) е примарен тогава и само тогава, когато всеки делител на 0 в пръстена A е нилпотентен елемент в A.

Задача 10.3. Нека $\varphi : A \to B$ е хомоморфизъм на пръстени и Q' е примарен идеал идеал в B. Тогава $Q = \varphi^{-1}(Q')$ е примарен идеал в A.

Задача 10.4. Да се докаже, че ако M е максимален идеал в пръстена A, то идеалът M^k е примарен за всяко $k \geq 1$.

Задача 10.5. Нека P е прост идеал в пръстена A и нека $A \xrightarrow{\varphi} A_P$ е хомоморфизмът на локализация спрямо спрямо P. Да се докаже, че идеалът $P^{(k)} = \varphi^{-1}(P^k A_P)$ е примарен в пръстена A за всяко $k \geq 1$. Примарният идеал $P^{(k)}$ се нарича *символична k-та степен* на P.

Задача 10.6. Нека $(0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в пръстена A и нека $P_i = r(Q_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Да се докаже, че:

а) множеството от всички делители на 0 в пръстена A съвпада с обединението $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ на простите идеали P_i $(i = 1, \dots, n)$;

б) ако идеалът I в A състои от делители на 0, то $I \subseteq P_i$ за някое $1 \leq i \leq n$.

в) ако M е максимален идеал в A, състоящ се от делители на 0, то $M = P_i$ за някое $1 \leq i \leq n$.

Задача 10.7. Нека S е мултипликативно затворено подмножество на пръстена A и $\varphi : A \to S^{-1}A$ е хомоморфизмът на локализация спрямо S. Да се докаже, че:

а) ако Q е примарен идеал в A, такъв че $Q \cap S = \varnothing$, то $S^{-1}Q$ е примарен идеал в $S^{-1}A$ и $\varphi^{-1}(S^{-1}Q) = Q$;

б) ако $(0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в пръстена A и $Q_i \cap S = \varnothing$ за $i \leq m$, а $Q_i \cap S \neq \varnothing$ за $i > m$, то $(0) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} S^{-1}Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в пръстена $S^{-1}A$.

Задача 10.8. а) Нека A е пръстен и нека

$$(0) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = \bigcap_{j=1}^{m} Q'_j$$

са две минимални примарни разлагания на нулевия идеал в A. Тогава множеството $\{P_1 = r(Q_1), \dots, P_n = r(Q_n)\}$ съвпада с множеството $\{P'_1 = r(Q'_1), \dots, P'_m = r(Q'_m)\}$.

б) Нека I е разложим идеал в пръстена A. Да се докаже, че множеството от всички прости идеали, асоциирани с I, не зависи от вида на примарното разлагане на I.

Задача 10.9. Нека A е ньотеров пръстен и нека S е мултипликативно затвореното множество от всички елементи на A, които не са делители на 0. Да се докаже, че:

а) пръстенът $S^{-1}A$ е полулокален;

б) ако $\mathfrak{N}(A) = (0)$, пръстенът $S^{-1}A$ е изоморфен на крайна директна сума на полета.

Задача 10.10. Нека $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ е минимално примарно разлагане на идеала I в пръстена A и нека $P_1 = r(Q_1), \ldots, P_n = r(Q_n)$. Да означим с $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{P_i}$ хомоморфизма на локализация спрямо простия идеал P_i, $1 \le i \le n$. Да се докаже, че ако P_i е минимален прост идеал, асоцииран с идеала I, то $Q_i = \varphi_i^{-1}(IA_{P_i})$. Следователно, ако I е разложим идеал в A, множеството на примарните идеали, съответстващи на минималните прости идеали, асоциирани с идеала I, се определя еднозначно от I.

Задача 10.11. Нека k е поле и нека $k[x, y]$ е пръстенът на полиноми на две променливи с коефициенти в k. Да се докаже, че:

а) идеалите (x), (x^2, y) и (x^2, xy, y^2) са примарни;

б) $(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y) = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$.

Сравнете със Задача 10.10.

§ 11. Артинови пръстени

Ще напомним, че един пръстен A е *артинов*, ако удовлетворява следващите две еквивалентни условия:

(I) всяка намаляваща верига от идеали на A се стабилизира;

(II) всяко непразно множество от идеали на A има минимален елемент.

Твърдение 11.1. *В артинов пръстен A всеки прост идеал е максимален. Еквивалентно: всяка артинова област е поле.*

Доказателство. Нека P е прост идеал на A. Тогава пръстенът $B = A/P$ е артинова област. Нека $0 \neq x \in B$. Веригата от идеали $(x) \supseteq (x^2) \supseteq \cdots$ се стабилизира и значи за някое n имаме $(x^n) = (x^{n+1})$. Тогава $x^n = x^{n+1}y$ за някое $y \in B$. Тъй като B е област, можем да съкратим на $x^n \neq 0$ и получаваме $xy = 1$. Така всеки ненулев елемент на B е обратим и значи B е поле. Следователно P е максимален идеал.

Следствие 11.2. *В артинов пръстен нилрадикалът съвпада с радикала на Джекобсън.*

Твърдение 11.3. *В артинов пръстен A нилрадикалът $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ $(= \mathfrak{R}(A))$ е нилпотентен.*

Доказателство. Тъй като веригата от идеали $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}^2 \supseteq \cdots$ се стабилизира, за някое k имаме $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \cdots$. Ще докажем, че $\mathfrak{N}^k = (0)$.

Да допуснем противното и да означим $I = \mathfrak{N}^k \neq (0)$. Нека Σ е множеството от всички идеали J на A, за които $IJ \neq (0)$. Тъй като $(0) \neq I = I^2 = \cdots$, то $I \in \Sigma$. Следователно Σ е непразно множество и нека L е минимален елемент на Σ. Съществува елемент $x \in L$, такъв че $xI \neq (0)$, така че $(x) \in \Sigma$. Тъй като $(x) \subseteq L$, от минималността на L следва $(x) = L$. Освен това $(xI)I = xI^2 = xI \neq (0)$, така че и $xI \in \Sigma$. Но $xI \subseteq (x)$ и отново от минималността на $(x) = L$ имаме $xI = (x)$. Тогава $x = xa$ за някое $a \in I$. Умножавайки това равенство последователно с a, получаваме $x = xa = xa^2 = \cdots$. Но $a \in I = \mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{N}$ и значи a е нилпотентен елемент. Следователно $x = 0$, което е противоречие.

Твърдение 11.4. *В артинов пръстен A има краен брой максимални идеали.*

Доказателство. Нека Σ е множеството от всевъзможните сечения на краен брой максимални идеали на A и нека $M_1 \cap \cdots \cap M_n$ е минимален елемент на Σ. Тогава за произволен максимален идеал M е в сила $M \cap M_1 \cap \cdots \cap M_n = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ и значи $M \supseteq M_1 \cap \cdots \cap M_n$. Сега от твърдение 1.3, б) следва, че $M \supseteq M_i$ за някое i. Тъй като и M_i е максимален идеал, то $M = M_i$. Следователно $M_1, \ldots, M_n$ са всички максимални идеали на A.

* * *

Нека A е (ненулев) пръстен. Под *верига* от прости идеали на A ще разбираме всяка крайна строго растяща редица от прости идеали:

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n.$$

Числото n ще наричаме *дължина* на тази верига. Под *размерност на Крул* на пръстена A ($\dim A$) ще разбираме точната горна граница на дължините на всевъзможните вериги от прости идеали на A. Така $\dim A$ е цяло неотрицателно число или $+\infty$.

Примери. 1. Ако k е поле, то $\dim k = 0$.

2. Ако A е артинов пръстен, то $\dim A = 0$ (твърдение 11.1).

3. $\dim \mathbb{Z} = 1$. По-общо, всяка област на главни идеали (която не е поле) има размерност 1 (твърдение 1.2).

4. Нека k е поле и $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Веригата от прости идеали $(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, \ldots, x_n)$ показва, че $\dim A \geq n$ (в действителност, размерността на A е точно n — вижте задача 8.19).

Теорема 11.5. *Класът на артиновите пръстени съвпада с класа на нулмерните ньотерови пръстени.*

Доказателство. Нека първо A е артинов пръстен. Тогава $\dim A = 0$ (твърдение 11.1) и остава да покажем, че A е ньотеров пръстен. Нека $M_1, \ldots, M_n$ са всички максимални идеали на A (твърдение 11.4). Тогава $\mathfrak{N} = \mathfrak{R} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$ и $\mathfrak{N}^k = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i\right)^k = (0)$ за някое k (твърдение 11.3). Но $\prod\limits_{i=1}^{n} M_i^k \subseteq \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i\right)^k$, така че $\prod\limits_{i=1}^{n} M_i^k = (0)$. Сега от следствие 6.9 следва, че A е ньотеров пръстен.

Нека сега A е нулмерен ньотеров пръстен. Според следствие 10.7 A притежава краен брой минимални прости идеали $M_1, \ldots, M_n$ и всеки прост идеал съдържа минимален. Тогава $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. От следствие 7.3 имаме $\mathfrak{N}^k = \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k = (0)$ за някое k и както по-горе заключаваме, че $\prod_{i=1}^{n} M_i^k = (0)$. Тъй като $\dim A = 0$, то простите идеали M_i са и максимални и отново от следствие 6.9 следва, че A е артинов пръстен.

* * *

Твърдение 11.6. *Нека M е максимален идеал на пръстена A и $k \in \mathbb{N}$. Тогава факторпръстенът A/M^k е локален с единствен максимален идеал M/M^k.*

Доказателство. Идеалът M/M^k е максимален и значи $M/M^k \supseteq \mathfrak{R}(A/M^k)$. От друга страна този идеал е нилпотентен и тогава $M/M^k \subseteq \mathfrak{N}(A/M^k) \subseteq \mathfrak{R}(A/M^k)$. Така $M/M^k = \mathfrak{R}(A/M^k)$, откъдето следва, че M/M^k е единствен максимален идеал на A/M^k.

Теорема 11.7. *Всеки артинов пръстен е директна сума на краен брой артинови локални пръстени.*

Доказателство. Ако A е локален пръстен, няма какво да се доказва. Нека не е локален и $M_1, \ldots, M_n$ $(n > 1)$ са всичките различни максимални идеали на A (твърдение 11.4). Както в доказателството на теорема 11.5 се убеждаваме, че $\prod_{i=1}^{n} M_i^k = (0)$ за някое k. При $i \neq j$ имаме $M_i + M_j = A$ (защото M_i и M_j са различни максимални идеали) и освен това $M_i = r(M_i^k)$. От твърдение 2.8 следва, че $M_i^k + M_j^k = A$. Сега от твърдение 3.1 имаме $\bigcap_{i=1}^{n} M_i^k = \prod_{i=1}^{n} M_i^k = (0)$.

Да разгледаме хомоморфизма $\varphi : A \to A/M_1^k \oplus \cdots \oplus A/M_n^k$, дефиниран чрез равенството $\varphi(x) = (x + M_1^k, \ldots, x + M_n^k)$. Имаме $\operatorname{Ker} \varphi = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^k = (0)$, т. е. φ е инективен хомоморфизъм. От китайската теорема за остатъците (теорема 3.2) следва, че φ е и сюрективен хомоморфизъм. Следователно φ е изоморфизъм, т. е. $A \cong A/M_1^k \oplus \cdots \oplus A/M_n^k$. При това пръстените A/M_i^k са артинови и (твърдение 11.6) локални.

Ще отбележим без доказателство, че представянето на един артинов пръстен като директна сума на краен брой артинови локални пръстени е еднозначно (вижте задача 11.2).

Нека A е артинов локален пръстен с единствен максимален идеал M. Тогава всеки елемент извън M е обратим (твърдение 1.6), а от друга страна, $M = \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ и $M^k = (0)$ за някое k. Следователно всеки елемент $x \in A$ или е нилпотентен (ако $x \in M$), или е обратим (ако $x \notin M$). (Пример за такъв пръстен е $\mathbb{Z}_{p^n}$ (p — просто число, $n \in \mathbb{N}$).) Ако освен това A е полупрост пръстен (т. е. $M = \mathfrak{R}(A) = (0)$), то A е поле.

Упражнение 11.8. *Да се докаже, че всеки полупрост артинов пръстен е директна сума на краен брой полета.*

Упътване. Използвайте горните бележки и теорема 11.7, като предварително докажете, че всяко директно събираемо в представянето на A като директна сума, също е полупрост пръстен.

Задачи

Задача 11.1. Нека $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ са всички максимални идеали в артиновия пръстен A. Да означим с $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{\mathfrak{M}_i}$ хомоморфизма на локализация спрямо $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, k$, и с φ изображението $A \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^{k} A_{\mathfrak{M}_i}$, зададено с формулата $\varphi(a) = (\varphi_1(a), \ldots, \varphi_k(a))$, $a \in A$. Да се докаже, че φ е изоморфизъм на пръстени.

Задача 11.2. Нека $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l$ са локални пръстени и нека

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k, \quad B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_l.$$

Да се докаже, че ако пръстените A и B са изоморфни, то $k = l$ и съществува пермутация $j_1, \ldots, j_k$ на числата $1, \ldots, k$, такава че $A_i \cong B_{j_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Задача 11.3. Да се докаже, че ако A е артинов пръстен, то

$$l(A^n) = nl(A).$$

Задача 11.4. Да се докаже, че ако A е ньотеров пръстен и P е минимален прост идеал в A, то A_P е локален артинов пръстен.

Задача 11.5. Нека A е пръстен. Да се докаже, че ако $A^n \xrightarrow{\varphi} A^m$ е инективен хомоморфизъм на A-модули, то $n \leq m$. Сравнете със Задача 6.3.

