Тема 4

https://github.com/v--/se2018

Граница, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива. Геометрична интерпретация.

Янис Василев

Оригинал: 6 юли 2019
Ревизия: 91d5bc9 от 09 юни 2021
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Теорията е разписана без външни източници.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Дефиниции на Хайне и Коши за граница на функция в крайна точна и в безкрайността.
2. Доказателство на еквивалентност на двете дефинициите.
3. Дефиниция за непрекъснатост на функция чрез дефинициите на Хайне и Коши.
4. Дефиниция за производна на функция като граница на диференчните частно.
5. Физична интерпретация на производната като моментна скорост.
6. Геометрична интерпретация на производната в точка като ъглов коефициент на допирателната към графиката на функцията.
7. Формули за сума, произведение, частно и съставна функция на две диференцируеми функции.
8. Производни на степенна, показателна и основните тригонометрични функции.
9. Формула за производна на обратна функция.

10. Използване на формулата за производна на обратна функция за намиране на производните на $\ln x$ и $\arcsin x$.

11. Дефиниция за примитивна функция.

12. Разликата на две примитивни функции над интервал е константа.

1.2. Отворени множества

Определение 1. Множеството $U \subseteq \mathbb{R}$ ще наричаме **отворено**, ако U е обединение на (произволен брой) отворени интервали. В частност, $\varnothing$ е отворено като обединение на 0 множества. Това определение изглежда нагласено, но всъщност казва, че отворените интервали са база за стандартната топология в $\mathbb{R}$.

Ако U е отворено множество и $x \in U$, казваме, че U е **околност** на x.

За удобство, при изследване на сходимост понякога се ограничаваме до отворени интервали вместо произволни отворени множества. В.ж., например, твърдение 8.

Лема 2. *Ако $a < b$ са реални числа, те имат поне една двойка непресичащи се околности.*

Доказателство. Разглеждаме, например, интервалите

$$U_a = \left(a, \tfrac{a+b}{2}\right) \qquad\qquad U_b = \left(\tfrac{a+b}{2}, b\right).$$

□

1.3. Граница на редица

Определение 3. Безкрайните последователности от реални числа наричаме редици и бележим с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ или просто с $\{a_k\}$, когато няма опасност от недоразумение.

Формално, редиците са функции $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 4. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е произволно непразно множество. Казваме, че $a \in D$ е **точка на сгъстяване** на множеството D или **гранична точка** на D, ако във всяка околност на a има точки на D, различни от a.

Определение 5. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и $\{a_k\} \subseteq D$ е произволна редица. Казваме, че a е **граница на редицата** $\{a_k\}$ или че редицата $\{a_k\}$ **клони** към a, ако всяка околност на a съдържа цялата редица с изключение на краен брой членове. Пишем

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a, \qquad\qquad a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a.$$

Ако една редица има граница, казваме, че **редицата е сходяща**. Ако една редица не е сходяща, тя е **разходяща**.

Забележка 6. В общия случай е възможно $a \notin D$.

Твърдение 7. *Сходящите редици $\{a_k\} \subseteq D$ имат единствена граница.*

Доказателство. Нека a и b са граници на редицата $\{a_k\}$. Ако a и b са различни, те непременно имат поне една двойка непресичащи се околности според лема 2.

От друга страна, ако U_a и U_b са някакви околности на a и b, те непременно се пресичат, тъй като и двете съдържат цялата редица с изключение на краен брой членове. Заключаваме, че $a = b$. □

Твърдение 8. *Редица $\{a_k\} \subseteq D$ от реални числа клони към a тогава и само тогава за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува индекс k_0 такъв, че при $k \geq k_0$ да бъде изпълнено $|a_k - a| < \varepsilon$.*

Доказателство. Първо ще докажем достатъчност. Фиксираме ε и предполагаме, че само краен брой членове на редицата не се съдържат в интервала $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$. Тогава съществува индекс k_0, такъв че всички членове на редицата след a_{k_0} се съдържат в интервала, т.е. $|a - a_k| < \varepsilon$ за всяко $k \geq k_0$.