Задача 11.6. Нека $A \to B$ е сюрективен хомоморфизъм на пръстени и нека M е B-модул. Да се докаже, че $l_A(M) = l_B(M)$ (т. е. дължината на M като A-модул съвпада с дължината на M като B-модул). Следователно

$$l_A(M) = l_{A/\operatorname{Ann} M}(M).$$

Задача 11.7. Нека $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в A с поле от остатъци $F = A/\mathfrak{M}$. Да се докаже, че ако M е A-модул, такъв че $\mathfrak{M}M = (0)$, то $l_A(M) = \dim_F M$.

Задача 11.8. Да се докаже, че $M \neq 0$ е прост A-модул (т. е. (0) и M са единствените A-подмодули на M) точно когато съществува максимален идеал $\mathfrak{M}$ на A, такъв че $M \cong A/\mathfrak{M}$.

Задача 11.9. Да се докаже, че веригата

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = (0)$$

от подмодули на A-модула M е композиционен ред на M точно когато съществуват (не непременно различни) максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, такива че $M_{i-1}/M_i \cong A/\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Задача 11.10. Нека M е A-модул с крайна дължина. Тогава съществуват (не непременно различни) максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, такива че $\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n M = (0)$.

Задача 11.11. Да се докаже, че за един A-модул M следните условия са еквивалентни:

а) M е модул с крайна дължина;

б) M е крайнопороден A-модул и $A/\operatorname{Ann} M$ е артинов пръстен.

Задача 11.12. Нека M е A-модул и S е мултипликативно затворено множество в A. Да се докаже, че $l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq l_A(M)$.

Задача 11.13. Нека M е A-модул с крайна дължина. Да се докаже, че:

а) $l_A(M) = \sum l_{A_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}})$, където сумирането се извършва по всички максимални идеали на A;

б) $l_A(M) = \sum \dim_{A/\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^i M)$, където сумирането се извършва по всички максимални идеали на A и всички естествени числа i.

Забележка: От Задача 11.11 следва, че само краен брой от събираемите в горните суми са различни от 0.

Задача 11.14. Нека A е крайномерна алгебра над поле k, с максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Да означим с F_i полето $A/\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Нека M е крайнопороден A-модул. Тогава:

а) M е крайномерно линейно пространство над k;

б) $l_A(M) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\dim_k M_{\mathfrak{M}_i}}{[F_i : k]}$;

в) $l_A(M) = \dim_k M$, когато k е алгебрично затворено поле.

пр
ри
съ

P_i
еди
инд

x

$a \in$

иде

об
про

тог
зна

два

Упътвания и решения на задачите

§ 1. Прости и максимални идеали

1.1. Ако I не е прост идеал, то съществуват $a_1, a_2 \notin I$, такива че $a_1a_2 \in I$. Нека $I_1 = I + (a_1)$, $I_2 = I + (a_2)$; тогава $I_1I_2 \subseteq I$. Обратно, ако $I \subset I_1$, $I \subset I_2$ и $I_1I_2 \subseteq I$, нека $a_1 \in I_1 \setminus I$ и $a_2 \in I_2 \setminus I$. Тогава $a_1 \notin I$, $a_2 \notin I$, а $a_1a_2 \in I$.

1.2. Нека Σ е множеството от всички прости идеали на пръстена A с наредбата включване на идеали (Σ не е празното множество, защото всеки пръстен притежава максимални, а значи и прости идеали). Докажете, че ако $\{P_\alpha\}$ е верига в Σ, идеалът $P = \bigcap\limits_{\alpha} P_\alpha$ е прост. След това приложете лемата на Цорн за съществуване на минимални елементи в Σ.

1.3. Докажете, че $A[x]/P[x] \cong (A/P)[x]$. Когато A/P е област, пръстенът $(A/P)[x]$ също е област (но не е поле).

1.4. Да предположим, че $I \not\subseteq P_i$, $i = 1, \dots, n$. Можем да предполагаме, че $P_i \not\subseteq P_j$, $i \neq j$. Когато $n = 2$, избираме $x \in I \setminus P_1$, $y \in I \setminus P_2$; тогава поне един от елементите x, y, $x + y$ не се съдържа в $P_1 \cup P_2$. Ако $n > 2$, използваме индукция и избираме $x \in I \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_{n-1})$. Тъй като P_n е прост идеал, то $IP_1 \ldots P_{n-1} \not\subseteq P_n$. Нека $y \in (IP_1 \ldots P_{n-1}) \setminus P_n$. Тогава или $x \notin P_1 \cup \ldots \cup P_n$ или $x + y \notin P_1 \cup \ldots \cup P_n$.

1.5. а) Главният идеал $P_a = (ax + y)$ е прост и се съдържа в I за всяко $a \in \mathbb{C}$, като $P_a \neq P_b$ за $a \neq b$;

б) Всеки полином $f \in I$ се дели на неразложим над $\mathbb{C}$ полином $f_j \in I$, защото идеалът I е прост;

в) Ако $I = (x, y) \subseteq P_j = (f_j)$ за някой полином f_j, то $f_j \neq 0$ ще бъде общ делител на полиномите x и y, т. е. f_j ще бъде константен полином, което противоречи на $P_j \subseteq I$.

1.6. Нека P е прост идеал на A и $B = A/P$. Ако $0 \neq x \in B$, то $x^n = x$ и тогава (тъй като B е област) $x^{n-1} = 1$. Оттук следва, че x е обратим елемент и значи B е поле, т. е. P е максимален идеал на A.

1.7. а) От $x^2 = x$ и $(x+1)^2 = x + 1$ следва, че $2x = 0$.

б) Следва от Задача 1.6.

в) В полето A/P от $x^2 = x$ следва $x = 0$ или $x = 1$, така че A/P има само два елемента.

1.8. Ако P е прост идеал в A, то областта A/P също е крайномерна алгебра над k; затова е достатъчно да се докаже, че ако A е област, то A е поле. Нека $0 \neq a \in A$ и нека $\varphi_a : A \to A$ е линейното изображение, зададено с $\varphi_a(x) = xa$, $x \in A$. Тогава $\operatorname{Ker}\varphi_a = \{0\}$, откъдето $\operatorname{Im}\varphi_a = A$; в частност, съществува $x \in A$, такъв че $xa = 1$.

1.9. Ако $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} \mathfrak{M}_i = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i$, то $\mathfrak{M}_{k+1} \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i \supseteq \mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_k$, откъдето следва, че $\mathfrak{M}_{k+1} \supseteq \mathfrak{M}_i$ за някое $1 \leq i \leq k$.

1.10. Използвайте Задача 1.9. Ако $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ са различни максимални идеали в A, то $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_k$ е строго намаляваща верига от линейни подпространства на A.

1.11. а) Ако P е прост идеал в A, то $\mathfrak{M}^n = (0) \subseteq P$, откъдето следва, че $\mathfrak{M} \subseteq P$;

б) Нека $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^n$; тогава $\overline{\mathfrak{M}}^n = (0)$.

1.12. а) Ако P е прост идеал в A, то $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n = (0) \subseteq P$, откъдето следва, че $\mathfrak{M}_i \subseteq P$ за някое $1 \leq i \leq n$.

б) Нека $\overline{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}_i/I$, $i = 1, \ldots, n$; тогава е в сила $\overline{\mathfrak{M}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{M}}_n = (0)$.

§ 2. Нилрадикал и радикал на Джекобсън

2.1. Проверете, че $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ (тъй като x е нилпотентен елемент, тази сума е крайна).

2.2. а) Ако $f^{-1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, с индукция по r покажете, че $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. Оттук изведете, че a_n е нилпотентен елемент и след това използвайте Задача 2.1

б) Използвайте, че сума на краен брой нилпотентни елементи също е нилпотентен елемент.

2.3. Първото равенство следва от Задача 2.2, б). За второто равенство използвайте Задача 2.2, а) и твърдение 2.3.

2.4. Следва от Задача 2.3.

2.5. Използвайте Задача 2.4 и индукция по n.

2.6. а) Нека $f = a_0(1 + xg)$, $g \in A[[x]]$. Тогава

$$f^{-1} = a_0^{-1}(1 - xg + (xg)^2 - (xg)^3 + \cdots).$$

б) Покажете, че a_0 е нилпотентен елемент и след това използвайте, че $f - a_0$ е нилпотентен и индукция по n.

в) Използвайте твърдение 2.3.

2.7. Тъй като всеки прост идеал в A е максимален идеал, сечението на всички прости идеали съвпада със сечението на всички максимални идеали.

2.8. Ако $Y \in M_n(A)$ и $YX = E_n$, то $\det Y \det X = 1$, т. е. $\det X$ е обратим елемент на A. Обратно, нека $\det X$ е обратим елемент на A и нека $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{ij}) \in M_n(A)$ е адюнгираната матрица на X: $\widetilde{x}_{ij} = \Delta_{ji}$, $1 \leq i,j \leq n$, където Δ_{ji} е адюнгираното количество на елемента x_{ij}. Тогава $X\widetilde{X} = \widetilde{X}X = (\det X)E_n$ и матрицата $Y = (\det X)^{-1}\widetilde{X}$ е обратна на матрицата X.

§ 3. Взаимно прости идеали. Китайска теорема за остатъците

3.1. Нека $I = I_k^{d_k} + I_l^{d_l}$, $1 \leq k \neq l \leq n$. Ако $I \neq A$, то съществува максимален идеал $\mathfrak{M}$ в A, такъв че $I_k^{d_k} \subseteq \mathfrak{M}$, $I_l^{d_l} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогава $I_k \subseteq \mathfrak{M}$, $I_l \subseteq \mathfrak{M}$, което противоречи на $I_k + I_l = A$.

3.2. а) Използвайте китайската теорема за остатъците, като вземете предвид, че идеалите $(p_1^{\alpha_1}), \ldots, (p_k^{\alpha_k})$ са два по два взаимно прости и

$$(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i}).$$

3.3. Използвайте китайската теорема за остатъците.

3.4. Приложете предната задача за идеалите (m) и (n) и използвайте факта, че $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$.

3.5. а) Тъй като $x = (p_1(x), \ldots, p_k(x))$ за всеки $x \in I$, то $I \subseteq \bigoplus_{i=1}^{k} I_i$. Обратно, за всеки $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \bigoplus_{i=1}^{k} I_i$ съществуват $y_i \in I$, такива че $x_i = p_i(y_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Нека $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_k = (0, 0, \ldots, 1)$ и нека $y = \sum_{i=1}^{k} e_i y_i \in I$. Тогава $p_i(y) = x_i$, $i = 1, \ldots, k$, откъдето $y = x$, т. е. $x \in I$. Следователно $I \supseteq \bigoplus_{i=1}^{k} I_i$, което заедно с вече доказаното обратно включване, влече $I = \bigoplus_{i=1}^{k} I_i$.

Нека $\varphi : A \to \bigoplus_{i=1}^{k} A_i/I_i$ е хомоморфизмът на пръстени, определен с формулата $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = (x_1 + I_1, \ldots, x_k + I_k)$. Тогава $\operatorname{Ker}\varphi = I$, откъдето $A/I \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A_i/I_i$. Подусловия б) и в) следват непосредствено от този изоморфизъм.

3.6. Замяната на A с A/I и на $\mathfrak{M}_i$ с $\mathfrak{M}_i/I$, $i=1,\dots,n$, свежда задачата до случая $I=(0)$. Тогава, както в Задача 1.12, се установява, че всеки прост идеал в A съвпада с някой от идеалите $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_n$. Тъй като $\mathfrak{R}(A)\subseteq\mathfrak{M}_i$, $i=1,\dots,n$, то $\mathfrak{R}(A)^n\subseteq\mathfrak{M}_1\dots\mathfrak{M}_n=(0)$.

3.7. Използвайте, че $\mathfrak{R}(A)=\mathfrak{M}_1\dots\mathfrak{M}_k$, където $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_k$ са всички максимални идеали на A. Тогава $\mathfrak{R}(A)^N=\mathfrak{M}_1^N\dots\mathfrak{M}_k^N=(0)$ за някое $N>0$ и резултатът следва от Задача 1.12.

3.8. а) $\Rightarrow$ б) Използвайте Задача 3.6.

б) $\Rightarrow$ в) Ако $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_k$ са максималните идеали на A, то $\mathfrak{M}_1^N\dots\mathfrak{M}_k^N=(0)$ за някое $N>0$. Приложете китайската теорема за остатъците към идеалите $\mathfrak{M}_1^N,\dots,\mathfrak{M}_k^N$, които са взаимно прости според Задача 3.1.

в) $\Rightarrow$ а) Използвайте даденото в Задача 3.5 описание на максималните идеали в пръстена $\bigoplus\limits_{i=1}^{k}A_i$.

3.9. Нека $\mathfrak{R}(A)=(0)$ и нека $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_m$ са максималните идеали на A. Тогава $\mathfrak{M}_1\cap\dots\cap\mathfrak{M}_m=(0)$, откъдето $A\cong\bigoplus\limits_{i=1}^{m}A/\mathfrak{M}_i$ според китайската теорема за остатъците. Тъй като $A/\mathfrak{M}_i$ е крайномерна k-алгебра, то $A/\mathfrak{M}_i$ е крайно разширение на полето k, $i=1,\dots,m$. Обратно, ако $A\cong\bigoplus\limits_{i=1}^{m}E_i$, където E_i са полета, то $\mathfrak{R}(A)\cong\bigoplus\limits_{i=1}^{m}\mathfrak{R}(E_i)=(0)$.

§ 4. Локализация

4.1. Нека P е максимален елемент на Σ (съществуването му следва от лемата на Цорн). Да допуснем, че P не е прост идеал и нека $a,b\notin P$, но $ab\in P$. Тогава $P+(a)\supset P\Rightarrow(P+(a))\cap S\neq\varnothing\Rightarrow\exists\ s\in(P+(a))\cap S$. Аналогично $\exists\ t\in(P+(b))\cap S$. Сега имаме $st\in S$ и $st\in(P+(a))(P+(b))\subseteq P+(ab)=P$. Така $P\cap S\neq\varnothing$, противоречие.

4.2. Нека S е максимален елемент на Σ (съществуването му следва от лемата на Цорн). Да означим с Π множеството от всички идеали на A, непресичащи S (нулевият идеал е такъв). От Задача 4.1 имаме, че Π притежава максимални елементи и ако P е такъв, то P е прост идеал. Сега от максималността на S следва, че $P=A\setminus S$ и P е минимален прост идеал на A.

4.3. Да забележим, че ако $a,b\in I$, то $1-\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{1+b-a}{1+b}$ е обратим елемент в $S^{-1}A$. Това показва, че множеството $1-S^{-1}I$ се състои от обратими в $S^{-1}A$ елементи. Ако $x\in S^{-1}I$ и $y\in S^{-1}A$, то $xy\in S^{-1}I$ (защото $S^{-1}I$ е идеал в $S^{-1}A$), откъдето следва, че $1-xy\in 1-S^{-1}I$ е обратим в $S^{-1}A$, т.е. $x\in\mathfrak{R}(S^{-1}A)$ според твърдение 2.3.

4.4. Очевидно $S^{-1}(\mathfrak{N}(A)) \subseteq \mathfrak{N}(S^{-1}A)$. Обратно, нека $a/s \in \mathfrak{N}(S^{-1}A)$, $a \in A$, $s \in S$. Тогава за някое n имаме $a^n/s^n = 0 \Rightarrow a^n/1 = 0 \Rightarrow a^n t = 0$ за някое $t \in S$ (виж упражнение 4.1, б) на стр. 23) $\Rightarrow (at)^n = 0 \Rightarrow at \in \mathfrak{N}(A)$. Тогава $a/s = (at)/(st) \in S^{-1}(\mathfrak{N}(A))$.

Ако A е област с ненулев радикал на Джекобсън и $S = A \setminus \{0\}$, то не е вярно, че $S^{-1}(\mathfrak{R}(A)) = \mathfrak{R}(S^{-1}A)$.

4.5. Очевидно а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) (виж Задача 4.4). Да допуснем, че е изпълнено в), но $\mathfrak{N}(A) \neq (0)$ и нека $0 \neq x \in \mathfrak{N}(A)$. Тъй като $\mathrm{Ann}(x) \neq (1)$, то $\mathrm{Ann}(x) \subseteq M$ за някой максимален идеал M в A. Имаме $x/1 \in \mathfrak{N}(A_M)$ и значи $x/1 = 0$. Тогава $xs = 0$ за някое $s \in A \setminus M$ (виж упражнение 4.1, б) на стр. 23), което е противоречие, защото $\mathrm{Ann}(x) \subseteq M$.

4.6. Нека $a/s, b/t \in A_P$ $(a, b \in A,\ s, t \in A \setminus P)$ и $(ab)/(st) = 0$. Тогава $(ab)/1 = 0 \Rightarrow abu = 0$ за някое $u \in A \setminus P$. Тъй като A е област и $u \neq 0$, то $ab = 0$ $\Rightarrow a = 0$ или $b = 0 \Rightarrow a/s = 0$ или $b/t = 0$.

Обратното не е вярно. Разгледайте пръстена $\mathbb{Z}_6$.

4.7. а) Нека $n = 2$. Ясно, е че $S^{-1}(I_1 \cap I_2) \subseteq S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2$. Нека

$$x = x_1/s_1 = x_2/s_2 \in S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2,$$

където $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$ и $s_1, s_2 \in S$. Тогава $I_1 \ni ts_2x_1 = ts_1x_2 \in I_2$ за някое $t \in S$, откъдето $ts_2x_1 \in I_1 \cap I_2$. Тогава $x = (ts_2x_1)/(ts_2s_1) \in S^{-1}(I_1 \cap I_2)$. Общият случай се получава с индукция по n.

б) Нека $n = 2$. Идеалът $S^{-1}(I_1I_2)$ се поражда от множеството $\{(x_1x_2)/s\}$, където $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$ и $s \in S$. Идеалът $(S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$ се поражда от множеството $\{(x_1/s_1)(x_2/s_2)\}$, където $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$ и $s_1, s_2 \in S$. Тъй като тези две множества съвпадат, то идеалите $S^{-1}(I_1I_2)$ и $(S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$ също съвпадат. Общият случай се получава с индукция по n.

4.8. Проверете, че изображението $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$, зададено с

$$\theta(a/s) = \psi(a)\psi(s)^{-1}, \quad a \in A,\ s \in S,$$

е коректно дефиниран хомоморфизъм на пръстени, такъв че $\psi = \theta\varphi$. За да докажете единствеността на θ, забележете, че от $\psi = \theta\varphi$ следва, че

$$\theta(a/s)\psi(s) = \theta(a/s)\theta(\varphi(s)) = \theta(a/s)\theta(s/1) = \theta(a/1) = \theta(\varphi(a)) = \psi(a).$$

Ако $B = S^{-1}A$ и $\psi = \varphi$, то $\theta = \mathrm{id}_{S^{-1}A}$.

4.9. От а) следва, че съществува хомоморфизъм $S^{-1}A \xrightarrow{\theta} B$, такъв че $\psi = \theta\varphi$, а от б) следва, че съществува хомоморфизъм $B \xrightarrow{\theta'} S^{-1}A$, такъв че $\varphi = \theta'\psi$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\theta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dotted, "\theta'"] \\ S^{-1}A & \end{tikzcd}$$

Тогава $(\theta'\theta)\varphi = \theta'(\theta\varphi) = \theta'\psi = \varphi = (\mathrm{id}_{S^{-1}A})\varphi$, откъдето $\theta'\theta = \mathrm{id}_{S^{-1}A}$. Аналогично, $(\theta\theta')\psi = \theta(\theta'\psi) = \theta\varphi = \psi = \mathrm{id}_B\ \psi$, откъдето $\theta\theta' = \mathrm{id}_B$.

4.10. а) Нека $A/I \xrightarrow{\psi} S^{-1}A/S^{-1}I$ е хомоморфизмът зададен с

$$\psi(a+I) = (a/1) + S^{-1}I, \quad a \in A.$$

С помощта на комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & A/I \arrow[d, "\psi"'] \\
S^{-1}A \arrow[r] & S^{-1}A/S^{-1}I
\end{tikzcd}$$

установете, че хомоморфизмът ψ и множеството $\overline{S}$ изпълняват условията на Задача 4.9.

б) Приложете а) за мултипликативно затвореното множество $S = A \setminus P$.

4.11. Да означим с $\overline{S}$ образа на S при каноничния хомоморфизъм на факторизация $A \to A/I$. Тогава $r(S^{-1}I)/S^{-1}I = \mathfrak{N}(S^{-1}A/S^{-1}I) = \mathfrak{N}(\overline{S}^{-1}(A/I))$ и $S^{-1}(r(I))/S^{-1}I = \overline{S}^{-1}(r(I)/I)) = \overline{S}^{-1}(\mathfrak{N}(A/I))$ и сега можем да приложим Задача 4.4.

4.12. Нека $A \xrightarrow{\psi} \overline{T}^{-1}(S^{-1}A)$ е композицията на хомоморфизмите на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$ и $S^{-1}A \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{T}^{-1}(S^{-1}A)$, $\psi = \overline{\varphi}\varphi$. Установете, че хомоморфизмът ψ и множеството T изпълняват условията на Задача 4.9.

4.13. Нека $T = A \setminus P$ и нека $\overline{T}$ е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Тогава $\overline{T}^{-1}(S^{-1}A) \cong A_P$. Покажете, че хомоморфизмът $\overline{T}^{-1}(S^{-1}A) \longrightarrow (S^{-1}A)_{\mathfrak{P}}$ е изоморфизъм.

4.14. Нека $S = A \setminus Q$. Приложете Задача 4.13 за множеството S и идеала P.

4.15. а) Всеки прост идеал в $S^{-1}A$ е от вида $S^{-1}Q$, където Q е прост идеал в A, такъв че $Q \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$. Тогава от твърдение 1.3, а) следва, че всеки прост идеал в $S^{-1}A$ се съдържа в някой от идеалите $S^{-1}P_i$, $i = 1, \ldots, k$.

б) Ако между идеалите P_i, $i = 1, \ldots, k$, няма включвания, то същото е вярно за идеалите $S^{-1}P_i$, $i = 1, \ldots, k$.

4.16. Приложете Задача 4.10, б) към идеала $I = (0) \oplus B$ в пръстена $A \oplus B$ и забележете, че $I(A \oplus B)_{\mathfrak{P}} = (0)$, защото $(1,0) \notin \mathfrak{P}$.

4.17. а) Нека $0 \neq a \in A$. Тъй като $\mathrm{Ann}(a) \neq A$, то $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathfrak{M}_i$ за някое $1 \leq i \leq k$, откъдето $\varphi_i(a) \neq 0$.

б) Нека $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i$, където A_i е локален пръстен с максимален идеал M_i, $i = 1, \ldots, k$. Според Задача 3.5 всички максимални идеали на A са

$$\mathfrak{M}_i = A_1 \oplus \ldots \oplus M_i \oplus \ldots \oplus A_k, \quad i = 1, \ldots, k,$$

а от Задача 4.16 следва, че хомоморфизмът $A \xrightarrow{\varphi_i} A_{\mathfrak{M}_i}$ съвпада с проекцията $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i \to A_i$.

в) Ако $\mathfrak{R}(A)$ е нилпотентен идеал, то според Задача 3.8 пръстенът A е изоморфен на директна сума на k локални пръстена.

§ 5. Модули. Крайнопородени модули

5.1. Нека елементите $x_1, \ldots, x_n \in N$ пораждат A-модула N и нека елементите $y_1, \ldots, y_m \in M$ са такива, че $y_1 + N, \ldots, y_m + N$ пораждат A-модула M/N. Тогава елементите $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ пораждат A-модула M.

5.2. Проверете, че за всички $f, g \in A[\lambda]$ и всички $x, y \in M$ са в сила равенствата: $f(x+y) = fx + fy$, $f(x+y) = fx + fy$, $(fg)(x) = f(g(x))$, $1.x = x$.

5.3. Нека $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогава $\mathcal{A}X = 0$. Умножете последното равенство отляво с адюнгираната матрица $\widetilde{\mathcal{A}} = (\Delta_{ji}) \in M_n(A)$, където Δ_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Използвайте, че $\widetilde{\mathcal{A}}\mathcal{A} = (\det \mathcal{A})E_n$.

5.4. Да снабдим M със структура на $A[\lambda]$-модул (виж Задача 5.2): $fx = f(\varphi)(x)$, $f \in A[\lambda]$, $x \in M$. Тогава $\chi_\varphi(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi \in \mathrm{Ann}_{A[\lambda]} M$. Нека $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогава $(\lambda E_n - \mathcal{A})X = 0$. Сега можем да приложим детерминантния трик (Задача 5.3) към матрицата $\lambda E_n - \mathcal{A} \in M_n(A[\lambda])$.

5.5. Нека M се поражда като A-модул от елементите $x_1, \ldots, x_n$. Тогава $\varphi(x_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i = 1, \ldots, n$, където $a_{ij} \in I$, $1 \leq i, j \leq n$. Сега полиномът χ_φ от Задача 5.4 удовлетворява исканите условия.

5.6. Приложете Задача 5.5 към хомоморфизма $\varphi = \mathrm{id}_M$.

5.7. Да разгледаме M като модул над пръстена $A[\lambda]$: $fx = f(\varphi)(x)$, $f \in A[\lambda]$, $x \in M$. Тогава $M = (\lambda)M$ и от Задача 5.6 следва, че съществуват $a_1, \dots, a_k \in A$, такива че $\mathrm{id}_M + a_1\varphi + \dots + a_k\varphi^k = 0$, откъдето получаваме, че φ е обратим.

5.8. Нека $f \in A[x]$ е полином, със старши коефициент 1, такъв че $f(b) = 0$. Тогава всеки полином $g \in A[x]$ може да се раздели на f с частно и остатък: $g = qf + r$, $q, f \in A[x]$, $\deg r < \deg f$. Тъй като $g(b) = r(b)$, елементите b^i, $0 \le i < \deg f$, пораждат пръстена $A[b]$ като A-модул.

5.9. Нека $b \in B$ и нека $B \xrightarrow{\varphi_b} B$ е хомоморфизмът на A-модули, определен с формулата $\varphi_b(x) = bx$, $x \in B$. Приложете Задача 5.5 към хомоморфизма φ_b и идеала $I = A$. Забележете, че: а) $b = 0 \Leftrightarrow \varphi_b = 0$; б) $f(\varphi_b) = \varphi_{f(b)}$, $f \in A[\lambda]$, $b \in B$.

5.10. Следва от Задачи 5.8 и 5.9

5.11. Нека $b_i \in B$, $i = 1, \dots, m$, пораждат B като A-модул и $c_j \in C$, $j = 1, \dots, n$, пораждат C като B-модул. Тогава $b_i c_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ пораждат C като A-модул.

5.12. Използвайте индукция по m и Задача 5.11.

5.13. Ако $b_1, b_2 \in B$ са цели над A, то според Задача 5.12 пръстенът $A[b_1, b_2]$ е цяло разширение на A. Тъй като $b_1 + b_2, b_1 b_2 \in A[b_1, b_2]$, то $b_1 + b_2$ и $b_1 b_2$ са цели елементи над A.

5.14. Ако C е цяло разширение на A, то очевидно B е цяло разширение на A и C е цяло разширение на B. Обратно, нека B е цяло разширение на A и C е цяло разширение на B. Тогава за всеки елемент $c \in C$ съществуват елементи $b_1, \dots, b_n \in B$, такива че $c^n + b_1 c^{n-1} + \dots + b_n = 0$. Тогава c е цял над $A[b_1, \dots, b_n]$, откъдето следва, че $A[b_1, \dots, b_n, c]$ е крайнопороден $A[b_1, \dots, b_n]$-модул. Тъй като $A[b_1, \dots, b_n]$ е крайнопороден A-модул (виж Задача 5.12), то сега от Задача 5.11 следва, че $A[b_1, \dots, b_n, c]$ е крайнопороден A-модул, т. е. c е цял елемент над A.