Обратно, ако е зададена околност U на a, избираме отворен интервал $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U$ и индекс k_0, така че $|a - a_k| < \varepsilon$ при $k \geq k_0$. Получаваме, че единствено краен брой членове на редицата с индекси, по-малки от k_0, потенциално се съдържат извън $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$. □

Твърдение 9. *Ако редиците $\{a_k\} \subseteq D$ и $\{b_k\} \subseteq D$ клонят към a и b, съответно, тогава*

1. $a_k + b_k \xrightarrow[k \to \infty]{} a + b$
2. $a_k b_k \xrightarrow[k \to \infty]{} ab$

Доказателство. Понеже $a_k \to a$ и $b_k \to b$, можем да изберем индекс k и $\delta > 0$ такива, че да бъдат изпълнени неравенствата $|a - a_k| < \delta$ и $|b - b_k| < \delta$.

1. От неравенството на триъгълника следва

$$|(a + b) - (a_k + b_k)| = |(a - a_k) + (b - b_k)| \leq |a - a_k| + |b - b_k| < 2\delta.$$

   И така, при зададено $\varepsilon > 0$, достатъчно е да положим $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, за да съществува индекс k_0, за който

$$|(a + b) - (a_k + b_k)| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

2. Развиваме израза

$$\begin{aligned} ab - a_k b_k &= (ab - ab_k) + (ab_k - a_k b) + (a_k b - a_k b_k) = \\ &= a(b - b_k) + (ab_k - ab + ab - a_k b) + (-a_k)(b_k - b) = \\ &= a(b - b_k) + a\underbrace{(b_k - b)} + (a - a_k)b + (-a_k)\underbrace{(b_k - b)} = \\ &= a\underbrace{(b - b_k)}_{\in(-\delta,\delta)} + \underbrace{(a - a_k)}_{\in(-\delta,\delta)}\underbrace{(b_k - b)}_{\in(-\delta,\delta)} + \underbrace{(a - a_k)}_{\in(-\delta,\delta)} b. \end{aligned}$$

Следователно $|ab - a_k b_k| < \delta^2 + |a + b|\delta$. Ако поискаме δ да бъде по-малко от 1, ще получим $\delta^2 \leq \delta$ и, съответно, $|ab - a_k b_k| < (1 + |a + b|)\delta$.

И така, при зададено $\varepsilon > 0$, достатъчно е да положим $\delta = \frac{\min\{\varepsilon,1\}}{1+|a+b|}$, за да съществува индекс k_0, за който

$$|ab - a_k b_k| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

□

Определение 10. Нека редицата $\{a_k\}$ е неограничена, т.е. всяка околност на 0 съдържа само краен брой нейни елементи. Казваме, че редицата **клони към безкрайност** и пишем

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty,$$

ако редицата е (нестрого) монотонно растяща с изключение на краен брой членове.

Аналогично се дефинира сходимост към отрицателна безкрайност $-\infty$ за неограничени монотонно намаляващи редици.

1.4. Граница на функция

Забележка 11. За съжаление, когато допуснем сходимост във и към безкрайни точки, можем да получим комбинаторна експлозия от определения. Затова в началото ще дадем различни дефиниции само за сходимост във и към крайни точки и ще докажем еквивалентността им, а след това ще дадем само едно определение за останалите видове сходимост.

Алтернативен подход е да се използва компактификация, т.е. добавяне на точките ∞ и $-\infty$ като класове на еквивалентност редици, клонящи към безкрайност. Този подход, обаче, конфликтира с алгебричните свойства на реалните числа и е прекалено нестандартен, за да се използва на изпит.

Определение 12 (Сходимост по Хайне)**.** Нека a е точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ **клони** към A при x клонящо към a или A е граница на $f(x)$ при x клонящо към a и пишем

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A,$$

ако за всяка сходяща към a редица $\{a_k\} \subseteq D$ съответната редица от функционални стойности $\{f(a_k)\}_{k=1}^{\infty}$ клони към A.

Определение 13 (Сходимост по Коши)**.** Нека a е точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ **клони** към A при x клонящо към a, ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in \mathbb{R}$ при $|x - a| < \delta$ да е изпълнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Забележка 14. В общия случай, функцията може не просто да не съвпада с границата си в дадена точка, а може и да не бъде дефиниране в тази точка.

Теорема 15. *Определенията на Хайне и Коши за сходимост са еквивалентни.*

Доказателство. (Хайне $\implies$ Коши). Нека $f : D \to \mathbb{R}$ клони към A в точката a според определението на Хайне и нека $\varepsilon > 0$ е произволно.