5.15. За всеки полином $f \in A[x]$ нека $\overline{f} \in (A/I)[x]$ е редукцията на f по модул I. Нека $\overline{b} \in B/J$ и $f \in A[x]$ е полином със старши коефициент 1, такъв че $f(b) = 0$. Тогава полиномът $\overline{f} \in (A/I)[x]$ има старши коефициент $\overline{1}$ и $\overline{f}(\overline{b}) = \overline{0}$.

5.16. Нека $b \in B$, $s \in S$ и нека $f = x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i \in A[x]$ е такъв, че $f(b) = 0$. Тогава

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s^{n-i}} \left(\frac{b}{s}\right)^i = \frac{f(b)}{s^n} = 0.$$

5.17. Нека $a_1, \dots, a_n \in I$ и $b_1, \dots, b_n \in B$ са такива, че $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 1$. Тъй като $B' = A[b_1, \dots, b_n]$ е крайнопороден A-модул, за който $IB' = B'$, то според Задача 5.6 съществува елемент $a \in I$, такъв че $1 + a \in \mathrm{Ann}\, B' = \{0\}$, откъдето следва, че $1 \in I$.

5.18. Нека $0 \neq b \in J$ и нека $f = x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i \in A[x]$ е такъв, че $f(b) = 0$. Тъй като B е област, можем да предполагаме, че $a_n \neq 0$. Тогава

$$0 \neq a_n = -b^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i b^i \in A \cap J.$$

5.19. Проверете, че изображението $S^{-1}M \xrightarrow{\theta} N$, зададено с

$$\theta(x/s) = (1/s)\psi(x), \quad x \in M, \ s \in S,$$

е коректно дефиниран хомоморфизъм на $S^{-1}A$-модули, такъв че $\psi = \theta\varphi$

5.20. Нека хомоморфизмът $\theta' : N \to S^{-1}M$ е такъв, че $\varphi = \theta'\psi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[dl, dotted, "\theta'"] \\ S^{-1}M & \end{tikzcd}$$

Тогава $(\theta\theta')\psi = \theta(\theta'\psi) = \theta\varphi = \psi = \mathrm{id}_N \psi$, откъдето $\theta\theta' = \mathrm{id}_N$. Аналогично $(\theta'\theta)\varphi = \theta'(\theta\varphi) = \theta'\psi = \varphi = (\mathrm{id}_{S^{-1}M})\varphi$, откъдето $\theta'\theta = \mathrm{id}_{S^{-1}M}$. Следователно θ е изоморфизъм.

5.21. Нека елементите $x \in N$ и $s \in S$ са такива, че $i_S(x/s) = i(x)/s = 0$. Тогава $ui(x) = 0$ за някой $u \in S$, откъдето $i(ux) = 0$ и $ux = 0$. Следователно $x/s = (ux)/(us) = 0$.

5.22. Нека $n = 2$. Ясно, е че $S^{-1}(N_1 \cap N_2) \subseteq S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$. Нека

$$x = x_1/s_1 = x_2/s_2 \in S^{-1}I_1 \cap S^{-1}I_2,$$

където $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2, s_1, s_2 \in S$. Тогава $N_1 \ni us_2x_1 = us_1x_2 \in N_2$ за някой $u \in S$, откъдето $us_2x_1 \in N_1 \cap N_2$. Тъй като $x = (us_2x_1)/(us_2s_1)$, то $x \in S^{-1}(N_1 \cap N_2)$. Общият случай се получава с индукция по n.

5.23. Нека $M/N \xrightarrow{\psi} S^{-1}M/S^{-1}N$ е хомоморфизмът зададен с

$$\psi(x + N) = (x/1) + S^{-1}N, \quad x \in M.$$

С помощта на комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & M/N \arrow[d, "\psi"'] \\ S^{-1}M \arrow[r] & S^{-1}M/S^{-1}N \end{tikzcd}$$

установете, че хомоморфизмът ψ изпълнява условието на Задача 5.20.

5.24. Нека $M \xrightarrow{\psi} \overline{T}^{-1}(S^{-1}M)$ е композицията на хомоморфизмите на локализация $N \xrightarrow{\varphi} S^{-1}M$ и $S^{-1}M \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{T}^{-1}(S^{-1}M)$, $\psi = \overline{\varphi}\varphi$. Проверете, че хомоморфизмът ψ изпълнява условието на Задача 5.20.

5.25. Нека $T = A \setminus P$ и нека $\overline{T}$ е образът на T при хомоморфизма на локализация $A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A$. Тогава $\overline{T}^{-1}(S^{-1}M) \cong M_P$. Покажете, че хомоморфизмът $\overline{T}^{-1}(S^{-1}M) \longrightarrow (S^{-1}M)_{\mathfrak{P}}$ е изоморфизъм.

5.26. Нека $S = A \setminus Q$. Приложете Задача 5.25 към множеството S и идеала P.

5.27. Забележете, че $(PM)_P = PM_P$ и приложете Задача 5.23.

5.28. Използувайте Задача 5.27 и лемата на Накаяма.

5.29. а) Ако $0 \neq x \in M$, множеството $\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ е собствен идеал на A. Следователно $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{M}_i$ за някой индекс $1 \leq i \leq k$, откъдето следва, че $\varphi_i(x) \neq 0$.

б) Нека A_i, $i = 1, \ldots, k$ са локални пръстени и нека $A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i$. Нека $e_i \in A_i$ е неутралният елемент на A_i, $i = 1, \ldots, k$, и $a_i = (0, \ldots, e_i, \ldots, 0) \in A$. Тогава множествата $M_i = a_i M$, $i = 1, \ldots, k$, са A-подмодули на M и $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$. Покажете, че проекцията $M \to M_i$ съвпада с хомоморфизма $M \xrightarrow{\varphi_i} M_{\mathfrak{M}_i}$.

в) Използвайте Задача 3.8.

5.30. Ако $M \neq 0$ и $0 \neq x \in M$, множеството $\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ е собствен идеал в A. Тогава $M_P \neq 0$ за всеки прост идеал P в A, който съдържа $\mathrm{Ann}(x)$.

5.31. Използвайте изоморфизма $(M/N)_P \cong M_P/N_P$ и Задача 5.30.

5.32. Използвайте изоморфизма $(A/I)_P \cong A_P/IA_P$.

5.33. Ако $P \not\supseteq \mathrm{Ann}\, M$, то съществува $t \notin P$, такъв че $tM = 0$. Тогава $x/s = (tx)/(ts) = 0$ за всеки елемент $x/s \in M_P$.

5.34. Ясно е, че $\mathrm{Ann}\,(M) \supseteq \mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n$. Ако $P \in \mathrm{Supp}\, M$, то $P \supseteq \mathrm{Ann}\,(M)$ (виж Задача 5.33), откъдето $P \supseteq \mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n$. Тогава $P \supseteq \mathfrak{M}_i$ за някое $1 \leq i \leq n$, защото идеалът P е прост.

5.35. Забележете, че $M_P \neq 0 \Leftrightarrow$ или $N_P \neq 0$ или $M_P/N_P \neq 0$. Използвайте, че $M_P/N_P \cong (M/N)_P$.

5.36. Използвайте Задача 5.25.

5.37. Нека $x_1, \ldots, x_k \in M$ пораждат A-модула M. Тъй като $M_P = 0$, съществуват елементи $s_1, \ldots, s_k \in A \setminus P$, такива че $s_1 x_1 = 0, \ldots, s_k x_k = 0$. Нека $s = s_1 \cdots s_k \in A \setminus P$. Тогава $sM = 0$.

5.38. Използвайте Задача 5.37.

§ 6. Ньотерови и артинови модули

6.1. Допуснете, че M притежава подмодул N, който не е крайнопороден и въз основа на това постройте безкрайна растяща редица от крайнопородени подмодули, съдържащи се в N.

6.2. За да докажете, че φ е и сюрективен хомоморфизъм, разгледайте веригата от подмодули $\operatorname{Im}\varphi \supseteq \operatorname{Im}\varphi^2 \supseteq \operatorname{Im}\varphi^3 \supseteq \cdots$.

6.3. Нека M е максимален идеал в A. Тогава $\operatorname{Ann}(A^n/MA^n) = M$, и фактормодулът A^n/MA^n е линейно пространство над полето $k = A/M$. Забележете, че $A^n/MA^n \cong k^n$, откъдето $\dim_k(A^n/MA^n) = n$.

а) Нека $x_1, \ldots, x_m \in A^n$ пораждат A^n като A-модул. Тогава съседните класове $x_1 + MA^n, \ldots, x_m + MA^n \in A^n/MA^n$ пораждат линейното пространство A^n/MA^n над полето k, откъдето следва, че $m \geq n$.

б) Покажете, че изображението $\overline{\varphi} : A^n/MA^n \to A^m/MA^m$, зададено с

$$\overline{\varphi}(x + MA^n) = \varphi(x) + MA^m, \quad x \in A^n,$$

е коректно дефиниран изоморфизъм на линейни пространства над k. Тъй като $\dim_k(A^n/MA^n) = n$ и $\dim_k(A^m/MA^m) = m$, то $n = m$.

в) Забележете, че изображението $\overline{\varphi} : A^n/MA^n \to A^m/MA^m$, дефинирано по-горе, е върху, откъдето следва, че $n \geq m$.

6.4. Вижте [5, Задача 1.23].

6.5. Нека $\mathcal{I}$ е множеството от всички идеали I в A, за които съществуват безброй много прости идеали, които са минимални над I. Ако $\mathcal{I} \neq \varnothing$, то $\mathcal{I}$ съдържа максимален елемент I. Тъй като идеалът I не може да е прост, то съществуват идеали $I \subset I_1$, $I \subset I_2$, такива че $I_1 I_2 \subseteq I$. Покажете, че всеки прост идеал, който е минимален над I, е минимален или над I_1 или над I_2. Това води до противоречие, защото броят на простите идеали, които са минимални над I_1 (съотв. I_2) е краен.

6.6. Следва от Задача 6.5.

6.7. Нека $a_1, \ldots, a_k$ пораждат $\mathfrak{N}(A)$ и нека n е естествено число, такова че $a_i^n = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Тогава $\mathfrak{N}(A)^N = 0$ за всяко $N > k(n-1)$.

6.8. ($\Rightarrow$) Тъй като всеки максимален идеал е също минимален прост идеал, от Задача 6.5 следва, че A е полулокален пръстен, а от Задача 6.7 следва, че $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{N}(A)$ е нилпотентен идеал. Сега можем да приложим Задача 3.8.

($\Leftarrow$) Използвайте Задача 3.5.

6.9. Разгледайте хомоморфизма $\varphi : M \to M/N_1 \oplus M/N_2$, дефиниран чрез равенството $\varphi(x) = (x + N_1, x + N_2)$. Очевидно $\operatorname{Ker}\varphi = N_1 \cap N_2$, откъдето следва, че $M/(N_1 \cap N_2) \leq M/N_1 \oplus M/N_2$.

6.10. Случаят $M = (0)$ е тривиален, затова нека $M \neq (0)$. Ще проведем индукция по минималния брой пораждащи на M. Ако $M = Ax$, $x \in M$, изображението $\varphi : A \to M$, $\varphi(a) = ax$, е хомоморфизъм от A върху M. При това $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ann} M = I$ и значи $A/I \cong M$ е ньотеров A-модул, т. е. A/I е ньотеров пръстен. Нека твърдението е вярно за модул с по-малко от n пораждащи и нека $M = Ax_1 + \cdots + Ax_{n-1} + Ax_n$. Да означим $M_1 = Ax_1 + \cdots + Ax_{n-1}$, $M_2 = Ax_n$, $I_1 = \operatorname{Ann} M_1$, $I_2 = \operatorname{Ann} M_2$. Тъй като $M = M_1 + M_2$, от упражнение 5.1, а) имаме $I = \operatorname{Ann} M = I_1 \cap I_2$. Според индукционното предположение пръстените A/I_1 и A/I_2 са ньотерови, т. е. те са ньотерови A-модули. Сега от Задача 6.9 следва, че и $A/(I_1 \cap I_2) = A/I$ е ньотеров A-модул, т. е. A/I е ньотеров пръстен.

6.11. ($\Rightarrow$) Използвайте, че всеки факторпръстен на ньотеров пръстен също е ньотеров пръстен.

($\Leftarrow$) Нека $I \neq (0)$ е идеал в A и $0 \neq a \in I$. Тогава идеалът $I/(a)$ във факторпръстена $A/(a)$ се поражда от краен брой елементи $a_1 + (a), \ldots, a_k + (a)$. Следователно I се поражда от елементите $a, a_1, \ldots, a_k$.

6.12. Използвайте, че всеки $S^{-1}A$-подмодул на $S^{-1}M$ е от вида $S^{-1}N$, където N е A-подмодул на M.

6.13. а) $\Rightarrow$ б) Следва от Задача 6.12.

б) $\Rightarrow$ в) Условие б) включва в себе си условие в).

в) $\Rightarrow$ а) Нека $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ са максималните идеали на A и нека N е A-подмодул на M. За всяко $i = 1, \ldots, k$ нека $x_{i1}, \ldots, x_{ij_i}$ са елементи на N, такива че $x_{i1}/1, \ldots, x_{ij_i}/1$ е система от пораждащи елементи на $N_{\mathfrak{M}_i}$ над $A_{\mathfrak{M}_i}$. Нека N' е A-подмодула на M, който се поражда от всички елементи x_{ij}, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq j_i$. Тогава $N' \subseteq N$ и $N'_{\mathfrak{M}} = N_{\mathfrak{M}}$ за всеки максимален идеал $\mathfrak{M}$ на A, откъдето следва (виж Задача 5.31), че $N' = N$.

6.14. Достатъчно да се докаже, че за всеки $a \neq 0$ факторпръстенът $A/(a)$ е ньотеров (виж Задача 6.11). Нека $M_1, \ldots, M_k$ са всички максимални идеали в A, които съдържат елемента $a \neq 0$. Тогава $\overline{A} = A/(a)$ е полулокален пръстен с максимални идеали $\overline{M}_1 = M_1/(a), \ldots, \overline{M}_k = M_k/(a)$. Сега от изоморфизмите $\overline{A}_{\overline{M}_i} \cong A_{M_i}/aA_{M_i}$ следва, че всички пръстени $\overline{A}_{\overline{M}_i}$ са ньотерови, откъдето получаваме, че пръстенът $\overline{A} = A/(a)$ е ньотеров (виж Задача 6.13).

6.15. Нека $N = N_0 \supset \cdots \supset N_k = (0)$ е композиционен ред на N и нека веригата $M = M_0 \supset \cdots \supset M_l = N$ е такава, че

$$M/N = M_0/N \supset \cdots \supset M_l/N = (0)$$

е композиционен ред на M/N. Тогава

$$M = M_0 \supset \cdots \supset M_l \supset N_1 \supset \cdots \supset N_k = (0)$$

е композиционен ред на M.

6.16. а) Нека $a = \{a_n\}$ и нека $b = \{b_n\}$, където $b_n = \begin{cases} 0, & \text{когато } a_n \neq 0; \\ 1, & \text{когато } a_n = 0. \end{cases}$
Тогава $ab = 0$ и $a + b$ е обратим в A.

б) Нека P е прост идеал в A и нека $\overline{A} = A/P$. Забележете, че точно един от елементите a и b принадлежи на P. Ако $a \notin P$, то $\overline{b} = \overline{0}$, и тъй като $a + b$ е обратим в A, то $\overline{a} = \overline{a+b}$ е обратим в $\overline{A}$. Следователно $\overline{A}$ е поле.

в) Нека $a \in P$. Тогава $b \notin P$ и от $ab = 0$ следва, че $a/1 = 0$ в A_P. Следователно $PA_P = (0)$. Тъй като P е максимален идеал, то $A/P \cong A_P/PA_P$, т.е. $A/P \cong A_P$.

г) Множеството $P_k = \{a \in A \mid a_k = 0\}$ е минимален прост идеал в A за всяко естествено число n.

д) Следва от Задача 6.5.

6.17. а) Множеството P_k е ядрото на проекцията $A \to k_n$.

б) Нека $a \in I$ и k е естествено число, такова че $a_k = 0$. Тогава $a \in P_n$.

в) Нека k е естествено число и $a \in A$ е зададен с $a_n = \begin{cases} 0, & \text{когато } n \neq k; \\ 1, & \text{когато } n = k. \end{cases}$
Тогава $a \in I$ и $a \notin P_k$.

§ 7. Ньотерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса

7.1. Нека всички коефициенти на f са нилпотентни и I е идеалът на A, породен от a_n, $n \geq 0$. Тъй като A е ньотеров пръстен, I се поражда от краен брой от тези елементи (в противен случай съществува безкрайна растяща верига от идеали, съдържащи се в I). Както в доказателството на твърдение 7.2 се уверяваме, че I е нилпотентен идеал. Сега, ако $I^k = (0)$, следва, че $f^k = 0$.

7.2. Нека I е идеалът породен от F в A и $x_1, \ldots, x_k \in I$ е система от пораждащи на I. Тогава $x_i = a_{i1}f_{i1} + \cdots + a_{ij_i}f_{ij_i}$, $a_{ij} \in A$, $f_{ij} \in F$, $i = 1, \ldots, k$, $1 \leq j \leq j_i$. Покажете, че елементите $f_{ij} \in F$ притежават исканото свойство.

7.3. Нека t поражда $\mathfrak{M}$. За всеки елемент $0 \neq a \in A$ нека $v(a) \geq 0$ е най-голямото цяло число, такова че $a \in \mathfrak{M}^{v(a)}$. Тогава $a = ut^{v(a)}$, където u е обратим елемент в A. Ако $I \neq (0)$ е идеал в A и $v(I) = \min\limits_{0 \neq a \in I} v(a)$, то $I = \mathfrak{M}^{v(I)}$.

7.4. Да допуснем, че A не е ньотеров пръстен, Тогава множеството Σ от идеалите, които не са крайнопородени е непразно и от лемата на Цорн следва, че Σ има максимален елемент. Ако P е максимален елемент на Σ, ще докажем, че P е прост идеал, което противоречи с условието на задачата.

Да допуснем, че P не е прост идеал и нека $a, b \notin P$, но $ab \in P$. Тогава $P + (a) \supset P$ и от максималността на P следва, че идеалът $P + (a)$ е крайнопороден. Нека $P + (a)$ се поражда от елементите $p_1 + ax_1, \ldots, p_n + ax_n$, ($p_1, \ldots p_n \in P$; $x_1, \ldots, x_n \in A$). Да означим $P_0 = (p_1, \ldots, p_n) \subseteq P$. Идеалът P_0 е крайнопороден и $P + (a) = P_0 + (a)$. Нека $Q = (P : a) = \{x \in A \mid ax \in P\}$. Директно се проверява, че Q е идеал в A (който се нарича ньотерово частно на идеалите Q и (a)). Освен това $P \subset P + (b) \subseteq Q$ (защото $ab \in P$). Отново от максималността на P следва, че Q е крайнопороден идеал. Накрая съобразете, че $P = P_0 + aQ$ и тогава P е крайнопороден идеал, противоречие.

Задача 7.5 дава пример на локален пръстен с главен максимален идеал, който не е ньотеров.

7.5. а) Достатъчно е да се установи, че M/P е главен идеал в пръстена A/P. Нека $\bar{t} = t + P \in A/P$ и $\bar{x}_i = x_i + P \in A/P$. Тогава $M/P = (\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$. От $x_i - x_{i+1}t \in P$ следва, че $\bar{x}_i = \bar{x}_{i+1}\bar{t}$, откъдето $\bar{x}_i \in (\bar{t})$ за всяко $i \geq 1$. Следователно $M/P = (\bar{t})$.

б) Тъй като локализацията на област също е област, то е достатъчно е да се установи, че P е прост идеал. Нека $A_n = k[t, x_1, \ldots, x_{n+1}]$ и P_n е идеалът породен от $y_1 = x_1 - x_2 t, \ldots, y_n = x_n - x_{n+1}t$ в A_n. Тъй като $A_n = k[t, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}]$ и полиномите $t, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}$ са алгебрично независими над k, то $A_n/P_n \cong k[t, x_{n+1}]$ е област, т.е. P_n е прост идеал в A_n. Нека $f, g \in A$ са такива, че $fg \in P$. Тогава съществува естествено число n, такова че $f, g, fg \in A_n$ и $fg \in P_n$. Следователно или $f \in P_n$ или $g \in P_n$, откъдето следва, че или $f \in P$ или $g \in P$.

в) Нека $\bar{t} = t + P \in A/P$ и $\bar{x}_i = x_i + P \in A/P$. Тъй като полиномите от P се анулират, когато заместим с $t = 1, x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots$, то $t, x_1, x_2, \ldots \notin P$, откъдето $\bar{t} \neq 0, \bar{x}_1 \neq 0, \bar{x}_2 \neq 0, \ldots$. Сега от равенствата $\bar{x}_i = \bar{x}_{i+1}\bar{t}$ следва, че $(\bar{x}_1) \subset (\bar{x}_2) \subset \cdots$ е строго растяща редица от идеали в $(A/P)_{M/P}$ (защото $\bar{t}$ не е обратим елемент в $(A/P)_{M/P}$).

7.6. Ако p/q, $(p, q) = 1$, е корен на полинома $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, то $p^n = -(a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_n q^n)$ се дели на q, откъдето $q = \pm 1$.

7.7. За всяко алгебрично число α съществува полином

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x],$$

такъв че $a_0 \neq 0$ и $f(\alpha) = 0$. Нека $s = a_0$. Тогава

$$(s\alpha)^n + a_1 s (s\alpha)^{n-1} + \cdots + a_n s^n = 0,$$

откъдето следва, че $s\alpha$ е цяло алгебрично число.

7.8. а) Нека $\mathbb{Q}(\alpha) \xrightarrow{\sigma_i} \mathbb{Q}(\alpha_i)$ е изображението, зададено с

$$\sigma_i(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) = c_0 + c_1\alpha_i + \cdots + c_{n-1}\alpha_i^{n-1},$$

където $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$. Проверете, че σ_i е изоморфизъм на полета, такъв че $\sigma_i|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Нека $F \in \mathbb{Z}[x]$ е полином със старши коефициент, равен на 1, такъв че $F(\beta) = 0$. Тогава $F(\beta_i) = F(\sigma_i(\beta)) = \sigma_i(F(\beta)) = 0$.

б) Прилагайки формулите на Крамер към линейната система

$$b_0 + \alpha_i b_1 + \cdots + \alpha_i^{n-1} b_{n-1} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

получаваме $b_i = \Delta_i/\Delta$, $i = 0, \ldots, n-1$, където

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{i-1} & \beta_1 & \alpha_1^{i+1} & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{i-1} & \beta_2 & \alpha_2^{i+1} & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{i-1} & \beta_n & \alpha_n^{i+1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Следователно $Db_i = \Delta\Delta_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, защото $D = \Delta^2$. Тъй като $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ са цели алгебрични числа, то Db_i, $i = 0, \ldots, n-1$, също са цели алгебрични числа. Но Db_i, $i = 0, \ldots, n-1$, са рационални числа, откъдето следва, че $Db_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

в) Нека M е $\mathbb{Z}$-модулът, породен от числата $D^{-1}, D^{-1}\alpha, \ldots, D^{-1}\alpha^{n-1}$. Тогава, според подточка б), пръстенът A се съдържа в M. Тъй като всеки подмодул на крайнопороден $\mathbb{Z}$-модул също е крайнопороден $\mathbb{Z}$-модул, то A е крайнопороден $\mathbb{Z}$-модул. Забележете, че всеки базис на A над $\mathbb{Z}$ е също така базис на $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$, откъдето следва, че рангът на A е равен на n.

7.9. а) $1, \sqrt{2}$; б) $1, i$; в) $1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.10. Нека $1 = e_0 + \cdots + e_i + \cdots + e_m$, $e_i \in S_i$, $i = 0, \ldots, m$. Тогава

$$e_0 = e_0 \cdot 1 = e_0^2 + \cdots + e_0 e_i + \cdots + e_0 e_m,$$

откъдето $e_0 e_i = 0$, когато $i > 1$. Тъй като

$$e_j = e_j \cdot 1 = e_j e_0 + \cdots + e_j e_i + \cdots + e_j e_m,$$

то $e_j = e_j e_0 = 0$, когато $j > 1$. Следователно $1 = e_0 \in S_0$.

7.11. а) Ясно е, че $I \supseteq I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots$. Нека I е еднороден идеал и нека $f \in I$. Тогава $f_i \in I \cap S_i = I_i$, откъдето $f \in I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots$. Следователно $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots$. Обратно, нека $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots$ и нека $f \in I$. Тогава $f = f_0 + \cdots + f_i + \cdots + f_m = f_0' + \cdots + f_i' + \cdots + f_m'$, където $f_i' \in I_i = I \cap S_i$. Следователно $f_i = f_i' \in I$.

б) Ако I е еднороден идеал, то I се поражда от множеството $I_0 \cup I_1 \cup \ldots$, което се състои от еднородни елементи. Обратно, нека I се поражда от множество от еднородни елементи. Тогава всеки елемент на I е сума на еднородни елементи от I, откъдето следва, че I е еднороден идеал.

7.12. Нека I е еднороден идеал в градуирания ньотеров пръстен S. Тогава I се поражда от краен брой елементи $g_j = \sum_{i \ge 0} g_{ij} \in I$, $j = 1, \ldots, n$. От еднородността на I следва, че всички еднородни компоненти g_{ij} принадлежат на I. Тогава I се поражда от крайното множество от еднородни елементи $\{g_{ij}\} \subseteq I$, $i \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$.

7.13. Множеството S_+ е ядрото на проекцията $S \to S_0$.

7.14. Съществуват елементи $h_j \in S$, $j = 1, \dots, k$, такива че $f = \sum_{j=1}^{k} h_j f_j$. Нека

$$g_j = \begin{cases} (h_j)_{d-\deg f_j}, & \text{ако } d \geq \deg f_j, \\ 0, & \text{ако } d < \deg f_j. \end{cases}$$

Тогава $f = \sum_{j=1}^{k} h_j f_j = \sum_{j=1}^{k} (h_j f_j)_d = \sum_{j=1}^{k} g_j f_j$.

7.15. а) $\Rightarrow$ б) От $S_0 \cong S/S_+$ следва, че S_0 е ньотеров пръстен.

б) $\Rightarrow$ в) Нека $0 \neq f_j \in S_+$, $j = 1, \dots, k$, са еднородни елементи, такива че $S_+ = (f_1, \dots, f_k)$ (виж Задача 7.12) и нека $S' = S_0[f_1, \dots, f_k]$. Ако $S' \subsetneqq S$, то съществува еднороден елемент $f \notin S'$, който има минимална положителна степен d. Тогава f има представяне $f = \sum_{j=1}^{k} g_j f_j$ (виж Задача 7.14) и от $\deg g_j < d$ получаваме $g_j \in S'$ за $j = 1, \dots k$, откъдето $f \in S'$. Противоречието показва, че S' съвпада с S.

в) $\Rightarrow$ а) Ако S_0 е ньотеров пръстен, всяка крайнопородена S_0-алгебра е ньотеров пръстен.

7.16. а) $\Rightarrow$ б) Ако $B = A \oplus_A M$, то $\pi : B \to A$ е проекцията $\pi(a, x) = a$, $a \in A$, $x \in M$.

б) $\Rightarrow$ а) Нека $M = \ker \pi$. Тогава $b - \pi(b) \in M$ за всеки $b \in B$ и от тъждеството $b = \pi(b) + [b - \pi(b)]$, следва че $B = A \oplus_A M$.