С цел да получим противоречие, допускаме, че условието на Коши за сходимост не е изпълнено, т.е. за всяко $\delta > 0$ съществува $a_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$, такова че $f(a_\delta)$ е извън интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Построяваме редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където a_n избираме така, че $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ и $f(a_n) \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Построената редица очевидно клони към a и според определението на Хайне за сходимост на функция, само краен брой членове от редицата $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ са извън интервала $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Но това противоречи на избора на елементи на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Следователно е изпълнено определението на Коши за сходимост.

(Коши $\implies$ Хайне). Нека $f : D \to \mathbb{R}$ клони към A в точката a според определението на Коши.

Нека U е произволна околност на A и нека числото $\varepsilon > 0$ е такова, че интервалът $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, който също е околност на A, се съдържа в U. От определението на Коши за сходимост съществува число $\delta > 0$, за което за произволно $x \in \mathbb{R}$ неравенството $0 < |x - a| < \delta$ да влече $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Нека редицата $\{a_k\}$ клони към a и нека n е най-големият индекс, за който $|a - a_n| \geq \delta$, или $n = 0$, ако няма такива членове. Тогава подредицата $\{a_k\}_{k>n}$ също клони към a, а редицата $\{f(a_k)\}_{k>n}$ се съдържа изцяло в околността $(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \subseteq U$ на a.

Но това означава, че редицата $\{f(a_k)\}_{k>0}$ клони към A и следователно е изпълнено определението на Хайне за сходимост. □

Твърдение 16. *Нека a е точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Ако $f : D \to \mathbb{R}$ клони към A в точката a и $g : D \to \mathbb{R}$ клони към B в точката a, тогава*

1. *За произволна константа $c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x \to a} [c f(x)] = cA.$$

2. *Граничният преход е адитивен*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = A + B.$$

3. *Граничният преход е мултипликативен*

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

Доказателство. Следва директно от теорема 15 and твърдение 9. □

Определение 17 (Обобщена сходимост по Хайне)**.** Нека редицата $\{a_k\} \subseteq D$ клони към крайна или безкрайна граница a, т.е. a е точка на сгъстяване на D или $a = \pm\infty$, а редицата от функционални стойности $\{f(a_k)\}$ клони към крайна или безкрайна граница A, т.е. $A \in \mathbb{R}$ или $A = \pm\infty$. Казваме, че функцията $f(x)$ **клони** към A при x клонящо към a и пишем

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

1.5. Непрекъснатост

Определение 18 (Непрекъснатост по Хайне)**.** Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in D$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната** в точката a, ако за произволна редица $\{a_k\} \subseteq D$, клоняща към a, съответната редица $\{f(a_k)\}$ от функционални стойности клони към $f(a)$.

Определение 19 (Непрекъснатост по Коши)**.** Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in D$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната** в точката a, ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in \mathbb{R}$ при $0 < |x - a| < \delta$ да е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Забележка 20. От теорема 15 следва, че двете определения за непрекъснатост съвпадат и са еквивалентни на следната проста формула:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Определение 21. Казваме, че една $f(x)$ е **непрекъсната навсякъде** или **поточково непрекъсната**, ако $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционната си област.

1.6. Диференцируемост

Определение 22. Нека точката a принадлежи на D заедно със своя дясна околност, т.е. за някое число $\varepsilon > 0$ интервалът $[a, a + \varepsilon)$ лежи изцяло в D. **Производна** на функцията $f : D \to \mathbb{R}$ в точка $a \in D$ наричаме границата

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Частното $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ наричаме **диференчно частно**. За простота, ще изпускаме условието $h \neq 0$ от записа, но ще предполагаме, че е изпълнено.

Ако $f(x)$ има производна в точка a, казваме, че тя е **диференцируема** в тази точка.

Ако $D \subseteq \mathbb{R}$ е отворено множество и функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е диференцируема в цялата си дефиниционна област, казваме, че тя е диференцируема, без да правим допълнително пояснения. В такъв случай производните се разглеждат като функция на $x \in D$. Ако производната $f'(x)$ съществува в околност на a и е непрекъсната в a, казваме, че $f(x)$ е непрекъснато диференцируема.

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в a, **диференциал** $df(a)$ на $f(x)$ в точката a наричаме линейната функция $h \mapsto f'(a) \cdot h$.

Диференциалът на променливата x, разгледана като идентитет, е също идентитет, тъй като диференчното частно $\frac{(x+h)-x}{h}$ на идентитета е константата 1. Понеже диференциалът $dx(a)$ не зависи от точката a, ще пишем просто dx.

Това ни дава основание да въведем **означенията на Лайбниц** за производни като частно на диференциалите

$$\frac{df(a)}{dx} = \frac{f'(a) \cdot h}{h} = f'(a).$$

Забележка 23. Ако множеството D не е отворено, за функцията $f(x)$ с дефиниционна област D не възможно да се определят леви или десни производни в някои точки. Затова обикновено, когато говорим за диференцируемост, искаме функцията да бъде дефинирана в отворено множество.

Твърдение 24. *Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е отворено и функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $a \in D$. Тогава $f(x)$ е и непрекъсната в a.*

Доказателство. Производната $f'(a)$ е крайно число, следователно от твърдение 9 получаваме

$$\lim_{h\to0}[f(a+h) - f(a)] = \lim_{h\to0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to0} h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

□

Теорема 25 (Механична интерпретация на производна)**.** *Ако пътят, изминат от материална частица за време t, се описва чрез диференцируемата функция $f(t)$, тогава моментната скорост във времето t е равна на $f'(t)$.*

Доказателство. Нека $T > 0$ и нека функцията $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $t \in (0, T)$.

Изразявайки приблизително нарастването на пътя $f(t + h) - f(t) \approx hv(t)$ като нарастването на времето умножено по скоростта $v(t)$ на движение в момента t, получаваме

$$v(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \xrightarrow[h\to0]{} f'(t).$$

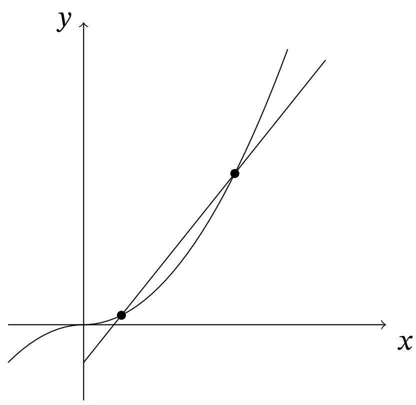
□

Теорема 26 (Геометрична интерпретация на производна). *Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $a \in D$. Разглеждаме графиката*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

на $f(x)$ като параметрична крива в равнината.
За някое достатъчно малко по абсолютна стойност число $h \in \mathbb{R}$ разглеждаме секущата d_h през точките с координати $(a, f(a))$ и $(a+h, f(a+h))$ (фигура 1). При намаляващо h, декартовите уравнения на тези секущи при се приближават към декартово уравнение на допирателна права d към Γ_f в точката a.
Твърдим, че декартовото уравнение на тази допирателна права е

$$d : y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Фигура 1: Секуща през две точки от графиката

Доказателство. Тъй като точките $(a, f(a))$ и $(a+h, f(a+h))$ лежат върху правата d_h, получаваме общото уравнение за d_h

$$d_h : \det\begin{pmatrix} (a+h)-x & (a+h)-a \\ f(a+h)-y & f(a+h)-f(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Оттук намираме декартовото уравнение на d_h:

$$\begin{aligned} & d_h : (f(a+h)-f(a))(a+h-x) - (f(a+h)-y)h = 0 \mid \cdot\frac{1}{h}, \\ \Longrightarrow\ & d_h : \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(a-x) + (f(a+h)-f(a)) - f(a+h) + y = 0, \\ \Longrightarrow\ & d_h : y = -\frac{f(a+h)-f(a)}{h}(a-x) + f(a), \\ \Longrightarrow\ & d_h : y = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a) + f(a). \end{aligned}$$

С граничен предох при $h \to 0$ получаваме уравнението от твърдението на теоремата. □

Теорема 27. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са едновременно диференцируеми в точка a, имаме*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f'(a)g(a)$

3. $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Доказателство.