7.17. Ако A е директно събираемо на B и I е идеал в A, то $IB = I \oplus IM$, откъдето $IB \cap A = I$. Нека $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ е растяща верига от идеали в A. Тогава веригата от идеали $I_1 B \subseteq I_2 B \subseteq \cdots$ се стабилизира, откъдето следва, че веригата от идеали $I_1 = I_1 B \cap A \subseteq I_2 = I_2 B \cap A \subseteq \cdots$ също се стабилизира.

7.18. а) Ако $g(a_1) = a_1$ и $g(a_2) = a_2$, то $g(a_1 + a_2) = a_1 + a_2$ и $g(a_1 a_2) = a_1 a_2$.

б) Нека $a' \in A^G$ и $a \in A$. Тогава

$$\pi(a'a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a'a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a') g(a) = a' \, |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a) = a' \pi(a),$$
$$\pi(a') = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(a') = |G|^{-1} \sum_{g \in G} a' = a'.$$

в) Следва от Задачи 7.16 и 7.17, защото в този случай б) показва, че подпръстенът A^G е директно събираемо на пръстена A.

7.19. а) Ако $f \in S^G$ и $f = \sum_{i \geq 0} f_i$, то $f_i \in S_i^G$, $i \geq 0$.

б) Ако $0 \neq f \in S_0$ и $g(f) = f$, то $g(f^{-1}) = f^{-1}$, защото всеки автоморфизъм g на пръстена S изпраща обратния елемент на f в обратния елемент на $g(f)$.

в) $|G|$ е обратим елемент в S, когато $\operatorname{char} k \nmid |G|$. Тъй като S е ньотеров пръстен, от подусловие а) и Задача 7.18 следва, че S^G е градуиран ньотеров пръстен. Тогава Задача 7.15 показва, че S^G е крайнопородена k^G-алгебра.

7.20. а) Следва от основната теорема за симетрични полиноми.

б) Нека $\chi(\tau) = 1$, когато $\tau \in A_n$, а $\chi(\tau) = -1$, когато $\tau \notin A_n$. Тогава $\tau\Delta = \chi(\tau)\Delta$, $\tau \in S_n$. Ако $f \in k[x_1, \ldots, x_n]^{A_n}$ и $\tau_1, \tau_2 \notin A_n$, то от $\tau_1^{-1}\tau_2 \in A_n$ следва, че $\tau_1 f = \tau_2 f$. Нека $f_1 = \dfrac{f + \tau f}{2}$ и $f_2 = \dfrac{f - \tau f}{2}$, $\tau \notin A_n$. Тогава $f = f_1 + f_2$, като $f_1 \in k[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$, а $\tau f_2 = \chi(\tau) f_2$, $\tau \in S_n$. Тъй като f_2 се анулира, когато $x_i = x_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$, то f_2 се дели на всеки от полиномите $x_i - x_j$, $1 \leq i < j \leq n$. Следователно f_2 се дели на Δ и $f/\Delta \in k[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$.

§ 8. Теорема на Хилберт за нулите — алгебричен вариант

8.1. а) Нека $\varphi : A \to k$ е е изображение, дефинирано по следния начин: ако $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, то $\varphi(f) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k$. Докажете, че φ е хомоморфизъм на пръстена A върху k и $\operatorname{Ker} \varphi = M$.

б) Според алгебричния вариант на теоремата на Хилберт за нулите имаме $A/M = k$. Нека $\pi : A \to A/M = k$ е естественият хомоморфизъм на факторизация и нека $\pi(x_1) = \alpha_1, \ldots, \pi(x_n) = \alpha_n$. Използвайки подусловие а), докажете, че $M = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$.

8.2. Нека K е крайнопороден пръстен, който е поле. Ако $\operatorname{char} K = 0$, имаме $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq K$. Тъй като K е крайнопородена алгебра над $\mathbb{Z}$, то K е крайнопородена алгебра и над $\mathbb{Q}$. Тогава от теорема 8.6 следва, че K е крайномерно линейно пространство над Q. Сега от лема 8.4 следва, че $\mathbb{Q}$ е крайнопородена $\mathbb{Z}$-алгебра, което противоречи с твърдение 8.5, а). Следователно, $\operatorname{char} K = p > 0$ и K е крайнопородена алгебра над $\mathbb{Z}_p$. Отново от теорема 8.6 следва, че K е крайно разширение на $\mathbb{Z}_p$ и следователно K е крайно поле.

8.3. Хомоморфизмът $A \xrightarrow{\varphi} B$ индуцира влагане на k-алгебри $A/M \hookrightarrow B/\mathfrak{M}$. Тъй като $B/\mathfrak{M}$ е крайно разширение на k, областта A/M е крайномерна k-алгебра — тогава A/M е поле според Задача 1.8.

8.4. Ако $n = 1$, твърдението е вярно, защото $k[x_1]$ е област на главни идеали. За да докажем общия случай, използваме индукция по n. Ако M е максимален идеал в $A = k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, то $M' = k[x_1, \ldots, x_n] \cap M$ е максимален идеал в $A' = k[x_1, \ldots, x_n]$ (виж Задача 8.3) и за идеала M' в A' съществуват полиноми $f_1, \ldots f_n$, за които са в сила условия а), б) и в). Освен това $A'/M' \hookrightarrow A/M$ е просто разширение на полета, което се поражда от $\overline{x}_{n+1} = x_{n+1} + M \in A/M$.

Нека $\overline{f}_{n+1} \in (A'/M')[x_{n+1}]$ е минималният полином на $\overline{x}_{n+1}$ над полето A'/M'. Тогава съществува полином f_{n+1} на x_{n+1} със старши коефициент 1 и коефициенти в A', такъв че $\overline{f}_{n+1} = f_{n+1} + M'[x_{n+1}]$. Покажете, че за идеала M и полиномите $f_1, \dots, f_{n+1}$ са в сила условия а), б) и в).

8.5. Ако $a \in A$, то $f = \prod\limits_{g\in G} (x - g(a))$ е полином със старши коефициент 1 и коефициенти в пръстена A^G, такъв че $f(a) = 0$. Следователно A е цяло разширение на A^G. Тъй като A е крайнопородена A^G-алгебра, то A е крайнопороден A^G-модул и сега твърдението следва от лема 8.4.

8.6. а) Забележете, че $(y_1 + x_n^e)^{\alpha_1}(y_2 + x_n^{e^2})^{\alpha_2} \cdots (y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}})^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$ е полином на x_n от степен $\alpha_n + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_{n-1}e^{n-1}$, със старши коефициент 1. Тъй като $\alpha_i < e$ за $i = 1, \dots, n$, то "цифрите" $\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ еднозначно определят числото $\alpha_n + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_{n-1}e^{n-1}$ (което е записано в бройна система с основа e). Нека $f = \sum a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$ и нека $d = \alpha_n + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_{n-1}e^{n-1}$ е най-голямото число, за което $a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n} \neq 0$. Тогава $f(y_1 + x_n^e, y_2 + x_n^{e^2}, \dots, y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}, x_n)$ е полином на x_n от степен d със старши коефициент $a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n} \neq 0$.

б) Нека $0 \neq g \in k[x_1, \dots, x_n]$ е еднородната компонента от най-висока степен на полинома f. Тогава $f(y_1 + a_1x_n, y_2 + a_2x_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1}x_n, x_n)$ е полином на x_n със старши коефициент $g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1)$. Тъй като полето k е безкрайно и полиномът g е еднороден, то съществуват $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in k$, такива че $g(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.

8.7. Ако e е достатъчно голямо естествено число, то според Задача 8.6, а)

$$f(y_1 + x_n^e, y_2 + x_n^{e^2}, \dots, y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}, x_n) \in k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$$

е полином на x_n със старши коефициент $0 \neq a \in k$. Нека

$$y_1 = x_1 - x_n^e,\ y_2 = x_2 - x_n^{e^2},\ \dots,\ y_{n-1} = x_{n-1} - x_n^{e^{n-1}}.$$

Тогава x_n е цял над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$. Тъй като $x_n^e, x_n^{e^2}, \dots, x_n^{e^{n-1}}$ също са цели над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$, то $x_1 = y_1 + x_n^e$, $x_2 = y_2 + x_n^{e^2}$, $\dots$, $x_{n-1} = y_{n-1} + x_n^{e^{n-1}}$ са цели над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$, откъдето следва, че A е крайнопороден модул над $k[y_1, \dots, y_{n-1}, f]$.

Забележка: Ако полето k е безкрайно, може да се използва Задача 8.6, б) вместо Задача 8.6, а) — тогава $y_1, \dots, y_{n-1}$ са линейни полиноми на $x_1, \dots, x_n$.

8.8. Нека A се поражда над k от елементите $a_1, \dots, a_n$. Използваме индукция по n — ако $a_1, \dots, a_n$ са алгебрично независими над k, лемата е вярна. В противен случай $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ за някой полином $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Нека полиномите $f_1, \dots, f_{n-1} \in k[x_1, \dots, x_n]$ са такива, че $k[x_1, \dots, x_n]$ е крайнопороден модул над $k[f_1, \dots, f_{n-1}, f]$ (виж Задача 8.7) и нека $y_i = f_i(a_1, \dots, a_n) \in A$, $i = 1, \dots, n-1$. Тогава A е крайнопороден модул над $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ (защото

$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$) и лемата следва от индукционната хипотеза и Задача 5.11. Допълнението е следствие от Задача 8.6, б), защото когато полето k е безкрайно, $f_1, \ldots, f_{n-1}$ са линейни полиноми на $x_1, \ldots, x_n$.

8.9. а) Ако $0 \neq b \in A$, областта $A[b]$ е крайномерна алгебра над полето A, откъдето следва, че $A[b]$ също е поле (виж Задача 1.8).

б) Ако $0 \neq a \in A$, то съществуват $a_1, \ldots, a_n \in A$, такива че

$$\left(a^{-1}\right)^n + a_1 \left(a^{-1}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

откъдето $a^{-1} = -(a_1 + \cdots + a_n a^{n-1}) \in A$.

8.10. Нека $y_1, \ldots, y_r \in E$ са алгебрично независими над k елементи, такива че E е крайнопороден модул над $k[y, \ldots, y_r]$. Тъй като полиномиалният пръстен $k[y, \ldots, y_r]$ е поле според Задача 8.9, б), то $r = 0$.

8.11. Приложете Задача 8.9.

8.12. От Задача 5.17 следва, че MB е собствен идеал на B. Нека $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в B, такъв че $\mathfrak{M} \supseteq MB$ — тогава $\mathfrak{M} \cap A = M$.

8.13. а) Тъй като пръстенът B_P е цяло разширение на пръстена A_P (виж Задача 5.16), то според Задача 8.12 съществува прост идеал Q в B, такъв че идеалът QB_P лежи над максималния идеал PA_P в A_P. Тогава Q лежи над P.

б) Нека $P' = Q' \cap A$. Тъй като $A/P' \hookrightarrow B/Q'$ е цяло разширение на пръстени (виж Задача 5.15) и P/P' е прост идеал в A/P', то според а) съществува прост идеал $\overline{Q}$ в B/Q', който лежи над P/P'. Нека Q е пълният праобраз на $\overline{Q}$ при хомоморфизма на факторизация $B \to B/Q'$. Тогава $Q \supseteq Q'$ и Q лежи над P.

8.14. Нека $P_0 \subset P_1$ са прости идеали в A. Според Задача 8.13, а) съществува прост идеал Q_0 в B, който лежи над P_0, а според Задача 8.13, б) съществува прост идеал Q_1 в B, който лежи над P_1, такъв че $Q_0 \subset Q_1$. Общият случай се получава с индукция по r.

8.15. След замяна на A с A/P и на B с B/Q, задачата се свежда до случая, когато A и B са области, а $P = Q = (0)$. Нека $S = A \setminus \{0\}$. След замяна на A с полето от частни $S^{-1}A$ и на B с областта $S^{-1}B$, задачата се свежда до случая, когато A е поле, а B е област. Сега, според Задача 8.9, а), областта B също е поле, откъдето следва, че $Q' = (0)$.

8.16. От Задача 8.14 следва, че за всяка верига $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$ от прости идеали в A, съществува верига $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_r$ от прости идеали в B със същата дължина. Следователно $\dim A \leq \dim B$. Нека $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_r$ е верига от прости идеали в B и нека $P_i = Q_i \cap A$, $i = 0, \ldots, r$. Тогава $P_{i-1} \subsetneq P_i$, $i = 1, \ldots, r$, защото ако $P_{i-1} = P_i$ за някое i, то от Задача 8.15 ще следва, че $Q_{i-1} = Q_i$. Следователно $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$ е верига от прости идеали в A с дължина r, откъдето $\dim B \leq \dim A$.

8.17. Нека $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_r$ е верига от прости идеали в B и нека P_i е пълният прообраз на Q_i в пръстена A, $i = 0, \ldots, r$. Тогава $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$ е верига от прости идеали в A с дължина r, откъдето $\dim B \leq \dim A$.

8.18. Според Задача 8.4, съществуват елементи $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$, такива че A е цяло разширение на $k[y_1, \ldots, y_{n-1}, f]$. Нека $A' \subseteq A/(f)$ е образът на подпръстена $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ при хомоморфизма на факторизация $A \to A/(f)$. Тогава $A/(f)$ е цяло разширение на A' и от Задачи 8.16 и 8.17 следва, че

$$\dim A/(f) = \dim A' \leq \dim k[y_1, \ldots, y_{n-1}].$$

Тъй като пръстенът $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ е изоморфен на факторпръстен на полиномиалния пръстен $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, то $\dim k[y_1, \ldots, y_{n-1}] \leq \dim k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

8.19. Веригата от прости идеали

$$(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

показва, че $\dim A \geq n$. За доказателство на неравенството $\dim A \leq n$ използваме индукция по n. Ако $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$, $r \geq 1$, е верига от прости идеали в A и $f \in P_1 \setminus P_0$, то $P_1/(f) \subset \cdots \subset P_r/(f)$ е верига от прости идеали в $A/(f)$ с дължина $r - 1$, откъдето $r - 1 \leq \dim A/(f)$. Тъй като f е неконстантен полином, то от Задача 8.18 следва, че $\dim A/(f) \leq \dim k[x_1, \ldots, x_{n-1}] \leq n - 1$, откъдето получаваме $r \leq n$.