1. От адитивността на граничния преход (твърдение 16) директно следва

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

2. Използваме мултипликативността на граничния преход от твърдение 16, за да получим

$$\begin{aligned}&(f \cdot g)'(a) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(a+h) - (f\cdot g)(a)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} f(a+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) + g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a) = \\ &= f(a)g'(a) - f'(a)g(a).\end{aligned}$$

3. Отново използваме свойствата от твърдение 16, за да получим

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{h\cdot g(a)\cdot g(a+h)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{h} = \\
&= \frac{1}{g(a)^2}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}\right) = \\
&= \frac{1}{g(a)^2}\left(g(a)\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a)\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) = \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}
$$

□

Теорема 28. *Ако функцията $g(x)$ е диференцируема в точка a и $f(x)$ е диференцируема в точка $g(a)$, имаме*

$$(f\circ g)'(a) = (f'\circ g)(a)\cdot g'(a).$$

Доказателство. Ще разгледаме два случая.

1. Ако $g'(a) = 0$, поради непрекъснатостта на $f(x)$ в точка $g(a)$ имаме

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = 0 = f'(g(a))\cdot 0 = f'(g(a))\cdot g'(a).$$

2. Ако $g'(a) \neq 0$, можем да считаме, че $g(a+h) - g(a) \neq 0$ за достатъчно малки по абсолютна стойност $h \in \mathbb{R}$. Тогава

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a) + \Delta_h) - f(g(a))}{\Delta_h} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\
&= f'(g(a))\cdot g'(a),
\end{aligned}
$$

където $\Delta_h := g(a+h) - g(a) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, тъй като $g(x)$ е непрекъсната в a.

$\square$

Забележка 29. Сега ще докажем добре познатите формули за производни за e^x, $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Доказателство силно зависи от начина, по който сме определили съответните функции. Например, ако ги определим чрез степенни редове, тъждествата ще последват директно от свойствата на степенните редове.

Не знам какъв е правилният подход за ДИ, затова съм направил предположението, че $\sin(x)$ и $\cos(x)$ удовлетворяват известните от училище тригонометрични тъждества, независимо от това как са определени самите функции.

За експоненциалната функция e^x ще използвам определението (1).

Теорема 30.

1. *Константните функции* $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ *са диференцируеми навсякъде в* $\mathbb{R}$ *и имат производни* 0.

2. *Степенните функции* $f(x) = x^n, n = 1, 2, \ldots$ *са диференцируеми навсякъде в* $\mathbb{R}$ *и имат производни* $f'(x) = nx^{n-1}$.

3. *Показателните функции* $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ *са диференцируеми навсякъде в* $\mathbb{R}$ *и имат производни* $f'(x) = \ln\alpha \cdot \alpha^x$.

4. *Функциите* $\sin(x)$ *и* $\cos(x)$ *са диференцируеми навсякъде в* $\mathbb{R}$ *и имат производни* $\sin'(x) = \cos(x)$ *и* $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Доказателство.

1. За $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ пресмятаме

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

2. За $f(x) = x^n, n = 1, 2, \ldots$ използваме биномната теорема, за да пресметнем

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} + n\cdot x^{n-1}\cdot h^1 + 1\cdot x^n \cdot h^0 - x^n\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} + nx^{n-1} = \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

3. За $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ пресмятаме

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha^{x+h} - \alpha^x}{h} = \alpha^x \lim_{h\to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = f'(0)\alpha^x.$$

Остава само да намерим производната на $f(x) = \alpha^x$ в нулата. За целта временно се ограничаваме до $\alpha = e$ и използваме определението

$$e^x := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Така получаваме

$$\begin{aligned}
f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k - 1\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{n\to\infty}\left(1 + h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k - 1\right) = \\
&= 1 + \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\frac{h^{k-1}}{n^k} = 1.
\end{aligned}$$

Следователно производната на e^x е e^x и по теорема 28 за $f(x) = \alpha^x = e^{\ln\alpha\cdot x}$ имаме

$$f'(x) = e^{\ln\alpha\cdot x} \cdot \ln\alpha \cdot 1 = \ln\alpha \cdot \alpha^x.$$