8.20. Използвайте Задачи 8.4 и 8.19.

8.21. Според лемата за нормализацията съществуват алгебрично независими над k елементи $y_1, \ldots, y_r$, такива че A е цяло разширение на $k[y, \ldots, y_r]$. Тогава полето от частни K на A е крайно разширение на полето от частни на $k[y, \ldots, y_r]$, откъдето следва, че степента на трансцендентност на K над k е равна на r. Сега твърдението следва от Задача 8.16, защото $\dim k[y, \ldots, y_r] = r$.

§ 9. Теорема на Хилберт за нулите — геометричен вариант

9.1. Множеството V от нулите на идеала I е точката $x = 0$, а $I(V) = (x)$. Тъй като $\operatorname{rad} I = I$, $I(V) \neq \operatorname{rad} I$.

9.2. Нека $M \supseteq I$ е максимален идеал в пръстена A и нека $i : A \to A/M = E$ е хомоморфизмът на факторизация; според следствие 8.7, полето E е крайно разширение на k. Нека $\alpha_1 = i(x_1), \ldots, \alpha_n = i(x_n)$. Тогава $i(f) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ за всеки полином $f \in A$, откъдето $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ за всеки $f \in I$.

9.3. Нека P е прост идеал в A и нека $B = A/P$. Достатъчно е да се докаже, че за всеки елемент $0 \neq f \in B$ съществува максимален идеал M в B, такъв че $f \notin M$. Нека $B \xrightarrow{\varepsilon} B[f^{-1}]$ е хомоморфизмът на локализация спрямо f и нека $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в $B[f^{-1}]$. Тогава $f \notin \mathfrak{M}$, защото f е обратим елемент в $B[f^{-1}]$. Тъй като $B[f^{-1}]$ е крайнопородена k-алгебра, то $M = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в B (виж Задача 8.3), такъв че $f \notin M$.

9.4. а) $\Rightarrow$ б) Използвайте, че всеки прост идеал в A/I е от вида P/I, където $P \supseteq I$ е прост идеал в A.

б) $\Rightarrow$ в) В пръстен на Джекобсън нилрадикалът и радикалът на Джекобсън съвпадат, защото сечението на всички прости идеали съвпада със сечението на всички максимални идеали.

в) $\Rightarrow$ г) Условие в) включва в себе си условие г).

г) $\Rightarrow$ а) Нека P е прост идеал в A и нека Q е сечението на всички максимални идеали в A, които съдържат P. Тогава $(0) = \mathfrak{R}(A/P) = Q/P$, откъдето $Q = P$, т. е. P е сечение на максимални идеали.

9.5. Използвайте Задачи 9.3 и 9.4.

9.6. а) От $\mathfrak{R}(A) = (0)$ и $f \neq 0$ следва, че съществува максимален идеал M, който не съдържа f. Тогава $MA[f^{-1}] = (0)$, откъдето $M = (0)$, т. е. A е поле.

б) Нека $0 \neq g \in \mathfrak{R}(A)$ и $A \xrightarrow{\varepsilon} A[g^{-1}]$ е хомоморфизмът на локализация спрямо g. Нека $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в $A[g^{-1}]$ и $P = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{M})$. Тогава P не е максимален идеал в A, защото $g \notin P$. Нека $f = g + P \in A/P$. Тъй като $\mathfrak{M} = PA[g^{-1}]$ и $(A/P)[f^{-1}] \cong A[g^{-1}]/PA[g^{-1}] = A[g^{-1}]/\mathfrak{M}$, то $(A/P)[f^{-1}]$ е поле.

9.7. Използвайте Задачи 9.4 и 9.6.

9.8. Нека K е полето от частни на A. Ако $A[x][f^{-1}]$ е поле за някой полином $0 \neq f \in A[x]$, то $A[x][f^{-1}]$ ще съвпада с полето от рационални функции $K(x)$, откъдето ще следва, че $K(x) = K[x][f^{-1}]$. Но това е невъзможно, защото $K[x][f^{-1}]$ е крайнопородена K-алгебра (виж твърдение 8.5).

9.9. а) След като полето $B[f^{-1}]$ съдържа областта A, то $B[f^{-1}]$ съдържа полето от частни K на A. Тогава $B[f^{-1}] = K[b][f^{-1}]$ и от Задача 9.8 следва, че b е алгебричен над K, т. е. $K[b]$ е поле, а тъй като $f \in K[b]$, то $f^{-1} \in K[b]$.

б) Тъй като b и f^{-1} са алгебрични над K, то съществуват $a_0, a_1, \ldots, a_m \in A$ и $b_0, b_1, \ldots, b_l \in A$, такива че

$$a_0 b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \quad \text{и} \quad b_0 f^{-l} + b_1 f^{-l+1} + \cdots + b_l = 0$$

като без ограничение на общността можем да предполагаме, че $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Нека $s = a_0 b_0$. Тогава b и f^{-1} са цели елементи над $A[s^{-1}]$, откъдето следва, че полето $B[f^{-1}]$ е цяло разширение на $A[s^{-1}]$. Сега Задача 8.9, б) показва, че $A[s^{-1}]$ също е поле.

в) Използвайте Задачи 9.4 и 9.6, а).

9.10. а) Използваме критерия за пръстен на Джекобсън от Задача 9.7. Нека P е прост идеал в $A[x]$ и нека $(A[x]/P)[f^{-1}]$ е поле за някой $0 \neq f \in A[x]/P$. Да означим с $\mathfrak{p}$ простия идеал $P \cap A$. Тогава пръстенът $B = A[x]/P$ е разширение на пръстена на Джекобсън $A/\mathfrak{p}$, като $B = (A/\mathfrak{p})[b]$, където $b = x + P \in B$, и от Задача 9.9, в) следва, че $A[x]/P$ е поле.

б) Приложете Задача 9.9, в) за пръстените A/M и $A[x]/\mathfrak{M}$ $(f = 1)$.

9.11. а) Нека B се поражда от n елемента над A. Тогава B е факторпръстен на полиномиалния пръстен $A[x_1, \dots, x_n]$, който е пръстен на Джекобсън според Задача 9.10, а). Сега приложете Задача 9.4.

б) От Задача 9.10, б) следва, че твърдението е вярно, когато B е полиномиалният пръстен $A[x_1, \dots, x_n]$. Нека $A[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\varphi} B$ е сюрективен хомоморфизъм на A-алгебри. Тогава $\varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в $A[x_1, \dots, x_n]$, откъдето следва, че $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{M}) \cap A$ е максимален идеал в A.

9.12. След като φ е хомоморфизъм на A-алгебри, пръстенът C е крайнопородена B-алгебра, откъдето следва, че индуцираното от φ влагане $B/M \hookrightarrow C/\mathfrak{M}$ е крайнопородено разширение на пръстени. Тъй като B/M е пръстен на Джекобсън, то B/M е поле — виж Задача 9.11.

§ 10. Примарно разлагане в ньотерови пръстени

10.1. Първо ще докажем, че за всеки примарен идеал Q на пръстена $A = C[0,1]$ съществува най-много едно число $\xi \in [0,1]$, такова че $f(\xi) = 0$ за всяка функция $f \in Q$. (Ще отбележим без доказателство, че за всеки собствен идеал на A съществува поне едно такова число.) Да допуснем, че съществуват числа $\xi_1 < \xi_2$ от $[0,1]$, за които $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0\ \forall f \in Q$. Нека $\eta \in [0,1]$ е такова, че $\xi_1 < \eta < \xi_2$ и нека f_1 и f_2 са такива функции от A, за които

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x) \neq 0 \text{ за } x \in [0,\eta) \\ f_1(x) = 0 \text{ за } x \in [\eta,1] \end{array} \right. , \qquad \left| \begin{array}{l} f_2(x) = 0 \text{ за } x \in [0,\eta] \\ f_2(x) \neq 0 \text{ за } x \in (\eta,1] \end{array} \right. .$$

Тогава $f_1(\xi_1) \neq 0$ (защото $\xi_1 \in [0,\eta]$) и $f_2(\xi_2) \neq 0$ (защото $\xi_2 \in (\eta,1]$). Така $f_1, f_2 \notin Q$ и никоя степен на f_1 и f_2 не принадлежи на Q, но $f_1 f_2 = 0 \in Q$, което е противоречие с това, че Q е примарен идеал.

Да допуснем сега, че нулевият идеал на A е сечение на краен брой примарни идеали $Q_1, \dots, Q_n$. Нека ξ_i е единствената обща нула на функциите от Q_i и $\xi \in [0,1]$ е число, различно от ξ_i $(i = 1, \dots, n)$. Тогава за всяко $i = 1, \dots, n$ съществува функция $f_i \in Q_i$, такава че $f_i(\xi) \neq 0$. Да разгледаме функцията $f = f_1 \dots f_n$. Имаме $f(\xi) = f_1(\xi) \dots f_n(\xi) \neq 0$ и в същото време

$$f = f_1 \cdots f_n \in \prod_{i=1}^{n} Q_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = (0),$$

което е противоречие. Следователно нулевият идеал на A не притежава примарно разлагане.

10.2. Нека (0) е примарен идеал в A. Ако $a \in A$ е делител на 0, то $ab \in (0)$, за някой $b \notin (0)$, откъдето $a^n = 0$, за някое $n > 0$. Обратно, нека всеки делител на 0 е нилпотентен. Ако $ab \in (0)$ и $b \notin (0)$, то a е делител на 0, откъдето $a^n \in (0)$ за някое $n > 0$.

10.3. Хомоморфизмът φ индуцира влагане $A/Q \hookrightarrow B/Q'$. Тъй като всеки делител на 0 в пръстена B/Q' е нилпотентен, то същото е вярно за пръстена A/Q. Следователно Q е примарен идеал според Задача 10.2.

10.4. Използвайте Задача 10.2: тъй като A/M^k е локален пръстен с нилпотентен максимален идеал M/M^k, то всеки делител на 0 в A/M^n е нилпотентен.

10.5. Използвайте Задача 10.3: идеалът $P^k A_P$ е примарен в A_P според Задача 10.4, откъдето следва, че $\varphi^{-1}(P^k A_P)$ е примарен идеал в A.

10.6. а) Нека $a \in A$ е делител на 0 в A: $ax = 0$ за някой $0 \neq x \in A$. Тогава $x \notin Q_i$ за някое $1 \leq i \leq r$, откъдето следва, че $a \in P_i$. Обратно, нека $a \in P_i$ и нека $y \in (\bigcap_{j \neq i} Q_j) \setminus Q_i$. Тъй като $a^n \in Q_i$ за някое $n > 0$, то $a^n y = 0$ за някое $n > 0$. Нека $n > 0$ е най-малкото естествено число, такова че $a^n y = 0$ и нека $x = a^{n-1}y$. Тогава $x \neq 0$ и $ax = 0$.

б) Следва от подусловие а) и твърдение 1.3, а).

в) Следва от подусловие б).

10.7. а) От свойствата на локализацията и факторизацията на пръстени следва, че е достатъчно да разгледаме случая $Q = (0)$. Нека елементите $a/s \in S^{-1}A$ и $0 \neq b/t \in S^{-1}A$ са такива, че $(ab)/(st) = 0$. Тогава $uab = 0$ за някое $u \in S$, като $ub \neq 0$, защото $b/t \neq 0$. Сега от $a(ub) = 0$ следва, че $a^k = 0$ за някое $k > 0$, откъдето $(a/s)^k = 0$, което показва, че нулевият идеал в $S^{-1}A$ е примарен.

Ако $a \neq 0$, то от $\varphi(a) = 0$ ще следва, че $sa = 0$ за някой елемент $s \in S$; тогава $s^k = 0$ за някое $k > 0$, което е в противоречие с $0 \notin S$. Следователно $\operatorname{Ker}\varphi = (0)$.

б) Идеалите $S^{-1}Q_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ са примарни в $S^{-1}A$ според подусловие а). От Задача 4.7 следва, че $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}Q_i = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}Q_i$ $(S^{-1}Q_i = (1)$ за $i > m)$. Ако $\bigcap_{1 \leq i \neq j \leq m} S^{-1}Q_i \subseteq S^{-1}Q_j$ за някое $1 \leq j \leq m$, то от $\varphi^{-1}(S^{-1}Q_i) = Q_i$, $1 \leq i \leq m$, ще следва, че $\bigcap_{1 \leq i \neq j \leq m} Q_i \subseteq Q_j$, което е в противоречие с минималността на примарното разлагане $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Следователно $(0) = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в $S^{-1}A$.

10.8. а) Ще покажем, че всеки от идеалите P_i $(i = 1, \ldots, n)$ съвпада с някой от идеалите P'_j $(j = 1, \ldots, m)$. Тъй като $\bigcap_{j=1}^{m} Q'_j = (0) \subseteq P_i$, то съществува идеал Q'_j, такъв че $Q'_j \subseteq P_i$; тогава $P'_j = r(Q'_j) \subseteq P_i$. Нека $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}$ (съответно $Q'_{j_1}, \ldots, Q'_{j_l}$) са всички идеали в множеството $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ (съответно $\{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$), които се съдържат в P_i; тогава идеалите $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ и $P'_{j_1}, \ldots, P'_{j_l}$ също се съдържат в P_i. Сега според Задача 10.7, б)

$$(0) = Q_{i_1}A_{P_i} \cap \ldots \cap Q_{i_k}A_{P_i} = Q'_{j_1}A_{P_i} \cap \ldots \cap Q'_{j_l}A_{P_i}$$

са две минимални примарни разлагания на нулевия идеал в локалния пръстен A_{P_i}. Тъй като максималният идеал $P_iA_{P_i} = r(Q_iA_{P_i})$ се състои от делители на 0 в A_{P_i} (виж Задача 10.6, а)), то от Задача 10.6, в) следва, че идеалът $P_iA_{P_i}$ съвпада с някой от идеалите $P'_{j_1}A_{P_i} = r(Q'_{j_1}A_{P_i}), \ldots, P'_{j_l}A_{P_i} = r(Q'_{j_l}A_{P_i})$. Остава да забележим, че $P_iA_{P_i} = P'_{j_t}A_{P_i}$ влече $P_i = P'_{j_t}$.

По аналогичен начин се доказва, че всеки от идеалите P'_j $(j = 1, \ldots, m)$ съвпада с някой от идеалите P_i $(i = 1, \ldots, n)$, откъдето следва съвпадането на двете множества от прости идеали.

б) Приложете подусловие а) към факторпръстена A/I.

10.9. а) Нека $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в A и нека $P_i = r(Q_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ са съответните асоциирани прости идеали. Тогава $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ според Задача 10.6, а); сега приложете Задача 4.15.

б) Нека P_i $(i = 1, \ldots, n)$ са всички минимални прости идеали в A. Тогава $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ е минимално примарно разлагане на нулевия идеал в A, откъдето $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Забележете, че $\mathfrak{N}(S^{-1}A) = (0)$ и $S^{-1}A$ е полулокален пръстен с размерност на Крул, равна на нула, след което приложете китайската теорема за остатъците.

10.10. Тъй като P_i е минимален асоцииран прост идеал, то $P_j \not\subseteq P_i$ за $j \neq i$. Тогава подусловие б) на Задача 10.7 показва, че $IA_{P_i} = Q_iA_{P_i}$, а от подусловие а) на същата задача следва, че $Q_i = \varphi^{-1}(Q_iA_{P_i}) = \varphi^{-1}(IA_{P_i})$.

§ 11. Артинови пръстени

11.1. Използвайте Задача 4.17, в).

11.2. Нека M_i е максималният идеал на A_i, $i = 1, \ldots, k$, а N_j е максималният идеал на B_j, $j = 1, \ldots, l$. Тогава A е полулокален пръстен с максимални идеали $\mathfrak{M}_i = A_1 \oplus \cdots \ni M_i \oplus \cdots \oplus A_k$, $i = 1, \ldots, k$, а B е полулокален пръстен с максимални идеали $\mathfrak{N}_j = B_1 \oplus \cdots \oplus N_j \oplus \cdots \oplus B_l$, $j = 1, \ldots, l$ (Задача 3.5, в)). Нека $A \xrightarrow{\varphi} B$ е изоморфизъм на пръстени. Тогава идеалите $\varphi(\mathfrak{M}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, са пермутация на идеалите на идеалите $\mathfrak{N}_j$, $j = 1, \ldots, l$. Следователно $k = l$ и съществува пермутация $j_1, \ldots, j_k$ на числата $1, \ldots, k$, такава че $\varphi(\mathfrak{M}_i) = \mathfrak{N}_{j_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Да забележим също, че за всяко $i = 1, \ldots, k$ изоморфизмът φ индуцира изоморфизъм $A_{\mathfrak{M}_i} \xrightarrow{\varphi_i} B_{\mathfrak{N}_{j_i}}$ (който е зададен с $\varphi_i(x/s) = \varphi(x)/\varphi(s)$, $x \in A$, $s \notin \mathfrak{M}_i$). Тъй като според Задача 4.16 са в сила изоморфизмите $A_{\mathfrak{M}_i} \cong A_i$ и $B_{\mathfrak{N}_{j_i}} \cong B_{j_i}$, то $A_i \cong B_{j_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

11.3. Използвайте Задача 6.15.

11.4. Тъй като локалният пръстен A_P е нулмерен и ньотеров, то A_P е артинов пръстен съгласно теорема 11.5.

11.5. Първо ще докажем, че неравенството $n \leq m$ е в сила, когато пръстенът A е артинов. Тъй като $\varphi(A^n)$ е A-подмодул на A^m, то $l(\varphi(A^n)) \leq l(A^m)$. От инективността на φ следва, че $\varphi(A^n) \cong A^n$. Тогава $l(\varphi(A^n)) = l(A^n) = nl(A)$ и тъй като $l(A^m) = ml(A)$, то $n \leq m$.

След това да забележим, че за всеки прост идеал P в A хомоморфизмът φ индуцира инективен хомоморфизъм на A_P-модули $\varphi_P : (A^n)_P \to (A^m)_P$, зададен с формулата $\varphi_P(x/s) = \varphi(x)/s$, $x \in A^n$, $s \notin P$ (виж Задача 5.21). Тъй като $(A^n)_P$ и A_P^n са изоморфни като A_P-модули, то φ индуцира инективен хомоморфизъм на A_P-модули $A_P^n \to A_P^m$ за всеки прост идеал P в A. Ако сега A е ньотеров пръстен и P е минимален прост идеал в A, то A_P е артинов пръстен според Задача 11.4. Следователно неравенството $n \leq m$ е в сила, ако пръстенът A е ньотеров.

Общият случай се свежда до случая на ньотеров пръстен по следния начин: Нека $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ е стандартният базис на свободния модул A^n и $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(A)$ е матрицата, която се определя от равенствата $\varphi(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in A^m$, $j = 1, \ldots, n$. Нека $B \subseteq A$ е $\mathbb{Z}$-алгебрата, която се поражда над $\mathbb{Z}$ от всички елементи a_{ij} на матрицата $\mathcal{A}$. Тъй като B е крайнопородена $\mathbb{Z}$-алгебра, то B е ньотеров пръстен. От определението на B следва, че $\varphi(B^n) \subseteq B^m$. Тогава $\varphi|_{B^n} : B^n \to B^m$ е инективен хомоморфизъм на B-модули, откъдето получаваме, че $n \leq m$.

11.6. Поради сюрективността на φ, подмодулите на M, разглеждан като модул над A и като модул над B, са едни и същи.

11.7. Тъй като $\mathfrak{M}M = (0)$, то M има структура на линейно пространство над $F = A/\mathfrak{M}$ и от Задача 11.6 следва, че $l_A(M) = l_F(M) = \dim_F M$.

11.8. Ако идеалът I в A не е максимален, то съществува идеал J в A, такъв че $I \subset J \subset A$. Тъй като $(0) \subset J/I \subset A/I$, то A/I не е прост A-модул. Обратно, ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в A и N е A-подмодул на $A/\mathfrak{M}$, то съществува идеал J в A, такъв че $\mathfrak{M} \subseteq J \subseteq A$ и $N = A/J$ (J е пълният прообраз на N при естествения хомоморфизъм на факторизация $A \to A/\mathfrak{M}$). Тъй като $\mathfrak{M}$ е максимален идеал, то или $J = \mathfrak{M}$ или $J = A$, т. е. или $N = (0)$ или $N = A/\mathfrak{M}$.

Нека $M \neq 0$ е прост A-модул и нека $0 \neq x \in M$. Тогава изображението $\varphi : A \to M$, зададено с $\varphi(a) = ax$, $a \in A$, е хомоморфизъм на A-модули. Тъй като $\varphi(1) = x \neq 0$, то $\varphi(A) \neq (0)$, откъдето $\varphi(A) = M$. Следователно $A/\operatorname{Ker}\varphi \cong M$, като $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker}\varphi$ е максимален идеал в A.

11.9. Използвайте Задача 11.8.

11.10. Нека $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = (0)$ е композиционен ред на M. Тогава според Задача 11.9 съществуват максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, такива че $M_{i-1}/M_i \cong A/\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Следователно е в сила $\mathfrak{M}_i M_{i-1} \subseteq M_i$, $i = 1, \ldots, n$, откъдето следва, че $\mathfrak{M}_n \cdots \mathfrak{M}_1 M_0 \subseteq M_n$, т. е. $\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n M = (0)$.

11.11. а) $\Rightarrow$ б) Заменяйки пръстена A с пръстена $A/\operatorname{Ann} M$, можем да предполагаме без ограничение на общността, че M е точен A-модул, т. е. $\operatorname{Ann} M = (0)$. Тъй като M е модул с крайна дължина, то M е ньотеров модул, откъдето следва, че A е ньотеров пръстен (виж Задача 6.10). Освен това, според Задача 11.10 съществуват максимални идеали $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, такива че $\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n M = (0)$, а тъй като M е точен A-модул, то $\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_n = (0)$. Сега Задачи 3.7 и 3.8 показват, че A е нулмерен пръстен, откъдето следва, че A е артинов пръстен. Остава да забележим, че M е крайнопороден A-модул, защото всеки ньотеров A-модул е такъв.

б) $\Rightarrow$ а) Дължината на M над пръстените A и $A/\operatorname{Ann} M$ е една и съща — тъй като M е крайнопороден модул над артиновия пръстен $A/\operatorname{Ann} M$, то M има крайна дължина над A.

11.12. Ще използваме индукция по дължината на модула M. Ако $l_A(M) = 1$, то $M \cong A/\mathfrak{M}$, където $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в A. Тогава $S^{-1}M \cong S^{-1}(A/\mathfrak{M})$. Да забележим, че $S^{-1}(A/\mathfrak{M}) = (0)$ (ако $S \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$) или $S^{-1}(A/\mathfrak{M}) = A/\mathfrak{M}$ (ако $S \cap \mathfrak{M} = \varnothing$). Следователно $l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq l_A(M)$, когато $l_A(M) = 1$.

Нека неравенството е доказано за всички A-модули с дължина по-малка от $n > 1$ и нека M е A-модул, такъв че $l_A(M) = n$. Тогава съществува A-подмодул N на M, такъв че $(0) \subset N \subset M$, т. е. $l_A(N) < n$ и $l_A(M/N) < n$. Тъй като $S^{-1}N$ е $S^{-1}A$-подмодул на $S^{-1}M$, то от Задача 6.15 получаваме

$$l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = l_{S^{-1}A}(S^{-1}N) + l_{S^{-1}A}(S^{-1}M/S^{-1}N).$$

Сега от индукционната хипотеза следва, че

$$l_{S^{-1}A}(S^{-1}N) \leq l_A(N) \text{ и } l_{S^{-1}A}(S^{-1}M/S^{-1}N) = l_{S^{-1}A}(S^{-1}(M/N)) \leq l_A(M/N),$$

откъдето $l_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq l_A(N) + l_A(M/N) = l_A(M)$ (отново Задача 6.15).

11.13. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че A е артинов пръстен и M е крайнопороден A-модул (виж Задача 11.11).

а) Според Задача 11.1 $A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A_{\mathfrak{M}_i}$, а според Задача 5.29 $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{\mathfrak{M}_i}$, където $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, k$, са всички максимални идеали на A. Следователно $l_A(M) = \sum_{i=1}^{k} l_A(M_{\mathfrak{M}_i})$ според Задача 6.15. Тъй като хомоморфизмите $A \to A_{\mathfrak{M}_i}$ са сюрективни, то $l_A(M_{\mathfrak{M}_i}) = l_{A_{\mathfrak{M}_i}}(M_{\mathfrak{M}_i})$, $i = 1, \ldots, k$ (виж Задача 11.6).

б) От подусловие а) следва, че е достатъчно да докажем формулата за артинов пръстен A с единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$. Нека N е естествено число такова, че $\mathfrak{M}^N M = (0)$. Да разгледаме редицата от A-подмодули

$$M \supset \mathfrak{M}M \supset \cdots \supset \mathfrak{M}^{i-1}M \supset \mathfrak{M}^{i-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{M}^N M = (0).$$

От Задача 6.15 следва, че $l_A(M) = \sum_{i=1}^{N} l_A(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^i M)$, а според Задача 11.7 е в сила равенството $l_A(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^i M) = \dim_{A/\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}^{i-1}M/\mathfrak{M}^i M)$.

11.14. а) Нека $a_i \in A$, $i = 1, \dots, m$, е базис на A над k и нека $x_j \in M$, $j = 1, \dots, l$, е система от пораждащи на M над A. Тогава M съвпада с линейната обвивка на елементите $a_i x_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$.

б) От Задача 11.13, а) следва, че е достатъчно да докажем равенствата

$$\dim_k M_{\mathfrak{M}_i} = l_{A_{\mathfrak{M}_i}}(M_{\mathfrak{M}_i})[F_i : k], \quad i = 1, \dots n.$$

Заменяйки A с $A_{\mathfrak{M}_i}$ и M с $M_{\mathfrak{M}_i}$, можем да предполагаме, че A има единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$ с поле от остатъци $F = A/\mathfrak{M}$. Нека

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = (0)$$

е композиционен ред от A-подмодули на M. Тогава $M_{i-1}/M_i \cong A/M = F$ за $i = 1, \dots, s$ (виж Задача 11.8), откъдето следва, че

$$\dim_k M = \sum_{i=1}^{s} \dim_k(M_{i-1}/M_i) = \sum_{i=1}^{s} \dim_k F = s[F : k] = l_A(M)[F : k],$$

което трябваше да се докаже.

в) Забележете, че в този случай $F_i = k$, $i = 1, \dots, n$, след което приложете подусловие б).

Литература

[1] M. Atiyah, I. Macdonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.

[2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, 1986.

[3] D. Eisenbud, Commutative Algebra, Springer-Verlag, 1994.

[4] П. Сидеров, К. Чакърян, Записки по алгебра, Групи, пръстени, полиноми, Веди, 2006.

[5] А. Божилов, П. Сидеров, К. Чакърян, Задачи по алгебра, Групи, пръстени, полиноми, Веди, 2002.

Съдържание

Борис Василев Коцев
Пламен Николов Сидеров

Комутативна алгебра

Българска
Второ преработено издание
Предпечатна подготовка Венелин Черногоров

ISBN 978-954-8857-38-3

Издателство ВЕДИ
www.vedi.bg

София, 2016