4. Преди да пресметнем производните на $\sin(x)$ и $\cos(x)$, нека се убедим в два факта:

   a) $\sin(x)$ и $\cos(x)$ са непрекъснати функции в $\mathbb{R}$. Наистина, нека фиксираме $\varepsilon > 0$. С цел да определим какво δ ни е необходимо, нека фиксираме произволно $\delta > 0$. Тогава за произволно $x_0 \in \mathbb{R}$ имаме

$$\begin{aligned}
|\sin(x_0 + \delta) - \sin(x_0)| &= |\sin(x_0 + \delta) + \sin(-x_0)| = \\
&= 2\left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\right| \leq \\
&\leq 2\left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right| \leq \\
&= 2\left|\frac{\delta}{2}\right| = \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ е достатъчно да изберем $\delta < \varepsilon$, за да бъде изпълнено

$$|\sin(y) - \sin(x_0)| < \varepsilon \text{ при } |y - x_0| < \delta.$$

Показахме, че $\sin(x)$ е непрекъсната функция в точката x_0, а понеже x_0 беше произволна, то $\sin(x)$ е непрекъсната навсякъде. Като следствие, $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ също е непрекъсната навсякъде.

б) $\sin'(0)$ съществува и е равна на единица. Наистина, за $h \in (0, \pi/2]$ имаме

$$\begin{aligned}
&\tan(h) \geq h \geq \sin(h), \\
&\frac{\cos(h)}{\sin(h)} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{\sin(h)}, \quad | \cdot \sin(h) \\
&\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1,
\end{aligned}$$

откъдето следва

$$1 = \lim_{h\to 0} \cos(h) \leq \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \leq \sin'(0) \leq 1.$$

За произволно $\sin(x)$ пресмятаме

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(-x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)\cos(x+h/2)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \\
&= \cos(x) \cdot 1.
\end{aligned}$$

Тогава за $\cos(x)$ получаваме

$$\cos'(x) = \sin'(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1) = -\sin(x).$$

□

За константите важи и по-слаб вариант на обратното твърдение:

Твърдение 31. *Нека $a < b \in \mathbb{R}$, функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема в (a, b) и непрекъсната в $[a, b]$ и производната ѝ е тъждествено нула в (a, b). Тогава $f(x)$ е константа.*

Забележка 32. Доказателството на този факт използва теоремата за крайните нараствания, която е извън рамките на тази тема.

Теорема 33 (Теорема за обратната функция)**.** *Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е произволно множество и функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема в точка $a \in D$, при това $f'(a) \neq 0$. Тогава $f(x)$ е обратима в околност на a и обратната функция $f^{-1}(x)$ е непрекъснато диференцируема в точката $f(a)$ с производна $\frac{1}{f'(a)}$.*

Доказателство. Доказателството не е тривиално и няма да го даваме. □

Забележка 34. Да забележим, че в околността, в която функцията е обратима, имаме

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \mid \frac{d}{dx} \\ {f^{-1}}'(f(x)) \cdot f'(x) &= 1 \\ {f^{-1}}'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

На практика е удобно да използваме означението на Лайбниц:

$$\frac{dx}{df} = \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}.$$

Естествено, тази формула важи само в околността, в която функцията е обратима.

Теорема 35.

1. *Производната на* $\ln(x)$ *при* $x > 0$ *е* $\frac{1}{x}$.
2. *Производната на* $\arcsin(x)$ *при* $x \in [-1, 1]$ *е* $\frac{1}{\cos(x)}$.

Доказателство. Ще използваме забележка 34.

1. Функцията $\ln(x)$ е обратна на e^x за всички стойности на e^x, следователно

$$\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

   Тогава за $x > 0$ имаме

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. Функцията $\arcsin(x)$ е обратна на $\sin(x)$, когато $x \in [0, 2\pi]$, следователно

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)^2}}.$$

   Тогава за $x \in \sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$ имаме

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

1.7. Примитивни функции

Определение 36. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е отворено и $f : D \to \mathbb{R}$ е някаква функция. Казваме, че **функцията** $F : D \to \mathbb{R}$ **е примитивна за** $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема и производната ѝ съвпада с $f(x)$.

Теорема 37. *Нека $a < b \in \mathbb{R}$, функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема в (a, b) и непрекъсната в $[a, b]$ и функциите $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ са примитивни функции на $f(x)$ в (a, b). Тогава съществува константа $c \in \mathbb{R}$, такава че*

$$F(x) = c + G(x).$$

Доказателство. Ако $F(x)$ и $G(x)$ са едновременно диференцируеми в точката $a \in D$, за тяхната разлика имаме

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Според твърдение 31, функцията $F(x) - G(x)$ е константа. Полагаме $c := F(x) - G(x)$, с което доказваме теоремата. □

2. Литература

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX (дата на посещ. 24.03.2019).